下推自动机

下推自动机

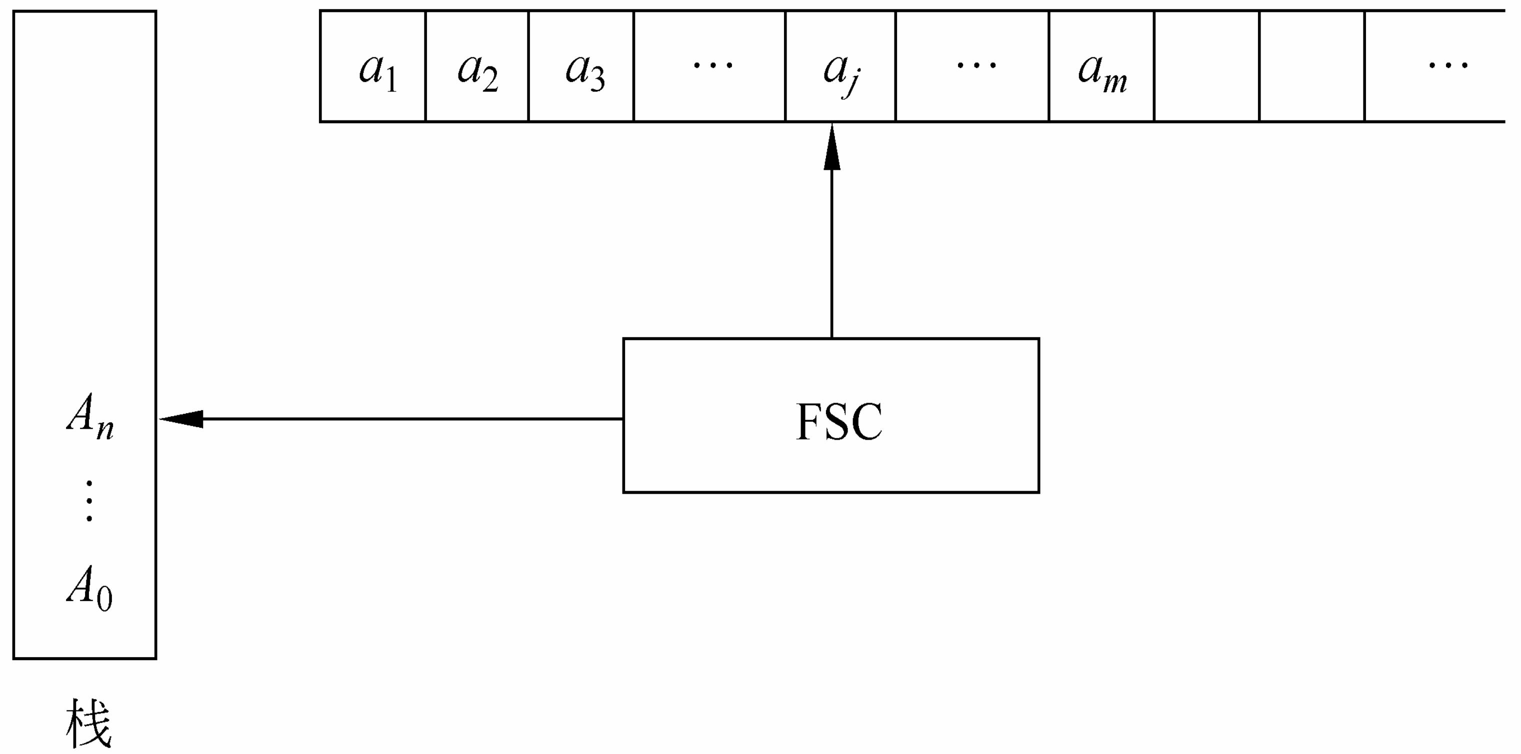
- 主要内容
  - PDA的基本概念。
  - PDA的构造举例。
  - 用终态接受语言和用空栈接受语言的等价性。
  - PDA是CFL的接受器。
- 重点
  - PDA的基本定义及其构造，PDA是CFL的等价描述。
- 难点
  - 根据PDA构造CFG。

下推自动机

- **PDA**描述**CFL**，所以它应该与**CFG**等价。
- **PDA**应该包含**FA**的各个元素，或者包含那些可以取代**FA**的各个元素的功能的元素。
- **PDA**按照最左派生的派生顺序，处理处于当前句型最左边的变量，因此，需要采用栈作为其存储机构。
- 按照**FA**的“习惯”，**PDA**用终态接受语言。
- 模拟**GNF**的派生**PDA**用空栈接受语言。

