1. Introducción

En este documento pretendemos analizar la función 91 de McCarthy a través de una generalización de la misma. La idea de este enfoque es abstraer las constantes por variables y luego razonar analíticamente sobre esta función generalizada con el objeto de poder encontrar expresiones cerradas para el valor de la función y para la cantidad de llamadas recursivas efectuadas para un argumento dado.

2. La función 91 de McCarthy

La función 91 de McCarthy se define matemáticamente como sigue:

$$M_{91}(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ M_{91}(M_{91}(n+11)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Otra forma alternativa (y más concisa) de expresarla es así:

$$M_{91}(n) = (n-10) \cdot \mathbb{I}\{n > 100\} + M_{91}^2(n+11) \cdot \mathbb{I}\{n \leq 100\}$$

En esta forma,

- $\mathbb{I}\{p\}$ es un indicador booleano que vale 1 si y sólo si el predicado p es verdadero, y
- $M_{91}^i(n) = \underbrace{M_{91}(M_{91}(\dots M_{91}(n)}_{i \text{ veces}} \dots))$.

2.1. Generalización

Podemos obtener una versión generalizada $M = M_{m,k,s,e}$ de la función 91 de McCarthy abstrayendo cada constante en una variable distinta:

$$M(n) = (n-s) \cdot \mathbb{I}\{n > m\} + M^e(n+k) \cdot \mathbb{I}\{n \leq m\}$$

Es claro entonces que M_{91} es un caso particular de M, dado que podemos generarla mediante la instanciación $M_{91} = M_{100,11,10,2}$.

3. Análisis

3.1. La relación entre k, s y e

El primer interrogante que surge es bajo qué condiciones la función M está bien definida. Esto es, cómo debe ser la relación entre las distintas variables de forma tal que $M(n)$ tenga un valor numérico y no haya divergencia computacional al intentar calcular dicho valor (hecho que notaremos con el símbolo $\perp$). Para ello probaremos el siguiente resultado:

Teorema 1. *Si* $k \leq (e-1) \cdot s$, *se tiene que* $M(n) = \perp$ *para cualquier* $n \leq m$.

Demostración. Sea $n \leq m$. Debe existir entonces un $c \in \mathbb{N}$ tal que

$$M(n) = M^c(m-k+i)$$

con $1 \leq i \leq k$. Esto corresponde al hecho sumar sucesivamente k al argumento hasta alcanzar el máximo valor posible antes de hacer el primer decremento por s. Desplegando la invocación más interna, que representa sumar una vez más k y agregar otras e llamadas, se tiene

$$M^c(m-k+i) = M^{c+e-1}(m+i)$$

Sea $e_0 = \text{mín}\,\{a \in \mathbb{N} \,/\, m+i-as \leq m\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} M^c(m-k+i) &= M^{c+e-1}(m+i) \\ &= M^{c+e-1-e_0}(m+i-e_0 s) \end{aligned}$$

Como sabemos que $k \leq (e-1) \cdot s$, $m + i \leq m + k \leq m + (e-1) \cdot s$. Substrayendo $(e-1) \cdot s$ de ambos extremos, tenemos que $m + i - (e-1) \cdot s \leq m$. De esto sigue que $e_0 \leq e - 1$, pues por definición es el menor número natural con dichas propiedades. Luego,

$$c + e - 1 - e_0 \geq c + e - 1 - (e - 1) = c$$

El mismo razonamiento aplica para el argumento $m + i - e_0 s \leq m$. De esto se concluye que la cantidad de llamadas a M es creciente, con lo cual $M(n) = \perp$. $\square$

La interpretación fundamental de este resultado es que k debe valer por lo menos $(e-1) \cdot s + 1$ para que M esté bien definida. En el caso de M_{91}, observamos que k toma el mínimo valor posible, pues $k = 11 = 1 \cdot 10 + 1 = (e-1) \cdot s + 1$.

3.2. Cálculo del valor de la función

3.3. Cálculo de llamadas recursivas cuando $e = 2$

3.3.1. El caso fácil: $k = s + 1$

3.3.2. Obteniendo una expresión más general