Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 1

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

9 de abril de 2017

Ejercicio. *Este ejercicio es para caracterizar la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en $C([0,T],\mathbb{R})$.*

a) *Sea (E,d) un espacio métrico separable y completo (polaco). Probar que todo abierto $U \subset E$ se puede escribir como unión numerable de bolas abiertas.*

b) *Sea (E,d) un espacio métrico polaco. Probar que existen numerables bolas $B_1,\ldots,B_n,\ldots$ tal que la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ verifica*

$$\mathcal{B}(E) = \sigma\left(\{B_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

c) *Para $\omega \in C([0,T],\mathbb{R})$ definimos $\pi_t(\omega) = \omega(t)$. Probar que $\pi_t : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua.*

En $(C([0,T],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ definimos la σ-álgebra de Kolmogorov,

$$\mathcal{K} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(B) : t \in [0,T], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}\right)$$

d) *Probar que las bolas abiertas están en $\mathcal{K}$.*

e) *Probar que $\mathcal{K} = \mathcal{B}$.*

Resolución. TBD □

Ejercicio. *(1.6 - Mörters y Peres). Sea $\{B(t) : t \geq 0\}$ un movimiento browniano standard. Probar que, casi seguramente,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$$

Resolución. TBD □