銘傳大學　106 學年度第 2 學期　■期中考　命題紙
MING CHUAN UNIVERSITY　2017-2018　Academic Year　■Spring　■Midterm Exam

　教授(Teacher's Name)：林秋華

班級(Class):　統資二甲、乙

科目(Course):　應用迴歸分析　■可使用計算機(Calculator Is Allowed)

PART I：是非題，10 小題，每小題 2 分，共 20 分。(請以 O、X 分別表示正確與不正確)

考慮一般簡單線性迴歸模型：$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i,\ i = 1,\cdots,n$；其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 為 i.i.d. (independent and identically distributed) $N(0,\sigma^2)$。設 b_0、b_1 分別為 β_0、β_1 之 LSE。令 $e_i = Y_i - \hat{Y}_i,\ i = 1,\cdots,n$，其中 $\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i$。令 $\mathrm{SSX} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$、$\mathrm{SSXY} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$。判斷以下問題是否正確。

1. $X_1,\cdots,X_n$ 為已知常數。
2. $\hat{Y}_1,\cdots,\hat{Y}_n$ 互相獨立。
3. $E\{Y_i\} = \beta_0 + \beta_1 X_i$
4. $\sigma^2\{Y_i\} = \sigma^2,\ i = 1,\cdots,n$
5. 若 $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ (更正)，則 b_0、b_1 互相獨立。
6. $\sum_{i=1}^{n} Y_i e_i = 0$
7. $\mathrm{SSXY} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})Y_i$
8. 設 $b_0 = \sum_{i=1}^{n} K_i Y_i$，其中 K_i 為係數；則 $\sum_{i=1}^{n} K_i = 0$。
9. $\mathrm{SSR} = b_1^2 \mathrm{SSX}$
10. $E\{\mathrm{SSR}\} = \sigma^2 + b_1 \mathrm{SSX}$

PART II：簡答題，5 小題，每小題 4 分，共 20 分。

某公司隨機抽出過去十個月投入某產品之廣告費 X (百萬元) 與該產品銷售額 Y (千萬元)，得到資料如下：

X	**1**	**2**	**1**	**3**	**4**	**2**	**3**	**3**	**5**	**4**
Y	**1.1**	**1.5**	**0.7**	**2.2**	**3.0**	**1.6**	**2.5**	**2.4**	**3.8**	**3.2**

考慮 Y 對 X 之簡單線性迴歸模型。(已知：$\sum X_i = 28,\ \sum Y_i = 22,\ \sum X_i^2 = 94,\ \sum Y_i^2 = 57.04,\ \sum X_i Y_i = 73.1$)

1. 根據此資料，寫出最小平方法估計迴歸係數之標準方程式(NE)。
2. 求出 β_0、β_1 之最小平方估計值：b_0、b_1。(誤差在 0.000001 以內)
3. 畫出估計的迴歸函數與資料點，並判斷線性迴歸模型是否適當地配適這組資料？
4. 求出 SSR、SSE (誤差在 0.00001 以內)。
5. 當 $X_h = 4.5$，試求出 $\hat{Y}_h$ 與 $s\{\hat{Y}_h\}$。

PART III：配合題，10 小題，每小題 2 分，共 20 分。

考慮矩陣線性模型 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$，$\mathbf{Y}$ 為 $n\times 1$，$\mathbf{X}$ 為 $n\times p$，請回答以下問題(只需填代碼)。

( )1. 標準方程式(NE)為何？	( )6. SSE = ？
( )2. $\boldsymbol{\beta}$ 的最小平方估計式(OLSE) $\mathbf{b}$ 為何？	( )7. MSE = ？
( )3. 帽子矩陣(Hat-Matrix) $\mathbf{H}$ 為何？	( )8. $s^2\{\mathbf{b}\}=$ ？
( )4. 預測值向量 $\hat{\mathbf{Y}}$ 為何？	( )9. $s^2\{\hat{\mathbf{Y}}\}=$ ？
( )5. SSR = ？	( )10. $s^2\{\mathbf{e}\}=$ ？(其中$\mathbf{e}=\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}$)

配合題選項：

A. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	J. $\mathbf{Y}\left(\mathbf{H}-\frac{1}{n}\mathbf{J}\right)\mathbf{Y}'$
B. $\mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{b}=\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	K. $\mathbf{Y}'\left(\mathbf{I}-\frac{1}{n}\mathbf{J}\right)\mathbf{Y}$
C. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{X}\mathbf{Y}$	L. $\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{H})\mathbf{Y}$
D. $\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}=\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	M. $\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{H})\mathbf{Y}/(n\text{-}p)$
E. $\mathbf{X}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$	N. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathrm{MSE}$
F. $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$	O. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
G. $\mathbf{Y}\mathbf{H}$	P. $(\mathbf{I}-\mathbf{H})\mathrm{MSE}$
H. $\mathbf{H}\mathbf{Y}$	Q. $(\mathrm{MSE})\mathbf{H}$
I. $\mathbf{Y}'\left(\mathbf{H}-\frac{1}{n}\mathbf{J}\right)\mathbf{Y}$	

PART IV：申論題

1. 考慮迴歸模型：$Y_i=\beta_1 X_i+\varepsilon_i,\ i=1,\cdots,n$；且 $E\{\varepsilon_i\}=0,\ \forall\, i$；(A) 試導出 β_1 的最小平方估計量；(B) 證明此估計量是不偏的。(以上每小題 5 分，共 10 分)

2. 考慮矩陣線性迴歸模式：$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$；試證明：

   當 $\mathbf{b}$ 滿足以下標準方程式(normal equation)：$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}=\mathbf{X}'\mathbf{Y}$

   則 $Q(\mathbf{b})\le Q(\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\beta}$

   其中 $Q(\mathbf{b})=(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\mathbf{b})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\mathbf{b}),\ Q(\boldsymbol{\beta})=(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$。

   (10 分)

3. 以下 4 筆資料有關廣告投入(X 萬元)與銷售總額(Y 百萬元)：

X	1	2	3	4
Y	1	1	2	2

考慮矩陣線性迴歸模式：$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$；利用矩陣計算：(已知 $\mathrm{SSE}=0.2$)

(A) $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}$、$\mathbf{X}'\mathbf{X}$、$\mathbf{X}'\mathbf{Y}$

(B) $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$、迴歸係數向量的 LSE $\mathbf{b}$

(C) 估計 $\mathbf{b}$ 的共變異數矩陣，並寫出 $s^2\{b_1\}$、$s\{b_0,b_1\}$。

(D) 帽子矩陣 $\mathbf{H}$、$s^2\{\hat{Y}_1\}$、$s\{\hat{Y}_1,\hat{Y}_2\}$

(E) 當 $X_h=3.5$，求出 $E\{Y_h\}$ 的估計值 $\hat{Y}_h$ 與 $\sigma^2\{\hat{Y}_h\}$ 的估計值。

(以上每小題 (A)-(E) 皆 4 分，共 20 分)