Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 4

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

21 de mayo de 2017

Ejercicio. *Sea* $d = 2$, $0 < r < |x| < R$, $\tau = S_r \wedge S_R$ *y* $\phi(x) = \log(|x|)$, *en donde*

$$S_z = \text{ínf}\{t > 0 : |B(t)| = z\}$$

a. Probar que $\phi(x) = E_x[\phi(B(\tau))]$.

b. Probar que

$$\mathbb{P}_x(S_r < S_R) = \frac{\phi(R) - \phi(|x|)}{\phi(R) - \phi(r)}$$

c. Probar que $\mathbb{P}(S_r < \infty) = 1$. *Concluir que el movimiento browniano bidimensional es recurrente en el sentido de que, para todo* $G \subset \mathbb{R}^2$ *abierto,*

$$\mathbb{P}_x(B \in G \text{ infinitas veces}) = 1$$

d. Definir el evento involucrado en la probabilidad de arriba.

e. Probar que, para todo $x \neq 0$, $\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0$.

f. Probar que el resultado anterior también vale para $x = 0$.

Resolución.

a. TBD

b. Para probar esto, desarrollemos $\mathrm{E}_x[\phi(B(\tau))]$ utilizando la ley de la esperanza total:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_x[\phi(B(\tau))] &= \mathrm{E}_x[\phi(B(\tau)), S_r < S_R] + \mathrm{E}_x[\phi(B(\tau)), S_r \geq S_R] \\
&= \mathrm{E}_x[\phi(B(\tau)) \mid S_r < S_R]\, \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \mathrm{E}_x[\phi(B(\tau)) \mid S_r \geq S_R]\, \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\
&= \mathrm{E}_x[\phi(B(S_r))]\, \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \mathrm{E}_x[\phi(B(S_R))]\, \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\
&= \phi(B(S_r))\, \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \phi(B(S_R))\, \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\
&= \log(|B(S_r)|)\, \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \log(|B(S_R)|)\, \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\
&= \log(r)\, \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \log(R)\, \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\
&= \log(r)\, \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \log(R)\,(1 - \mathbb{P}_x(S_r < S_R)) \\
&= \mathbb{P}_x(S_r < S_R)\,(\log(r) - \log(R)) + \log(R) \\
&= \mathbb{P}_x(S_r < S_R)\,(\phi(r) - \phi(R)) + \phi(R) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, el ítem anterior nos asegura que $\mathrm{E}_x[\phi(B(\tau))] = (1) = \phi(x)$, por lo que

$$\mathbb{P}_x(S_r < S_R) = \frac{\phi(x) - \phi(R)}{\phi(r) - \phi(R)} = \frac{\phi(R) - \phi(x)}{\phi(R) - \phi(r)}$$

□