Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.1

Изучение физического маятника

Подготовил
Лукин Иван
Б03-204

17 ноября 2022 г.

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.
Оборудование: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счетчик числа колебаний, линейка, секундомер.

1 Теоретическая часть

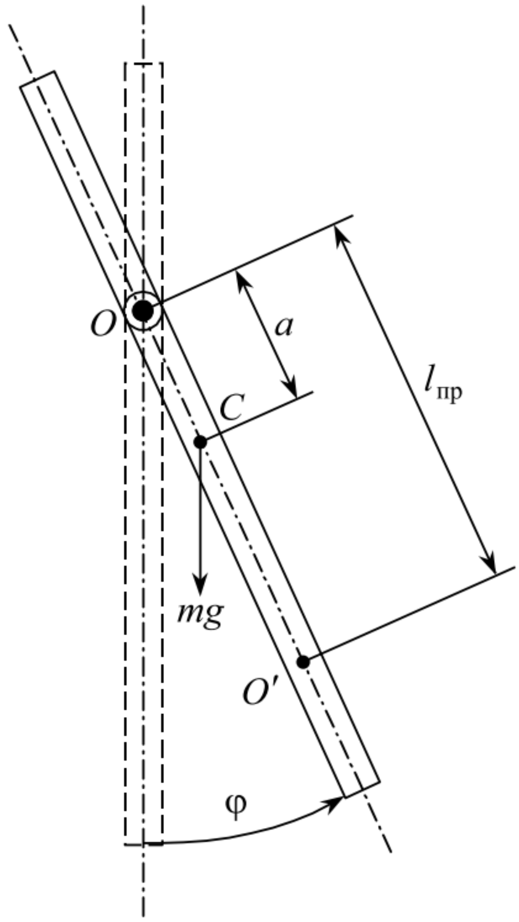

Рис. 1: Физический маятник

Физический маятник — любое твёрдое тело, которое, находясь под действием силы тяжести, может свободно качаться вокруг неподвижной оси. Движение маятника можно описать следующим уравнением:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I — момент инерции маятника, φ — угол отклонения маятника от положения равновесия, M — момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной l; на нём закреплена опорная призма, которую можно перемещать вдоль стержня, меняя расстояние OC от точки опоры маятника O до его центра масс C. Если принять длину отрезка OC за a, то можно найти момент инерции маятника I по теореме Гюйгенца-Штейнера:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где m - масса маятника. При малых углах отклонения φ момент силы тяжести, действующий на маятник, можно найти по следующей формуле:

$$M = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi$$

Мы не будем учитывать момент силы трения, так как он пренебрежимо мал: в исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Подставляя полученные формулы для I и M в формулу (1), получим следующее выражение:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{2}$$

где

$$\omega^2 = \frac{ag}{a^2 + \frac{l^2}{12}}. \tag{3}$$

Из (3) по известной формуле периода колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ следует, что

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{4}$$

Видно, что период малых колебаний (при достаточно малом угле φ) не зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний, так как, согласно формуле (3), ω зависит лишь от g, l и a.

Проведя аналогию с математическим маятником, из формулы $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g}}$ получим следующую величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}, \tag{5}$$

которую называют приведённой длиной физического маятника. Поэтому точку O', отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

2 Практическая часть

Определение диапазона амплитуд, при котором период колебаний не зависит от амплитуды

Проведём измерения времени t 100 колебаний N физического маятника при разных углах отклонения φ для того, чтобы определить диапазанон амплитуд, в котором период колебаний не зависит от угла отклонения стержня φ от положения равновесия. Результаты измерений занесем в таблицу 1.

φ,°	t, с	N	T, с	$T_{\text{ср}}$, с
10	154,37	100	1,5437	
10	154,06	100	1,5406	1,54203
10	154,18	100	1,5418	
5	153,91	100	1,5391	
5	153,97	100	1,5397	1,53970
5	154,03	100	1,5403	

Таблица 1: Результаты определения диапазона амплитуд

Определим погрешность измерений с учётом того, что погрешность измерения секундомером равна $\sigma_{\text{с}} = 0,2\text{с}$.

$$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(T_{\text{ср}} - T_i)^2},$$

$$\sigma_{\text{сист}} = \sigma_{\text{с}},$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{с}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2}.$$

По результатам вычислений мы определили для $\varphi = 10°$ и $\varphi = 5°$ $T_1 = 1.5 \pm 0.1$ с и $T_2 = 1.5 \pm 0.1$ с, T_1 и T_2 совпадают в пределах погрешности. Значит, дальнейшие эксперименты можно проводить при $\varphi \leq 10^\circ$.

