

# Movimiento Browniano

Ejercicios entregables - Semana 1

Lucio Santi

lsanti@dc.uba.ar

10 de abril de 2017

**Ejercicio.** Este ejercicio es para caracterizar la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  en  $C([0, T], \mathbb{R})$ .

a) Sea  $(E, d)$  un espacio métrico separable y completo (polaco). Probar que todo abierto  $U \subset E$  se puede escribir como unión numerable de bolas abiertas.

b) Sea  $(E, d)$  un espacio métrico polaco. Probar que existen numerables bolas  $B_1, \dots, B_n, \dots$  tal que la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(E)$  verifica

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\{B_n : n \in \mathbb{N}\})$$

c) Para  $\omega \in C([0, T], \mathbb{R})$  definimos  $\pi_t(\omega) = \omega(t)$ . Probar que  $\pi_t : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

En  $(C([0, T], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  definimos la  $\sigma$ -álgebra de Kolmogorov,

$$\mathcal{K} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(B) : t \in [0, T], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}\right)$$

d) Probar que las bolas abiertas están en  $\mathcal{K}$ .

e) Probar que  $\mathcal{K} = \mathcal{B}$ .

*Resolución.*

a) Sea  $U \subset E$  un conjunto abierto no vacío. Por ser  $(E, d)$  un espacio métrico separable, sabemos que existe  $S = \{s_1, \dots, s_n, \dots\} \subset E$  numerable y denso tal que  $U \cap S = V \neq \emptyset$ . Podemos entonces escribir  $U = V \cup W$ , donde  $W$  es tal que no posee ningún subconjunto abierto (de lo contrario, un tal subconjunto  $X$  satisfaría  $X \cap S \neq \emptyset$ , de manera que  $X \subset V$ ). Por ser  $U$  abierto, dado  $w \in W$ , se tiene que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(w) \subset U$ , de manera que debe existir por lo menos un  $v \in V$  en  $B_\epsilon(w)$  (de no ser así,  $B_\epsilon(w) \subset W$ , pero ya argumentamos que  $W$  no puede tener subconjuntos abiertos). Pero  $v \in S$ , lo cual significa que  $v = s_i$  para cierto  $i \in \mathbb{N}$ . Por simetría de  $d$ , sabemos que  $d(s_i, w) = d(w, s_i) < \epsilon \Rightarrow w \in B_\epsilon(s_i)$ . Esta observación sugiere tomar en consideración las bolas

$$\begin{aligned} B_n &= \{x \in E : d(s_n, x) < \epsilon_n\}, \\ \epsilon_n &= \sup \{d(s_n, w) : w \in W \wedge s_n \in B_\epsilon(w), \epsilon > 0\} \cup \{\epsilon_0\} \end{aligned}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ , en donde  $\epsilon_0 > 0$  se introduce a los efectos de cubrir eventuales elementos de  $V$  que no fuesen alcanzados por ningún  $w \in W$ . Se tiene entonces que  $U \subset \bigcup B_n$ <sup>1</sup>.

□

---

<sup>1</sup>Se ve claramente que mi argumento no utiliza la hipótesis de que  $(E, d)$  es completo. ¿Es realmente necesaria?

**Ejercicio.** (1.6 - Mörters y Peres). Sea  $\{B(t) : t \geq 0\}$  un movimiento browniano standard. Probar que, casi seguramente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0$$

*Resolución.* Sea  $X_i = B(t - i + 1) - B(t - i)$ ,  $1 \leq i \leq \lfloor t \rfloor$ . Por ser  $B$  un movimiento browniano, se tiene que  $X_1, \dots, X_{\lfloor t \rfloor}$  son variables aleatorias iid con  $X_i \sim N(0, (t - i + 1) - (t - i)) = N(0, 1)$ . Luego, valiéndonos de la Ley de los Grandes Números,

$$\frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i \xrightarrow{\text{c.s.}} E[X_i] = 0$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ . A partir de la definición de  $X_i$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} B(t - i + 1) - B(t - i) \\ &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor} (B(t) - B(r)) \\ &= \frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} - \frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \\ &\xrightarrow{\text{c.s.}} 0 \end{aligned}$$

con  $r = t - \lfloor t \rfloor$ . Pero  $0 \leq r < 1$ , con lo cual  $\frac{B(r)}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . De esto se desprende que necesariamente  $\frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . A su vez, esto implica que  $\left| \frac{B(t)}{\lfloor t \rfloor} \right| = \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Luego,

$$0 \leq \frac{|B(t)|}{t} \leq \frac{|B(t)|}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Se ve entonces que  $\left| \frac{B(t)}{t} \right| = \frac{|B(t)|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , de lo que se puede concluir que  $\frac{B(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , que es lo que se pretendía demostrar<sup>2</sup>.

□

---

<sup>2</sup>Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ ,  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ .