Apellidos: Nombre:

SEGUNDO PARCIAL DE MDTI 2023-2024 Nº de hojas:

NOTAS:

a) **Todas las afirmaciones deben justificarse.**

b) **Se valorará la calidad de la exposición de la respuesta, así como la precisión, concisión y rigor de esta.**

1. *(0.2 p)* En el modelo de Barabasi, ¿qué nodos tienen una mayor tasa de crecimiento? Justifica tu respuesta.

2. *(0.2 p)* Considera dos redes aleatorias con el mismo número de nodos y probabilidades respectivas $p_1 = 0.002$ y $p_2 = 0.01$, ¿cuál de las dos tendrá mayor número de aristas? Justifica tu respuesta.

3. *(0.2 p)* ¿Qué se entiende por componente gigante? Justifica tu respuesta.

4. *(0.2 p)* ¿Por qué las redes libres de escala reciben este nombre? Justifica tu respuesta.

5. *(0.6 p)* El taller "Sobre ruedas" tiene una línea de servicio destinada únicamente al recambio de ruedas. Si la llegada de los coches sigue una distribución de proceso Poisson a una tasa de 5 coches a la hora, siendo el tiempo de servicio exponencial y se sabe que el tiempo medio de espera en el sistema es de 48 minutos:

a) ¿Cuál es el número medio de coches esperando a ser atendido en una línea de servicio?

b) ¿Cuál es el tiempo medio que dedica el operario a cada coche?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al llegar un coche se encuentre que hay otro esperando en la cola?

Justifica tus respuestas.

6. Tenemos una fuente de memoria nula con alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y probabilidades $P(a) = 0.2$, $P(b) = 0.15$, $P(c) = 0.1$, $P(d) = 0.1$, $P(e) = 0.2$, $P(f) = 0.15$ y $P(g) = 0.1$. Además, tenemos un alfabeto código $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$ y la siguiente codificación h: $h(a) = a$, $h(b) = b$, $h(c) = c$, $h(d) = bb$, $h(e) = ab$, $h(f) = bab$ y $h(g) = bc$.

a) *(0.6 p)* ¿Es la codificación unívocamente decodificable? Justifica tu respuesta.

b) *(0.6 p)* ¿Cumple la desigualdad de Kraft? Justifica tu respuesta.

c) *(1 p)* Propón una codificación instantánea para la fuente empleando el método de Shannon.

d) *(0.6 p)* Calcula el rendimiento de la codificación propuesta.

e) *(1 p)* ¿Es la codificación propuesta unívocamente decodificable? Justifica tu respuesta.

7. La secuencia de estados climáticos de una ciudad puede entenderse como una fuente de información de Markov tomando como símbolos los estados climáticos: soleado (S), nublado (N), lluvioso (L) y nevado (N). Considera las siguientes probabilidades de transición entre estados:

$P(S\|S)$	0.6
$P(N\|S)$	0.3
$P(L\|S)$	0.1
$P(S\|N)$	0.4
$P(N\|N)$	0.5
$P(L\|N)$	0.1
$P(S\|L)$	0.2
$P(N\|L)$	0.3
$P(L\|L)$	0.5

a) *(0.4 p)* Dibuja el diagrama de estados de la fuente. ¿De qué orden es la fuente? Justifica tu respuesta.

b) *(0.4 p)* ¿Se trata de una fuente ergódica? Justifica tu respuesta.

c) *(1 p)* Calcula la entropía de la fuente.

d) *(1 p)* Calcula la entropía de la extensión de grado 5 de la fuente afín asociada a la fuente de Markov.

e) *(1 p)* En la fuente de Markov, ¿cuál es la información mutua entre los estados S y N?

8. *(1 p)* La distribución log-normal es una distribución de probabilidad continua que aparece en una gran cantidad de fenómenos naturales, la cual está íntimamente relacionada con la distribución normal. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X con distribución log-normal es:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con $x \in (0, +\infty)$.

Adicionalmente, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X con distribución normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con $x \in \mathbb{R}$, y donde μ es la media y σ^2 es la varianza de la distribución.

Supongamos que tenemos una variable aleatoria cuya distribución es log-normal. Calcula su entropía.

Formulario Teoría de Colas

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad L_S = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W_S = W_Q + t_S$$

$$L_S = \lambda.W_S \qquad P(W_Q > t) = \rho e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$L_Q = \lambda.W_Q \qquad P(W_S > t) = e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$\mathrm{P}_n = \begin{cases} 1-\rho & \text{para } n = 0 \\ \rho^n(1-\rho) & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

Algoritmo para averiguar si una codificación es unívocamente decodificable

if $(\exists a, b \in \mathcal{A} : (a \neq b) \wedge (f(a) = f(b)))$ then:
    return `false`
$A = \{u : (\exists x, y \in f(\mathcal{A}) : (x \neq y) \wedge (xu = y))\}$
if $(A \cap f(A) \neq \emptyset)$ then:
    return `false`
$A' = \emptyset$
while $A \neq \emptyset$:
    $A' = A \cup A'$
    $B = \{u : ((\exists x \in f(\mathcal{A}) : xu \in A) \vee (\exists x \in A : xu \in f(\mathcal{A})))\}$
    $A = B - A'$
    if $(A \cap f(\mathcal{A}) \neq \emptyset)$ then:
        return `false`
return `true`