1. Introducción

En este documento pretendemos analizar la función 91 de McCarthy a través de una generalización de la misma. La idea de este enfoque es abstraer las constantes por variables y luego razonar analíticamente sobre esta función generalizada con el objeto de poder encontrar expresiones cerradas para el valor de la función y para la cantidad de llamadas recursivas efectuadas para un argumento dado.

2. La función 91 de McCarthy

La función 91 de McCarthy se define matemáticamente como sigue:

$$M_{91}(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ M_{91}(M_{91}(n+11)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Otra forma alternativa (y más concisa) de expresarla es así:

$$M_{91}(n) = (n - 10) \cdot \mathbb{I}\{n > 100\} + M_{91}^2(n+11) \cdot \mathbb{I}\{n \leq 100\}$$

En esta forma,

- $\mathbb{I}\{p\}$ es un indicador booleano que vale 1 si y sólo si el predicado p es verdadero, y
- $M_{91}^i(n) = \underbrace{M_{91}(M_{91}(\ldots M_{91}(n)}_{i \text{ veces}}\ldots))$.

2.1. Generalización

Podemos obtener una versión generalizada $M = M_{m,k,s,e}$ de la función 91 de McCarthy abstrayendo cada constante en una variable distinta:

$$M(n) = (n - s) \cdot \mathbb{I}\{n > m\} + M^e(n + k) \cdot \mathbb{I}\{n \leq m\}$$

Es claro entonces que M_{91} es un caso particular de M, dado que podemos generarla mediante la instanciación $M_{91} = M_{100,11,10,2}$.

3. Análisis

3.1. La relación entre k, s y e

El primer interrogante que surge es bajo qué condiciones la función M está bien definida. Esto es, cómo debe ser la relación entre las distintas variables de forma tal que $M(n)$ tenga un valor numérico y no haya divergencia computacional al intentar calcular dicho valor (hecho que notaremos con el símbolo $\perp$). Para ello probaremos el siguiente resultado:

Teorema 1. *Si* $k \leq (e-1) \cdot s$, *se tiene que* $M(n) = \perp$ *para cualquier* $n \leq m$.

Demostración. Sea $n \leq m$. Debe existir entonces un $c \in \mathbb{N}$ tal que

$$M(n) = M^c(m - k + i)$$

con $1 \leq i \leq k$. Esto corresponde al hecho de sumar sucesivamente k al argumento hasta alcanzar el máximo valor posible antes de hacer el primer decremento por s. Desplegando la invocación más interna, que representa sumar una vez más k y agregar otras e llamadas, se tiene

$$M^c(m - k + i) = M^{c+e-1}(m + i)$$

Sea $e_0 = \min\{a \in \mathbb{N} \,/\, m + i - as \leq m\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} M^c(m-k+i) &= M^{c+e-1}(m+i) \\ &= M^{c+e-1-e_0}(m+i-e_0 s) \end{aligned}$$

Como sabemos que $k \leq (e-1) \cdot s$, $m + i \leq m + k \leq m + (e-1) \cdot s$. Substrayendo $(e-1) \cdot s$ de ambos extremos, tenemos que $m + i - (e-1) \cdot s \leq m$. De esto sigue que $e_0 \leq e - 1$, pues por definición es el menor número natural con dichas propiedades. Luego,

$$c + e - 1 - e_0 \geq c + e - 1 - (e-1) = c$$

El mismo razonamiento aplica para el argumento $m+i-e_0 s \leq m$. De esto se concluye que la cantidad de llamadas a M es creciente, con lo cual $M(n) = \perp$. □

La interpretación fundamental de este resultado es que k debe valer por lo menos $(e-1) \cdot s + 1$ si se busca que M esté bien definida. En el caso de M_{91}, observamos que k toma el mínimo valor posible, pues $k = 11 = 1 \cdot 10 + 1 = (e-1) \cdot s + 1$.

