

# Simulación Numérica de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

---

Lucio Santi - lsanti@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

3 de julio de 2017



# Agenda

## ① Introducción

- Motivación
- Definiciones

## ② Métodos de resolución

- Generalidades
- Método de Euler-Maruyama
- Método de Milstein

## ③ Implementación y validación

- Caso de estudio
- Resultados

## ④ Conclusiones

# Introducción

---

- Las **ecuaciones diferenciales estocásticas** (EDSs) son ecuaciones diferenciales en las que al menos uno de sus términos es un proceso estocástico.
- Surgen como mecanismo de modelado en contextos diversos (e.g., biología, astronomía, finanzas y otros).
- Típicamente es difícil (sino imposible) encontrar soluciones analíticas.
- Por ende, es fundamental la aproximación de soluciones mediante **simulación numérica**.
- En esta exposición vamos a estudiar dos métodos numéricos de resolución de EDSs y algunas de sus propiedades teóricas.

**Proceso de Itô (unidimensional)**  $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$$

**Proceso de Itô (unidimensional)**  $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$$

- $X(0)$  es el valor inicial; puede ser aleatorio.

**Proceso de Itô (unidimensional)**  $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$$

- $X(0)$  es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de deriva (*drift*).

**Proceso de Itô (unidimensional)**  $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$$

- $X(0)$  es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de difusión.



**Proceso de Itô (unidimensional)**  $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$$

- $X(0)$  es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$  es el movimiento browniano lineal conductor de  $X$ .

**Proceso de Itô (unidimensional)**  $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$$

- $X(0)$  es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$  es el movimiento browniano lineal conductor de  $X$ .

**Ecuación diferencial estocástica (de Itô)**

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dB(t)$$

# Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

# Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

## Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo  $[t_0, T]$  viene dada por  $N + 1$  instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

# Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

## Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo  $[t_0, T]$  viene dada por  $N + 1$  instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$  es el  $n$ -ésimo incremento (o paso).

# Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

## Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo  $[t_0, T]$  viene dada por  $N + 1$  instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$  es el  $n$ -ésimo incremento (o paso).
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma  $h = h_n = \frac{T-t_0}{N}$  con  $N$  suficientemente grande para que  $0 < h < 1$ .

# Discretización temporal

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

## Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo  $[t_0, T]$  viene dada por  $N + 1$  instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$  es el  $n$ -ésimo incremento (o paso).
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma  $h = h_n = \frac{T-t_0}{N}$  con  $N$  suficientemente grande para que  $0 < h < 1$ .  
 $\Rightarrow \tau_n = t_0 + nh$

## Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  es un proceso continuo  $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$  evaluado en los instantes  $\tau_n$  e interpolado linealmente entre ellos.



## Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  es un proceso continuo  $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$  evaluado en los instantes  $\tau_n$  e interpolado linealmente entre ellos.

- Lógicamente, se busca que  $X_n^h = X^h(\tau_n)$  aproxime el valor de  $X(\tau_n)$ .

## Aproximación de tiempo discreto

Dada una discretización temporal como antes, una **aproximación de tiempo discreto** del proceso de Itô  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  es un proceso continuo  $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$  evaluado en los instantes  $\tau_n$  e interpolado linealmente entre ellos.

- Lógicamente, se busca que  $X_n^h = X^h(\tau_n)$  aproxime el valor de  $X(\tau_n)$ .
- En lo que sigue veremos cómo definir esquemas numéricos para este propósito.

# Métodos de resolución

---

# Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

# Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

- Si consideramos la expansión de Taylor de  $x$  alrededor de  $t$ ,

$$x(t+h) = x(t) + \dot{x}(t) h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots$$

# Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

- Si consideramos la expansión de Taylor de  $x$  alrededor de  $t$ ,

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x(t) + \dot{x}(t) h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots \\&\approx x(t) + f(t, x(t)) h\end{aligned}$$

# Derivación de esquemas numéricos

- Los métodos numéricos para resolver EDSs siguen una dinámica similar a los métodos tradicionales para resolver EDOs.
- A modo de (breve) repaso, dada una EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

el método más sencillo de resolución es el **método de Euler**.

