

MÉTODOS NUMÉRICOS: RUNGE KUTTA - LUCILA PORTO

*Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires*

RESUMEN

El análisis numérico o cálculo numérico es la rama de las matemáticas encargada de diseñar algoritmos⁴², procedimientos que resuelven problemas y realizan cálculos puramente aritméticos (es decir, suma, resta, multiplicación, división), para a través de éstos, simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real.

Sin embargo, si se remonta a la historia de esta rama, existe un punto de quiebre que marca un antes y un después; la aparición de las computadoras. Desde la antigüedad hasta 1945, la velocidad de cálculo se había multiplicado por 10 mediante rudimentarios artefactos (ej., el ábaco), desde entonces hasta ahora se ha multiplicado por un millón o más. Esto supone que una hora de trabajo de una computadora equivale a 200 años de trabajo de una persona, lo que permite realizar tareas inalcanzables en otros tiempos.

Los algoritmos están hechos para ser ejecutados por los ordenadores o cualesquiera otras máquinas de cálculo, por ende, lo que puede resultar sencillo o cómodo para éstos (por ejemplo, métodos iterativos), puede resultar fácticamente imposible o extremadamente laborioso realizarlo a mano y viceversa. Es por ello que hay que tomar en cuenta las características especiales y limitaciones tecnológicas a la hora de construir un algoritmo. Esto significa que no todos pueden ser tratados por una computadora, pues algunos exigen más de 100 años de trabajo de la tecnología actual más potente para ser llevados a cabo.

Por ejemplo, un algoritmo muy utilizado en el curso de Matemática para Economistas es el Método de Cramer, con el que se resuelven sistemas de 2x2, 3x3.... Sin embargo, vale recordar que para un sistema de $n \times n$ se necesitan $n!n!$ operaciones aritméticas. La regla de Cramer para un sistema de $n \times n$ requiere calcular $n+1$ determinantes distintos, con un coste aproximado de $n!n(n+1)!$ operaciones. Si nos enfrentamos a un sistema de 100 ecuaciones con 100 incógnitas, el algoritmo emplea $n!n(n+1)! \cong 9,4259 \times 10^{161}$ operaciones. Las cuales, sin ser comparadas no toman la magnitud que deberían. Si se toma como referencia la rapidez de cálculo de Pentium 4, que realiza 5×10^9 operaciones por segundo, si tuviese que resolver el sistema por el Método de Cramer tardaría unos $\frac{9,4259 \times 10^{161}}{5 \times 10^9 \times 86400 \times 360} = 5,9779 \times 10^{144}$ años.

(Vale recordar que la edad de nuestro sistema solar se estima en $1,5 \times 10^{10}$ años)

Mientras que, por otro lado, el método de Gauss, necesitaría tan solo unas $6,6667 \times 10^5$ operaciones, es decir una fracción de segundo.

Si bien a simple vista puede parecer preferible la solución exacta frente a la aproximada, esto supone la existencia de dicha solución e ignora lo laborioso, por no decir imposible en ciertos casos, que podría llegar a resultar. Los métodos numéricos solucionan este tipo de problema mediante la búsqueda de una solución numérica aproximada y el cálculo del error asociado.

⁴² Un algoritmo es una secuencia ordenada y finita de pasos, exenta de ambigüedades, que seguidas en su orden lógico nos conduce a la solución de un problema específico.

INTRODUCCIÓN

Habiendo mencionado la importancia de los Métodos Numéricos, en el presente trabajo se desarrollará su uso para la aproximación de la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

En la primera sección se hará una breve introducción a este tipo de ecuaciones, para luego pasar a los métodos numéricos, siendo el Método de Euler, Taylor y Runge Kutta los que se tratarán en las siguientes secciones. Más adelante, se mencionan aplicaciones de estos métodos, se realizará una comparación entre estos y; en la última sección, se desarrollarán las notas en el apéndice.

