1. Sean Z_1, Z_2 iid con distribución Normal estandar y (R, Θ) sus coordenadas polares. Probar que $\Theta \sim \text{Unif}(0, 2\pi)$.

2. Hacer el ejercicio 5.11 del libro.

3. Probar que $\frac{\psi(t)}{t} = \frac{\sqrt{2\log\log t}}{\sqrt{t}}$ es decreciente para t suficientemente grande.

4. Sean $X_1, X_2, \dots,$ i.i.d. con distribución F y Sea

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\#\{m \le n \colon X_m \le n\}.$$

El objetivo de este ejercicio es probar que

$$D_n(x) = \sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$$

converge en distribución al *puente browniano*.

a) Observar que por la Ley de los Grandes Números $|\hat{F}_n(x) - F(x)| \to 0$ para todo $0 < x < 1$.

b) Utilizando la transformacion $Y_k = F(X_k)$ mostrar que basta considerar el caso en que F es la distribución uniforme en $(0, 1)$.

c) Sean $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d $\mathcal{U}(0, 1)$ y $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots$ la muestra ordenada. Sean $W_1, W_2, \dots$ i.i.d $\mathcal{E}(1)$ y $Z_n = W_1 + \dots + W_n$. Probar que $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ y $(Z_1/Z_{n+1}, \dots, Z_n/Z_{n+1})$ tienen la misma distribución. Sugerencia: Hallar la densidad de $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ y de $r(Z_1, \dots, Z_{n+1})$ donde

$$r(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1/z_{n+1}, \dots, z_n/z_{n+1}, z_{n+1})$$

d) Sea $\tilde{D}_n(k/n) = \sqrt{n}(Z_k/Z_{n+1} - k/n)$ y extender al $[0, 1]$ interpolando linealmente. Probar que

$$\|\tilde{D}_n - D_n\|_\infty \to 0$$

en probabilidad cuando $n \to \infty$.

e) Sea $S_n = S_n(Z_1 - 1, \dots, Z_n - 1)$ y S_n^* definidos como en la clase. Mostrar que

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{n}{Z_{n+1}}\left(S_n^*(t) - x\left[S_n^*(1) + \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}}\right]\right).$$

f) Probar que $Z_{n+1}/n \to 0$ y

$$\frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} \to 0$$

en probabilidad.

g) Asumir (o probar) que el Teorema de Slutsky vale también para sucesiones de variables aleatorias a valores en espacios métricos.

h) Probar que los procesos $(D_n(x), 0 \le x \le 1)_{n \ge 1}$ convergen al proceso $(W(t), 0 \le t \le 1)$ dado por

$$W(t) = B(t) - tB(1),$$

denominado Puente Browniano (B es un Movimiento Browniano).

---

*Entregar los ejercicios 4.d, 4.e, 4.f y 4.h.

Fecha estimada de entrega: 9 de Junio.