Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 5

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

5 de junio de 2017

Ejercicio. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con distribución F y sea*

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \, \# \{ m \leq n : X_m \leq x \}$$

El objetivo de este ejercicio es probar que

$$D_n(x) = \sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$$

converge en distribución al puente browniano.

a. *Observar que, por la Ley de los Grandes Números, $\left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| \to 0$ para todo $0 < x < 1$.*

b. *Utilizando la transformación $Y_k = F(X_k)$ mostrar que basta considerar el caso en que F es la distribución uniforme en $(0, 1)$.*

c. *Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. $\mathcal{U}(0, 1)$ y $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \ldots$ la muestra ordenada. Sean $W_1, W_2, \ldots$ i.i.d. $\mathcal{E}(1)$ y $Z_n = W_1 + \cdots + W_n$. Probar que $(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)})$ y $(Z_1/Z_{n+1}, \ldots, Z_n/Z_{n+1})$ tienen la misma distribución. Sugerencia: hallar la densidad de $(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)})$ y de $r(Z_1, \ldots, Z_{n+1})$, donde*

$$r(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1/z_{n+1}, \ldots, z_n/z_{n+1}, z_{n+1})$$

d. *Sea $\tilde{D}_{k,n} = \sqrt{n}(Z_k/Z_{n+1} - k/n)$ y extender al $[0, 1]$ interpolando linealmente. Probar que*

$$\left\| \tilde{D}_n - D_n \right\|_\infty \to 0$$

en probabilidad cuando $n \to \infty$.

e. *Sea $S_n = S_n(W_1 - 1, \ldots, W_n - 1)$ y S_n^* definidos como en la clase. Mostrar que*

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}} \left(S_n^*(x) - x \left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \right] \right)$$

f. *Probar que $Z_{n+1}/n \to 1$ y $(Z_{n+1} - Z_n)/\sqrt{n} \to 0$ en probabilidad.*

g. *Asumir (o probar) que el Teorema de Slutsky vale también para sucesiones de variables aleatorias a valores en espacios métricos.*

h. *Probar que los procesos $(D_n(x), 0 \leq x \leq 1)_{n \geq 1}$ convergen al proceso $(W(t), 0 \leq t \leq 1)$ dado por $W(t) = B(t) - tB(1)$, denominado puente browniano (B es un movimiento browniano).*

Resolución.

d. Formulemos primero la extensión de $\tilde{D}_n$ al intervalo $[0,1]$ a partir de la definición de $\tilde{D}_{k,n}$, $0 \leq k \leq n$:

$$\tilde{D}_n(x) = \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(\tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor + 1, n} - \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n})$$

Observemos que basta probar que

$$\tilde{D}_{k,n} - D_n(k/n) \xrightarrow{P} 0$$

En efecto, dado $x \in [0,1]$, se tiene que

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

y

$$\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, por lo que $\tilde{D}_n(x) - \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n} \to 0$.

Por el ítem b. podemos asumir que F es la distribución uniforme en $(0,1)$, de manera que

$$F(k/n) = k/n$$

Luego, dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\tilde{D}_{k,n} - D_n(k/n)\right| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\ \left|(Z_k/Z_{n+1} - k/n) - \left(\hat{F}_n(k/n) - F(k/n)\right)\right| \geq \epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|Z_k/Z_{n+1} - \hat{F}_n(k/n)\right| \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P_{k,n}
\end{aligned}$$

Del ítem c. tenemos que $Z_k/Z_{n+1} \sim Y_{(k)}$ y por ende, por la definición de $\hat{F}_n$,

$$Z_k/Z_{n+1} - \hat{F}_n(k/n) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$$

Luego, $P_{k,n} \to 0$.

e. Desarrollemos $\tilde{D}_n$ a partir de la interpolación mostrada en el ítem previo:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_n(x) &= \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n} + (nx - \lfloor nx \rfloor)\left(\tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor + 1, n} - \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) + \sqrt{n}\,(nx - \lfloor nx \rfloor) \\
&\quad \left(\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor + 1}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\,(nx - \lfloor nx \rfloor) \\
&\quad \left(Z_{\lfloor nx \rfloor + 1} - Z_{n+1}\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} - Z_{\lfloor nx \rfloor} + Z_{n+1}\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\,(nx - \lfloor nx \rfloor)\left(Z_{\lfloor nx \rfloor + 1} - Z_{\lfloor nx \rfloor} - \frac{Z_{n+1}}{n}\right) \\
&= A_n(x) + B_n(x)
\end{aligned}$$

donde

- $A_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(nx - \lfloor nx \rfloor\right)\left(Z_{\lfloor nx \rfloor+1} - Z_{\lfloor nx \rfloor} - 1\right)$ y
- $B_n(x) = \sqrt{n}\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(nx - \lfloor nx \rfloor\right)\left(1 - \frac{Z_{n+1}}{n}\right)$

