Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 4

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

25 de mayo de 2017

Ejercicio. *Sea* $d = 2$, $0 < r < |x| < R$, $\tau = S_r \wedge S_R$ *y* $\phi(x) = \log(|x|)$, *en donde*

$$S_z = \text{ínf}\{t > 0 : |B(t)| = z\}$$

a. Probar que $\phi(x) = E_x[\phi(B(\tau))]$.

b. Probar que

$$\mathbb{P}_x(S_r < S_R) = \frac{\phi(R) - \phi(|x|)}{\phi(R) - \phi(r)}$$

c. Probar que $\mathbb{P}(S_r < \infty) = 1$. *Concluir que el movimiento browniano bidimensional es recurrente en el sentido de que, para todo* $G \subset \mathbb{R}^2$ *abierto,*

$$\mathbb{P}_x(B \in G \textit{ infinitas veces}) = 1$$

d. Definir el evento involucrado en la probabilidad de arriba.

e. Probar que, para todo $x \neq 0$, $\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0$.

f. Probar que el resultado anterior también vale para $x = 0$.

Resolución.

a. Sea $X(t) = \log|B(t)|$. Si podemos probar que $(X(t), t \geq 0)$ es martingala, podemos valernos del teorema de muestreo opcional para llegar al resultado deseado. En efecto, τ es tiempo de parada y, además,

$$|X(t \wedge \tau)| = |\log|B(t \wedge \tau)|| \leq \log R$$

puesto que $|B(t)| < R$ cuando $t < \tau$ y $|B(t \wedge \tau)| = |B(\tau)| \in \{r, R\}$ cuando $t \geq \tau$. Claramente, $X = \log R$ es una variable aleatoria (constante) integrable. Luego, tenemos que

$$\mathrm{E}[X(\tau)] = X(0) = \log|B(0)| = \log|x|$$

de manera que

$$\mathrm{E}_x[\log|B(\tau)|] = \log|x|$$

Veamos ahora que $(X(t), t \geq 0)$ es martingala. Para esto, nos valdremos del Corolario 2.53 del libro, que afirma que $(\phi(B(t)), t \geq 0)$ es martingala si $\Delta\phi(z) = 0$ y $\mathrm{E}_z[|\phi(B(t))|] < \infty$ para cualquier $t > 0$ y $z \in \mathbb{R}^2$. Calculemos entonces $\Delta\phi$, donde $\phi(z) = \phi((x, y)) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$. Tenemos que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

y, por simetría,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

con lo cual $\Delta\phi(z) = 0$. Ahora resta ver que $\mathrm{E}_z\left[|\phi(B(t))|\right] < \infty$.

b. Para probar esto, desarrollemos $\mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau))\right]$ utilizando la ley de la esperanza total:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau))\right] &= \mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau)), S_r < S_R\right] + \mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau)), S_r \geq S_R\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau)) \mid S_r < S_R\right] \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) + \mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau)) \mid S_r \geq S_R\right] \mathbb{P}_x\left(S_r \geq S_R\right) \\
&= \mathrm{E}_x\left[\phi(B(S_r))\right] \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) + \mathrm{E}_x\left[\phi(B(S_R))\right] \mathbb{P}_x\left(S_r \geq S_R\right) \\
&= \phi(B(S_r))\, \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) + \phi(B(S_R))\, \mathbb{P}_x\left(S_r \geq S_R\right) \\
&= \log(|B(S_r)|)\, \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) + \log(|B(S_R)|)\, \mathbb{P}_x\left(S_r \geq S_R\right) \\
&= \log(r)\, \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) + \log(R)\, \mathbb{P}_x\left(S_r \geq S_R\right) \\
&= \log(r)\, \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) + \log(R)\left(1 - \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right)\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right)\left(\log(r) - \log(R)\right) + \log(R) \\
&= \mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right)\left(\phi(r) - \phi(R)\right) + \phi(R) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, el ítem anterior nos asegura que $\mathrm{E}_x\left[\phi(B(\tau))\right] = (1) = \phi(x)$, por lo que

$$\mathbb{P}_x\left(S_r < S_R\right) = \frac{\phi(x) - \phi(R)}{\phi(r) - \phi(R)} = \frac{\phi(R) - \phi(x)}{\phi(R) - \phi(r)}$$

c. Al considerar el evento $A = \{S_r < \infty\}$, observamos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_r < S_n\} \subseteq A$$

