Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 1

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

9 de abril de 2017

Ejercicio. *Este ejercicio es para caracterizar la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en $C([0,T],\mathbb{R})$.*

a) Sea (E,d) un espacio métrico separable y completo (polaco). Probar que todo abierto $U \subset E$ se puede escribir como unión numerable de bolas abiertas.

b) Sea (E,d) un espacio métrico polaco. Probar que existen numerables bolas $B_1,\ldots,B_n,\ldots$ tal que la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ verifica

$$\mathcal{B}(E) = \sigma\left(\{B_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

c) Para $\omega \in C([0,T],\mathbb{R})$ definimos $\pi_t(\omega) = \omega(t)$. Probar que $\pi_t : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua.

En $(C([0,T],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ definimos la σ-álgebra de Kolmogorov,

$$\mathcal{K} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(B) : t \in [0,T], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}\right)$$

d) Probar que las bolas abiertas están en $\mathcal{K}$.

e) Probar que $\mathcal{K} = \mathcal{B}$.

Resolución. TBD $\square$

Ejercicio. *(1.6 - Mörters y Peres). Sea $\{B(t) : t \geq 0\}$ un movimiento browniano standard. Probar que, casi seguramente,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$$

Resolución. Sea $X_i = B(t-i+1) - B(t-i)$, $1 \leq i \leq \lfloor t \rfloor$. Por ser B un movimiento browniano, se tiene que $X_1,\ldots,X_{\lfloor t \rfloor}$ son variables aleatorias iid con $X_i \sim N(0,(t-i+1)-(t-i)) = N(0,1)$. Luego, valiéndonos de la Ley de los Grandes Números,

$$\frac{1}{\lfloor t \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathrm{E}[X_i] = 0$$

cuando $t \to \infty$. A partir de la definición de X_i, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lfloor t \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} B(t-i+1) - B(t-i) \\
&= \frac{1}{\lfloor t \rfloor}\left(B(t) - B(r)\right) \\
&= \frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} - \frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \\
&\xrightarrow{\text{c.s.}} 0
\end{aligned}$$

con $r = t - \lfloor t \rfloor$. Pero $0 \leq r < 1$, con lo cual $\frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De esto se desprende que necesariamente $\frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. A su vez, esto implica que $\left|\frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor}\right| = \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego,

$$0 \leq \frac{|B(t)|}{t} \leq \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Se ve entonces que $\left|\frac{B(t)}{t}\right| = \frac{|B(t)|}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de lo que se puede concluir que $\frac{B(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, que es lo que se prentedía demostrar[1].

$\square$

[1]Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.