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Una ecuación diferencial es aquella donde aparecen variables y sus respectivas derivadas. Dependiendo si las derivadas son totales o parciales, las ecuaciones diferenciales se dividen en ordinarias (EDO) y parciales, respectivamente. A su vez, las EDO se clasifican en términos de orden y grado. El orden está indicado por la mayor derivada, mientras que el grado es la potencia de ésta mayor derivada.

Este trabajo se ocupará de las ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir aquellas donde todas las derivadas son respecto a una sola variable independiente, definida como t (tiempo). A su vez, se trabajará solamente con ecuaciones de primer orden, siendo éstas las de mayor relevancia ya que las de orden superior pueden ser expresadas en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

En general, las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1)$$

Esta ecuación tiene como solución una "familia" de funciones debido a que la constante arbitraria no tiene un valor definido, no obstante, si se agrega el problema de valores iniciales,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

la solución es única.

Si bien puede probarse que ciertos problemas de valores iniciales satisfacen condiciones que aseguran la existencia y unicidad⁴³ de su solución, en general no existen expresiones analíticas o fórmulas cerradas que la representen; de ahí la importancia de los métodos numéricos.

Por ejemplo:

*Un caso tan simple como la oscilación de un péndulo tiene asociada la siguiente fórmula sin solución analítica:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-g}{l} \operatorname{sen}(y)$$

*El sistema de ecuaciones desarrollado por Lorenz para la Teoría del Caos tampoco tiene solución analítica:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

1.1. MÉTODOS NUMÉRICOS

"Un método numérico es un algoritmo que permite obtener aproximaciones de la solución de una EDO de una manera numérica (valga la redundancia)"⁴⁴

Los métodos numéricos se clasifican en métodos de *un paso* o *multipaso*. En el primer caso, la sucesión que aproxima la solución y_k se genera de forma recursiva a partir de los términos inmediatamente anteriores, esto es y_{k-1} . Por otro lado, en los métodos multipaso, esta sucesión se construye a partir de una ecuación en diferencias con orden mayor que uno. Este trabajo se centrará en los métodos de un paso.

El objetivo de este tipo de métodos es obtener una sucesión finita de puntos que satisfacen aproximadamente la solución, ya que no es posible encontrar una fórmula que satisfaga el determinado problema.

Dado un intervalo $[t_0; T] \in \mathbb{N}$, dividiendo el intervalo en n partes equidistantes $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, el objetivo es encontrar un conjunto de valores $\{y_k; 1 \leq k \leq n\}$ que se aproximen a los valores que toma la solución en el conjunto $\{t_k; 1 \leq k \leq n\}$, es decir $y_k \approx y(t_k)$ con $1 \leq k \leq n$; siendo y_k el valor aproximado y $y(t_k)$, el valor exacto. Ese conjunto se denomina solución numérica del problema de valor inicial.

⁴³ Dado el problema del valor inicial suponemos que se verifican las hipótesis del teorema de Picard, o también conocido como el teorema de Cauchy-Lipschitz o teorema de existencia y unicidad de solución de EDO.

Para leer más sobre estas condiciones:

"Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias" - Noemí Wolanski (Capítulo 2: Existencia y Unicidad de solución)

⁴⁴ Matemáticas para la economía dinámica - José Luis Bonifaz Diego Winkelried.

Los métodos que se abordarán se caracterizan por obtener y_{k+1} a partir de y_k .

1.1.1 MÉTODO DE EULER

Dado el problema del valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y' = f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}\tag{3}$$

Reescribiendo la derivada como en su forma formal, es decir por definición, se llega a:

$$y' = f(t, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}\tag{4}$$

Considerando a $h \cong 0$, reescribiendo, se llega a:

$$f(t, y) \cong \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}\tag{5}$$

$$f(t, y)h \cong y(t_k + h) - y(t_k)\tag{6}$$

$$y(t_k + h) \cong f(t, y)h + y(t_k)\tag{7}$$

$$y_{k+h} = y_k + f(t, y)h\tag{8}$$

El Método de Euler aproxima la solución del problema del valor inicial mediante la tangente de dicha solución. Se toma como valor y_1 al que toma en t_1 la recta que pasa por $(t_0; y_0)$ y tiene como pendiente $f(t_0; y_0)$.

