

# Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 1

Lucio Santi

lsanti@dc.uba.ar

10 de abril de 2017

**Ejercicio.** Este ejercicio es para caracterizar la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  en  $C([0, T], \mathbb{R})$ .

a) Sea  $(E, d)$  un espacio métrico separable y completo (polaco). Probar que todo abierto  $U \subset E$  se puede escribir como unión numerable de bolas abiertas.

b) Sea  $(E, d)$  un espacio métrico polaco. Probar que existen numerables bolas  $B_1, \dots, B_n, \dots$  tal que la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(E)$  verifica

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\{B_n : n \in \mathbb{N}\})$$

c) Para  $\omega \in C([0, T], \mathbb{R})$  definimos  $\pi_t(\omega) = \omega(t)$ . Probar que  $\pi_t : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

En  $(C([0, T], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  definimos la  $\sigma$ -álgebra de Kolmogorov,

$$\mathcal{K} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(B) : t \in [0, T], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}\right)$$

d) Probar que las bolas abiertas están en  $\mathcal{K}$ .

e) Probar que  $\mathcal{K} = \mathcal{B}$ .

*Resolución.*

a) Sea  $U \subset E$  un conjunto abierto no vacío. Por ser  $(E, d)$  un espacio métrico separable, sabemos que existe  $S \subset E$  numerable y denso, i.e.,  $S = \{s_1, \dots, s_n, \dots\}$  es tal que  $U \cap S = V \neq \emptyset$ . Podemos entonces escribir  $U = V \cup W$ , donde  $W$  es tal que no posee ningún subconjunto abierto (de lo contrario, un tal subconjunto  $X$  satisfaría  $X \cap S \neq \emptyset$ , de manera que  $X \subset V$ ). Por ser  $U$  abierto, para cada  $v = s_i \in V$ , se tiene que existe  $\epsilon_i > 0$  tal que  $B_{\epsilon_i}(s_i) \subset U$ . Sea  $\epsilon = \inf \{\epsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Dado  $w \in W$ , tenemos como antes que existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(w) \subset U$ , de manera que debe existir por lo menos un  $s_j \in V$  en  $B_\delta(w)$ . De no ser así,  $B_\delta(w) \subset W$ , pero ya argumentamos que  $W$  no puede tener subconjuntos abiertos. Sea  $\beta = \min(\delta, \epsilon)^1$ . Luego, por este mismo razonamiento,  $s_j \in B_\beta(w)$  para cierto  $j \in \mathbb{N}$ , y  $d(s_j, w) = d(w, s_j) < \beta \leq \epsilon \leq \epsilon_j \Rightarrow w \in B_{\epsilon_j}(s_j)$ . Esto sugiere tomar en consideración las bolas

$$B_n = \{x \in E : d(s_n, x) < \epsilon_n\}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por todo lo anterior, se observa que  $U = \bigcup B_n^2$ .

b) TBD

---

<sup>1</sup>Si  $\epsilon = 0$  hay que cambiar la estrategia.

<sup>2</sup>Se ve claramente que mi argumento no utiliza la hipótesis de que  $(E, d)$  es completo. ¿Es realmente necesaria?

- c) Sea  $\omega_0 \in C([0, T], \mathbb{R})$ ,  $\epsilon > 0$  y definamos  $\delta = \epsilon/2$ . Supongamos que, para cierta  $\omega \in C([0, T], \mathbb{R})$ ,  $\|\omega - \omega_0\|_\infty < \delta$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |\pi_t(\omega) - \pi_t(\omega_0)| &= |\omega(t) - \omega_0(t)| \\ &\leq \sup \{|\omega(s) - \omega_0(s)| : s \in [0, T]\} \\ &= \|\omega - \omega_0\|_\infty \\ &< \delta \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

De esto sigue que  $\pi_t$  es continua en cualquier  $\omega_0$  y, por lo tanto, continua en todo su dominio.

d) TBD

□

**Ejercicio.** (1.6 - Mörters y Peres). Sea  $\{B(t) : t \geq 0\}$  un movimiento browniano standard. Probar que, casi seguramente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0$$

*Resolución.* Sea  $X_i = B(t - i + 1) - B(t - i)$ ,  $1 \leq i \leq \lfloor t \rfloor$ . Por ser  $B$  un movimiento browniano, se tiene que  $X_1, \dots, X_{\lfloor t \rfloor}$  son variables aleatorias iid con  $X_i \sim N(0, (t - i + 1) - (t - i)) = N(0, 1)$ . Luego, valiéndonos de la Ley de los Grandes Números,

$$\frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i \xrightarrow{\text{c.s.}} E[X_i] = 0$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ . A partir de la definición de  $X_i$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} B(t - i + 1) - B(t - i) \\ &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor} (B(t) - B(r)) \\ &= \frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} - \frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \\ &\xrightarrow{\text{c.s.}} 0 \end{aligned}$$

con  $r = t - \lfloor t \rfloor$ . Pero  $0 \leq r < 1$ , con lo cual  $\frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . De esto se desprende que necesariamente  $\frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . A su vez, esto implica que  $\left| \frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} \right| = \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Luego,

$$0 \leq \frac{|B(t)|}{t} \leq \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Se ve entonces que  $\left| \frac{B(t)}{t} \right| = \frac{|B(t)|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , de lo que se puede concluir que  $\frac{B(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , que es lo que se pretendía demostrar<sup>3</sup>.

□

---

<sup>3</sup>Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ ,  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ .