Simulación Numérica de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Lucio Santi - `lsanti@dc.uba.ar`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

3 de julio de 2017

Agenda

Introducción

Motivación

- Las **ecuaciones diferenciales estocásticas** (EDSs) son ecuaciones diferenciales en las que al menos uno de sus términos es un proceso estocástico.
- Surgen como mecanismo de modelado en contextos diversos (e.g., biología, astronomía, finanzas y otros).
- Típicamente es difícil (sino imposible) encontrar soluciones analíticas.
- Por ende, es fundamental la aproximación de soluciones mediante **simulación numérica**.
- En esta exposición vamos a estudiar dos métodos numéricos de resolución de EDSs y algunas de sus propiedades teóricas.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano lineal conductor de X.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano lineal conductor de X.

Ecuación diferencial estocástica (de Itô)

$$dX(t) = a(t, X(t))\ dt + b(t, X(t))\ dB(t)$$

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N + 1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N + 1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento (o paso).

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N+1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento (o paso).
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma $h = h_n = \frac{T - t_0}{N}$ con N suficientemente grande para que $0 < h < 1$.

Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por $N+1$ instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento (o paso).
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma $h = h_n = \frac{T-t_0}{N}$ con N suficientemente grande para que $0 < h < 1$. $\Rightarrow \tau_n = t_0 + nh$

Aproximaciones de tiempo discreto

Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso continuo $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$ evaluado en los instantes τ_n e interpolado linealmente entre ellos.

Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso continuo $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$ evaluado en los instantes τ_n e interpolado linealmente entre ellos.

- Lógicamente, se busca que $X_n^h = X^h(\tau_n)$ aproxime el valor de $X(\tau_n)$.

Aproximaciones de tiempo discreto

Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso continuo $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$ evaluado en los instantes τ_n e interpolado linealmente entre ellos.

- Lógicamente, se busca que $X_n^h = X^h(\tau_n)$ aproxime el valor de $X(\tau_n)$.
- En lo que sigue veremos cómo definir esquemas numéricos para este propósito.

Métodos de resolución

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

  el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.
- Si consideramos la expansión de Taylor de x alrededor de t,

$$x(t+h) \quad = \quad x(t) + \dot{x}(t)\ h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots$$

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

  el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.
- Si consideramos la expansión de Taylor de x alrededor de t,

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \dot{x}(t)\ h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots \\ &\approx x(t) + f(t, x(t))\ h \end{aligned}$$

Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

- Si consideramos la expansión de Taylor de x alrededor de t,

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \dot{x}(t)\ h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots \\ &\approx x(t) + f(t, x(t))\ h \end{aligned}$$

- Luego, dada una discretización temporal $\tau_0, \dots, \tau_N$ de paso h, el método de Euler viene dado por

$$x_{n+1}^h = x_n^h + f(\tau_n, x_n^h)\ h$$

Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.

Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.
- Dado un proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ y f dos veces continuamente diferenciable, por la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left[a(X(s))\, f'(X(s)) + \frac{1}{2} b^2(X(s))\, f''(X(s)) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} b(X(s))\, f'(X(s))\, dB(s) \end{aligned}$$

Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.
- Dado un proceso de Itô $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ y f dos veces continuamente diferenciable, por la fórmula de Itô se tiene

$$
\begin{aligned}
f(X(t)) &= f(X(t_0)) \\
&+ \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left[a(X(s))\ f'(X(s)) + \frac{1}{2} b^2(X(s))\ f''(X(s))\right]}_{L^0 f}\ ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \underbrace{b(X(s))\ f'(X(s))}_{L^1 f}\ dB(s)
\end{aligned}
$$

Expansión de Itô - Taylor (cont.)

Suponiendo que a y b son dos veces continuamente diferenciables, por la aplicación de la fórmula de Itô sobre ambas,

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(t_0) \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[a(X(t_0)) + \int_{t_0}^{s} L^0 a(X(u))\, du + \int_{t_0}^{s} L^1 a(X(u))\, dB(u) \right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[b(X(t_0)) + \int_{t_0}^{s} L^0 b(X(u))\, du + \int_{t_0}^{s} L^1 b(X(u))\, dB(u) \right] dB(s)
\end{aligned}$$

Expansión de Itô - Taylor (cont.)

Luego,

$$X(t) = X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B + R(t)$$

donde

- $h = t - t_0$,
- $\Delta B = B(t) - B(t_0)$, y
- $R(t)$ es el **resto**, compuesto por las integrales dobles que surgen al distribuir las integrales externas sobre sus respectivas sumas.

Los esquemas numéricos para resolver EDSs surgen del truncamiento de esta expansión en distintos puntos, aplicando sucesivas veces la fórmula de Itô sobre a, b, $L^0 a$, $L^0 b$, $L^1 a$, $\ldots$ (suponiendo que a y b son suficientemente suaves).

Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

- **Convergente**: la solución computada numéricamente se aproxima a la solución exacta cuando el paso h tiende a cero.

Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

- **Convergente**: la solución computada numéricamente se aproxima a la solución exacta cuando el paso h tiende a cero.
- **Consistente**: el error de truncamiento tiende a cero con h (es una condición necesaria para la convergencia).

Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

- **Convergente**: la solución computada numéricamente se aproxima a la solución exacta cuando el paso h tiende a cero.
- **Consistente**: el error de truncamiento tiende a cero con h (es una condición necesaria para la convergencia).
- **Numéricamente estable**: los errores de propagación se mantienen acotados.

Convergencia en EDSs

En el caso estocástico se distinguen dos tipos de convergencia, dependiendo del escenario de aplicación del método numérico:

Convergencia en EDSs

En el caso estocástico se distinguen dos tipos de convergencia, dependiendo del escenario de aplicación del método numérico:

- **Convergencia fuerte**, cuando se desea que la aproximación de tiempo discreto X^h provea una buena estimación de los caminos muestrales del proceso X.

Convergencia en EDSs

En el caso estocástico se distinguen dos tipos de convergencia, dependiendo del escenario de aplicación del método numérico:

- **Convergencia fuerte**, cuando se desea que la aproximación de tiempo discreto X^h provea una buena estimación de los caminos muestrales del proceso X.
- **Convergencia débil**, cuando se busca que X^h provea una buena estimación de la distribución de X.

Convergencia fuerte y débil

Convergencia fuerte de orden β

La aproximación de tiempo discreto X^h **converge fuertemente a** X **con orden** $\beta > 0$ en tiempo T si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left|X(T) - X^h(T)\right| \leq C\, h^{\beta}$$

Convergencia fuerte y débil

Convergencia fuerte de orden β

La aproximación de tiempo discreto X^h **converge fuertemente a** X **con orden** $\beta > 0$ en tiempo T si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left|X(T) - X^h(T)\right| \leq C\, h^\beta$$

Convergencia débil de orden β

La aproximación de tiempo discreto X^h **converge débilmente a** X **con orden** $\beta > 0$ en tiempo T si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left|g(X(T)) - g(X^h(T))\right| \leq C\, h^\beta$$

para toda función $g \in \mathcal{C}_p^{2(\beta+1)}$ (g y sus $2(\beta + 1)$ derivadas tienen crecimiento polinomial)

Método de Euler-Maruyama

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

Método de Euler-Maruyama

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

$$X(t) \quad = \quad X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B + R(t)$$

Método de Euler-Maruyama

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

$$
\begin{aligned}
X(t) &= X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B + R(t) \\
&\approx X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B
\end{aligned}
$$

Método de Euler-Maruyama

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B + R(t) \\ &\approx X(t_0) + a(X(t_0))\ h + b(X(t_0))\ \Delta B \end{aligned}$$

Luego,

$$X^h_{n+1} = X^h_n + a(X^h_n)\ h + b(X^h_n)\ \Delta B^h_n$$

donde $\Delta B^h_n = B^h(\tau_{n+1}) - B^h(\tau_n)$ es el n-ésimo incremento de una aproximación de tiempo discreto del browniano B.