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h\tag{10}$$

siendo $h = \frac{T-t_0}{n}$. A continuación, se repite el proceso para los demás puntos del dominio. Por lo tanto, la expresión general del Método de Euler resulta:

$$y_{k+h} = y_k + f(t_k, y_k)h\tag{11}$$

Este Método linealiza la función a partir del punto (t_0, y_0) y de la pendiente en ese punto; es decir, su derivada $y' = f(t_0, y_0)$. En conclusión, cuanto más semejante sea la función a la recta tangente, menor será la diferencia entre la función y el punto aproximado; y en caso contrario, el error será cada vez mayor.

Además, como toda solución numérica, el Método de Euler tiene básicamente dos fuentes de errores: el error computacional, producto de evaluar funciones implícitas o por el redondeo o truncamiento de las cifras; y el error de discrecionalización, producto de considerar una secuencia, por definición discreta, como solución de una función continua. Todos estos errores que se ven claramente en el gráfico; son la diferencia entre la función real y los valores aproximados.

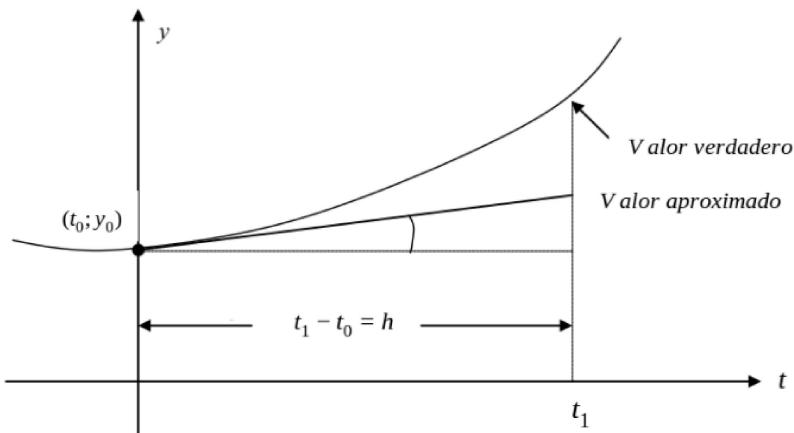


Gráfico 1: Gráfico Método de Euler⁴⁵

Para disminuir el error hay dos opciones: aumentar el número de iteraciones, es decir, aumentar el número de evaluaciones de la función realizadas para conseguir la aproximación, reduciendo el tamaño de la variación de t , lo que es igual a disminuir h . De esta manera, en vez de realizar una sola iteración de t_0 a t_1 , el intervalo se divide en más partes, y por ende se realizarán más evaluaciones. No obstante, esto vuelve muy laborioso el método y, además, tiene como contrapartida que se acumula error computacional. La otra opción es incrementar el orden la aproximación⁴⁶.

⁴⁵ Gráfico del Libro: Autar Kaw, Egwu Eric Kalu (2010) *Numerical Methods with Applications*; Florida, EEUU; Abridged (Second Edition).

⁴⁶ Ver Apéndice sobre el orden de las aproximaciones.

Comparando la fórmula del Método de Euler con la expansión de Taylor

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_k + h) = y(t_k) + f(t_k; y(t_k))h + O(h^2) \\ y(t_k + h) = y(t_k) + f(t_k; y(t_k))h + \frac{1}{2!}h^2[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] + \cdots + \frac{1}{n!}h^n f^{n-1}(\cdot) + O(h^{n+1}) \end{array} \right. \quad (12)$$

El Método de Euler puede interpretarse como la aproximación que resulta de truncar esta serie en el término lineal. Una manera de mejorar la exactitud del método es utilizar más términos de la serie de Taylor.

