Movimiento Browniano
2° cuatrimestre 2017 **Lista 1**

1. Este ejercicio es para caracterizar la σ−álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en $C([0,T],\mathbb{R})$.

   a) Sea (E,d) un espacio métrico separable y completo (polaco). Entonces todo abierto $U \subset E$ se puede escribir como unión numberable de bolas abiertas.

   b) Sea (E,d) un espacio métrico polaco, entonces existen numberables bolas $B_1,\ldots,B_n,\ldots$ tal que la σ−álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ verifica
   $$\mathcal{B}(E) = \sigma(\{B_n, n \in \mathbb{N}\}).$$

   c) Para $\omega \in C([0,T],\mathbb{R})$ definimos $\pi_t(\omega) = \omega(t)$. Probar que $\pi_t\colon C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua.

   En $(C([0,T],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ definimos la σ−álebra de Kolmogorov
   $$\mathcal{K} = \sigma(\{\pi_t^{-1}(B)\colon t \in [0,T],\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}).$$

   d) Probar que las bolas abiertas están en $\mathcal{K}$.

   e) Probar que $\mathcal{K} = \mathcal{B}$.

2. Hacer (al menos) los ejercicios 1.2, 1.6, 1.8 del libro de Morters-Peres.

3. Sea $X \sim N(0,1)$. Probar que para todo $x > 0$,
$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \le P(X > x) \le \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

4. Sea $a_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k} r^k$ Probar que $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n} r^n} < \infty$.

---

*Entregar el Ejercicio 1 de la lista y el 1.6 del libro.

Instrucciones para entregar: En la carpeta de dropbox referida en el email crear una carpeta con su propio nombre en el cual cada uno irá subiendo los ejercicios para entregar. Pueden ser escritos en latex (☺) o un scan de una hoja escrita a mano (☹) prolija (☺). La app de dropbox para celu les deja hacer scans de las hojas de manera muy eficiente y suben directo.

Fecha estimada de entrega: 12 de abril.