3.2. Cálculo del valor de la función

Tal como puede verse, la función M anida llamadas en las que incrementa una y otra vez en k el argumento, para eventualmente decrementarlo por s cada vez que se supera el umbral m. Por este motivo, se puede concluir que

$$M(n) = n + \alpha_n k - \beta_n s$$

para algunos $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, de cada e llamadas, una de ellas hace el incremento en k. Esto implica que $\alpha_n = r(n)/e$, siendo $r(n)$ la cantidad de llamadas recursivas efectuadas al computar $M(n)$. Naturalmente, $r(n)$ debe ser múlitplo de e pues cada vez que se anidan llamadas recursivas, la cantidad anidada es e. Por otro lado, toda otra llamada que no incremente el argumento en k debe resolverse por decremento en s eventualmente, dado que no existe otra posibilidad. Luego, $\beta_n = 1 + r(n) - r(n)/e$ (se suma 1 pues hay que contabilizar también la llamada original a M). Entonces,

$$M(n) = n + \frac{r(n)}{e} \cdot k - \left(1 + \frac{(e-1) \cdot r(n)}{e}\right) \cdot s$$

En consecuencia, el cómputo de $M(n)$ se reduce a calcular la cantidad de llamadas recursivas $r(n)$.

3.3. Cálculo de llamadas recursivas cuando $e = 2$

Calcular $r(n)$ en el caso más general parece ser difícil. No obstante, vamos a dar un argumento constructivo para calcular este valor cuando $e = 2$ y cuando $k = s + 1$. A continuación, generalizaremos la expresión encontrada para abarcar valores de k arbitrarios, y probaremos que dicha fórmula es correcta.

3.3.1. El caso fácil: $k = s + 1$

En este escenario, la función M sigue un patrón de incremento lineal en la cantidad de llamadas recursivas a resolver, y en cada uno de estos pasos se procede sumando k al argumento:

$$M(n) = M^2(n+k) = M^3(n+2k) = \cdots = M^{i+1}(n+ik)$$

Este patrón termina cuando $n + ik > m$, lo que equivale a decir que i es el mínimo número entero mayor que $(m-n)/k$. En otras palabras,

$$i = \left\lceil \frac{m-n+1}{k} \right\rceil$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
M(n) &= M^{i+1}(n+ik) \\
&= M^i(n_0 = n + ik - s) \\
&= M^i(n_1 = n + ik - s + (k-s)) \\
&\vdots \\
&= M^i(n_j = n + ik - s + j(k-s))
\end{aligned}$$

en donde $n_0, \cdots, n_j \leq m$.

Como $k = s+1$, tenemos que $n_l = 1+n_{l-1}$ (i.e., el argumento de M^i se incrementará de a 1). Pero esto sólo se da hasta llegar a $n_j = m$, en cuyo caso aparece un s adicional restando (pues $m+k-s = m+1 > m$):

$$\begin{aligned} M(n) &= M^i(n_j = m = n + ik - s + j(k-s)) \\ &= M^{i-1}(n + ik - s + (j+1)(k-s) - s = m + 1 - s) \end{aligned}$$

En este punto, se observa que se decrementó en 1 el exponente de M, lo cual implica que tenemos una llamada anidada menos a resolver. Este patrón de subir de a 1 el argumento hasta alcanzar a m y luego sacar una llamada anidada va a seguir dándose hasta que eventualmente el exponente llegue a 0.

A partir de este desarrollo, el cálculo de $r(n)$ lo podemos realizar por partes:

- Por un lado, contar las llamadas que tenemos desde el principio hasta que alcanzar a n_0 (i.e., hasta que llegamos a superar a m). Esto notémoslo $r_0(n)$.
- Después, contar las llamadas que tenemos en el incremento de n_0 hasta llegar a m (notémoslo $r_1(n)$).
- Luego, las llamadas involucradas en el incremento del parámetro, partiendo desde $m+1-s$, hasta bajar en 1 el exponente (a lo que notaremos r_2, y no depende de n).
- Una vez calculado esto, tenemos que $r(n) = r_0(n) + r_1(n) + (i-1) \cdot r_2$, dado que como vimos el ciclo de incremento/decremento se da hasta agotar el exponente de M.

