Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Lista 6

Lucio Santi
lsanti@dc.uba.ar

21 de junio de 2017

Ejercicio (7.1 - Mörters y Peres)**.** *Sea $F \in D[0,1]$. Probar que la integral de Paley-Wiener,*

$$\int_0^1 F' \, dB$$

coincide casi seguramente con la integral estocástica.

Resolución. Si $F' \in \mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^2(0,1)$, la definición de la integral estocástica nos dice que

$$\int_0^1 F'(s) \, dB(s) = \int_0^\infty F'(s) \, \mathbb{1}_{\{s<1\}} \, dB(s) \tag{1}$$

Sea $(F'_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de procesos escalonados (determinísticos) tal que

$$F'_n(s) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{1}_{((i-1)\ 2^{-n}, i\ 2^{-n}]}(s) \ 2^n \left(F(i\ 2^{-n}) - F((i-1)\ 2^{-n}) \right)$$

Al ser cada F'_n continuo a izquierda, se tiene que también es progresivamente medible. Además, para cada $s \in [0,1]$, es claro que $F'_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F'(s)$. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| F'_n - F' \right\|_2 &= \mathrm{E}\left[\int_0^1 (F'_n(s) - F'(s))^2 \, ds \right] \\ &= \int_0^1 (F'_n(s) - F'(s))^2 \, ds \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Luego, como consecuencia del Teorema 7.6 del libro (también estudiado en clase),

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty F'_n(s) \, dB(s) = (1) = \int_0^\infty F'(s) \, \mathbb{1}_{\{s<1\}} \, dB(s)$$

Y desplegando ahora la definición de la integral para procesos escalonados,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty F'_n(s) \, dB(s) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} 2^n \left(F(i\ 2^{-n}) - F((i-1)\ 2^{-n}) \right) \left(B(i\ 2^{-n}) - B((i-1)\ 2^{-n}) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \left(F(i\ 2^{-n}) - F((i-1)\ 2^{-n}) \right) \left(B(i\ 2^{-n}) - B((i-1)\ 2^{-n}) \right) \\ &= \int_0^1 F' \, dB \end{aligned}$$

□

Ejercicio (Fórmula de Itô multidimensional). *Sea B un movimiento browniano d dimensional y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable y tal que*

$$E\left[\int_0^t |\nabla f(B(s))|^2 \, ds\right] < \infty$$

Probar que, para cualquier $0 \leq s \leq t$,

$$f(B(s)) - f(B(0)) = \int_0^s \nabla f(B(u)) \, dB(u) + \frac{1}{2}\int_0^s \Delta f(B(u)) \, du$$

Resolución. En primera instancia, recordemos que, si $H(t) = (H_1(t), \dots, H_d(t))$,

$$\int_0^t H \, dB := \sum_{i=1}^d \int_0^t H_i(u) \, dB_i(u)$$

Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$:

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \, H_f(\mathbf{x}) \, (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + R(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

donde H_f es la matriz hessiana de derivadas segundas de f y $R(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \to 0$ cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$.

Sea $\omega(\delta, M)$ el módulo de continuidad de H_f,

$$\omega(\delta, M) = \sup_{\substack{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \, \in \, [-M,M]^d, \\ |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}| < \delta}} \left\| H_f(\mathbf{x_1}) - H_f(\mathbf{x_2}) \right\|$$

Luego, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [-M, M]^d$ y $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$,

$$\left| f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \, H_f(\mathbf{x}) \, (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right| \leq \omega(\delta, M) \, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2$$

Sea p_n una sucesión de particiones de $[0, t]$ tal que $|p_n| \to 0$:

$$p_n : 0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$$

Notando $B_i = (B_1(t_i^n), \dots, B_d(t_i^n))$, $0 \leq i \leq m_n$, consideremos

$$\delta_B = \max_{0 \leq i < m_n} |B_{i+1} - B_i| \;\text{ y }\; M_B = \max_{0 \leq u \leq t} |B(u)|$$

Luego, para cada $0 \leq i < m_n$, se tiene

$$\left| f(B_{i+1}) - f(B_i) - \nabla f(B_i) \cdot (B_{i+1} - B_i) - \frac{1}{2}(B_{i+1} - B_i)^T \, H_f(B_i) \, (B_{i+1} - B_i) \right| \\ \leq \omega(\delta_B, M_B) \, |B_{i+1} - B_i|^2$$

De esta forma, sumando sobre i y como consecuencia de la desigualdad triangular, se observa que

$$\left| A - B - \frac{1}{2} \, C \right| \leq \omega(\delta_B, M_B) \, D$$

en donde

- $A = \sum_{i=0}^{m_n-1} f(B_{i+1}) - f(B_i) = f(B(t)) - f(B(0))$,
- $B = \sum_{i=0}^{m_n-1} \nabla f(B_i) \cdot (B_{i+1} - B_i)$,
- $C = \sum_{i=0}^{m_n-1} (B_{i+1} - B_i)^T \; H_f(B_i) \; (B_{i+1} - B_i)$, y
- $D = \sum_{i=0}^{m_n-1} |B_{i+1} - B_i|^2 \xrightarrow{P} dt$ (puesto que cada componente converge a t).

En cuanto a B, observemos que

$$B = \sum_{i=0}^{m_n-1} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(B_i)(B_j(t_{i+1}^n) - B_j(t_i^n)) = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\sum_{i=0}^{m_n-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(B_i)(B_j(t_{i+1}^n) - B_j(t_i^n))}_{\xrightarrow[L^2(\Omega)]{} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(B(u)) \; dB_j(u)}$$

de manera que

$$B \xrightarrow[L^2(\Omega)]{} \int_0^t \nabla f(B(u)) \; dB(u)$$

Desarrollemos ahora C, notando $\Delta_j^i = B_j(t_{i+1}^n) - B_j(t_i^n)$:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=0}^{m_n-1} (B_{i+1} - B_i)^T \; H_f(B_i) \; (B_{i+1} - B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{m_n-1} \sum_{j=1}^{d} \Delta_j^i \sum_{k=1}^{d} \Delta_k^i \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(B(t_i^n)) \\ &= \sum_{i=0}^{m_n-1} \sum_{j,k=1}^{d} \Delta_j^i \; \Delta_k^i \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(B(t_i^n)) \\ &= \sum_{j,k=1}^{d} \underbrace{\sum_{i=0}^{m_n-1} \Delta_j^i \; \Delta_k^i \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(B(t_i^n))}_{C_{j,k}} \end{aligned}$$

Como consecuencia del lema visto en clase, se tiene que $C_{j,k} \to 0$ en $L^2(\Omega)$ si $j \neq k$ puesto que B_j y B_k son brownianos independientes. Por otro lado, cuando $j = k$, tenemos

$$\begin{aligned} C_{j,j} &= \sum_{i=0}^{m_n-1} \Delta_j^{i\,2} \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(B(t_i^n)) \\ &\xrightarrow{P} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(B(u)) \; du \end{aligned}$$

Así, se observa que

$$C \xrightarrow{P} \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(B(u)) \; du = \int_0^t \Delta f(B(u)) \; du$$

A partir de todo lo anterior, y siendo $\omega(\delta_B, M_B) \to 0$, casi seguramente vale que

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \int_0^t \nabla f(B(u))\, dB(u) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B(u))\, du$$

Observar que este argumento prueba la validez de la fórmula multidimensional de Itô para t fijo. Para probar que el resultado vale para cualquier $0 \leq s \leq t$, puede argumentarse que vale casi seguramente para todo tiempo racional en $[0, t]$ y concluir su validez en todo el intervalo por continuidad casi segura de cada miembro de la fórmula. □