- Si consideramos la expansión de Taylor de  $x$  alrededor de  $t$ ,

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x(t) + \dot{x}(t) h + \frac{\ddot{x}(t)}{2} h^2 + \dots \\&\approx x(t) + f(t, x(t)) h\end{aligned}$$

- Luego, dada una discretización temporal  $\tau_0, \dots, \tau_N$  de paso  $h$ , el método de Euler viene dado por

$$x_{n+1}^h = x_n^h + f(\tau_n, x_n^h) h$$

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.



# Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.
- Dado un proceso de Itô  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  y  $f$  dos veces continuamente diferenciable, por la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^t \left[ a(X(s)) f'(X(s)) + \frac{1}{2} b^2(X(s)) f''(X(s)) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t b(X(s)) f'(X(s)) dB(s) \end{aligned}$$

# Expansión de Itô - Taylor

- En EDSs la derivación de los métodos viene dada por la **expansión de Itô - Taylor**.
- Dado un proceso de Itô  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  y  $f$  dos veces continuamente diferenciable, por la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(t_0)) \\ &+ \underbrace{\int_{t_0}^t \left[ a(X(s)) f'(X(s)) + \frac{1}{2} b^2(X(s)) f''(X(s)) \right] ds}_{L^0 f} \\ &+ \underbrace{\int_{t_0}^t b(X(s)) f'(X(s)) dB(s)}_{L^1 f} \end{aligned}$$

## Expansión de Itô - Taylor (cont.)

Suponiendo que  $a$  y  $b$  son dos veces continuamente diferenciables, por la aplicación de la fórmula de Itô sobre ambas,

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t \left[ a(X(t_0)) + \int_{t_0}^s L^0 a(X(u)) \, du + \int_{t_0}^s L^1 a(X(u)) \, dB(u) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \left[ b(X(t_0)) + \int_{t_0}^s L^0 b(X(u)) \, du + \int_{t_0}^s L^1 b(X(u)) \, dB(u) \right] dB(s) \end{aligned}$$

## Expansión de Itô - Taylor (cont.)

Luego,

$$X(t) = X(t_0) + a(X(t_0)) h + b(X(t_0)) \Delta B + R(t)$$

donde

- $h = t - t_0$ ,
- $\Delta B = B(t) - B(t_0)$ , y
- $R(t)$  es el **resto**, compuesto por las integrales dobles que surgen al distribuir las integrales externas sobre sus respectivas sumas.

Los esquemas numéricos para resolver EDSs surgen del truncamiento de esta expansión en distintos puntos, aplicando sucesivas veces la fórmula de Itô sobre  $a$ ,  $b$ ,  $L^0 a$ ,  $L^0 b$ ,  $L^1 a$ ,  $\dots$  (suponiendo que  $a$  y  $b$  son suficientemente suaves).

# Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

# Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

- **Convergente:** la solución computada numéricamente se aproxima a la solución exacta cuando el paso  $h$  tiende a cero.

# Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

- **Convergente:** la solución computada numéricamente se aproxima a la solución exacta cuando el paso  $h$  tiende a cero.
- **Consistente:** el error de truncamiento tiende a cero con  $h$  (es una condición necesaria para la convergencia).

# Propiedades de un esquema numérico

Para que un esquema numérico resulte útil, es deseable que sea

- **Convergente:** la solución computada numéricamente se aproxima a la solución exacta cuando el paso  $h$  tiende a cero.
- **Consistente:** el error de truncamiento tiende a cero con  $h$  (es una condición necesaria para la convergencia).
- **Numéricamente estable:** los errores de propagación se mantienen acotados.



En el caso estocástico se distinguen dos tipos de convergencia, dependiendo del escenario de aplicación del método numérico:

En el caso estocástico se distinguen dos tipos de convergencia, dependiendo del escenario de aplicación del método numérico:

- **Convergencia fuerte**, cuando se desea que la aproximación de tiempo discreto  $X^h$  provea una buena estimación de los caminos muestrales del proceso  $X$ .

En el caso estocástico se distinguen dos tipos de convergencia, dependiendo del escenario de aplicación del método numérico:

- **Convergencia fuerte**, cuando se desea que la aproximación de tiempo discreto  $X^h$  provea una buena estimación de los caminos muestrales del proceso  $X$ .
- **Convergencia débil**, cuando se busca que  $X^h$  provea una buena estimación de la distribución de  $X$ .

## Convergencia fuerte de orden $\beta$

La aproximación de tiempo discreto  $X^h$  **converge fuertemente a  $X$  con orden  $\beta > 0$**  en tiempo  $T$  si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\mathbb{E} |X(T) - X^h(T)| \leq C h^\beta$$

# Convergencia fuerte y débil

## Convergencia fuerte de orden $\beta$

La aproximación de tiempo discreto  $X^h$  **converge fuertemente a  $X$  con orden  $\beta > 0$**  en tiempo  $T$  si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\mathbb{E} |X(T) - X^h(T)| \leq C h^\beta$$

## Convergencia débil de orden $\beta$

La aproximación de tiempo discreto  $X^h$  **converge débilmente a  $X$  con orden  $\beta > 0$**  en tiempo  $T$  si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\mathbb{E} |g(X(T)) - g(X^h(T))| \leq C h^\beta$$

para toda función  $g \in \mathcal{C}_p^{2(\beta+1)}$  ( $g$  y sus  $2(\beta + 1)$  derivadas tienen crecimiento polinomial)

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

$$X(t) = X(t_0) + a(X(t_0)) h + b(X(t_0)) \Delta B + R(t)$$

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + a(X(t_0)) h + b(X(t_0)) \Delta B + R(t) \\ &\approx X(t_0) + a(X(t_0)) h + b(X(t_0)) \Delta B \end{aligned}$$



# Método de Euler-Maruyama

El **método de Euler-Maruyama** es el análogo del método de Euler para las EDSs. Viene dado por el truncamiento de la expansión de Itô - Taylor luego de la primera iteración:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + a(X(t_0)) h + b(X(t_0)) \Delta B + R(t) \\ &\approx X(t_0) + a(X(t_0)) h + b(X(t_0)) \Delta B \end{aligned}$$

Luego,

$$X_{n+1}^h = X_n^h + a(X_n^h) h + b(X_n^h) \Delta B_n^h$$

donde  $\Delta B_n^h = B^h(\tau_{n+1}) - B^h(\tau_n)$  es el  $n$ -ésimo incremento de una aproximación de tiempo discreto del browniano  $B$ .

# Euler-Maruyama: propiedades

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden  $\beta = \frac{1}{2}$  cuando  $a$  y  $b$  son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden  $\beta = \frac{1}{2}$  cuando  $a$  y  $b$  son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden  $\beta = 1$  cuando  $a, b \in \mathcal{C}_p^4$ .

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden  $\beta = \frac{1}{2}$  cuando  $a$  y  $b$  son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden  $\beta = 1$  cuando  $a, b \in \mathcal{C}_p^4$ .
- Es numéricamente estable bajo las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes.

El método de Euler-Maruyama tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden  $\beta = \frac{1}{2}$  cuando  $a$  y  $b$  son Lipschitz y poseen crecimiento lineal (hipótesis usuales para probar existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden  $\beta = 1$  cuando  $a, b \in \mathcal{C}_p^4$ .
- Es numéricamente estable bajo las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes.

En lo que sigue vamos a probar la convergencia fuerte del método.