Tenemos que $r_0(n) = 2i$: por cada llamada a M, aparecen otras dos. Además,

$$r_1(n) = 2 \cdot \text{cantidad de números entre}(n + ik - s) \text{ y } m$$

dado que son las llamadas que tenemos hasta llegar por primera vez a m para decremenetar el exponente. Entonces,

$$r_1(n) = 2 \cdot (m - (n + ik - s) + 1) = 2 \cdot (m - n - ik + s + 1)$$

Finalmente, $r_2 = 2s$, dado que cada ciclo tiene s números: desde $m+1-s$ hasta m. Juntando todo,

$$\begin{aligned} r(n) &= 2i + 2 \cdot (m - n - ik + s + 1) + 2 \cdot (i-1) \cdot s \\ &= 2 \cdot [i + m - n - ik + s + 1 + is - s] \\ &= 2 \cdot [i \cdot (s - k + 1) + m - n + s - s + 1] \\ &= 2 \cdot (m - n + 1) \end{aligned}$$

Siguiendo un razonamiento en esencia análogo, puede extenderse este caso para valores de e arbitrarios, tomando $k = (e-1) \cdot s + 1$. En este escenario,

$$r(n) = e \cdot (m - n + 1)$$

Por supuesto, esta fórmula es válida para cualquier $n \leq m$. Si $n > m$, se tiene que $r(n) = 0$.

3.3.2. Obteniendo una expresión más general

A partir del resultado anterior y de una observación cuidadosa de los valores de $r(n)$ para valores de k arbitrarios (siempre en el marco de $e = 2$), se conjeturó que

$$r(n) = 2 \cdot \left\lceil \frac{m - n + 1}{k - s} \right\rceil$$

A los efectos de probar su validez, notemos primero que $r(n)$ puede definirse recurrentemente:

$$r(n) = r(n + k) + r(M(n + k)) + 2$$

Esta igualdad se deriva instantáneamente de la definición de M: la cantidad de llamadas recursivas para computar $M(n)$ son las utilizadas para computar $v = M(n+k)$ sumado a las utilizadas para computar $M(v)$. Por cada uno de estos términos, se suma también 1 dado que hay que adicionar la llamada original a M en sendos casos.

Luego, para probar la validez de la conjetura, basta con insertar la fórmula en esta expresión y comprobar la igualdad. Notemos antes lo siguiente:

$$M(n) = n + \frac{r(n)}{2} \cdot k - \left(1 + \frac{r(n)}{2}\right) \cdot s = n + \left(\left\lceil \frac{m-n+1}{k-s} \right\rceil\right) \cdot k - \left(1 + \left\lceil \frac{m-n+1}{k-s} \right\rceil\right) \cdot s$$

En lo que sigue, notemos $\gamma = \left\lceil \frac{m-n-k+1}{k-s} \right\rceil$. Luego, tenemos:

- $r(n+k) = 2\gamma$
- $M(n+k) = n + (\gamma+1) \cdot k - (\gamma+1) \cdot s = n + (\gamma+1) \cdot (k-s)$
- $r(M(n+k)) = 2 \cdot \left\lceil \frac{m-n-(\gamma+1)\cdot(k-s)+1}{k-s} \right\rceil$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
2 + r(n+k) + r(M(n+k)) &= 2 + 2\gamma + 2 \cdot \left\lceil \frac{m-n-(\gamma+1)\cdot(k-s)+1}{k-s} \right\rceil \\
&= 2 \cdot \left(1 + \gamma + \left\lceil \frac{m-n-(\gamma+1)\cdot(k-s)+1}{k-s} \right\rceil\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 + \gamma + \left\lceil \frac{m-n+1}{k-s} - (\gamma+1) \right\rceil\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 + \gamma + \left\lceil \frac{m-n+1}{k-s} \right\rceil - \gamma - 1\right) \\
&= 2 \cdot \left\lceil \frac{m-n+1}{k-s} \right\rceil \\
&= r(n)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, esto permite derivar una expresión cerrada para $M(n)$ cuando $e = 2$, que además puede definirse para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$:

$$M(n) = n - s + (k-s) \cdot \text{máx}\left(0, \left\lceil \frac{m-n+1}{k-s} \right\rceil\right)$$

Si instanciamos este resultado para el caso de M_{91}, tenemos:

$$M_{91}(n) = n - 10 + (11-10) \cdot \text{máx}\left(0, \left\lceil \frac{100-n+1}{11-10} \right\rceil\right) = n - 10 + (100 - n + 1) = 91$$

cuando $n \leq 100$. Cuando $n > 100$, se ve también que $M_{91}(n) = n - 10$.