

Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 4

Lucio Santi

lsanti@dc.uba.ar

22 de mayo de 2017

Ejercicio. Sea $d = 2$, $0 < r < |x| < R$, $\tau = S_r \wedge S_R$ y $\phi(x) = \log(|x|)$, en donde

$$S_z = \inf \{t > 0 : |B(t)| = z\}$$

a. Probar que $\phi(x) = E_x [\phi(B(\tau))]$.

b. Probar que

$$\mathbb{P}_x(S_r < S_R) = \frac{\phi(R) - \phi(|x|)}{\phi(R) - \phi(r)}$$

c. Probar que $\mathbb{P}(S_r < \infty) = 1$. Concluir que el movimiento browniano bidimensional es recurrente en el sentido de que, para todo $G \subset \mathbb{R}^2$ abierto,

$$\mathbb{P}_x(B \in G \text{ infinitas veces}) = 1$$

d. Definir el evento involucrado en la probabilidad de arriba.

e. Probar que, para todo $x \neq 0$, $\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0$.

f. Probar que el resultado anterior también vale para $x = 0$.

Resolución.

a. TBD

b. Para probar esto, desarrollemos $E_x [\phi(B(\tau))]$ utilizando la ley de la esperanza total:

$$\begin{aligned} E_x [\phi(B(\tau))] &= E_x [\phi(B(\tau)), S_r < S_R] + E_x [\phi(B(\tau)), S_r \geq S_R] \\ &= E_x [\phi(B(\tau)) | S_r < S_R] \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + E_x [\phi(B(\tau)) | S_r \geq S_R] \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\ &= E_x [\phi(B(S_r))] \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + E_x [\phi(B(S_R))] \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\ &= \phi(B(S_r)) \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \phi(B(S_R)) \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\ &= \log(|B(S_r)|) \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \log(|B(S_R)|) \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\ &= \log(r) \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \log(R) \mathbb{P}_x(S_r \geq S_R) \\ &= \log(r) \mathbb{P}_x(S_r < S_R) + \log(R) (1 - \mathbb{P}_x(S_r < S_R)) \\ &= \mathbb{P}_x(S_r < S_R) (\log(r) - \log(R)) + \log(R) \\ &= \mathbb{P}_x(S_r < S_R) (\phi(r) - \phi(R)) + \phi(R) \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora bien, el ítem anterior nos asegura que $E_x [\phi(B(\tau))] = (1) = \phi(x)$, por lo que

$$\mathbb{P}_x(S_r < S_R) = \frac{\phi(x) - \phi(R)}{\phi(r) - \phi(R)} = \frac{\phi(R) - \phi(x)}{\phi(R) - \phi(r)}$$

c. Al considerar el evento $A = \{S_r < \infty\}$, observamos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_r < S_n\} \subseteq A$$

Además, si $n < m$, se tiene que $\{S_r < S_n\} \subseteq \{S_r < S_m\}$. Por todo esto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_r < \infty) &\geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_r < S_n\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_r < S_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n) - \phi(r)}{\phi(n) - \phi(r)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathbb{P}(S_r < \infty) = 1$. Por otro lado, dado un abierto arbitrario $G \subset \mathbb{R}^2$, sabemos que G puede expresarse como una unión numerable de bolas abiertas U_1, \dots, U_n, \dots . Por lo visto más arriba, tenemos que $\mathbb{P}(S_{u-\epsilon} < \infty) = 1$, siendo u el radio de U_1 y $0 < \epsilon < u$. Notemos \tilde{B} al movimiento browniano planar trasladado al centro de U_1 . Al ser $S_{u-\epsilon}$ un tiempo de parada, por la propiedad de Markov fuerte de \tilde{B} se tiene que el proceso $(\tilde{B}(S_{u-\epsilon} + t) - \tilde{B}(S_{u-\epsilon}), t \geq 0)$ es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}^+(S_{u-\epsilon})$, por lo que una repetición de este mismo razonamiento nos lleva a concluir que

$$\mathbb{P}(\tilde{B} \in U_1 \text{ infinitas veces}) = 1$$

Pero $U_1 \subseteq G$, de lo que se desprende que

$$\mathbb{P}(\tilde{B} \in G \text{ infinitas veces}) = 1$$

d. Sea $G \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y E el evento “el movimiento browniano planar B entra en G infinitas veces”. Con el objeto de formalizar E , nos interesaría expresar que, dado cualquier tiempo $t \in \mathbb{R}$, es posible encontrar un tiempo $t' > t$ tal que $B(t') \in G$. En primera instancia, notaremos T_0 al primer instante en el que B entra en G :

$$T_0 = \inf \{t > 0 : B(t) \in G\}$$

Definamos ahora los instantes T_s en los que B regresa a G , con $s > 0$:

$$T_s = \sup \{T_0 < t < T_0 + s : B(t) \in G\}$$

En función de estos tiempos aleatorios, podemos escribir a E de la siguiente forma:

$$E = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_k > q\}$$

e. Observemos primero que

$$S_0 = \inf \{t > 0 : |B(t)| = 0\} = \inf \{t > 0 : B(t) = 0\}$$

En otras palabras, nos interesa probar que B no pasa por el origen casi seguramente. Esto en definitiva es una consecuencia directa del Corolario 2.26 del libro, estudiado también en clase. Éste asegura que, dados cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}_x(y \in B(0, 1]) = 0$. En este caso, instanciar el resultado con $x \neq 0$ e $y = 0$ nos permite afirmar que $B(t)$ casi seguramente no pasa por el origen cuando $0 \leq t \leq 1$. No obstante, un razonamiento inductivo mediante este corolario junto con la propiedad de Markov de B nos lleva a concluir que $\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0$.

- f. Cuando $x = 0$ también podemos utilizar el corolario mencionado anteriormente para afirmar que $B(t)$ casi seguramente no pasa por el origen cuando $0 < t \leq 1$. El resto del razonamiento es análogo. Notar que S_0 está definido como el ínfimo de los tiempos positivos en los que $B = 0$ que, como consecuencia de lo mencionado, es casi seguramente un conjunto vacío. De esta forma, $\mathbb{P}_x(S_0 = \infty) = 1$, i.e., $\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0$.

□