1.20 $\Sigma X = 230$, $\Sigma Y = 3432$, $\Sigma X^2 = 1516$, $\Sigma XY = 22660$, $n=45$

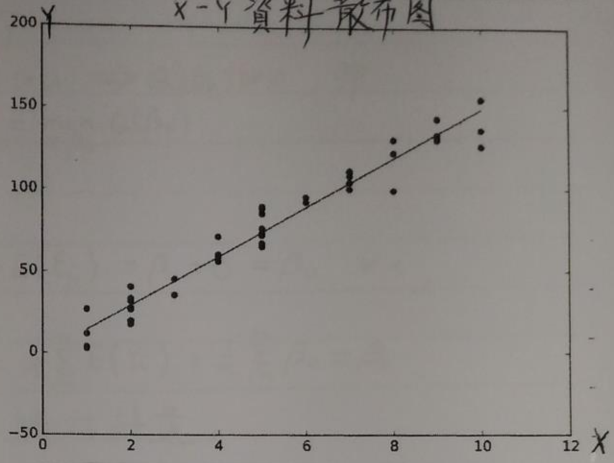
(a)

$$b_1 = \frac{\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y/n}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n} = \frac{22660 - 230\times 3432/45}{1516 - 230^2/45} = \frac{11517}{766} \approx 15.035$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X} = \frac{3432}{45} - \frac{11517}{766}\times\frac{230}{45} = -\frac{1111}{1915} \approx -0.580$$

(b)

根據資料散布圖看來，此資料配適直線還算不錯！



(c)

雖然，$\beta_0 = E\{Y|X=0\}$，且 b_0 為 β_0 的点估計值，但我們不能解釋說：在無複印机維修時，服務人員平均維修時間估計為 −0.58分；因為，維修時間不可能為負值；事實上，X資料範围不包含0，故以上的解釋当然不合理。以大量維修考量，平均一部複印机維修時間約15分，但总維修時間須往下修約半分鐘（$\because b_0 \cong -0.58$）。

(d) 当 $X=5$ 時，服務人員平均維修時間估計為

$$\hat{Y} = -\frac{1111}{1915} + \frac{11517}{766}\times 5 \cong 74.596\text{(分)}$$

1.33 $Y_i=\beta_0+\varepsilon_i$, $i=1,\cdots,n$, $E(\varepsilon_i)=0$, $\forall i$.

令 $Q(\beta_0)=\sum_i(Y_i-\beta_0)^2=\Sigma Y_i^2-2\beta_0\Sigma Y_i+n\beta_0^2$

$\Rightarrow Q'(\beta_0)=-2\Sigma Y_i+2n\beta_0$

若 b_0 為 β_0 之 LSE，則 $Q'(b_0)=0$.

$\Rightarrow -2[\Sigma Y_i-nb_0]=0 \Rightarrow \Sigma Y_i-nb_0=0$

$\Rightarrow b_0=\frac{1}{n}\Sigma Y_i=\overline{Y}$.

Note：$Q''(\beta_0)=2n>0 \Rightarrow Q''(b_0)>0$，即

$$Q(b_0)=Q(\overline{Y})=\min_{\forall\beta_0}Q(\beta_0)$$

1.34

由於 $E\{Y_i\}=\beta_0+E\{\varepsilon_i\}=\beta_0+0=\beta_0$, $\forall i$,

故

$$E(b_0)=E(\overline{Y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_0=\beta_0$$、

即 b_0 為 β_0 之不偏估計量。

1.41 $Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i=1,\cdots,n$; $E(\varepsilon_i)=0$, $\forall i$.

(a) 令

$$Q(\beta_1) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_1 X_i)^2 = \sum Y_i^2 - 2\beta_1 \sum X_i Y_i + \beta_1^2 \sum X_i^2$$

$$\Rightarrow Q'(\beta_1) = -2\sum X_i Y_i + 2\beta_1 \sum X_i^2 = -2\left[\sum X_i Y_i - \beta_1 \sum X_i^2\right]$$

若 b_1 為 β_1 之 LSE，則 $Q'(b_1)=0$.

$$\Rightarrow \sum X_i Y_i - b_1 \sum X_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

