Simulación Numérica de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Lucio Santi - lsanti@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

3 de julio de 2017

Agenda

Introducción

Motivación

- Las **ecuaciones diferenciales estocásticas** (EDSs) son ecuaciones diferenciales en las que al menos uno de sus términos es un proceso estocástico.
- Surgen como mecanismo de modelado en contextos diversos (e.g., biología, astronomía, finanzas y otros).
- Típicamente es difícil (sino imposible) encontrar soluciones analíticas.
- Por ende, es fundamental la aproximación de soluciones mediante **simulación numérica**.
- En esta exposición vamos a estudiar dos métodos numéricos de resolución de EDSs y algunas de sus propiedades teóricas.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano lineal conductor de X.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano lineal conductor de X.

Ecuación diferencial estocástica (de Itô)

$$dX(t) = a(t, X(t))\ dt + b(t, X(t))\ dB(t)$$

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N+1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N+1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento (o paso).

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N+1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento (o paso).
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma $h = h_n = \frac{T - t_0}{N}$ con N suficientemente grande para que $0 < h < 1$.

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N+1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento (o paso).
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma $h = h_n = \frac{T - t_0}{N}$ con N suficientemente grande para que $0 < h < 1$.
  $\Rightarrow \tau_n = t_0 + nh$

Aproximaciones de tiempo discreto

Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso continuo $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$ evaluado en los instantes τ_n e interpolado linealmente entre ellos.

Aproximaciones de tiempo discreto

Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso continuo $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$ evaluado en los instantes τ_n e interpolado linealmente entre ellos.

- Lógicamente, se busca que $X_n^h = X^h(\tau_n)$ aproxime el valor de $X(\tau_n)$.

Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso continuo $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$ evaluado en los instantes τ_n e interpolado linealmente entre ellos.

- Lógicamente, se busca que $X_n^h = X^h(\tau_n)$ aproxime el valor de $X(\tau_n)$.
- En lo que sigue veremos cómo definir esquemas numéricos para este propósito.

Métodos de resolución

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

  el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

  el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.
- Si consideramos la expansión de Taylor de x alrededor de t,

$$x(t+h) \quad = \quad x(t) + \dot{x}(t)\ h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots$$

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

  el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.
- Si consideramos la expansión de Taylor de x alrededor de t,

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \dot{x}(t)\ h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots \\ &\approx x(t) + f(t, x(t))\ h \end{aligned}$$

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

  el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.
- Si consideramos la expansión de Taylor de x alrededor de t,

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \dot{x}(t)\ h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots \\ &\approx x(t) + f(t, x(t))\ h \end{aligned}$$

- Luego, dada una discretización temporal $\tau_0, \dots, \tau_N$ de paso h, el método de Euler viene dado por

$$x_{n+1}^h = x_n^h + f(\tau_n, x_n^h)\ h$$

Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.

Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.
- Dado un proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ y f dos veces continuamente diferenciable, por la fórmula de Itô se tiene

$$
\begin{aligned}
f(X(t)) &= f(X(t_0)) \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[a(X(s))\ f'(X(s)) + \frac{1}{2} b^2(X(s))\ f''(X(s)) \right] \ ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} b(X(s))\ f'(X(s))\ dB(s)
\end{aligned}
$$

Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.
- Dado un proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ y f dos veces continuamente diferenciable, por la fórmula de Itô se tiene

$$
\begin{aligned}
f(X(t)) &= f(X(t_0)) \\
&+ \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left[a(X(s))\ f'(X(s)) + \frac{1}{2} b^2(X(s))\ f''(X(s))\right]}_{L^0 f} ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \underbrace{b(X(s))\ f'(X(s))}_{L^1 f} dB(s)
\end{aligned}
$$

Expansión de Itô - Taylor (cont.)

Suponiendo que a y b son dos veces continuamente diferenciables, por la aplicación de la fórmula de Itô sobre ambas,

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left[a(X(t_0)) + \int_{t_0}^{s} L^0 a(X(u))\, du + \int_{0}^{s} L^1 a(X(u))\, dB(u) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left[b(X(t_0)) + \int_{t_0}^{s} L^0 b(X(u))\, du + \int_{0}^{s} L^1 b(X(u))\, dB(u) \right] dB(s) \end{aligned}$$

Expansión de Itô - Taylor (cont.)

Luego,

$$X(t) = X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B + R(t)$$

donde

- $h = t - t_0$,
- $\Delta B = B(t) - B(t_0)$, y
- $R(t)$ es el **resto**, compuesto por las integrales dobles que surgen al distribuir las integrales externas sobre sus respectivas sumas.

Los esquemas numéricos para resolver EDSs surgen del truncamiento de esta expansión en distintos puntos, aplicando sucesivas veces la fórmula de Itô sobre a, b, $L^0 a$, $L^0 b$, $L^1 a$, $\ldots$.

Propiedades de un esquema numérico

Tipos de convergencia

Método de Euler-Maruyama

Euler-Maruyama: propiedades

Euler-Maruyama: convergencia fuerte

Implementación y validación

Conclusiones

Gracias!

Preguntas?

Referencias I

S. Asmussen and P. W. Glynn.
Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis.
Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York, 2007.

D. J. Higham.
An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.
SIAM Rev., 43(3):525–546, Mar. 2001.

P. Kloeden and E. Platen.
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.
Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2011.