1.1.2 SERIES DE TAYLOR

La serie de Taylor tiene infinitos términos,

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_n(y(t_k); t_k) + O(h^{n+1}) \quad (13)$$

siendo

$$T_n(y(t_k), t_k) = \sum_{j=1}^n \frac{d^j}{dt^j} y(t_k) \frac{h^{j-1}}{j!} \quad (13.1)$$

por lo que, solo en los casos especiales, como en polinomios finitos, la serie tiene un finito, valga la redundancia, número de términos. Por ende, salvo en este último caso, siempre que se use este tipo de método numérico para calcular el valor de la función, éste va a ser una aproximación.

Las series de Taylor con expansión mayor o igual a 2 tienen un punto débil: el cálculo de derivadas parciales, el cual para determinadas funciones puede ser una tarea muy engorrosa y de un gran costo computacional. Los trabajos desarrollados por Carl Runge (1856-1927) y Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), en el año 1900 aproximadamente, tienen como objetivo conseguir aproximaciones tan precisas como las de Taylor, pero evitan el cálculo de derivadas parciales.

1.1.3 RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN⁴⁷

Utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2, se obtiene que

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_2(y(t_k); t_k) + O(h^3) \quad (14)$$

⁴⁷ El Método de Euler puede ser considerado como el Método de Runge Kutta de orden 1.

La idea es determinar una función $R_2(y(t_k); t_k)$ tal que⁴⁸

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hR_2(y(t_k); t_k) + O(h^3) \quad (15)$$

y que no involucre derivadas de $f(\cdot)$.

De las igualdades anteriores se llega a que

$$hT_2(y(t_k); t_k) - hR_2(y(t_k); t_k) = O(h^3) \quad (16)$$

⁴⁹

$$T_2(y(t_k); t_k) - R_2(y(t_k); t_k) = O(h^2) \quad (17)$$

Considerando que

$$T_2(y(t_k); t_k) = f(t_k; y(t_k)) + \frac{1}{2!}h[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] \quad (18)$$

Se propone

$$R_2(y(t_k); t_k) = Af(t_k; y(t_k)) + B[f(t_k + Ch; y(t_k)) + Chf(t_k; y(t_k))] \quad (19)$$

De las ecuaciones anteriores se desprende que

$$f(t_k + Ch; y(t_k)) + Chf(t_k; y(t_k)) = f(t_k; y(t_k)) + Ch[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] \quad (20)$$

Entonces reemplazando se llega a

$$R_2(y(t_k); t_k) = (A + B)f(t_k; y(t_k)) + BCCh[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] \quad (21)$$

Sabiendo que:

$$T_2(y(t_k); t_k) = f(t_k; y(t_k)) + \frac{1}{2!}h[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] \quad (22)$$

⁴⁸ Para el desarrollo completo ver en el Apéndice.

⁴⁹ El término $O(h^3)$ no se anula al operar las dos igualdades ya que no es un término lineal (Ver Apéndice).

Se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ BC = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (23)$$

Dependiendo qué valores se les asignen a las variables, se obtienen distintos métodos de orden 2. Se puede reescribir el sistema en función del valor que se le asigne a C:

$$\begin{cases} A = 1 - \frac{1}{2C} \\ B = \frac{1}{2C} \end{cases} \quad (24)$$

De esta manera, asignando un valor a C, se definen las otras constantes. Los tres valores más utilizados son $1; \frac{1}{2}; y \frac{3}{4}$, siendo el Método de Heun, el Método del Punto Medio y el Método de Ralston, respectivamente.

En particular, si $c = 1$, es decir una expansión unitaria, se obtiene $A = B = \frac{1}{2}$ y reemplazando en la ecuación propuesta, es decir en la ecuación (19):

$$R_2(y(t_k); t_k) = \frac{1}{2}f(t_k; y(t_k)) + \frac{1}{2}[f(t_k + h; y(t_k)) + hf(t_k; y(t_k))] \quad (25)$$

lo cual implica que la fórmula de aproximación es,

$$y(t_k + h) = y(t_k) + h \left\{ \frac{1}{2}f(t_k; y(t_k)) + \frac{1}{2}[f(t_k + h; y(t_k)) + hf(t_k; y(t_k))] \right\} + O(h^3) \quad (26)$$

que es la fórmula de iteración de Heun.

