Mathematische Logik & Modelltheorie

Bruno Senti

17. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1 September 2016

Dozent: Prof. Dr. George Metcalfe

Sie können zur beantwortung der Fragen das Korrektheits- , Vollständigkeits- und Kompaktheitstheorem voraussetzen.

---

1. (3 Punkte)

   (a) Finden Sie eine Formel mit der Wahrheitstabelle.

p1	*p2*	*p3*	*???*
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

   (b) Beweisen Sie $\{\vee, \wedge, \neg\}$ ist funktional vollständig.

   (c) Beweisen Sie $\{\rightarrow, \bot\}$ ist funktional vollständig.

2. (3 Punkte)

   (a) Zeigen Sie

   $\{(\exists x)(r_1x \wedge r_2x), (\exists x)(r_2x \wedge r_3x), (\exists x)(r_1x \wedge r_3x)\} \not\models (\exists x)(r_1x \wedge r_2x \wedge r_3x)$

   (b) Benutzen sie Skolemisierung und Resolution, um Folgendes zu beweisen:

   $$\{(\forall x)(r_1x \vee r_2x), (\forall x)(\exists y)(r_1x \rightarrow r_2y),\} \models (\exists x)(r_2x)$$

3. (4 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Klassen elementar sind:

      i. die Klasse aller Gruppen

      ii. die Klasse aller Gruppen mit höchstens zwei Elementen

      iii. die Klasse aller unendlichen Gruppen

   (b) Beweisen Sie : $\mathcal{K} \subseteq Str(\mathcal{L})$ ist endlich axiomatisierbar (d.h. $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$ für ein endliches $\Sigma \subseteq Sen(\mathcal{L})$) genau dann, wenn $\mathcal{K}$ und $Str(\mathcal{L}) \backslash \mathcal{K}$ elementar sind.

2 September 2012

Sie können zur beantwortung der Fragen das Korrektheits- , Vollständigkeits-theorem annehmen.

---

1. (a) Definieren Sie: $\Sigma \subseteq Sen(\mathcal{L})$ is widerspruchsvoll.

   (b) Beweisen Sie, dass

   $$\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x+y)+z \approx x+(y+z)), (\forall x)(x+x \approx x)\} \not\models (\forall x)(\forall y)(x+y \approx y+x)$$

   .

   (c) Benutzen sie Pränex Normalform, Skolemisierung und Resolution,, um Folgendes zu beweisen:

   $$\{(\forall x)(\exists y)(rxy)\} \models (\forall x)(\exists y)(\exists z)(rxy \wedge ryz)$$

2. (a) Beweisen Sie, dass für $\Sigma \subseteq Sen(\mathcal{L}$ und $\mathcal{K} \subseteq Str(\mathcal{L})$ gilt:

   $$\mathcal{K} \subseteq Mod(\Sigma) \text{ gdw. } \Sigma \subseteq Th(\mathcal{K})$$

   .

   (b) Sei $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq Sen(\mathcal{L})$ mit $Mod(\Sigma_1) = Mod(\Sigma_2)$ und Σ_1 endlich. Verwenden Sie Kompaktheit um zu zeigen, dass es eine endliche Teilmenge $\Sigma_2' \subseteq \Sigma_2$ so exisitiert, dass $Mod(\Sigma_1) = Mod(\Sigma_2')$.

3 Februar 2011

You may assume the soundness and completeness theorems for first-order logic in answering both questions.

---

1. Let $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ where:

$$\begin{aligned}\alpha &= (\forall x)(\exists y)(Rxy)\\ \beta &= \neg(\exists x)(\exists y)(Rxy \wedge Ryx)\\ \gamma &= (\forall x)(\forall y)(\forall z)((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)\end{aligned}$$

.

   (a) Show that Σ is consistent.

   (b) Use resolution to prove that:

$$\Sigma \vdash (\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow \neg(\forall z)(Ryz \rightarrow Rzx)$$

   I.e., put the appropriate formulas into prenex normal form, skolemize, translate into clauses, and use resolution.

2. Let $\mathcal{L}$ be the language of directed graphs, i.e., with one binary relation symbol R:

   (a) For each $n \in \mathbb{N}$ giva an $\mathcal{L}$-formula$\varphi_n(x, y)$ for "there is a path of length $n from x to y$ "; i.e., such that for any directed graph $\mathcal{A}$ and assignment $h into \mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi_n(x, y)[h] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{there is a path of length } n \text{ from } h(x) \text{ to } h(y) \text{ in } \mathcal{A}$$

   (A path is a sequence of vertices connected by directed edges.)

   (b) Let $\mathcal{L}'$ be $\mathcal{L}$ extended with two extra constant symbols c_1 and c_2. Show that there is no $\mathcal{L}$-formula $\varphi(x, y)$ expressing "there is a path from x to y" by considering the logical implication:

$$\{\neg\varphi_n(c_1, c_2) \mid n \in \mathbb{N}\} \vdash \neg\varphi(c_1, c_2)$$

4 September 2010

Sie können zum Beantworten beider Fragen den Korrektheits- und Vollständigkeitssatz annehmen.

---

1. Zeigen Sie, dass $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ konsistent ist, wobei:

$$\alpha = (\forall x)(\exists y)(Rxy \wedge \neg Ryx)$$
$$\beta = (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$$

   Verwenden Sie Resolution um zu zeigen

$$\Sigma \vdash (\forall x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \wedge Rxz) \wedge \neg Ryz)$$

   d.h. schreiben Sie die benötigten Formeln in pränexer Normalform, skolemisieren Sie, übersetzen Sie in Klauseln und verwenden Sie Resolution.

2. Beweisen sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für eine beliebige $\mathcal{L}$-Theorie Σ.

   (i) Σ ist vollständig (es gibt eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ so, dass $\Sigma = Th\{\mathcal{A}\}$);

   (ii) Σ ist maximal konsistent (Σ ist konsistent und falls $\Sigma' \supseteq \Sigma$ konsistent ist, dann gilt $\Sigma' = \Sigma$.