***Daugianario šaknų grubaus ir tikslaus intervalo skaičiavimo pavyzdžiai.***

***Duotas daugianaris:***

$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0}$, $a_n > 0$

***Lygties $\boldsymbol{f(x) = 0}$ šaknų grubus įvertis:***

$|x| < 1 + \frac{\max\limits_{0 \le i \le n-1} |a_i|}{a_n} = R$

***Lygties $\boldsymbol{f(x) = 0}$ šaknų tikslesnis įvertis:***

*(teigiamoms šaknims)*

$x \le R_{teig}$, $R_{teig} = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}}$, $k = n - \max\limits_{0 \le i \le n-1}(i, a_i < 0)$, $B = \max\limits_{0 \le i \le n-1}(|a_i|, a_i < 0)$

*(neigiamoms šaknims)*

*Nagrinėjamas daugianaris $f(-x)$, jeigu n lyginis, ir $-f(-x)$, jei n nelyginis.*

***Galutinis įvertis:***

$-\min(R, R_{neig}) \le x \le \min(R, R_{teig})$

***1 pavyzdys***

Duota lygtis:

$$0.25x^5 - 6x^4 + 51.75x^3 - 199x^2 + 333x - 180 = 0$$

Žinoma, kad šios lygties sprendiniai $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 10$. Daugianario eilė $n = 5$.

Intervalų apskaičiavimui naudojami koeficientai:

| $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | $-6$ | 51.75 | $-199$ | 333 | $-180$ |

*Skaičiuojamas grubus įvertis:*

$$\mathrm{R} = 1 + \frac{\max\limits_{0 \le i \le 4}\{|-6|, |51.75|, |-199|, |333|, |-180|\}}{0.25} = 1 + \frac{333}{0.25} = 1333$$

Grubus lygties šaknų intervalų įvertis $(-1333;\ 1333)$.

*Skaičiuojamas tikslus įvertis teigiamoms šaknims:*

Išrenkamas absoliutine verte didžiausias neigiamas koeficientas (nevertinant koeficiento prie aukščiausio laipsnio) $\mathrm{B} = \max\limits_{0 \le i \le 4}(|-6|; |-199|; |-180|) = 199$

Pagal didžiausią neigiamo koeficiento indeksą (nevertinant koeficiento prie aukščiausio laipsnio) apskaičiuojama k reikšmė:

$$\mathrm{k} = 5 - \max\limits_{0 \le i \le 4}(4; 2; 0) = 5 - 4 = 1$$

Apskaičiuojamas tikslesnio įverčio viršutinis rėžis:

$$\mathrm{R_{teig}} = 1 + \sqrt[1]{\frac{199}{0.25}} = 797$$

*Skaičiuojamas tikslus įvertis neigiamoms šaknims:*

Tikslesnis įvertis neigiamoms šaknims skaičiuojamas „apsukant“ x ašį ir užtikrinant, kad $a_n > 0$. Duoto daugianario atveju, n yra nelyginis, tai nagrinėjamas daugianaris $-f(-x)$, todėl koeficientai pakeičiami:

| $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 6 | 51.75 | 199 | 333 | 180 |

$B$ reikšmės apskaičiuoti negalima, nes nėra neigiamų koeficientų, todėl apatinis tikslus įvertis $R_{neig} = 0$, t.y. neigiamų šaknų nėra.

Galutinis daugianario šaknų rėžių įvertinimas:

$$-\min(1333; 0) \leq x \leq \min(1333; 797)$$

$$0 \leq x \leq 797$$

***2 pavyzdys***

Duota lygtis:

$$2x^4 - 30x^3 + 64x^2 + 504x - 1440 = 0$$

Žinoma, kad šios lygties sprendiniai $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 10$, $x_5$. Daugianario eilė $n = 4$.

Intervalų apskaičiavimui naudojami koeficientai:

| $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-30$ | 64 | 504 | $-1440$ |

*Skaičiuojamas grubus įvertis:*

$$\mathrm{R} = 1 + \frac{\max\limits_{0 \leq i \leq 3}\{|-30|, |64|, |504|, |-1440|\}}{2} = 1 + \frac{1440}{2} = 721$$

Grubus lygties šaknų intervalų įvertis $(-721;\ 721)$.

*Skaičiuojamas tikslus įvertis teigiamoms šaknims:*

Išrenkamas absoliutine verte didžiausias neigiamas koeficientas (nevertinant koeficiento prie aukščiausio laipsnio) $\mathrm{B} = \max\limits_{0 \leq i \leq 3}(|-30|; |-1440|) = 1440$

Pagal didžiausią neigiamo koeficiento indeksą (nevertinant koeficiento prie aukščiausio laipsnio) apskaičiuojama k reikšmė:

$$\mathrm{k} = 4 - \max_{0 \leq i \leq 3}(3; 0) = 4 - 3 = 1$$

Apskaičiuojamas tikslesnio įverčio viršutinis rėžis:

$$\mathrm{R_{teig}} = 1 + \sqrt[1]{\frac{1440}{2}} = 721$$

*Skaičiuojamas tikslus įvertis neigiamoms šaknims:*

Tikslesnis įvertis neigiamoms šaknims skaičiuojamas „apsukant“ x ašį ir užtikrinant, kad $a_n > 0$. Duoto daugianario atveju, n lyginis, tai nagrinėjamas daugianaris $f(-x)$, todėl koeficientai pakeičiami:

| $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 30 | 64 | $-504$ | $-1440$ |

Išrenkamas absoliutine verte didžiausias neigiamas koeficientas (nevertinant koeficiento prie aukščiausio laipsnio) $B = \max_{0 \le i \le 3}(|-504|, |-1440|) = 1440$

Pagal didžiausią neigiamo koeficiento indeksą (nevertinant koeficiento prie aukščiausio laipsnio) apskaičiuojama k reikšmė:

$$k = 4 - \max_{0 \le i \le 3}(1; 0) = 4 - 1 = 3$$

Apskaičiuojamas tikslesnio įverčio apatinis rėžis:

$$R_{neig} = 1 + \sqrt[3]{\frac{1440}{2}} \approx 9.9628$$

Galutinis daugianario šaknų rėžių įvertinimas:

$$-\min(721; 9.9628) \le x \le \min(721; 721)$$

$$-9.9628 \le x \le 721$$

***3 pavyzdys***

Duota lygtis:

$$-0.25x^5 + 6x^4 - 51.75x^3 + 199x^2 - 333x + 180 = 0$$

Žinoma, kad šios lygties sprendiniai $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 10$. Daugianario eilė $n = 5$. Tačiau įverčių pagal pateiktas formules apskaičiuoti negalima, nes $a_5 < 0$. Tokiu atveju, padauginame abi lygties puses iš (-1) ir galime nagrinėti lygtį

$$0.25x^5 - 6x^4 + 51.75x^3 - 199x^2 + 333x - 180 = 0$$

Šio lygties šaknų įverčiai buvo apskaičiuoti 1pavyzdyje.