1.1.4 RUNGE KUTTA DE ORDEN 4

Este Método es uno de los más utilizados a la hora de aproximar una función ya que es un algoritmo que minimiza el número de cálculos por efectuar, mientras se maximiza la exactitud. A diferencia de los otros dos métodos, este realiza cuatro evaluaciones de la función en cada iteración y luego las pondera; mientras que RK2 solo realiza 2 y Euler, 1. Si

bien tiene un mayor costo para ser calculado, la precisión que se logra es mucho mayor y en menor número de iteraciones.

En general, para Runge Kutta de orden n se necesitan $S(n)$ evaluaciones de $f(\cdot)$ por cada paso, donde

$$S(n) = \begin{cases} n & \text{para } n \leq 4 \\ n + 1, & \text{para } n = 5, n = 6 \\ > n + 2 & \text{para } n \geq 7 \end{cases} \quad (27)$$

Para saber más sobre este método (RK4), su demostración y cálculo de las pendientes se recomienda la lectura de *Ecuaciones diferenciales- Paul Blanchard, Robert Devaney, Glen Hall (Capítulo 7.3: Métodos Numéricos - El Método de Runge Kutta)*

2. APPLICACIONES

El uso y utilidad de los métodos numéricos pueden ser cuestionados en cursos de Matemática para Economistas considerando que siempre se conoce la función y por ende si se reemplaza en el punto obtenemos el valor exacto y no una aproximación, o también, sabiendo que las derivadas parciales de las funciones con las que se trabaja no son muy laboriosas y pueden ser calculadas sin ningún tipo de dificultad. Sin embargo, lo cierto es que los economistas y actuarios no cuentan con este tipo de facilidades en la realidad.

Para ver aplicaciones de los métodos numéricos en modelos económicos y financieros se recomienda la lectura de:

*Steady-state invariance in high-order Runge–Kutta discretization of optimal growth models

Stefania Ragni, Fasma Diele, Carmela Marangi.

Este trabajo se basa en lo desarrollado por Mercenier y Michel, en el modelo de acumulación de capital de Kunkel y Von Dem Hagen y en el modelo neoclásico de crecimiento de Ramsey.

3. APÉNDICE

COMPARACIÓN DE MÉTODOS

Runge Kutta 1: Evalúa sólo una pendiente

Método Euler: Evalúa pendiente al inicio del intervalo en cada paso

Runge Kutta 2: Evalúa dos pendientes

Método Heun: Evalúa pendiente al inicio y en el extremo del intervalo en cada paso.

Método del Punto Medio: Evalúa pendiente al inicio y en la mitad del intervalo en cada paso.

Método de Ralston: Evalúa pendiente al inicio y en los $\frac{3}{4}$ del intervalo en cada paso.

Runge Kutta 4:

Evalúa las pendientes en cuatro puntos del intervalo y las pondera.

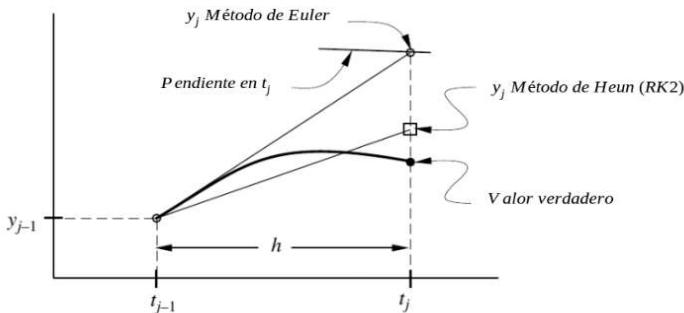


Gráfico 2: Método de Euler y Heun (Runge Kutta de segundo orden)