## Teorema

Sea  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de Itô (autónomo) y  $\{X^h(t), t_0 \leq t \leq T\}$  la aproximación de tiempo discreto de paso  $h = \frac{T-t_0}{N} < 1$  dada por el método de Euler-Maruyama. Si los coeficientes de deriva  $a$  y difusión  $b$  de  $X$  son tales

- $|a(x) - a(y)| \leq K |x - y|,$
- $|b(x) - b(y)| \leq K |x - y|,$  y
- $|a(x)| + |b(x)| \leq K(1 + |x|)$

para cierta constante  $K$  y para cualquier  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $t \in [t_0, T]$ , entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\mathbb{E} |X(T) - X^h(T)| \leq C h^{1/2}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

**Demostración.** Sea

$$\tilde{X}^h(t) = X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s)$$

la extensión constante de a trozos de  $\{X_n^h = X^h(\tau_n)\}$  (i.e., el proceso que vale  $X_{n-1}^h$  para todo  $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ ).



## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

**Demostración.** Sea

$$\tilde{X}^h(t) = X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s)$$

la extensión constante de a trozos de  $\{X_n^h = X^h(\tau_n)\}$  (i.e., el proceso que vale  $X_{n-1}^h$  para todo  $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ ). Dado  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} X(t) - \tilde{X}^h(t) &= \left[ X(t_0) + \int_{t_0}^t a(X(s)) ds + \int_{t_0}^t b(X(s)) dB(s) \right] \\ &\quad - \left[ X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s) \right] \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

**Demostración.** Sea

$$\tilde{X}^h(t) = X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s)$$

la extensión constante de a trozos de  $\{X_n^h = X^h(\tau_n)\}$  (i.e., el proceso que vale  $X_{n-1}^h$  para todo  $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ ). Dado  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} X(t) - \tilde{X}^h(t) &= \left[ X(t_0) + \int_{t_0}^t a(X(s)) ds + \int_{t_0}^t b(X(s)) dB(s) \right] \\ &\quad - \left[ X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s) \right] \\ &= \int_{\tau_n}^t a(X(s)) ds + \int_{t_0}^{\tau_n} a(X(s)) - a(\tilde{X}^h(s)) ds \\ &\quad + \int_{\tau_n}^t b(X(s)) dB(s) + \int_{t_0}^{\tau_n} b(X(s)) - b(\tilde{X}^h(s)) dB(s) \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

**Demostración.** Sea

$$\tilde{X}^h(t) = X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s)$$

la extensión constante de a trozos de  $\{X_n^h = X^h(\tau_n)\}$  (i.e., el proceso que vale  $X_{n-1}^h$  para todo  $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ ). Dado  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} X(t) - \tilde{X}^h(t) &= \left[ X(t_0) + \int_{t_0}^t a(X(s)) ds + \int_{t_0}^t b(X(s)) dB(s) \right] \\ &\quad - \left[ X(t_0) + \sum_{n: \tau_n \leq t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} a(\tilde{X}^h(s)) ds + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} b(\tilde{X}^h(s)) dB(s) \right] \\ &= \underbrace{\int_{\tau_n}^t a(X(s)) ds + \int_{t_0}^{\tau_n} a(X(s)) - a(\tilde{X}^h(s)) ds}_{a_1(t)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\tau_n}^t b(X(s)) dB(s) + \int_{t_0}^{\tau_n} b(X(s)) - b(\tilde{X}^h(s)) dB(s)}_{b_1(t)} \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Observemos que

$$\mathbb{E} [a_1(t) + b_1(t)]^2 \leq 2 \mathbb{E} a_1^2(t) + 2 \mathbb{E} b_1^2(t)$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Observemos que

$$\mathbb{E} [a_1(t) + b_1(t)]^2 \leq 2 \mathbb{E} a_1^2(t) + 2 \mathbb{E} b_1^2(t)$$

Entonces,

$$Z(t) = \sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[ X(s) - \tilde{X}^h(s) \right]^2$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Observemos que

$$\mathbb{E} [a_1(t) + b_1(t)]^2 \leq 2 \mathbb{E} a_1^2(t) + 2 \mathbb{E} b_1^2(t)$$