基本定义

- **PDA的物理模型**



基本定义

- PDA应该含有三个基本结构
  - 存放输入符号串的输入带。
  - 存放文法符号的栈。
  - 有穷状态控制器。
- PDA的动作
  - 在有穷状态控制器的控制下根据它的当前状态、栈顶符号、以及输入符号作出相应的动作，在有的时候，不需要考虑输入符号。

基本定义

- **下推自动机(pushdown automaton，PDA)**

$$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

Q——状态的非空有穷集合。$\forall q \in Q$，q称为M的一个状态(state)。

Σ——**输入字母表(input alphabet)**。要求M的输入字符串都是Σ上的字符串。

Γ——**栈符号表(stack alphabet)**。$\forall A \in \Gamma$，叫做一个栈符号。

基本定义

q_0——$q_0 \in Q$，是M的**开始状态**(initial state)，也可叫做**初始状态**或者**启动状态**。

Z_0——$Z_0 \in \Gamma$ 叫做**开始符号**(start symbol)，是M启动时候栈内惟一的一个符号。所以，习惯地称其为栈底符号。

F——$F \subseteq Q$，是M的**终止状态**(final state)集合，简称为终态集。$\forall q \in F$，q称为M的终止状态，也可称为**接受状态**(accept state)，简称为终态。

基本定义

δ ——**状态转换函数**(transition function) 。

$$\delta: \mathbf{Q} \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$$

基本定义

$\delta(q, a, Z)=\{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}$

- 表示M在状态q，栈顶符号为Z时，读入字符a，对于i=1，2，…，m，可以选择地将状态变成p_i，并将栈顶符号Z弹出，将γ_i中的符号从右到左依次压入栈，然后将读头向右移动一个带方格而指向输入字符串的下一个字符。

基本定义

$\delta(q, \varepsilon, Z)=\{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}$

- 表示M进行一次ε-移动(空移动)，即M在状态q，栈顶符号为Z时，无论输入符号是什么，对于i=1，2，…，m，可以选择地将状态变成p_i，并将栈顶符号Z弹出，将γ_i中的符号从右到左依次压入栈，读头不移动。

基本定义

符号使用约定：

- 英文字母表较为前面的小写字母，如**a**，**b**，**c**，…，表示输入符号；
- 英文字母表较为后面的小写字母，如**x**，**y**，**z**，…，表示输入符号串；
- 英文字母表的大写字母，表示栈符号；
- 希腊字母α，β，γ，…，表示栈符号串。

基本定义

- **即时描述(instantaneous description，ID)**

  (q，w，γ)∈(Q，Σ*，Γ*)称为**M**的一个**即时描述**。它表示**M**处于状态**q**，**w**是当前还未处理的输入字符串，而且**M**正注视着**w**的首字符，栈中的符号串为γ，γ的最左符号为栈顶符号，最右符号为栈底的符号，较左的符号在栈的较上面，较右的符号在栈的较下面。

基本定义

如果(p，γ)∈δ(q，a，Z)，a∈Σ，则

(q，aw，Zβ)$\vdash_M$(p，w，$\gamma\beta$)

表示M做一次非空移动，从ID(q，aw，Zβ)变成ID(p，w，$\gamma\beta$)。

如果(p，γ)∈δ(q，ε，Z)，则

(q，w，Zβ)$\vdash_M$(p，w，$\gamma\beta$)

表示M做一次空移动，从ID(q，w，Zβ)变成ID(p，w，$\gamma\beta$)。

基本定义

- M接受的语言
  - M用终态接受的语言
    - $L(M)=\{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \beta)$ 且 $p \in F\}$
  - M用空栈接受的语言
    - $N(M) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}$

基本定义

- 例 考虑接受语言$L=\{w2w^T \mid w\in\{0,1\}^*\}$的PDA的设计。
- 解法1：
- 先设计产生L的CFG G_1：

G_1：$S\to 2|0S0|1S1$

- 再将此文法转化成GNF：

G_2：$S\to 2|0SA|1SB$

$A\to 0$

$B\to 1$

基本定义

- 句子0102010的最左派生和我们希望相应的PDA M的动作。

派生	M应该完成的动作
S⇒0SA	从q_0启动，读入0，将S弹出栈，将SA压入栈，状态不变
⇒01SBA	在状态q_0，读入1，将S弹出栈，将SB压入栈，状态不变
⇒010SABA	在状态q_0，读入0，将S弹出栈，将SA压入栈，状态不变
⇒0102ABA	在状态q_0，读入2，将S弹出栈，将ε压入栈，状态不变
⇒01020BA	在状态q_0，读入0，将A弹出栈，将ε压入栈，状态不变
⇒010201A	在状态q_0，读入1，将B弹出栈，将ε压入栈，状态不变
⇒0102010	在状态q_0，读入0，将A弹出栈，将ε压入栈，状态不变

