Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 1

Lucio Santi

lsanti@dc.uba.ar

11 de abril de 2017

Ejercicio. *Este ejercicio es para caracterizar la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en $C([0,T],\mathbb{R})$.*

a) Sea (E,d) un espacio métrico separable y completo (polaco). Probar que todo abierto $U \subset E$ se puede escribir como unión numerable de bolas abiertas.

b) Sea (E,d) un espacio métrico polaco. Probar que existen numerables bolas $B_1, \dots, B_n, \dots$ tal que la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ verifica

$$\mathcal{B}(E) = \sigma\left(\{B_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

c) Para $\omega \in C([0,T],\mathbb{R})$ definimos $\pi_t(\omega) = \omega(t)$. Probar que $\pi_t : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua.

En $(C([0,T],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ definimos la σ-álgebra de Kolmogorov,

$$\mathcal{K} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(B) : t \in [0,T], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}\right)$$

d) Probar que las bolas abiertas están en $\mathcal{K}$.

e) Probar que $\mathcal{K} = \mathcal{B}$.

Resolución.

a) Sea $U \subset E$ un conjunto abierto no vacío. Por ser (E,d) un espacio métrico separable, sabemos que existe $S \subset E$ numerable y denso, i.e., $S = \{s_1, \dots, s_n, \dots\}$ es tal que $U \cap S = V \neq \emptyset$. Podemos entonces escribir $U = V \uplus W$, donde W es tal que no posee ningún subconjunto abierto (de lo contrario, un tal subconjunto X satisfaría $X \cap S \neq \emptyset$, de manera que $X \subset V$). Por ser U abierto, para cada $v = s_i \in V$, se tiene que existe $\epsilon_i > 0$ tal que $B_{\epsilon_i}(s_i) \subset U$. Sea $\epsilon = \inf\{\epsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $w \in W$, tenemos como antes que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(w) \subset U$, de manera que debe existir por lo menos un $s_j \in V$ en $B_\delta(w)$. De no ser así, $B_\delta(w) \subset W$, pero ya argumentamos que W no puede tener subconjuntos abiertos. Sea $\beta = \min(\delta, \epsilon)$[1]. Luego, por este mismo razonamiento, $s_j \in B_\beta(w)$ para cierto $j \in \mathbb{N}$, y $d(s_j, w) = d(w, s_j) < \beta \leq \epsilon \leq \epsilon_j \Rightarrow w \in B_{\epsilon_j}(s_j)$. Esto sugiere tomar en consideración las bolas

$$B_n = \{x \in E : d(s_n, x) < \epsilon_n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por todo lo anterior, se observa que $U = \bigcup B_n$[2].

b) TBD

[1] Si $\epsilon = 0$ hay que cambiar la estrategia.

[2] Se ve claramente que mi argumento no utiliza la hipótesis de que (E,d) es completo. ¿Es realmente necesaria?

c) Sea $\omega_0 \in C([0,T],\mathbb{R})$, $\epsilon > 0$ y definamos $\delta = \epsilon/2$. Supongamos que, para cierta $\omega \in C([0,T],\mathbb{R})$, $\|\omega - \omega_0\|_\infty < \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\pi_t(\omega) - \pi_t(\omega_0)| &= |\omega(t) - \omega_0(t)| \\ &\leq \sup\{|\omega(s) - \omega_0(s)| : s \in [0,T]\} \\ &= \|\omega - \omega_0\|_\infty \\ &< \delta \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

De esto sigue que π_t es continua en cualquier ω_0 y, por lo tanto, continua en todo su dominio.

d) Sea $\omega \in C([0,T],\mathbb{R})$ y $B_\epsilon(\omega)$ una bola abierta. Consideremos, para $0 \leq t \leq T$,

$$S_{t,\epsilon}(\omega) = \{\omega_0(t) : \omega_0 \in B_\epsilon(\omega)\}$$

y veamos primero que $S_{t,\epsilon}(\omega)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Sea entonces $x \in S_{t,\epsilon}(\omega)$. Esto implica que $x = \omega_1(t)$ para cierta $\omega_1 \in B_\epsilon(\omega)$. Sea $\delta = \epsilon - \|\omega - \omega_1\|_\infty > 0$. Vamos a ver que $B_\delta(x) \subset S_{t,\epsilon}(\omega)$. Para ello, tomemos $y \in B_\delta(x)$ y consideremos la siguiente $\omega_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$:

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) + (y - x)$$

- En primer lugar, tenemos que $\omega_2(t) = \omega_1(t) + (y-x) = \omega_1(t) + (y - \omega_1(t)) = y$.
- Además, $\|\omega_1 - \omega_2\|_\infty = |x - y| < \delta = \epsilon - \|\omega - \omega_1\|_\infty$.
- Finalmente, $\|\omega - \omega_2\|_\infty \leq \|\omega - \omega_1\|_\infty + \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty < \epsilon$.

