Матричные разложения

Практикум на ЭВМ 2018/2019

Нерус Даниил Вячеславович

МГУ имени М.В. Ломоносова , факультет ВМК, кафедра ММП

30 ноября 2018 г.

Задачи матричных разложений

- Быстрое нахождение обратной матрицы
- Нахождение собственных значений и собственных векторов
- Приближение матрицы другой, сохранив при этом нужные свойства
- Быстрое решение систем линейных уравнений
- Ускорение обучения
- Аппроксимация признакового пространства другим, меньшей размерности

LU-разложение

LU-разложением матрицы A называется равенство:

$$A = LU$$

где L — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, U — верхнетреугольная матрица.

Теорема: Квадратная матрица с ненулевыми главными минорами однозначно представляется в виде произведения LU, где L — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, U — верхнетреугольная матрица.

Исключение по столбцу

Один из способов основан на алгоритме Гаусса. Преобразования k -го шага алгоритма Гаусса эквивалентны умножению системы

$$
\begin{cases}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n = f_1, \\
\qquad\qquad u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n = f_2, \\
\qquad\qquad\qquad \ldots.. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}x_n = f_n,
\end{cases}
$$

Слева на матрицу

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & -\mu_{k+1,k} & & & \\
 & & \vdots & 1 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & -\mu_{n,k} & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Где μ - множители Гаусса вычисляемые по формуле:

$$\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Таким образом, прямой ход Гаусса заключается в преобразованиях, переводящих систему $Ax = b$ в эквивалентную систему:

$$M^{(n-1)}M^{(n-2)}...M^{(1)}Ax = M^{(n-1)}M^{(n-2)}...M^{(1)}b$$

или:

$$Ux = f$$

Обозначим $L^{-1} = M^{(n-1)}M^{(n-2)}...M^{(1)}$ Следовательно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_{2,1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \dots & \mu_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом $A = LU$

Использование LU-разложения

Предположим, что требуется решить несколько систем $Ax = b^{(1)}, \ldots, Ax = b^{(s)}$. Раскладываем матрицу A за $(2/3)\mathrm{n}^3 + \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$ и решаем какждую систему за $2\mathrm{n}^2 + \mathrm{O}(\mathrm{n})$.

LDL^T-разложение

LDL^T-разложением матрицы A называется равенство:

$$A = LDL^T$$

Пусть A — симметричная, с отличными от нуля угловыми минорами => A допускает LU-разложение. Пусть D — матрица составленная из диагональных элементов U. Итак, $A = LDD^{-1}U$. Т.к. A — симметричная то, $D^{-1}U = L^T$

Если LDL^T-разложение найдено, то для решения системы уравнение $Ax = b$ требуется поочередно решить 3 системы. $Ly = b$, $Dz = y$, $L^Tx = z$. Сложность этого O(n^2).

LDL^T-разложение

Найти LDL^T-разложение можно по формулам:

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}, \qquad i = j+1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, n-1$$

LDL^T-разложение

Метод Ньютона основан на квадратичной аппроксимации f в окрестности текущей точки x_k:

$$f(x_k + d_k) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d_k + \frac{1}{2} d_k^T \nabla^2 f(x_k) d_k \rightharpoonup \min_{\mathrm{d_k}}$$

$$\nabla d_k = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k) d_k = 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k)$$

$$d_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Один шаг в методе Ньютона выглядит как:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Решение проблемы отсутствия положительной определенности:

$$L_k D_k L_k^T d_k = -g_k \Rightarrow d_k = -L_k^{-T} D_k^- 1 L_k^{-1} g_k$$

QR-разложение

Для произвольной m $\times$ n матрицы A ранга n существуют и единственны матрицы ортогональная Q размера m $\times$ n и верхнетреугольная матрица R размера n $\times$ n с положительной диагональю, такие, что:

$$A = QR$$

Нахождение QR-разложения

Пусть f = (f$_1$ ... f$_n$) — некоторый базис n-мерном евклидовом пространстве E. Модифицируя этот базис, мы будем строить новый базис e = (e$_1$ ... e$_n$), который будет ортонормированным. Последовательно вычисляем векторы g$_1$ и e$_1$, g$_2$ и e$_2$ и т.д. по формулам:

$$g_1 = f_1, \qquad e_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|}$$

$$g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1,, \qquad e_2 = \frac{g_2}{\| g_2 \|}$$

$$g_3 = f_3 - (f_3, e_1)e_1 - (f_3, e_2)e_2, \qquad e_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|}$$

$$\dots$$

QR-алгоритм

Известно, что произвольная квадратная матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной и верхней треугольной матриц. Такое разложение называется QR-разложением. Пусть $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$ — исходная матрица. Для $\mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется QR-разложение:

$$A_k = Q_k R_k$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T Q_k R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$$

Видно, что матрицы A_{k+1} и A_k подобны. Следовательно все матрицы A_1, A_2 ... и имеют те же собственные значения. **Теорема:** $(\mathrm{A})_k$ при $\mathrm{k} \longrightarrow \infty$ сходится к верхней треугольной, с собственными числами на диагонали, когда $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$