Definición: Sea $X = (X(t), t \geq 0)$ un proceso estocástico a tiempo continuo y $(\mathcal{F}_t)$ una filtración. Se dice X es una $(\mathcal{F}_t)$ martingala si para todo $t \geq 0$, $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$−medible, $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$ y

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = \mathcal{F}_s, \quad \text{para todo } 0 < s < t.$$

1. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n)$ una Martingala. Considerar $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}(X_1, \ldots, X_n)$. Probar que $(X_n, \mathcal{U}_n)$ es una Martingala.
2. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ v.a. i.i.d. con $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = -1) = q$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Probar que
$$X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \qquad \text{e} \qquad Y_n = S_n - n(p-q)$$
son Martingalas.
3. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ v.a. i.i.d. con $P(\xi_i = 0) = P(\xi_i = 2) = 1/2$. Considerar
$$X_n = \prod_{i=1}^n \xi_i.$$
Probar que X_n es una Martingala y que no existe ξ tal que
$$X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n) \qquad \text{con } \xi \;\; \mathcal{U}(X_i, i \geq 1) - \text{medible}.$$
Sugerencia: si $E(\xi|\mathcal{F}_n) \to Y$ entonces $Y = \xi$.
4. Sean $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ una Martingala e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ un proceso tal que $|Y_n| \leq C_n$, Y_n es $\mathcal{F}_{n-1}$ medible. Sea $X_0 = 0$ y consideremos
$$M_n = \sum_{k=1}^n Y_k (X_k - X_{k-1}).$$
Probar que $(M_n, \mathcal{F}_n)$ es una Martingala.
5. Sea $B(\cdot)$ un movimiento Browniano unidimensional. Mostrar que es una Martingala.
6. Enunciar y probar la versión a tiempo continuo de las dos desigualdades maximales de Doob. Sugerencia: discretizar y tomar límite.
7. Sea $X(t) := \int_0^t B(s)\,ds$, donde $B(\cdot)$ es un movimiento Browniano. Probar que
$$E(X^2(t)) = \frac{t^3}{3} \qquad \forall\, t > 0.$$
8. Sea $U(t) := e^{-t} B(e^{2t})$, ($B(\cdot)$ es un movimiento Browniano unidimensional). Mostrar que
$$E(U(t)U(s)) = e^{-|t-s|} \qquad \text{para todo } -\infty < s, t < \infty.$$
9. Probar que $I(t) := B^2(t) - t$ es una martingala.

   Sugerencia (y ojo!): $B^2(t) = (B(t) - B(s))^2 - B^2(s) + 2B(t)B(s)$. Tomar esperanza condicional respecto de $\mathcal{B}_s$, la historia de $B(\cdot)$, y después respecto e la historia de $I(\cdot)$.

---

*Entregar dos ejercicios a elección.

Fecha estimada de entrega: 27 de abril.