Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 2

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

24 de abril de 2017

Ejercicio. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *una martingala. Considerar* $\mathcal{U}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$*. Probar que* $(X_n, \mathcal{U}_n)$ *es una martingala.*

Resolución. Veamos que $(X_n, \mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ satisface las tres propiedades que debe poseer para ser una martingala.

- X_n debe ser $\mathcal{U}_n$-medible

  Por definición de $\mathcal{U}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ se tiene que $\mathcal{U}_n$ es la menor σ-álgebra para la que $X_1, \ldots, X_n$ son medibles. En particular, X_n es $\mathcal{U}_n$-medible.

- $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$

  Esto sigue inmediatamente por ser $(X_n, \mathcal{F}_n)$ una martingala.

- $\mathrm{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{U}_n] = X_n$

  En primer lugar, observemos que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{F}_n$. Sabemos que $X_1, \ldots, X_n$ son $\mathcal{F}_n$-medibles por ser cada X_i, $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{F}_i$-medible y ser $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ una filtración (i.e., $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_n$). Además, como ya se dijo, $\mathcal{U}_n$ es la menor σ-álgebra para la que $X_1, \ldots, X_n$ son medibles, de manera que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, que es lo que se pretendía observar. Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{U}_n] &\overset{\text{(Prop. de torres)}}{=} \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \,|\, \mathcal{U}_n] \\
&\overset{((X_n,\mathcal{F}_n)\text{ martingala})}{=} \mathrm{E}[X_n \,|\, \mathcal{U}_n] \\
&\overset{(X_n\ \mathcal{U}_n-\text{medible})}{=} X_n
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ *una martingala e* $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ *un proceso tal que* $|Y_n| \leq C_n$ *e* Y_n *es* $\mathcal{F}_{n-1}$*-medible. Sea* $X_0 = 0$ *y consideremos*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k (X_k - X_{k-1})$$

Probar que $(M_n, \mathcal{F}_n)$ *es una martingala.*

Resolución. Al igual que en el ejercicio anterior, probaremos que $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ satisface las tres propiedades de la definición:

- M_n es $\mathcal{F}_n$-medible

  Sea $1 \leq k \leq n$. Por ser $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ una filtración, se tiene que $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$. Tenemos también por hipótesis que Y_k es $\mathcal{F}_{k-1}$-medible, de manera que Y_k es $\mathcal{F}_n$-medible. Además, X_k es $\mathcal{F}_k$-medible por ser $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ una martingala, por lo que $X_k - X_{k-1}$ es también $\mathcal{F}_n$-medible. Combinando todo esto, se tiene que $Y_k\,(X_k - X_{k-1})$ es $\mathcal{F}_n$-medible y en consecuencia M_n también lo es.

- $\mathrm{E}\left[|M_n|\right] < \infty$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[|M_n|\right] &= \mathrm{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\,(X_k - X_{k-1})\right|\right] \\
&\leq \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} |Y_k\,(X_k - X_{k-1})|\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} |Y_k|\;|X_k - X_{k-1}|\right] \\
&\overset{\text{(Hip.)}}{\leq} \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} C_k\;|X_k - X_{k-1}|\right] \\
&\leq \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} C\;|X_k - X_{k-1}|\right] \\
&= C\cdot\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|\right] \\
&= C\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\left[|X_k - X_{k-1}|\right] \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

  Esto último se justifica por ser $C \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{E}\left[|X_k - X_{k-1}|\right] < \infty$ debido a que $\mathrm{E}\left[|X_n|\right] < \infty$ para todo $n \geq 1$.

- $\mathrm{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k\,(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_{n+1}\,(X_{n+1} - X_n) + \sum_{k=1}^{n} Y_k\,(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&\overset{(\text{Linealidad de } E[\cdot|\cdot])}{=} \mathrm{E}\left[Y_{n+1}\,(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\,(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_{n+1}\,(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathrm{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&\overset{(M_n\ \mathcal{F}_n-\text{medible})}{=} \mathrm{E}\left[Y_{n+1}\,(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n\right] + M_n \\
&\overset{(Y_{n+1}\ \mathcal{F}_n-\text{medible})}{=} Y_{n+1}\,\mathrm{E}\left[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n\right] + M_n \\
&\overset{(\text{Linealidad de } E[\cdot|\cdot])}{=} Y_{n+1}\,\left[\mathrm{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathrm{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_n\right]\right] + M_n \\
&\overset{((X_n,\mathcal{F}_n)\text{ martingala})}{=} Y_{n+1}\,\left[X_n - \mathrm{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_n\right]\right] + M_n \\
&\overset{(X_n\ \mathcal{F}_n-\text{medible})}{=} Y_{n+1}\,\left[X_n - X_n\right] + M_n \\
&= M_n
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio. *Sea $B = (B(t), t \geq 0)$ un movimiento browniano unidimensional. Probar que es una martingala.*

Resolución. Dado $t \geq 0$, sea $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B(s), s \leq t\right)$ ($(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es, pues, la filtración natural de B). Veremos entonces que B es una $\mathcal{F}_t$-martingala probando que satisface las tres propiedades enunciadas en la definición:

- $B(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible

  Esto es trivialmente cierto siendo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtración natural de B.

- $\mathrm{E}\left[|B(t)|\right] < \infty$

  Sea $B(0) = x \in \mathbb{R}$. Siendo $(B(t) - B(0)) \sim N(0, t)$ tenemos que

  $$B(t) = (B(t) - B(0)) + x \sim N(x, t)$$

  Luego, $|B(t)|$ tiene una distribución normal doblada, de manera que $\mathrm{E}\left[|B(t)|\right] < \infty$ por ser $\mathrm{E}\left[B(t)\right] = x < \infty$.

- $\mathrm{E}\left[B(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = B(s)$, con $0 < s < t$

  Dado $0 < s < t$,

  $$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[B(t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathrm{E}\left[B(t) - B(s) + B(s) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &\overset{(\text{Linealidad de } E[\cdot|\cdot])}{=} \mathrm{E}\left[B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathrm{E}\left[B(s) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &\overset{(B(s)\ \mathcal{F}_s-\text{medible})}{=} \mathrm{E}\left[B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_s\right] + B(s) \\ &\overset{(\star)}{=} \mathrm{E}\left[B(t) - B(s)\right] + B(s) \\ &\overset{(B(t)-B(s)\sim N(0,t-s))}{=} 0 + B(s) \\ &= B(s) \end{aligned}$$

  en donde $(\star)$ vale por independencia de la variable aleatoria $(B(t) - B(s))$ y la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$, que a su vez se desprende de la independencia entre $B(t) - B(s)$ y $B(r)$, $0 \leq r \leq s$ (esto último como consecuencia de la propiedad de incrementos independientes de B).

$\square$