1. Sea $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio en (x,t) tal que $\partial_t u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} u = 0$. Probar
2. Sea $u(x,t) = x^4 - 6x^2 t + 3t^2$. Probar que $u(B(t),t)$ es una martingala y usarlo para calcular $\mathbb{E}(T^2_{-b,b})$.
3. Chequear que en la demostración del Teorema de inmersión de Skorokhod la cuenta sigue valiendo cuando $\varphi(0) \neq 0$.
4. Sea B un Movimiento Browniano d–dimensional y $S_R = \inf\{t > 0 : |B(t)| = R\}$. Probar que
$$\mathbb{E}_x(S_R) = \frac{R^2 - |x|^2}{d}.$$
5. Sea $d = 2$, $0 < r < |x| < R$, $\tau = S_r \wedge S_R$ y $\varphi(x) = \log(|x|)$.
   a) Probar que $\varphi(x) = \mathbb{E}_x(\varphi(B(\tau)))$.
   b) Probar que
   $$\mathbb{P}_x(S_r < S_R) = \frac{\varphi(R) - \varphi(|x|)}{\varphi(R) - \varphi(r)}.$$
   c) Probar que $\mathbb{P}(S_r < \infty) = 1$. Concluir que el Movimiento Browniano bidimensional es *recurrente* en el sentido de que para todo $G \subset \mathbb{R}^2$ abierto
   $$\mathbb{P}_x(B \in G \text{ infinitas veces}) = 1$$
   d) Definir el evento involucrado en la probabilidad de arriba.
   e) Probar que para todo $x \neq 0$
   $$\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0.$$
   f) Probar que el resultado anterior también vale para $x = 0$.
6. Repetir el ejercicio anerior para $d \geq 3$ con $\varphi(x) = |x|^{d-2}$ en lugar de $\log|x|$ para probar que para todo $|x| > r > 0$,
$$\mathbb{P}_x(S_r < \infty) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2}.$$
   Concluir que para $d \geq 3$ el Movimiento Browniano es *transitorio* en el sentido de que no vuelve infinitas veces a ningún conjunto acotado.

---

*Entregar el ejercicio 5 o 6 a elección.

Fecha estimada de entrega: 26 de Mayo.