基本定义

$M_1=(\{q_0\}$，$\{0$，1，$2\}$，$\{S$，A，$B\}$，δ_1，q_0，S，$\Phi)$。其中：

$\delta_1(q_0, 0, S)=\{(q_0, SA)\}$

$\delta_1(q_0, 1, S)=\{(q_0, SB)\}$

$\delta_1(q_0, 2, S)=\{(q_0, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_0, 0, A)=\{(q_0, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_0, 1, B)=\{(q_0, \varepsilon)\}$

此时有：$N(M_1)=L$。

基本定义

考虑用终态接受时，可有如下的PDA：

$M_2=(\{q_0,q_1\},\{0,1,2\},\{S,A,B,Z,Z_0\},\delta_2,q_0,Z_0,\{q_1\})$

$\delta_2(q_0,0,Z_0)=\{(q_0,SAZ)\}$

$\delta_2(q_0,1,Z_0)=\{(q_0,SBZ)\}$

$\delta_2(q_0,2,Z_0)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

$\delta_2(q_0,0,S)=\{(q_0,SA)\}$

$\delta_2(q_0,1,S)=\{(q_0,SB)\}$

$\delta_2(q_0,2,S)=\{(q_0,\varepsilon)\}$

$\delta_2(q_0,0,A)=\{(q_0,\varepsilon)\}$

$\delta_2(q_0,1,B)=\{(q_0,\varepsilon)\}$

$\delta_2(q_0,\varepsilon,Z)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

此时有：$N(M_2)=L(M_2)=L$。

基本定义

- 解法2：
- 注意到$L=\{w2w^T|w\in\{0,1\}^*\}$，所以PDA M_3 的工作可以分成两大阶段。
  - 在读到字符2之前，为“记载”阶段：每读到一个符号就在栈中做一次相应的记载。
  - 在读到2以后，再读到字符时，就应该进入“匹配”阶段：由于栈的“先进后出”特性正好与w^T相对应，所以，用栈顶符号逐一地与输入字符匹配。

基本定义

- $M_3=(\{q_0, q_1, q_2, q_f, q_t\}, \{0, 1, 2\}, \{A, B, Z_0\}, \delta_3, q_0, Z_0, \{q_f\})$
- q_0为开始状态
- q_1为记录状态
- q_2为匹配状态
- q_f为终止状态
- q_t陷阱状态

基本定义

$\delta_3(q_0，0，Z_0)=\{(q_1，AZ_0)\}$

$\delta_3(q_0，1，Z_0)=\{(q_1，BZ_0)\}$

$\delta_3(q_0，2，Z_0)=\{(q_f，\varepsilon)\}$

$\delta_3(q_1，0，A)=\{(q_1，AA)\}$

$\delta_3(q_1，1，A)=\{(q_1，BA)\}$

$\delta_3(q_1，0，B)=\{(q_1，AB)\}$

$\delta_3(q_1，1，B)=\{(q_1，BB)\}$

基本定义

$\delta_3(q_1，2，A)=\{(q_2，A)\}$

$\delta_3(q_1，2，B)=\{(q_2，B)\}$

$\delta_3(q_2，0，A)=\{(q_2，\varepsilon)\}$

$\delta_3(q_2，0，B)=\{(q_t，\varepsilon)\}$

$\delta_3(q_2，1，B)=\{(q_2，\varepsilon)\}$

$\delta_3(q_2，1，A)=\{(q_t，\varepsilon)\}$

$\delta_3(q_2，\varepsilon，Z_0)=\{(q_f，\varepsilon)\}$

此时有：$N(M_3)=L(M_3)=L$。

基本定义

- 不追求让**PDA**同时用终止状态和空栈接受同样的语言，还可以删除状态q_f。这样我们可以得到**PDA** M_4 。
- $M_4=(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, \{A, B, Z_0\}, \delta_4, q_0, Z_0, \Phi)$

