

Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 5

Lucio Santi

lsanti@dc.uba.ar

4 de junio de 2017

Ejercicio. Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias i.i.d. con distribución F y sea

$$\hat{F}_n(x) = \# \{m \leq n : X_m \leq x\}$$

El objetivo de este ejercicio es probar que

$$D_n(x) = \sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$$

converge en distribución al puente browniano.

a. Observar que, por la Ley de los Grandes Números, $|\hat{F}_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$ para todo $0 < x < 1$.

b. Utilizando la transformación $Y_k = F(X_k)$ mostrar que basta considerar el caso en que F es la distribución uniforme en $(0, 1)$.

c. Sean Y_1, Y_2, \dots i.i.d. $\mathcal{U}(0, 1)$ y $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots$ la muestra ordenada. Sean W_1, W_2, \dots i.i.d. $\mathcal{E}(1)$ y $Z_n = W_1 + \dots + W_n$. Probar que $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ y $(Z_1/Z_{n+1}, \dots, Z_n/Z_{n+1})$ tienen la misma distribución. Sugerencia: hallar la densidad de $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ y de $r(Z_1, \dots, Z_{n+1})$, donde

$$r(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1/z_{n+1}, \dots, z_n/z_{n+1}, z_{n+1})$$

d. Sea $\tilde{D}_{k,n} = \sqrt{n}(Z_k/Z_{n+1} - k/n)$ y extender al $[0, 1]$ interpolando linealmente. Probar que

$$\|\tilde{D}_n - D_n\|_\infty \rightarrow 0$$

en probabilidad cuando $n \rightarrow \infty$.

e. Sea $S_n = S_n(W_1 - 1, \dots, W_n - 1)$ y S_n^* definidos como en la clase. Mostrar que

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}} \left(S_n^*(x) - x \left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \right] \right)$$

f. Probar que $Z_{n+1}/n \rightarrow 1$ y $(Z_{n+1} - Z_n)/\sqrt{n} \rightarrow 0$ en probabilidad.

g. Asumir (o probar) que el Teorema de Slutsky vale también para sucesiones de variables aleatorias a valores en espacios métricos.

h. Probar que los procesos $(D_n(x), 0 \leq x \leq 1)_{n \geq 1}$ convergen al proceso $(W(t), 0 \leq t \leq 1)$ dado por $W(t) = B(t) - tB(1)$, denominado puente browniano (B es un movimiento browniano).

Resolución.

d. TBD

- e. Formulemos primero la extensión de \tilde{D}_n al intervalo $[0, 1]$ a partir de la definición de $\tilde{D}_{k,n}$, $0 \leq k \leq n$:

$$\tilde{D}_n(x) = \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(\tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor + 1, n} - \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n})$$

Tenemos además

$$S_n = \sum_{i=1}^n W_i - 1 = Z_n - n$$

y, para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$S(x) = S_{\lfloor x \rfloor} + (x - \lfloor x \rfloor)(S_{\lfloor x \rfloor + 1} - S_{\lfloor x \rfloor})$$

Finalmente,

$$S_n^*(x) = \frac{S(nx)}{\sqrt{n}}$$

Desarrollemos ahora \tilde{D}_n a partir de todo lo anterior:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n(x) &= \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(\tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor + 1, n} - \tilde{D}_{\lfloor nx \rfloor, n}) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) + \sqrt{n} (nx - \lfloor nx \rfloor) \\ &\quad \left(\left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor + 1}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \right) - \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (nx - \lfloor nx \rfloor) \\ &\quad \left(Z_{\lfloor nx \rfloor + 1} - Z_{n+1} \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} - Z_{\lfloor nx \rfloor} + Z_{n+1} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (nx - \lfloor nx \rfloor) \left(Z_{\lfloor nx \rfloor + 1} - Z_{\lfloor nx \rfloor} - \frac{Z_{n+1}}{n} \right) \\ &= A_n(x) + B_n(x) \end{aligned}$$

donde

- $A_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (nx - \lfloor nx \rfloor) (Z_{\lfloor nx \rfloor + 1} - Z_{\lfloor nx \rfloor} - 1)$ y
- $B_n(x) = \sqrt{n} \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (nx - \lfloor nx \rfloor) \left(1 - \frac{Z_{n+1}}{n} \right)$

Por otro lado, sea

$$C_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}} \left(S_n^*(x) - x \left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \right] \right)$$

Desarrollando C_n , tenemos

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= \frac{n}{Z_{n+1}} \left(\frac{S(nx)}{\sqrt{n}} - x \left[\frac{S(n)}{\sqrt{n}} + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \right] \right) \\
&= \frac{n}{Z_{n+1}} \left(\frac{S_{\lfloor nx \rfloor} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(S_{\lfloor nx \rfloor + 1} - S_{\lfloor nx \rfloor})}{\sqrt{n}} - x \left[\frac{Z_n - n}{\sqrt{n}} + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \right] \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} ((S_{\lfloor nx \rfloor} + (nx - \lfloor nx \rfloor)(S_{\lfloor nx \rfloor + 1} - S_{\lfloor nx \rfloor})) - x(Z_{n+1} - n)) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} ((Z_{\lfloor nx \rfloor} - \lfloor nx \rfloor + (nx - \lfloor nx \rfloor)(Z_{\lfloor nx \rfloor + 1} - Z_{\lfloor nx \rfloor} - 1)) - x(Z_{n+1} - n)) \\
&= A_n(x) + \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (Z_{\lfloor nx \rfloor} - \lfloor nx \rfloor - x(Z_{n+1} - n))}_{G_n(x)}
\end{aligned}$$

Por ende, resta ver que $B_n(x) = G_n(x)$. Desarrollemos entonces B_n :

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sqrt{n} \left(\frac{Z_{\lfloor nx \rfloor}}{Z_{n+1}} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) + \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (nx - \lfloor nx \rfloor) \left(1 - \frac{Z_{n+1}}{n} \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} \left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - Z_{n+1} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + (nx - \lfloor nx \rfloor) \left(1 - \frac{Z_{n+1}}{n} \right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} \left(Z_{\lfloor nx \rfloor} - Z_{n+1} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + nx - xZ_{n+1} - \lfloor nx \rfloor + \lfloor nx \rfloor \frac{Z_{n+1}}{n} \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (Z_{\lfloor nx \rfloor} + nx - xZ_{n+1} - \lfloor nx \rfloor) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} (Z_{\lfloor nx \rfloor} - \lfloor nx \rfloor - x(Z_{n+1} - n)) \\
&= G_n(x)
\end{aligned}$$

□