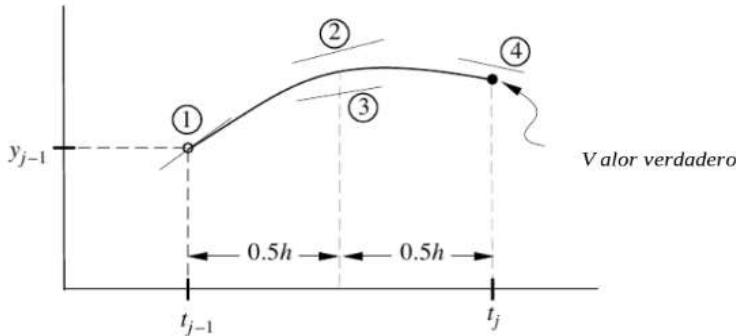


Gráfico 3: Método de Runge Kutta de cuarto orden.⁵⁰

⁵⁰ Los gráficos fueron realizados por Daniel Mejía en Integración Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

COMPARACIÓN NUMÉRICA DE LOS MÉTODOS

Dado $y'(.) = e^t$ donde $y(t_0) = 1$

De acuerdo a cómo se defina h , las aproximaciones van a ser:

$h=0.1$

t_k	y exacto	Euler	RK2	RK4
0	1	1	1	1
0.1	1.105170918	1.1	1.105	1.105170833
0.2	1.221402758	1.21	1.221025	1.221402571
0.3	1.349858808	1.331	1.349232625	1.349858497
0.4	1.491824698	1.4641	1.490902051	1.49182424
0.5	1.648721271	1.61051	1.647446766	1.648720639
0.6	1.8221188	1.771561	1.820428676	1.822117962
0.7	2.013752707	1.9487171	2.011573687	2.013751627
0.8	2.225540928	2.14358881	2.222788925	2.225539563
0.9	2.459603111	2.357947691	2.456181762	2.459601414
1	2.718281828	2.59374246	2.714080847	2.718279744

$h=0.5$

t_k	y exacto	Euler	RK2	RK4
0	1	1	1	1
0.5	1.648721271	1.5	1.625	1.6484375
1	2.718281828	2.25	2.640625	2.717346191

$h=1$

t_k	y exacto	Euler	RK2	RK4
0	1	1	1	1
1	2.718281828	2	2.5	2.708333333

Comparando los datos tabulados⁵¹ se puede concluir muy rápidamente que la precisión que se logra con el Método de Runge Kutta 4 es claramente superior a los otros métodos, sobre

⁵¹ Los cálculos fueron realizados en
http://www.mathstools.com/section/main/runge_kutta_calculator

todo con una sola iteración ($h=1$). De hecho, para lograr una eficacia similar o mayor fue necesario 10 iteraciones de Runge Kutta 2, es decir 20 evaluaciones de la función, frente a sólo una iteración y 4 evaluaciones de la función que requiere RK4. Por otro lado, el Método de Euler no logró resultados tan precisos en ninguno de los casos. No obstante, a medida que se agregan iteraciones, RK4 se hace notoriamente más laborioso frente a la no tanta precisión que se adquiere, por ejemplo, si se compara cuando $h=0.1$, la diferencia entre los resultados de RK2 y RK4 es centesimal y el número de evaluaciones es 20 para RK2 y 40 para RK4.

ORDEN DE UNA APROXIMACIÓN

Se dice que el método es de orden p si para todo

$t_k \in [a; b]$ para valores pequeños de h existen dos constantes M y p de tal manera que

$$|E| = Mh^p \quad (28)$$

Éste es conocido como el error de truncamiento. Es el error producto de cada paso.

El orden de un método está determinado por éste error local de truncamiento (ELT).

Un método es de orden p si su ELT se hace cero en h^{p+1}

NOTA: DEFINICIONES Y TIPOS DE ERROR

***ERROR GLOBAL:** diferencia entre el valor exacto y el obtenido por el método. En caso de haber varias iteraciones, el error global es igual a la suma de los errores locales. En general, este error no puede ser calculado o, en caso de ser posible, es muy costoso a nivel computacional.

***ERROR DE TRUNCAMIENTO:** es el que se produce en un paso al aplicar el método, suponiendo que en los pasos precedentes no ha existido ningún error. Sin embargo, para poder calcularlo, es necesario también el valor de la solución en ese paso para poder comparar lo exacto con lo obtenido con el método. Es por ello, que muchas veces tampoco es posible calcular este error. No obstante, si es posible calcular el orden de este error, el cual tiene mucha importancia ya que es el que define el orden del método.

