Simulación Numérica de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Lucio Santi - lsanti@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

3 de julio de 2017

Agenda

1. Introducción
   - Motivación
   - Definiciones
2. Métodos de resolución
   - Generalidades
   - Método de Euler-Maruyama
   - Método de Milstein
3. Implementación y validación
   - Caso de estudio
   - Resultados
4. Conclusiones

Introducción

Motivación

- Las **ecuaciones diferenciales estocásticas** (EDSs) son ecuaciones diferenciales en las que al menos uno de sus términos es un proceso estocástico.
- Surgen como mecanismo de modelado en contextos diversos (e.g., biología, astronomía, finanzas y otros).
- Típicamente es difícil (sino imposible) encontrar soluciones analíticas.
- Por ende, es fundamental la aproximación de soluciones mediante **simulación numérica**.
- En esta exposición vamos a estudiar dos métodos numéricos de resolución de EDSs y algunas de sus propiedades teóricas.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano lineal conductor de X.

Ecuación diferencial estocástica

Proceso de Itô (unidimensional) $X = \{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t b(s, X(s))\ dB(s)$$

- $X(0)$ es el valor inicial; puede ser aleatorio.
- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva (*drift*).
- $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.
- $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano lineal conductor de X.

Ecuación diferencial estocástica (de Itô)

$$dX(t) = a(t, X(t))\ dt + b(t, X(t))\ dB(t)$$

Aproximaciones de tiempo discreto

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Aproximaciones de tiempo discreto

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por N instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

Aproximaciones de tiempo discreto

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por N instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento.

Aproximaciones de tiempo discreto

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por N instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento.
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma $h = h_n = \frac{T - t_0}{N}$ con N suficientemente grande para que $0 < h < 1$.

Aproximaciones de tiempo discreto

- Existen distintas estrategias de resolución numérica de EDSs.
- La más eficiente y generalmente aplicable consiste en simular caminos muestrales (*sample paths*) mediante **aproximaciones de tiempo discreto**.

Discretización temporal

Una **discretización** del intervalo $[t_0, T]$ viene dada por N instantes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = T$$

- $h_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ es el n-ésimo incremento.
- En las discretizaciones de tiempo equidistante, se toma $h = h_n = \frac{T - t_0}{N}$ con N suficientemente grande para que $0 < h < 1$.
  $\Rightarrow \tau_n = t_0 + nh$

Métodos de resolución

Implementación y validación

Conclusiones

Gracias!

Preguntas?

Referencias I

S. Asmussen and P. W. Glynn.
Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis.
Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York, 2007.

D. J. Higham.
An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.
SIAM Rev., 43(3):525–546, Mar. 2001.

P. Kloeden and E. Platen.
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.
Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2011.