Además, si $n < m$, se tiene que $\{S_r < S_n\} \subseteq \{S_r < S_m\}$. Por todo esto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_r < \infty\right) &\geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_r < S_n\}\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(S_r < S_n\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{\phi(n) - \phi(x)}{\phi(n) - \phi(r)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathbb{P}\left(S_r < \infty\right) = 1$. Por otro lado, dado un abierto arbitrario $G \subset \mathbb{R}^2$, sabemos que G puede expresarse como una unión numerable de bolas abiertas $U_1, \ldots, U_n, \ldots$. Por lo visto más arriba, tenemos que $\mathbb{P}\left(S_{u-\epsilon} < \infty\right) = 1$, siendo u el radio de U_1 y $0 < \epsilon < u$. Notemos $\tilde{B}$ al movimiento browniano planar trasladado al centro de U_1. Al ser $S_{u-\epsilon}$ un tiempo de parada, por la propiedad de Markov fuerte de $\tilde{B}$ se tiene que el proceso $(\tilde{B}(S_{u-\epsilon} + t) - \tilde{B}(S_{u-\epsilon}), t \geq 0)$ es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}^+(S_{u-\epsilon})$, por lo que una repetición de este mismo razonamiento nos lleva a concluir que

$$\mathbb{P}\left(\tilde{B} \in U_1 \text{ infinitas veces}\right) = 1$$

Pero $U_1 \subseteq G$, de lo que se desprende que

$$\mathbb{P}\left(\tilde{B} \in G \text{ infinitas veces}\right) = 1$$

d. Sea $G \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y E el evento "el movimiento browniano planar B entra en G infinitas veces". Con el objeto de formalizar E, nos interesaría expresar que, dado cualquier tiempo $t \in \mathbb{R}$, es posible encontrar un tiempo $t' > t$ tal que $B(t') \in G$. En primera instancia, notaremos T_0 al primer instante en el que B entra en G:

$$T_0 = \text{ínf}\,\{t > 0 : B(t) \in G\}$$

Definamos ahora los instantes T_s en los que B regresa a G, con $s > 0$:

$$T_s = \sup\,\{T_0 < t < T_0 + s : B(t) \in G\}$$

En función de estos tiempos aleatorios, podemos escribir a E de la siguiente forma:

$$E = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_k > q\}$$

e. Observemos primero que

$$S_0 = \text{ínf}\,\{t > 0 : |B(t)| = 0\} = \text{ínf}\,\{t > 0 : B(t) = 0\}$$

En otras palabras, nos interesa probar que B no pasa por el origen casi seguramente. Esto en definitiva es una consecuencia directa del Corolario 2.26 del libro, estudiado también en clase. Éste asegura que, dados cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}_x\,(y \in B(0,1]) = 0$. En este caso, instanciar el resultado con $x \neq 0$ e $y = 0$ nos permite afirmar que $B(t)$ casi seguramente no pasa por el origen cuando $0 \leq t \leq 1$. No obstante, un razonamiento inductivo mediante este corolario junto con la propiedad de Markov de B nos lleva a concluir que $\mathbb{P}_x\,(S_0 < \infty) = 0$.

f. Cuando $x = 0$ también podemos utilizar el corolario mencionado anteriormente para afirmar que $B(t)$ casi seguramente no pasa por el origen cuando $0 < t \leq 1$. El resto del razonamiento es análogo. Notar que S_0 está definido como el ínfimo de los tiempos positivos en los que $B = 0$ que, como consecuencia de lo mencionado, es casi seguramente un conjunto vacío. De esta forma, $\mathbb{P}_x\,(S_0 = \infty) = 1$, i.e., $\mathbb{P}_x\,(S_0 < \infty) = 0$.

$\square$