***ERROR LOCAL:** es la diferencia entre la solución y lo obtenido por el método en un paso. A diferencia del error de truncamiento, este no supone exactitud en los puntos anteriores. No obstante, generalmente, ambos errores toman valores similares y tienen el mismo orden, salvo casos especiales.

El Método de Euler es de orden 1 ya que su ELT se hace cero en h^2 . El Método de Runge Kutta es de orden 2 si su ELT se hace cero en h^3 y es de orden 4 cuando su ELT se hace cero en h^5 . Es por esta razón que después de los términos de la aproximación, se suma el término del ELT con la siguiente forma:

$$\dots + O(h^{p+1}) \quad (29)$$

Para una expansión p-ésima de la serie de Taylor con dominio $[t; t_k + h]$,

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hf(t_k; y(t_k)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_k; y(t_k)) + \dots + \frac{h^p}{p!} f^{p-1}(.) + O(h^{p+1}) \quad (30)$$

Donde

$$O(h^{p+1}) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(t_k) \quad (30.1)$$

Analizando el error de truncamiento o resto de la expansión de Taylor

$$O(h^{p+1}) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(t_k) \quad (31)$$

Se llega a tres conclusiones:

- i) Métodos de mayor orden no implican necesariamente mayor eficacia del mismo ya que si las derivadas $f^{p+1}(.)$ se “comportan mal”; métodos de menor orden tendrán asociado un menor error.
- ii) Conociendo la fórmula del ELT, se puede elegir un h tal que consiga la eficacia buscada en el método.
- iii) Al no ser una fórmula del tipo lineal, se explica porque en la demostración de Runge Kutta de orden 2 al operar las igualdades, el término $O(h^3)$ no se elimina.

DESARROLLO COMPLETO DEMOSTRACIÓN DE RUNGE KUTTA 2

El método de Runge Kutta de orden n tiene la siguiente forma:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \sum_{i=1}^n a_i K_i + O(h^{n+1}) \quad (32)$$

Siendo

a_i los coeficientes de peso. En general:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (33)$$

K_i son los valores de las pendientes evaluadas en diferentes puntos del intervalo.

Si se quiere la expansión de orden 2:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + AK_1 + BK_2 + O(h^3) \quad (34)$$

Donde

$$a_1 = A$$

$$a_2 = B$$

$$K_1 = hf(t_k; y(t_k))$$

$$K_2 = hf(t_k + Ch; y(t_k) + CK_1)$$

Igualando la expansión de Taylor de orden 2 de Taylor con la de Runge Kutta:

$$y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2!}y''(t_k) + O(h^3) = y(t_k) + AK_1 + BK_2 + O(h^3) \quad (35)$$

Reemplazando $y'(\cdot) = f(t_k; y(t_k)); y''(\cdot) = f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot); K_1 = hf(t_k; y(t_k));$

$K_2 = hf(t_k + Ch; y(t_k) + CK_1)$ y cancelando el término repetido de ambos lados de la igualdad:

$$hf(\cdot) + \frac{h^2}{2!}[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] + O(h^3) = Ahf(\cdot) + Bh[f(t_k + Ch; y(t_k) + CK_1)] + O(h^3) \quad (36)$$

Si se considera al término K_2 como una serie de Taylor de dos variables donde los tres primeros términos son:

$$K_2 = hf(t_k + Ch; y(t_k) + CK_1) = h[f(\cdot) + Chf_t(\cdot) + Chf_y(\cdot)f(\cdot)] \quad (37)$$

NOTA:

Dado el Problema de los valores iniciales

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y' = f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (i)$$

Si se desarrolla la serie de Taylor, el polinomio queda:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{\partial}{\partial t}y(\cdot)(t_k - t_0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(\cdot)(t_k - t_0)^2 + \dots \quad (ii)$$