De todo esto sigue que $\omega_2 \in B_\epsilon(\omega)$ y que $y \in S_{t,\epsilon}(\omega)$, lo cual demuestra lo que deseábamos. Sigue luego que $S_{t,\epsilon}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, de manera que $B_\epsilon(\omega) \subseteq \pi_t^{-1}(S_{t,\epsilon}(\omega)) \in \mathcal{K}$. Sea

$$D = \{d \in \mathbb{Q}, 0 \leq d \leq T\}$$

Por lo visto anteriormente, $S_{d,\epsilon}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para cada $d \in D$ y por ende $\pi_d^{-1}(S_{d,\epsilon}(\omega)) \in \mathcal{K}$. Luego, al ser D numerable, se tiene que

$$B_\epsilon(\omega) \subseteq \bigcap_{d \in D} \pi_d^{-1}(S_{d,\epsilon}(\omega)) = W \in \mathcal{K}$$

Más aun, por construcción de D y continuidad de las funciones en consideración, toda $\tilde{\omega} \in W$ debe coincidir en $[0,T]$ con alguna $\tilde{\omega}' \in B_\epsilon(\omega)$, por lo que $B_\epsilon(\omega) = W \in \mathcal{K}$.

e)
- Veamos primero que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$. Al ser $(C([0,T],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ un espacio métrico separable[3], por el ítem (b) sabemos que existen numerables bolas abiertas $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

  $$\mathcal{B} = \sigma(\{B_n : n \in \mathbb{N}\})$$

  Ahora bien, valiéndonos del ítem anterior, tenemos que cada $B_n \in \mathcal{K}$. De esto sigue que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$.
- Ahora resta probar que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$. Sea B un abierto en $\mathbb{R}$. Vamos a ver que $U_t = \pi_t^{-1}(B)$, $t \in [0,T]$, es abierto en $C([0,T],\mathbb{R})$, con lo que $U_t \in \mathcal{B}$. Sea $x \in B$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset B$. Sea además $\omega_0 \in C([0,T],\mathbb{R})$ tal que $\omega_0(t) = x \Rightarrow \omega_0 \in U_t$. Ahora consideremos una $\omega_1 \in B_\epsilon(\omega_0)$ arbitraria. Luego,

  $$|\omega_0(t) - \omega_1(t)| = |x - \omega_1(t)| \leq \|\omega_0 - \omega_1\|_\infty < \epsilon$$

  En consecuencia, se tiene que $\omega_1(t) \in B_\epsilon(x) \subset B$, por lo que $\omega_1 \in U_t$.
  Para completar la prueba de $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$, podría razonarse por inducción transfinita en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ argumentando lo siguiente:

[3] Referencia acá

- Dado B una unión numerable de conjuntos $\{\tilde{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tales que $\pi_t^{-1}(\tilde{B}_n) \in \mathcal{B}$ para todo n, se tiene que $B \in \mathcal{B}$, y
- Dado B un complemento de cierto $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\pi_t^{-1}(\tilde{B}) \in \mathcal{B}$, se tiene que $B \in \mathcal{B}$.

□

Ejercicio. *(1.6 - Mörters y Peres). Sea $\{B(t) : t \geq 0\}$ un movimiento browniano standard. Probar que, casi seguramente,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$$

Resolución. Sea $X_i = B(t-i+1) - B(t-i)$, $1 \leq i \leq \lfloor t \rfloor$. Por ser B un movimiento browniano, se tiene que $X_1, \ldots, X_{\lfloor t \rfloor}$ son variables aleatorias iid con $X_i \sim N(0, (t-i+1)-(t-i)) = N(0,1)$. Luego, valiéndonos de la Ley de los Grandes Números,

$$\frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathrm{E}[X_i] = 0$$

cuando $t \to \infty$. A partir de la definición de X_i, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} B(t-i+1) - B(t-i) \\
&= \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \left(B(t) - B(r)\right) \\
&= \frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} - \frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \\
&\xrightarrow{\text{c.s.}} 0
\end{aligned}$$

con $r = t - \lfloor t \rfloor$. Pero $0 \leq r < 1$ para todo t, con lo cual $\frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De esto se desprende que necesariamente $\frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. A su vez, esto implica que $\left|\frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor}\right| = \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego,

$$0 \leq \frac{|B(t)|}{t} \leq \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Se ve entonces que $\left|\frac{B(t)}{t}\right| = \frac{|B(t)|}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de lo que se puede concluir que $\frac{B(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, que es lo que se prentedía demostrar[4].

□

[4]Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.