Вычисление ускорения свободного падения и длины стержня

Перемещая опорную призму вдоль стержня, будем исследовать зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс. Сделав 10 измерений при $N = 100$, занесём результаты в таблицу 2.

a, см	t, с	T, с
37	153,81	1,5381
34	152,53	1,5253
30	151,56	1,5156
25	152,19	1,5219
20	156,57	1,5657
15	167,94	1,6794
13	175,19	1,7519
18	160,13	1,6013
23	153,47	1,5347
28	151,53	1,5153

Таблица 2: Зависимость периода колебаний от расстояния между точкой опоры и центра масс

Из формулы (4) можно вывести линейную зависимость T^2a от a^2:

$$T^2a = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \tag{6}$$

По таблице 3 построим график функции T^2a от a^2. При помощи МНК найдём коэффициенты

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \tag{7}$$

a^2, см^2	T^2a, с$^2 \cdot$ см
1369	87,53281
1156	79,10236
900	68,91130
625	57,90449
400	49,02832
225	42,30576
169	39,89899
324	46,15491
529	54,17199
784	64,29175

Таблица 3: Данные для графика

Необходимые формулы:
Собственно коэффициенты

$$k = \frac{\langle a^2 \cdot T^2 a\rangle - \langle a^2\rangle\langle T^2 a\rangle}{\langle a^4\rangle - \langle a^2\rangle^2},$$

$$b = \langle T^2 a\rangle - k\langle a^2\rangle.$$

Их случайные погрешности по МНК:

$$\sigma_k^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N}\left(\frac{\langle (T^2a)^2\rangle - \langle T^2 a\rangle^2}{\langle a^4\rangle - \langle a^2\rangle^2} - k^2\right)},$$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}}\sqrt{\langle a^4\rangle - \langle a^2\rangle^2}.$$

Систематические погрешности зависят от приборов, которыми мы пользовались для измерения величин:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k\sqrt{\left(\frac{\Delta_a}{2a_{\text{макс}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{T^2a}}{2T^2a_{\text{макс}}}\right)^2},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{\left(\frac{\Delta_a}{2a_{\text{макс}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{T^2a}}{2T^2a_{\text{макс}}}\right)^2},$$

где

$$\Delta_a = 2\Delta_l = 0,2 \text{ см},$$

$$\Delta_{T^2 a} = 2\Delta_l \Delta_T = 0,04 \text{ см}.$$

Полные погрешности коэффициентов:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{случ}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2}$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2}.$$

В итоге $k = 0,0396 \pm 0,0001 \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}}$ и $b = 33,244 \pm 0,024$ см $\cdot$ с^2. Выразим из формул (7) g и l:

$$g = \frac{4\pi^2}{k},$$

$$l = \sqrt{\frac{3bg}{\pi^2}}.$$

Их погрешности:

$$\sigma_g = g\frac{\sigma_k}{k}$$

$$\sigma_l = l\sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2}$$

Получим $\underline{g = 9,96 \pm 0,03 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}$ и $\underline{l = 100,4 \pm 0,3 \text{ см}}$.

Проверка совпадения периода колебания физического маятника с математическим

Подберём длину математического маятника для $a = 20$ см так, чтобы периоды физического маятника и математического совпали. Остановимся на $l_{\text{м}} = 62$. Результаты измерения периодов для колебания на этих длинах занесём в таблицу 2. Периоды из таблицы 2

Маятник	T, с
Физический	1,5657
Математический	1,5749

Таблица 4: Периоды колебаний для физического и математического маятников

отличаются на $\varepsilon = \dfrac{T_{\text{м}} - T_{\text{ф}}}{T_{\text{ф}}} \cdot 100\% \approx 0,58\%$, что попадает в

$$\varepsilon_{T_{\text{ф}}} = \frac{\Delta_T}{T_{\text{ф}}} \cdot 100\% \approx 12,70\%.$$

Периоды математического и физического маятников совпали в пределах ε, теперь можно сравнить $l_{\text{пр}}$, которую можно получить по формуле (5), и $l_{\text{м}}$, полученную экспериментально. В результате расчётов по формуле (5), используя $l_{\text{лин}} = 100,1$ см, величину, измеренную линейкой, получим $l_{\text{пр}} \approx 61,75$ см $\approx l_{\text{м}}$. Формула (5) справедлива.

Проверка обратимости точки подвеса и центра качания

Найдём расстояние от центра масс до центра качания a_1 по следующей формуле, взяв $a = 20$ см:

$$a_1 = l_{\text{пр}} - a = \frac{l^2}{12a} \approx 41,75 \text{ см}$$

В результате период колебаний $T_1 = 1,5629$ см $\approx T_2 = 1,5657$ см, где T_2 взяли из таблицы 2. Периоды совпали, следовательно, точка подвеса и центр качания обратимы.

3 Выводы

Полученная величина $g = 9,96 \pm 0,03\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ не совпала с теоретической, которая равна $9,8154\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ для московской широты, в пределах погрешности, однако довольно близка к ней. Длина $l = 100,4 \pm 0,3$ см совпала с измеренной $l_{\text{лин}} = 100,1 \pm 0,1$ см в пределах погрешности. Формула (5) справедлива так же, как и утверждение об обратимости точки подвеса и центра качания.