

Mathematische Logik & Modelltheorie

Actinistia

16. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1	September 2016	2
2	September 2012	3
3	Februar 2011	4
4	September 2010	5

1 September 2016

Dozent: Prof. Dr. George Metcalfe

Sie können zur Beantwortung der Fragen das Korrektheits-, Vollständigkeits- und Kompaktheitstheorem voraussetzen.

1. (3 Punkte)

(a) Finden Sie eine Formel mit der Wahrheitstabelle.

$p1$	$p2$	$p3$	$???$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(b) Beweisen Sie $\{\vee, \wedge, \neg\}$ ist funktional vollständig.

(c) Beweisen Sie $\{\rightarrow, \perp\}$ ist funktional vollständig.

2. (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie

$$\{(\exists x)(r_1x \wedge r_2x), (\exists x)(r_2x \wedge r_3x), (\exists x)(r_1x \wedge r_3x)\} \not\models (\exists x)(r_1x \wedge r_2x \wedge r_3x)$$

(b) Benutzen Sie Skolemisierung und Resolution, um Folgendes zu beweisen:

$$\{(\forall x)(r_1x \vee r_2x), (\forall x)(\exists y)(r_1x \rightarrow r_2y), \} \models (\exists x)(r_2x)$$

3. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Klassen elementar sind:

- die Klasse aller Gruppen
- die Klasse aller Gruppen mit höchstens zwei Elementen
- die Klasse aller unendlichen Gruppen

(b) Beweisen Sie : $\mathcal{K} \subseteq \text{Str}(\mathcal{L})$ ist endlich axiomatisierbar (d.h. $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ für ein endliches $\Sigma \subseteq \text{Sen}(\mathcal{L})$) genau dann, wenn \mathcal{K} und $\text{Str}(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{K}$ elementar sind.

2 September 2012

Sie können zur Beantwortung der Fragen das Korrektheits-, Vollständigkeitstheorem annehmen.

1. (a) Definieren Sie: $\Sigma \subseteq \text{Sen}(\mathcal{L})$ ist widerspruchsvoll.
(b) Beweisen Sie, dass

$$\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x+y)+z \approx x+(y+z)), (\forall x)(x+x \approx x)\} \not\models (\forall x)(\forall y)(x+y \approx y+x)$$

.

- (c) Benutzen Sie Pränex Normalform, Skolemisierung und Resolution, um Folgendes zu beweisen:

$$\{(\forall x)(\exists y)(rxy)\} \models (\forall x)(\exists y)(\exists z)(rxy \wedge ryz)$$

2. (a) Beweisen Sie, dass für $\Sigma \subseteq \text{Sen}(\mathcal{L})$ und $\mathcal{K} \subseteq \text{Str}(\mathcal{L})$ gilt:

$$\mathcal{K} \subseteq \text{Mod}(\Sigma) \text{ gdw. } \Sigma \subseteq \text{Th}(\mathcal{K})$$

.

- (b) Sei $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \text{Sen}(\mathcal{L})$ mit $\text{Mod}(\Sigma_1) = \text{Mod}(\Sigma_2)$ und Σ_1 endlich. Verwenden Sie Kompaktheit um zu zeigen, dass es eine endliche Teilmenge $\Sigma'_2 \subseteq \Sigma_2$ so existiert, dass $\text{Mod}(\Sigma_1) = \text{Mod}(\Sigma'_2)$.

3 Februar 2011

You may assume the soundness and completeness theorems for first-order logic in answering both questions.

1. Let $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ where:

$$\alpha = (\forall x)(\exists y)(Rxy)$$

$$\beta = \neg(\exists x)(\exists y)(Rxy \wedge Ryx)$$

$$\gamma = (\forall x)(\forall y)(\forall z)((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$$

- (a) Show that Σ is consistent.
(b) Use resolution to prove that:

$$\Sigma \vdash (\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow \neg(\forall z)(Ryz \rightarrow Rzx))$$

I.e., put the appropriate formulas into prenex normal form, skolemize, translate into clauses, and use resolution.

2. Let \mathcal{L} be the language of directed graphs, i.e., with one binary relation symbol R :

- (a) For each $n \in \mathbb{N}$ give an \mathcal{L} -formula $\varphi_n(x, y)$ for “there is a path of length n from x to y ”; i.e., such that for any directed graph \mathcal{A} and assignment h into \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} \models \varphi_n(x, y)[h] \iff \text{there is a path of length } n \text{ from } h(x) \text{ to } h(y) \text{ in } \mathcal{A}$$

(A path is a sequence of vertices connected by directed edges.)

- (b) Let \mathcal{L}' be \mathcal{L} extended with two extra constant symbols c_1 and c_2 . Show that there is no \mathcal{L} -formula $\varphi(x, y)$ expressing “there is a path from x to y ” by considering the logical implication:

$$\{\neg\varphi_n(c_1, c_2) \mid n \in \mathbb{N}\} \vdash \neg\varphi(c_1, c_2)$$

4 September 2010

Sie können zum Beantworten beider Fragen den Korrektheits- und Vollständigkeitssatz annehmen.

1. Zeigen Sie, dass $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ konsistent ist, wobei:

$$\begin{aligned}\alpha &= (\forall x)(\exists y)(Rxy \wedge \neg Ryx) \\ \beta &= (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)\end{aligned}$$

Verwenden Sie Resolution um zu zeigen

$$\Sigma \vdash (\forall x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \wedge Rxz) \wedge \neg Ryz)$$

d.h. schreiben Sie die benötigten Formeln in pränexer Normalform, skolemisieren Sie, übersetzen Sie in Klauseln und verwenden Sie Resolution.

2. Beweisen sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für eine beliebige \mathcal{L} -Theorie Σ .

- (i) Σ ist vollständig (es gibt eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{A} so, dass $\Sigma = Th\{\mathcal{A}\}$);
- (ii) Σ ist maximal konsistent (Σ ist konsistent und falls $\Sigma' \supseteq \Sigma$ konsistent ist, dann gilt $\Sigma' = \Sigma$).