Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 5

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

4 de junio de 2017

Ejercicio. *Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias i.i.d. con distribución F y sea*

$$\hat{F}_n(x) = \# \{m \leq n : X_m \leq x\}$$

El objetivo de este ejercicio es probar que

$$D_n(x) = \sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$$

converge en distribución al puente browniano.

a. *Observar que, por la Ley de los Grandes Números, $\left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| \to 0$ para todo $0 < x < 1$.*

b. *Utilizando la transformación $Y_k = F(X_k)$ mostrar que basta considerar el caso en que F es la distribución uniforme en $(0, 1)$.*

c. *Sean $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. $\mathcal{U}(0, 1)$ y $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots$ la muestra ordenada. Sean $W_1, W_2, \dots$ i.i.d. $\mathcal{E}(1)$ y $Z_n = W_1 + \cdots + W_n$. Probar que $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ y $(Z_1/Z_{n+1}, \dots, Z_n/Z_{n+1})$ tienen la misma distribución. Sugerencia: hallar la densidad de $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ y de $r(Z_1, \dots, Z_{n+1})$, donde*

$$r(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1/z_{n+1}, \dots, z_n/z_{n+1}, z_{n+1})$$

d. *Sea $\tilde{D}_{k,n} = \sqrt{n}(Z_k/Z_{n+1} - k/n)$ y extender al $[0, 1]$ interpolando linealmente. Probar que*

$$\left\|\tilde{D}_n - D_n\right\|_\infty \to 0$$

en probabilidad cuando $n \to \infty$.

e. *Sea $S_n = S_n(W_1 - 1, \dots, W_n - 1)$ y S_n^* definidos como en la clase. Mostrar que*

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}} \left(S_n^*(x) - x \left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \right] \right)$$

f. *Probar que $Z_{n+1}/n \to 1$ y $(Z_{n+1} - Z_n)/\sqrt{n} \to 0$ en probabilidad.*

g. *Asumir (o probar) que el Teorema de Slutsky vale también para sucesiones de variables aleatorias a valores en espacios métricos.*

h. *Probar que los procesos $(D_n(x), 0 \leq x \leq 1)_{n \geq 1}$ convergen al proceso $(W(t), 0 \leq t \leq 1)$ dado por $W(t) = B(t) - tB(1)$, denominado puente browniano (B es un movimiento browniano).*

Resolución.

d)

□