Note：$Q''(\beta_1) = 2\sum X_i^2 > 0$（設 $X_1,\cdots,X_n$ 非全為 0），

故 $Q''(b_1) > 0$；即 $Q(b_1)$ 為 $Q(\beta_1)$ 之極小值。

(b) $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ iid $N(0,\sigma^2)$ 且 σ^2 已知，則概似函數為

$$L(\beta_1) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\sum(Y_i-\beta_1 X_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$\Rightarrow$ 對數概似函數為

$$\ln L(\beta_1) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum(Y_i-\beta_1 X_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}Q(\beta_1)$$

其中 $Q(\beta_1) = \sum(Y_i-\beta_1 X_i)^2$ 之定義如同 part(a)。

若 $\hat{\beta}_1$ 為 β_1 之 MLE，則

$$L(\hat{\beta}_1) = \max_{\forall \beta_1} L(\beta_1) \iff \ln L(\hat{\beta}_1) = \max_{\forall \beta_1} \ln L(\beta_1)$$

$$\iff Q(\hat{\beta}_1) = \min_{\forall \beta_1} Q(\beta_1)$$，由於 $-\frac{1}{2\sigma^2} < 0$.

因此，$\hat{\beta}_1 = b_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$ 與 part(a) 結果一致。

(1.41 continue)

(c) 因為 $E(Y_i)=E(\beta_1 X_i+\varepsilon_i)=\beta_1 X_i+E(\varepsilon_i)=\beta_1 X_i,\ \forall i$

故

$$E(b_1)=E\left\{\frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}\right\}=\frac{1}{\sum X_i^2}E\left(\sum_i X_i Y_i\right)$$

$$=\frac{1}{\sum X_i^2}\sum_i\left[X_i E(Y_i)\right]=\frac{1}{\sum X_i^2}\sum_i(X_i\beta_1 X_i)$$

$$=\frac{\beta_1\sum X_i^2}{\sum X_i^2}=\beta_1.$$

即 b_1 是不偏。

1.42. $Y_i=\beta_1 X_i+\varepsilon_i$, $i=1,\cdots,6$, $\sigma^2=16$, $n=6$

$\sum Y_i^2=620394$, $\sum X_i Y_i=34602$, $\sum X_i^2=1930$

(a) 概似函數為

$$L(\beta_1)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\sum(Y_i-\beta_1 X_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\sum Y_i^2-2\beta_1\sum X_i Y_i+\beta_1^2\sum X_i^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=(32\pi)^{-3}\exp\left\{-\frac{620394-69204\beta_1+1930\beta_1^2}{32}\right\}$$

(b) 利用电腦軟体計算:

$L(17)\cong 9.451\times10^{-30}$, $L(18)\cong 2.694\times10^{-7}$, $L(19)\cong 3.047\times10^{-37}$

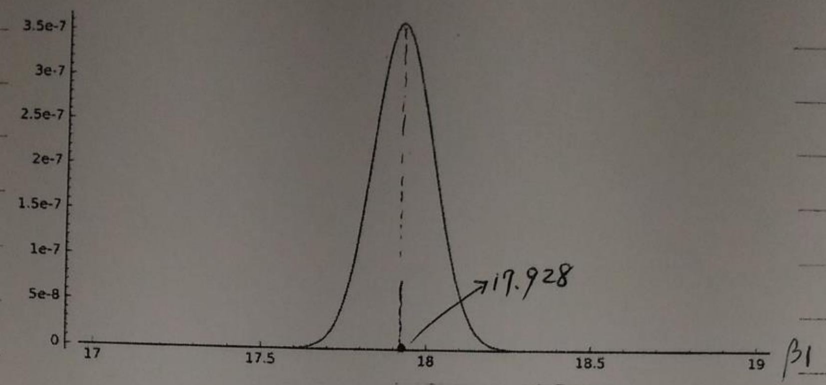
$\Rightarrow$ 這三者中 $L(18)$ 最大

(c) $b_1=\dfrac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}=\dfrac{34602}{1930}\cong 17.928\ (\approx 18)$

$L(b_1)\cong 3.606\times10^{-7}$ 這個數值與 $L(18)$ 相当靠近。

(d) 利 sagemath 軟件，$L(\beta_1)$ 的函數圖形如下:

概似函數 $L(\beta_1)$



同時，利用sagemath指令：solve(diff(L, b1)==0, b1)
得到

$$b_1 = \frac{17301}{965} \cong 17.928$$

與part (C)的結果相同。