$\delta_4(q_0, 0, Z_0)=\{(q_1, A)\}$

$\delta_4(q_0, 1, Z_0)=\{(q_1, B)\}$

$\delta_4(q_0, 2, Z_0)=\{(q_2, \varepsilon)\}$

基本定义

$\delta_4(q_1，0，A)=\{(q_1，AA)\}$

$\delta_4(q_1，1，A)=\{(q_1，BA)\}$

$\delta_4(q_1，0，B)=\{(q_1，AB)\}$

$\delta_4(q_1，1，B)=\{(q_1，BB)\}$

$\delta_4(q_1，2，A)=\{(q_2，A)\}$

$\delta_4(q_1，2，B)=\{(q_2，B)\}$

$\delta_4(q_2，0，A)=\{(q_2，\varepsilon)\}$

$\delta_4(q_2，1，B)=\{(q_2，\varepsilon)\}$

基本定义

- **确定的(deterministic)PDA**

$\forall$(q，a，Z)$\in Q \times \Sigma \times \Gamma$，

$|\delta(q, a, Z)|+|\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$

- **PDA**在每一个状态**q**和一个栈顶符号下的动作都是惟一的。
- 关键
  - 对于$\forall$(q，Z)$\in Q \times \Gamma$，M此时如果有非空移动，就不能有空移动。
  - 每一种情况下的移动都是惟一的。

基本定义

- **例** 构造接受**L={ww^T|w∈{0,1}*}**的**PDA**。
- 差异

δ**(q$_0$，0，A)={(q$_0$，AA)，(q$_1$，** ε **)}**

0是**w**中的**0**或者是**w^T**的首字符**0;**

δ**(q$_0$，1，B)={(q$_0$，BB)，(q$_1$，** ε **)}**

1是**w**中的**1**或者是**w^T**的首字符**1**。

PDA与CFG等价

- 对于任意PDA M_1，存在PDA M_2，使得$L(M_2)=N(M_1)$;
- 对于任意PDA M_1，存在PDA M_2，使得$N(M_2)=L(M_1)$。
- CFL可以用空栈接受语言的PDA接受。
- PDA接受语言可以用CFG描述。

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

定理 对于任意PDA M_1，存在PDA M_2，使得 $N(M_2) = L(M_1)$。

证明要点：

（1） 构造。

设PDA $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_{01}, Z_{01}, F)$

取PDA $M_2 = (Q \cup \{q_{02}, q_e\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z_{02}\}, \delta, q_{02}, Z_{02}, F)$

其中 $Q \cap \{q_{02}, q_e\} = \Gamma \cap \{Z_{02}\} = \Phi$。

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

$\delta_2(q_{02}, \varepsilon, Z_{02})=\{(q_{01}, Z_{01}Z_{02})\}$

$\forall(q,a,Z)\in Q\times\Sigma\times\Gamma$, $\delta_2(q,a,Z)=\delta_1(q,a,Z)$;

$\forall(q,Z)\in(Q-F)\times\Gamma$, $\delta_2(q,\varepsilon,Z)=\delta_1(q,\varepsilon,Z)$;

$\forall(q,Z)\in F\times\Gamma$

$\delta_2(q,\varepsilon,Z)=\delta_1(q,\varepsilon,Z)\cup\{(q_e,\varepsilon)\}$;

$\forall q\in F$, $\delta_2(q,\varepsilon,Z_{02})=\{(q_e,\varepsilon)\}$;

$\forall Z\in\Gamma\cup\{Z_{02}\}$, $\delta_2(q_e,\varepsilon,Z)=\{(q_e,\varepsilon)\}$

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

（2） 证明$N(M_2) = L(M_1)$。

$x \in L(M_1)$

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}) \vdash_{M1}^{*} (q, \varepsilon, \gamma)$且$q \in F$

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M1}^{*} (q, \varepsilon, \gamma Z_{02})$且$q \in F$

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q, \varepsilon, \gamma Z_{02})$且$q \in F$

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q, \varepsilon, \gamma Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_e, \varepsilon, \varepsilon)$ 且 $q \in F$

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01} Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_e, \varepsilon, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow (q_{02}, x, Z_{02}) \vdash_{M2} (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_e, \varepsilon, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow (q_{02}, x, Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_e, \varepsilon, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow x \in N(M_2)$

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

定理 对于任意PDA M_1，存在PDA M_2，使得 $L(M_2)= N(M_1)$。

证明要点：

(1)构造。

设PDA $M_1 = (Q，\Sigma，\Gamma，\delta_1，q_{01}，Z_{01}，\Phi)$

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

取PDA $M_2 = (Q \cup \{q_{02}, q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z_{02}\}, \delta, q_{02}, Z_{02}, \{q_f\})$

