Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 2

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

23 de abril de 2017

Ejercicio. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *una martingala. Considerar* $\mathcal{U}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$*. Probar que* $(X_n, \mathcal{U}_n)$ *es una martingala.*

Resolución. Veamos que $(X_n, \mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ satisface las tres propiedades que debe poseer para ser una martingala.

- X_n debe ser $\mathcal{U}_n$-medible

  Por definición de $\mathcal{U}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ se tiene que $\mathcal{U}_n$ es la menor σ-álgebra para la que $X_1, \ldots, X_n$ son medibles. En particular, X_n es $\mathcal{U}_n$-medible.

- $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$

  Esto sigue inmediatamente por ser $(X_n, \mathcal{F}_n)$ una martingala.

- $\mathrm{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{U}_n] = X_n$

  En primer lugar, observemos que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{F}_n$. Sabemos que $X_1, \ldots, X_n$ son $\mathcal{F}_n$-medibles por ser cada X_i, $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{F}_i$-medible y ser $\mathcal{F}$ una filtración (i.e., $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_n$). Además, como ya se dijo, $\mathcal{U}_n$ es la menor σ-álgebra para la que $X_1, \ldots, X_n$ son medibles, de manera que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, que es lo que se pretendía observar. Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{U}_n] &\overset{\text{(Torres)}}{=} \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \,|\, \mathcal{U}_n] \\
&\overset{((X_n, \mathcal{F}_n) \text{ martingala})}{=} \mathrm{E}[X_n \,|\, \mathcal{U}_n] \\
&\overset{(X_n\ \mathcal{U}_n-\text{medible})}{=} X_n
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ *una martingala e* $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ *un proceso tal que* $|Y_n| \leq C_n$ *e* Y_n *es* $\mathcal{F}_{n-1}$*-medible. Sea* $X_0 = 0$ *y consideremos*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k (X_k - X_{k-1})$$

Probar que $(M_n, \mathcal{F}_n)$ *es una martingala.*

Resolución. □