Euler-Maruyama: propiedades

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

Euler-Maruyama: propiedades

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden $\beta = \frac{1}{2}$ cuando a y b son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).

Euler-Maruyama: propiedades

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden $\beta = \frac{1}{2}$ cuando a y b son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden $\beta = 1$ cuando $a, b \in \mathcal{C}_p^4$.

Euler-Maruyama: propiedades

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden $\beta = \frac{1}{2}$ cuando a y b son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden $\beta = 1$ cuando $a, b \in \mathcal{C}_p^4$.
- Es numéricamente estable bajo las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes.

Euler-Maruyama: propiedades

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden $\beta = \frac{1}{2}$ cuando a y b son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden $\beta = 1$ cuando $a, b \in \mathcal{C}_p^4$.
- Es numéricamente estable bajo las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes.

En lo que sigue vamos a probar la convergencia fuerte del método.

Euler-Maruyama: convergencia fuerte

Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} L^1 b(X(u))\, dB(u)\, dB(s)$$

Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1 b(X(u))\ dB(u)\ dB(s)$$

Aplicando la fórmula de Itô nuevamente,

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left[L^1 b(X(t_0)) + \int_{t_0}^{u} L^0 L^1 b(X(z))\ dz + \int_{t_0}^{u} L^1 L^1 b(X(z)))\ dB(z)\right]\ dB(u)\ dB(s)$$

Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1 b(X(u))\ dB(u)\ dB(s)$$

Aplicando la fórmula de Itô nuevamente,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left[L^1 b(X(t_0)) + \int_{t_0}^{u} L^0 L^1 b(X(z))\ dz + \int_{t_0}^{u} L^1 L^1 b(X(z)))\ dB(z)\right]\ dB(u)\ dB(s)\\ = \quad L^1 b(X(t_0))\ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\ dB(u)\ dB(s) + \tilde{R}(t)\end{aligned}$$

Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} L^1 b(X(u))\ dB(u)\ dB(s)$$

Aplicando la fórmula de Itô nuevamente,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} \left[L^1 b(X(t_0)) + \int_{t_0}^{u} L^0 L^1 b(X(z))\ dz + \int_{t_0}^{u} L^1 L^1 b(X(z)))\ dB(z) \right]\ dB(u)\ dB(s) \\
= \quad L^1 b(X(t_0)) \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s}\ dB(u)\ dB(s) + \tilde{R}(t) \\
= \quad b(X(t_0))\ b'(X(t_0)) \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s}\ dB(u)\ dB(s) + \tilde{R}(t)
\end{aligned}$$

Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} \, dB(u) \, dB(s)$$

Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} dB(u)\, dB(s) \quad = \quad \int_{t_0}^{t} B(s) - B(t_0)\, dB(s)$$

Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} dB(u)\, dB(s) &= \int_{t_0}^{t} B(s) - B(t_0)\, dB(s)\\ &= \int_{t_0}^{t} B(s)\, dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0))\end{aligned}$$

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} dB(u)\ dB(s) &= \int_{t_0}^{t} B(s)-B(t_0)\ dB(s)\\ &= \int_{t_0}^{t} B(s)\ dB(s)-B(t_0)(B(t)-B(t_0))\\ &= \frac{B^2(t)-B^2(t_0)}{2}-\frac{t-t_0}{2}-B(t_0)(B(t)-B(t_0))\end{aligned}$$

Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} dB(u)\, dB(s) &= \int_{t_0}^{t} B(s) - B(t_0)\, dB(s) \\
&= \int_{t_0}^{t} B(s)\, dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\
&= \frac{B^2(t) - B^2(t_0)}{2} - \frac{t - t_0}{2} - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\
&= \frac{(B(t) - B(t_0))^2}{2} - \frac{t - t_0}{2}
\end{aligned}$$

Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} dB(u)\; dB(s) &= \int_{t_0}^{t} B(s) - B(t_0)\; dB(s) \\
&= \int_{t_0}^{t} B(s)\; dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\
&= \frac{B^2(t) - B^2(t_0)}{2} - \frac{t - t_0}{2} - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\
&= \frac{(B(t) - B(t_0))^2}{2} - \frac{t - t_0}{2} \\
&= {}^1\!/_2\,(\Delta B^2 - h)
\end{aligned}
$$

Método de Milstein

En consecuencia, notando $X(t_0) = X_0$,

Método de Milstein

En consecuencia, notando $X(t_0) = X_0$,

$$X(t) \quad = \quad X_0 + a(X_0)\ h + b(X_0)\ \Delta B + {}^1\!/\!{}_2 b(X_0) b'(X_0) \left[\Delta B^2 - h\right] + \tilde{R}(t)$$

Método de Milstein

En consecuencia, notando $X(t_0) = X_0$,

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + a(X_0)\ h + b(X_0)\ \Delta B + {}^1\!/\!{}_2 b(X_0)b'(X_0) \left[\Delta B^2 - h\right] + \tilde{R}(t) \\ &\approx X_0 + a(X_0)\ h + b(X_0)\ \Delta B + {}^1\!/\!{}_2 b(X_0)b'(X_0) \left[\Delta B^2 - h\right] \end{aligned}$$

Método de Milstein

En consecuencia, notando $X(t_0) = X_0$,

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + a(X_0)\ h + b(X_0)\ \Delta B + {}^1\!/_2 b(X_0) b'(X_0) \left[\Delta B^2 - h\right] + \tilde{R}(t) \\ &\approx X_0 + a(X_0)\ h + b(X_0)\ \Delta B + {}^1\!/_2 b(X_0) b'(X_0) \left[\Delta B^2 - h\right] \end{aligned}$$

Esto da origen al **método de Milstein**,

$$X_{n+1}^h = X_n^h + a(X_n^h)\ h + b(X_n^h)\ \Delta B_n^h + {}^1\!/_2 b(X_n^h) b'(X_n^h) \left[{\Delta B_n^h}^2 - h\right]$$

donde $\Delta B_n^h = B^h(\tau_{n+1}) - B^h(\tau_n)$ es el n-ésimo incremento de una aproximación de tiempo discreto del browniano B.

Método de Milstein: propiedades

El método de Milstein tiene (al menos) las siguientes propiedades:

Método de Milstein: propiedades

El método de Milstein tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden $\beta = 1$ cuando a, b son $\mathcal{C}^2$ (además de las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes).

Método de Milstein: propiedades

El método de Milstein tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden $\beta = 1$ cuando a, b son $\mathcal{C}^2$ (además de las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden $\beta = 1$ cuando $a, b \in \mathcal{C}_p^4$.

Otros métodos

- Existen muchos otros métodos con mejores órdenes de convergencia (fuerte y débil).
- Generalmente, las aproximaciones fuertes son más precisas al abarcar más términos de las integrales estocásticas en la expansión de Itô - Taylor.
- Éstas contienen más información de los caminos muestrales del movimiento browniano sobre los subintervalos de discretización.
- Existen también esquemas del estilo Runge-Kutta que evitan el cálculo de las derivadas de los coeficientes de deriva y difusión.

Implementación y validación

Conclusiones

Gracias!

Preguntas?

Referencias I

S. Asmussen and P. W. Glynn.
Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis.
Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York, 2007.

D. J. Higham.
An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.
SIAM Rev., 43(3):525–546, Mar. 2001.

P. Kloeden and E. Platen.
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.
Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2011.