Entonces,

$$Z(t) = \sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[ X(s) - \tilde{X}^h(s) \right]^2 = \sup_{s \leq t} \mathbb{E} [a_1(s) + b_1(s)]^2$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Observemos que

$$\mathbb{E} [a_1(t) + b_1(t)]^2 \leq 2 \mathbb{E} a_1^2(t) + 2 \mathbb{E} b_1^2(t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) = \sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[ X(s) - \tilde{X}^h(s) \right]^2 &= \sup_{s \leq t} \mathbb{E} [a_1(s) + b_1(s)]^2 \\ &\leq \sup_{s \leq t} 2 \mathbb{E} a_1^2(s) + 2 \mathbb{E} b_1^2(s) \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Observemos que

$$\mathbb{E} [a_1(t) + b_1(t)]^2 \leq 2 \mathbb{E} a_1^2(t) + 2 \mathbb{E} b_1^2(t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[ X(s) - \tilde{X}^h(s) \right]^2 = \sup_{s \leq t} \mathbb{E} [a_1(s) + b_1(s)]^2 \\ &\leq \sup_{s \leq t} 2 \mathbb{E} a_1^2(s) + 2 \mathbb{E} b_1^2(s) \\ &= 2 \sup_{s \leq t} \mathbb{E} a_1^2(s) + 2 \sup_{s \leq t} \mathbb{E} b_1^2(s) \end{aligned}$$



## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Observemos que

$$\mathbb{E} [a_1(t) + b_1(t)]^2 \leq 2 \mathbb{E} a_1^2(t) + 2 \mathbb{E} b_1^2(t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[ X(s) - \tilde{X}^h(s) \right]^2 = \sup_{s \leq t} \mathbb{E} [a_1(s) + b_1(s)]^2 \\ &\leq \sup_{s \leq t} 2 \mathbb{E} a_1^2(s) + 2 \mathbb{E} b_1^2(s) \\ &= 2 \underbrace{\sup_{s \leq t} \mathbb{E} a_1^2(s)}_{A(t)} + 2 \underbrace{\sup_{s \leq t} \mathbb{E} b_1^2(s)}_{B(t)} \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Además, para  $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\mathbb{E} a_1^2(s) \leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s |a(X(u))| \, du \right]^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |a(X(u)) - a(\tilde{X}^h(u))| \, du \right]^2$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Además, para  $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} a_1^2(s) &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s |a(X(u))| \, du \right]^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |a(X(u)) - a(\tilde{X}^h(u))| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s 1 + |X(u)| \, du \right]^2 + 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)| \, du \right]^2\end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Además, para  $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} a_1^2(s) &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s |a(X(u))| \, du \right]^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |a(X(u)) - a(\tilde{X}^h(u))| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s 1 + |X(u)| \, du \right]^2 + 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \int_{\tau_n}^s (1 + |X(u)|)^2 \, du + 2K^2 Nh \mathbb{E} \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)|^2 \, du\end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Además, para  $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} a_1^2(s) &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s |a(X(u))| \, du \right]^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |a(X(u)) - a(\tilde{X}^h(u))| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s 1 + |X(u)| \, du \right]^2 + 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \int_{\tau_n}^s (1 + |X(u)|)^2 \, du + 2K^2 Nh \mathbb{E} \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)|^2 \, du \\ &\leq 4K^2(L+1)h + 2K^2Nh \int_{t_0}^s Z(u) \, du\end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Además, para  $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}a_1^2(s) &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s |a(X(u))| \, du \right]^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |a(X(u)) - a(\tilde{X}^h(u))| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_n}^s 1 + |X(u)| \, du \right]^2 + 2K^2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)| \, du \right]^2 \\ &\leq 2K^2 \mathbb{E} \int_{\tau_n}^s (1 + |X(u)|)^2 \, du + 2K^2 Nh \mathbb{E} \int_{t_0}^s |X(u) - \tilde{X}^h(u)|^2 \, du \\ &\leq 4K^2(L+1)h + 2K^2Nh \int_{t_0}^s Z(u) \, du\end{aligned}$$

donde el tercer paso sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el cuarto de

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \int_{\tau_n}^s (1 + |X(u)|)^2 \, du &\leq 2 \mathbb{E} \int_{\tau_n}^s 1 \, du + 2 \mathbb{E} \int_{\tau_n}^s X^2(u) \, du \\ &\leq 2(L+1)h\end{aligned}$$

siendo  $L = \sup_{u \leq T} \mathbb{E}X^2(u)$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ .

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$Z(t) \leq 2A(t) + 2B(t)$$



## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

Pero

$$\mathbb{E}^2 \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|^2$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

Pero

$$\mathbb{E}^2 \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|^2 \leq Z(T)$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

Pero

$$\mathbb{E}^2 \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|^2 \leq Z(T) \leq C_3 h$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

Pero

$$\mathbb{E}^2 \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|^2 \leq Z(T) \leq C_3 h$$

Y finalmente,

$$\mathbb{E} |X^h(T) - X(T)|$$

## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned}Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\&\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\&= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du\end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

Pero

$$\mathbb{E}^2 \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|^2 \leq Z(T) \leq C_3 h$$

Y finalmente,

$$\mathbb{E} \left| X^h(T) - X(T) \right| = \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|$$



## Euler-Maruyama: convergencia fuerte (cont.)

Por la isometría de Itô, la misma cota es válida para  $\mathbb{E}b_1^2(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq 2A(t) + 2B(t) \\ &\leq 16K^2(L+1)h + 8K^2Nh \int_{t_0}^t Z(u) \, du \\ &= C_1 h + C_2 \int_{t_0}^t Z(u) \, du \end{aligned}$$

Por el Lema de Grönwall, entonces,

$$Z(t) \leq (C_1 h) e^{C_2(t-t_0)} \leq C_3 h$$

Pero

$$\mathbb{E}^2 \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right|^2 \leq Z(T) \leq C_3 h$$

Y finalmente,

$$\mathbb{E} \left| X^h(T) - X(T) \right| = \mathbb{E} \left| \tilde{X}^h(T) - X(T) \right| \leq C_4 h^{1/2}$$

# Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X(u)) dB(u) dB(s)$$

# Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X(u)) dB(u) dB(s)$$

Aplicando la fórmula de Itô nuevamente,

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^1 b(X(t_0)) + \int_{t_0}^u L^0 L^1 b(X(z)) dz + \int_{t_0}^u L^1 L^1 b(X(z)) dB(z) \right] dB(u) dB(s)$$

# Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X(u)) dB(u) dB(s)$$

Aplicando la fórmula de Itô nuevamente,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^1 b(X(t_0)) + \int_{t_0}^u L^0 L^1 b(X(z)) dz + \int_{t_0}^u L^1 L^1 b(X(z)) dB(z) \right] dB(u) dB(s) \\ = L^1 b(X(t_0)) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) + \tilde{R}(t) \end{aligned}$$

# Método de Milstein: derivación

Consideremos en la expansión de Itô - Taylor el término

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X(u)) dB(u) dB(s)$$

Aplicando la fórmula de Itô nuevamente,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^1 b(X(t_0)) + \int_{t_0}^u L^0 L^1 b(X(z)) dz + \int_{t_0}^u L^1 L^1 b(X(z)) dB(z) \right] dB(u) dB(s) \\ &= L^1 b(X(t_0)) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) + \tilde{R}(t) \\ &= b(X(t_0)) b'(X(t_0)) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) + \tilde{R}(t) \end{aligned}$$

Desarrollemos ahora

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s)$$

Desarrollemos ahora

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) = \int_{t_0}^t B(s) - B(t_0) dB(s)$$

## Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) &= \int_{t_0}^t B(s) - B(t_0) dB(s) \\ &= \int_{t_0}^t B(s) dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0))\end{aligned}$$



## Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) &= \int_{t_0}^t B(s) - B(t_0) dB(s) \\ &= \int_{t_0}^t B(s) dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\ &= \frac{B^2(t) - B^2(t_0)}{2} - \frac{t - t_0}{2} - B(t_0)(B(t) - B(t_0))\end{aligned}$$

## Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) &= \int_{t_0}^t B(s) - B(t_0) dB(s) \\&= \int_{t_0}^t B(s) dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\&= \frac{B^2(t) - B^2(t_0)}{2} - \frac{t - t_0}{2} - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\&= \frac{(B(t) - B(t_0))^2}{2} - \frac{t - t_0}{2}\end{aligned}$$

## Método de Milstein: derivación (cont.)

Desarrollemos ahora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB(u) dB(s) &= \int_{t_0}^t B(s) - B(t_0) dB(s) \\&= \int_{t_0}^t B(s) dB(s) - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\&= \frac{B^2(t) - B^2(t_0)}{2} - \frac{t - t_0}{2} - B(t_0)(B(t) - B(t_0)) \\&= \frac{(B(t) - B(t_0))^2}{2} - \frac{t - t_0}{2} \\&= \frac{1}{2} (\Delta B^2 - h)\end{aligned}$$

En consecuencia, notando  $X(t_0) = X_0$ ,

En consecuencia, notando  $X(t_0) = X_0$ ,

$$X(t) = X_0 + a(X_0) h + b(X_0) \Delta B + \frac{1}{2} b(X_0) b'(X_0) [\Delta B^2 - h] + \tilde{R}(t)$$

En consecuencia, notando  $X(t_0) = X_0$ ,

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + a(X_0) h + b(X_0) \Delta B + \frac{1}{2} b(X_0) b'(X_0) [\Delta B^2 - h] + \tilde{R}(t) \\ &\approx X_0 + a(X_0) h + b(X_0) \Delta B + \frac{1}{2} b(X_0) b'(X_0) [\Delta B^2 - h] \end{aligned}$$

En consecuencia, notando  $X(t_0) = X_0$ ,

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + a(X_0) h + b(X_0) \Delta B + 1/2 b(X_0) b'(X_0) [\Delta B^2 - h] + \tilde{R}(t) \\ &\approx X_0 + a(X_0) h + b(X_0) \Delta B + 1/2 b(X_0) b'(X_0) [\Delta B^2 - h] \end{aligned}$$

Esto da origen al **método de Milstein**,

$$X_{n+1}^h = X_n^h + a(X_n^h) h + b(X_n^h) \Delta B_n^h + 1/2 b(X_n^h) b'(X_n^h) [\Delta B_n^{h^2} - h]$$

donde  $\Delta B_n^h = B^h(\tau_{n+1}) - B^h(\tau_n)$  es el  $n$ -ésimo incremento de una aproximación de tiempo discreto del browniano  $B$ .

El método de Milstein tiene (al menos) las siguientes propiedades:



El método de Milstein tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden  $\beta = 1$  cuando  $a, b$  son  $\mathcal{C}^2$  (además de las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes).

El método de Milstein tiene (al menos) las siguientes propiedades:

- Converge fuertemente con orden  $\beta = 1$  cuando  $a, b$  son  $\mathcal{C}^2$  (además de las hipótesis usuales de existencia y unicidad de soluciones fuertes).
- Converge débilmente con orden  $\beta = 1$  cuando  $a, b \in \mathcal{C}_p^4$ .

- Existen muchos otros métodos con mejores órdenes de convergencia (fuerte y débil).
- Generalmente, las aproximaciones son más precisas al abarcar más términos de las integrales estocásticas en la expansión de Itô - Taylor.
- Éstas contienen más información de los caminos muestrales del movimiento browniano sobre los subintervalos de discretización.
- Existen también esquemas del estilo Runge-Kutta que evitan el cálculo de las derivadas de los coeficientes de deriva y difusión.

# Implementación y validación

---

## Conclusiones

---

**Gracias!**  
**Preguntas?**



S. Asmussen and P. W. Glynn.

**Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis.**

Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York, 2007.



D. J. Higham.

**An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.**

*SIAM Rev.*, 43(3):525–546, Mar. 2001.



P. Kloeden and E. Platen.

**Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.**

Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2011.