Reemplazando

$$(t_k - t_0) = h; \frac{\partial}{\partial t}y(\cdot) = f(t_0; y_0) \text{ y, por lo tanto, } \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}f(t_0; y_0) = f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)$$

Se llega a:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + f(t_0; y_0)h + [f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] h^2 + \dots \quad (iii)$$

Comparando con K_2

$$\begin{aligned} K_2 &= hf(t_k + Ch; y(t_k) + CK_1) = h[f(\cdot) + Chf_t(\cdot) + Chf_y(\cdot)f(\cdot)] = \\ &= hf(\cdot) + Ch^2[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] \end{aligned} \quad (iv)$$

La ausencia del primer término de la expansión de Taylor en K_2 se debe a que la variación de la función está aplicada ya en el primer diferencial y no en la función primera $y(t)$.

Entonces

$$\begin{aligned} hf(\cdot) + \frac{h^2}{2!}[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] + O(h^3) &= \\ = Ahf(\cdot) + B\left[hf(\cdot) + Ch^2[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)]\right] + O(h^3) & \end{aligned} \quad (38)$$

Reordenando y agrupando

$$\begin{aligned} hf(\cdot) + \frac{h^2}{2!}[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] + O(h^3) &= \\ = (A + B)hf(\cdot) + BC h^2[f_t(\cdot) + f_y(\cdot)f(\cdot)] + O(h^3) & \end{aligned} \quad (39)$$

Igualando se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ BC = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (40)$$

La forma canónica y más utilizada de Runge Kutta 2 es con los siguientes valores:

$$A = B = \frac{1}{2}; C = 1 \quad (41)$$

De esta forma, la expresión aproximada de la función a través de este método es:

$$y(t_k + h) = \\ = y(t_k) + h \left\{ \frac{1}{2} f(t_k; y(t_k)) + \frac{1}{2} [f(t_k + h; y(t_k)) + h f(t_k; y(t_k))] \right\} + O(h^3) \quad (42)$$

que es la fórmula de iteración de Heun.

4. CONCLUSIÓN

En el presente trabajo se desarrollaron los métodos numéricos para la aproximación de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, explicando su importancia, demostración y aplicación. A su vez, se realizó una pequeña introducción al orden de un método numérico, quedando pendiente la explicación de error, estabilidad y convergencia del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.; HALL, G. (2000); *Ecuaciones diferenciales*; EEUU; International Thomson Editores.

BONIFAZ, J. L.; WINKELRIED, D. (2008) *Matemáticas para la Economía Dinámica*; Lima, Perú; del Pacífico.

Brown University; *Euler's Method, Taylor Series Method, Runge Kutta Methods, Multi-Step Methods and Stability*. <http://www.cfm.brown.edu/people/sg/AM35odes.pdf>

CASPARI - GARCÍA FRONTI - KRIMKER (.) *Sistemas Dinámicos Continuos*
Capítulo 8: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Coronell University; *Chapter 9 - The Initial Value Problem*.
<http://www.cs.cornell.edu/courses/cs4210/2014fa/CVLBook/CVL9.PDF>

DESIRÉE CASTRILLO ROJAS (2009); *Introducción a los Métodos Numéricos*; Banco Central de Costa Rica; División Económica: Departamento De Investigación Económica.

FINKELSHTEIN, ANDREI MARTÍNEZ (2003) *El Análisis Numérico en los Últimos 25 Años*, España, Universidad de Almería.

KAW, A.; KALU, E. E. (2010); *Numerical Methods with Applications*; Florida, EEUU; Abridged (Second Edition).

MEJÍA, D. (2011) *Integración Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*; Universidad de Antioquia; Instituto de Física.

MOLERO, M.; SALVADOR, A.; MENARGUEZ, T.; GARMENDIA, L. (2007), *Análisis Matemático para Ingeniería*, PRENTICE-HALL. Capítulo 13: Métodos Numéricos de Un Paso.

SÁNCHEZ DE LOS REYES, V. M. (.) *Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*; Universidad Complutense de Madrid; Departamento de Análisis Matemático.