Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 3

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

15 de mayo de 2017

Ejercicio. *(2.6 - Mörters y Peres) Sea* $(B(t),\ 0 \leq t \leq 1)$ *un movimiento browniano lineal y*

$$\tau = \sup \{t \in [0,1] : B(t) = 0\}$$

Probar que, casi seguramente, existen tiempos $t_n < s_n < \tau$ *con* $t_n \uparrow \tau$ *tales que* $B(t_n) < 0$ *y* $B(s_n) > 0$.

Resolución. Consideremos el proceso $(\tilde{B}(t),\ 0 \leq t \leq \tau)$ en donde $\tilde{B}(t) = B(\tau - t)$. Es evidente que $\tilde{B}$ es un movimiento browniano como consecuencia de que B lo sea. Además, $\tilde{B}$ es un movimiento browniano standard puesto que $\tilde{B}(0) = B(\tau) = 0$ (esto último vale por definición de τ y continuidad de B). Luego, valiéndonos del resultado estudiado en clase (que de hecho es enunciado en el Teorema 2.8 del libro), tenemos que $\mathbb{P}_0 \{\sigma = 0\} = 1$, siendo

$$\sigma = \text{ínf} \left\{0 < t \leq \tau : \tilde{B}(t) < 0\right\}$$

De esto sigue que, casi seguramente, podemos encontrar una sucesión de tiempos $t'_n > 0$ tales que $t'_n \downarrow 0$ y $\tilde{B}(t'_n) < 0$ para todo n. Ahora bien, utilizando el mismo resultado, tenemos que $\mathbb{P}_0 \{\phi_n = 0\} = 1$, con

$$\phi_n = \text{ínf} \left\{0 < t < t'_n : \tilde{B}(t) > 0\right\}$$

Por ende, podemos afirmar que, casi seguramente, existe una sucesión de tiempos $r^n_k > 0$ tales que $r^n_k < t'_n$, $r^n_k \downarrow 0$ y $\tilde{B}(r^n_k) > 0$ para todo k. Sea $s'_n = r^n_0$ y sean $t_n = \tau - t'_n$ y $s_n = \tau - s'_n$. De esta forma,

- $t_n < s_n$ puesto que $t'_n > s'_n$.
- $s_n < \tau$ al ser $s'_n > 0$.
- $t_n \uparrow \tau$ puesto que $t'_n \downarrow 0$.
- $B(t_n) = \tilde{B}(\tau - t_n) = \tilde{B}(t'_n) < 0$.
- $B(s_n) = \tilde{B}(\tau - s_n) = \tilde{B}(s'_n) > 0$.

Consecuentemente, las sucesiones t_n, s_n propuestas satisfacen lo solicitado en el enunciado. □

Ejercicio. *(2.8 - Mörters y Peres) Probar que, para cualquier* $x > 0$ *y* $A \subset [0, \infty)$ *medible,*

$$\mathbb{P}_x \{B(s) \geq 0\ \forall\ 0 \leq s \leq t, B(t) \in A\} = \mathbb{P}_x \{B(t) \in A\} - \mathbb{P}_{-x} \{B(t) \in A\}$$

Resolución. Por la ley de probabilidad total,

$$\mathbb{P}_x\{B(t) \in A\} = \mathbb{P}_x\{B(t) \in A, B(s) \geq 0 \; \forall \; 0 \leq s \leq t\} + \mathbb{P}_x\{B(t) \in A, \exists \; 0 \leq s \leq t : B(s) < 0\}$$

Veamos entonces que $\mathbb{P}_{-x}\{B(t) \in A\} = \mathbb{P}_x\{B(t) \in A, \exists \; 0 \leq s \leq t : B(s) < 0\}$. Supongamos que tenemos un tal browniano B arrancado en $x > 0$ y tal que $B(s) < 0$ para cierto $0 \leq s \leq t$. Sea $\sigma = \text{ínf}\{0 \leq u \leq t : B(u) = 0\}$. Siendo $B(s) < 0$ y $B(0) > 0$, tal σ existe, es positivo y es tal que $B(\sigma) = 0$ por continuidad de B. Consideremos entonces el proceso estocástico $(\tilde{B}(t),\ t \geq 0)$ definido como sigue, en donde $(B_0(t),\ t \geq 0)$ es un movimiento browniano standard:

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(\sigma - t) & \text{si } 0 \leq t \leq \sigma \\ B_0(t - \sigma) + x & \text{si } t > \sigma \end{cases}$$

Veamos que $\tilde{B}$ es un movimiento browniano standard:

- $\tilde{B}(0) = B(\sigma) = 0$.
- Fuera de $t = \sigma$, $\tilde{B}$ es continua por continuidad de B. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \sigma^-} \tilde{B}(t) &= B(0) \\ &= x \\ &= B_0(0) + x \\ &= \lim_{t \to \sigma^+} \tilde{B}(t) \end{aligned}$$

- Dados $t \geq 0$ y $h > 0$, los incrementos $\tilde{B}(t+h) - \tilde{B}(t)$ tienen distribución normal con esperanza 0 y varianza h siempre que $t + h$ y h estén ambos a izquierda o a derecha de σ. Cuando $t + h > \sigma$ y $t \leq \sigma$,

$$\tilde{B}(t+h) - \tilde{B}(t) = \underbrace{\underbrace{B_0((t+h) - \sigma)}_{\sim N(0,\ t+h-\sigma)} + \underbrace{x - B(\sigma - t)}_{\sim N(0,\ \sigma - t)}}_{\sim N(0,\ h)}$$

- Finalmente, puede verse que $\tilde{B}$ tiene la propiedad de incrementos independientes siguiendo un razonamiento similar al del ítem anterior.

La idea detrás de $\tilde{B}$ es la de poder reformular la probabilidad anterior de forma más sencilla. Esencialmente, $\tilde{B}$ se mueve entre 0 y σ invirtiendo el movimiento de B y luego comportándose como un browniano standard trasladado en x. De esta manera, como consecuencia de la propiedad de Markov de B, el evento de B llegando a A en tiempo t equivale al evento de B_0 llegando a A en tiempo $t - \sigma$. Como B_0 está trasladado en x y siendo la primera porción del recorrido de $\tilde{B}$ una inversión del recorrido de B, tenemos que

$$\mathbb{P}_x\{B(t) \in A, \exists \; 0 \leq s \leq t : B(s) < 0\} = \mathbb{P}_0\left\{\tilde{B}(t) \in A + x\right\}$$

No obstante, llegar a $A + x$ en tiempo t y arrancando en 0 equivale a llegar a A en el mismo tiempo pero arrancando en $-x$, con lo cual

$$\mathbb{P}_0\left\{\tilde{B}(t) \in A + x\right\} = \mathbb{P}_{-x}\{B(t) \in A\}$$

Esto prueba lo deseado y completa la resolución del ejercicio.

$\square$