Por otro lado, sea

$$C_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}}\left(S_n^*(x) - x\left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Además,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i - 1 = Z_n - n$$

y, para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$S(x) = S_{\lfloor x \rfloor} + (x - \lfloor x \rfloor)(S_{\lfloor x \rfloor+1} - S_{\lfloor x \rfloor})$$

y

$$S_n^*(x) = \frac{S(nx)}{\sqrt{n}}$$

Desarrollando C_n utilizando lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= \frac{n}{Z_{n+1}}\left(\frac{S(nx)}{\sqrt{n}} - x\left[\frac{S(n)}{\sqrt{n}} + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \\
&= \frac{n}{Z_{n+1}}\left(\frac{S_{\lfloor nx \rfloor} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(S_{\lfloor nx \rfloor+1} - S_{\lfloor nx \rfloor})}{\sqrt{n}} - x\left[\frac{Z_n - n}{\sqrt{n}} + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(\left(S_{\lfloor nx \rfloor} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(S_{\lfloor nx \rfloor+1} - S_{\lfloor nx \rfloor})\right) - x\left(Z_{n+1} - n\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(\left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - \lfloor nx \rfloor + (nx - \lfloor nx \rfloor)(Z_{\lfloor nx \rfloor+1} - Z_{\lfloor nx \rfloor} - 1)\right) - x\left(Z_{n+1} - n\right)\right) \\
&= A_n(x) + \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - \lfloor nx \rfloor - x\left(Z_{n+1} - n\right)\right)}_{G_n(x)}
\end{aligned}$$

Por ende, resta ver que $B_n(x) = G_n(x)$. Desarrollemos entonces B_n:

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sqrt{n}\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(nx - \lfloor nx \rfloor\right)\left(1 - \frac{Z_{n+1}}{n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - Z_{n+1}\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \left(nx - \lfloor nx \rfloor\right)\left(1 - \frac{Z_{n+1}}{n}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - Z_{n+1}\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + nx - xZ_{n+1} - \lfloor nx \rfloor + \lfloor nx \rfloor\frac{Z_{n+1}}{n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(Z_{\lfloor nx \rfloor} + nx - xZ_{n+1} - \lfloor nx \rfloor\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}}\left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - \lfloor nx \rfloor - x(Z_{n+1} - n)\right) \\
&= G_n(x)
\end{aligned}$$

f. En primera instancia,

$$\frac{Z_{n+1}}{n} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i}{n}}_{X_n} + \underbrace{\frac{W_{n+1}}{n}}_{Y_n}$$

Por la Ley de los Grandes Números,

$$X_n \xrightarrow{P} \mathrm{E}\left[W_1\right] = 1$$

Además, dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(|Y_n| \geq \epsilon\right) & = & \mathbb{P}\left(\frac{W_{n+1}}{n} \geq \epsilon\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(W_{n+1} \geq n\epsilon\right) \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left(W_{n+1} < n\epsilon\right) \\ & = & 1 - \left(1 - e^{-n\epsilon}\right) \\ & = & e^{-n\epsilon} \\ & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & 0 \end{array}$$

De manera que

$$Y_n \xrightarrow{P} 0$$

De esta forma,

$$\frac{Z_{n+1}}{n} = X_n + Y_n \xrightarrow{P} 1$$

Por otra parte, observemos que $Z_{n+1} - Z_n = W_{n+1}$. Mediante un razonamiento análogo al hecho para Y_n anteriormente se puede ver que

$$\frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$$

h. Si notamos $X_n = W_n - 1$, tenemos que $\mathrm{E}\left[X_n\right] = \mathrm{E}\left[W_n\right] - 1 = 0$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Var}[X_n] & = & \mathrm{E}\left[X_n^2\right] - \mathrm{E}\left[X_n\right]^2 \\ & = & \mathrm{E}\left[(W_n - 1)^2\right] \\ & = & \mathrm{E}\left[W_n^2 - 2W_n + 1\right] \\ & = & \mathrm{E}\left[W_n^2\right] - 2\mathrm{E}\left[W_n\right] + 1 \\ & = & 1 \end{array}$$

En consecuencia, siendo S_n definida en términos de $X_1, \ldots, X_n$, estamos en las hipótesis del teorema de invariancia de Donsker. Éste nos permite concluir que

$$S_n^* \xrightarrow{\mathcal{D}} B$$

en $C[0,1]$, siendo B un movimiento browniano.

Ahora bien, del ítem e. sabemos que

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}}\left(S_n^*(x) - x\left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Mediante la observación anterior, los resultados del ítem f. y el teorema de Slutsky se tiene que

$$\tilde{D}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$$

siendo $W(x) = B(x) - xB(1)$ el puente browniano.

Además, por el ítem d.,

$$\left\|\tilde{D}_n - D_n\right\|_\infty \xrightarrow{P} 0$$

con lo cual $D_n - \tilde{D}_n$ converge a la función constante 0 en probabilidad. Luego, por el teorema de Slutsky generalizado a variables aleatorias a valores en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$,

$$D_n = \tilde{D}_n + (D_n - \tilde{D}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} W + 0 = W$$

$\square$