其中$Q \cap \{q_{02}, q_f\} = \Gamma \cap \{Z_{02}\} = \Phi$。$\delta_2$的定义如下，

$\delta_2(q_{02}, \varepsilon, Z_{02}) = \{(q_{01}, Z_{01}Z_{02})\}$

对于$\forall (q, a, Z) \in Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$，$\delta_2(q, a, Z) = \delta_1(q, a, Z)$。

$\delta_2(q, \varepsilon, Z_{02}) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

PDA用空栈接受和用终止状态接受等价

(2) 证明$L(M_2) = N(M_1)$。

$x \in L(M_2)$

$\Leftrightarrow (q_{02}, x, Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow (q_{02}, x, Z_{02}) \vdash_{M2} (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02})$

$\Leftrightarrow (q_{02}, x, Z_{02}) \vdash_{M2} (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$。

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q, \varepsilon, Z_{02})$且$(q, \varepsilon, Z_{02}) \vdash_{M2}^{*} (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}Z_{02}) \vdash_{M1}^{*} (q, \varepsilon, Z_{02})$。

$\Leftrightarrow (q_{01}, x, Z_{01}) \vdash_{M1}^{*} (q, \varepsilon, \varepsilon)$。

$\Leftrightarrow x \in N(M_1)$。

PDA与CFG等价

定理 对于任意**CFL L**，存在**PDA M**，使得**N(M)=L**。

证明要点：先考虑识别**L-{ ε }**的**PDA**，然后再考虑对 ε 的处理问题。

PDA与CFG等价

(1) 构造PDA。

设GNF $G=(V, T, P, S)$，使得$L(G)=L-\{\varepsilon\}$。

取PDA $M=(\{q\}, T, V, \delta, q, S, \Phi)$

对于任意的$A\in V$，$a\in T$，

$\delta(q, a, A)=\{(q, \gamma)|A\rightarrow a\gamma\in P\}$

也就是说，$(q, \gamma)\in\delta(q, a, A)$的充分必要条件是$A\rightarrow a\gamma\in P$。

PDA与CFG等价

(2) 证明构造的正确性：$N(M)=L-\{\varepsilon\}$。

施归纳于w的长度n，证明

$(q, w, S)\vdash_M^n(q, \varepsilon, \alpha)$的充分必要条件为$S\Rightarrow^n w\alpha$。

假设结论对n=k成立。证明结论对n=k+1成立时，取w=xa，|x|=k，$a\in T$。在证明必要性时有如下过程，充分性的证明过程是倒退回来。

PDA与CFG等价

$(q,w,S)=(q，xa，S) \vdash_M^k (q，a，\gamma) \vdash_M (q，\varepsilon，\alpha)$

此时必定存在$A\in V$，$\gamma=A\beta_1$，$(q,\beta_2)\in\delta(q,a,A)$。

$(q,a,\gamma)=(q,a,A\beta_1) \vdash_M (q,\varepsilon,\beta_2\beta_1)=(q，\varepsilon，\alpha)$。

由$(q，\beta_2)\in\delta(q，a，A)$就可以得到$A\rightarrow a\beta_2\in P$，再由归纳假设，得到

$S\Rightarrow^k xA\beta_1$。

合起来就有

$S\Rightarrow^k xA\beta_1\Rightarrow xa\beta_2\beta_1$。

PDA与CFG等价

(3)考虑ε∈L的情况。

先按照(1)的构造方法构造出PDA

$M=(\{q\}, T, V, \delta, q, S, \Phi)$

使得$N(M)=L-\{\varepsilon\}$。然后取

$M_1=(\{q, q_0\}, T, V\cup\{Z\}, \delta_1, q_0, Z, \Phi)$

其中，$q_0\neq q$，$Z\notin V$，令

$\delta_1(q_0, \varepsilon, Z)=\{(q_0, \varepsilon), (q, S)\}$,

对于$\forall(a, A)\in T\times V$

$\delta_1(q, a, A)=\delta(q, a, A)$

PDA与CFG等价

定理 对于任意的**PDA M**，存在**CFG G**使得**L(G)=N(M)**。

证明要点：

(1) 构造

对应$(q_1，A_1A_2…A_n) \in \delta(q，a，A)$难以用产生式$[q，A] \rightarrow a[q_1，A_1A_2…A_n]$模拟。

同样也难以用$[q，A] \rightarrow a[q_1，A_1] [q_2，A_2]…[q_n，A_n]$模拟。

PDA与CFG等价

- **PDA的移动(q_1，$A_1A_2 \ldots A_n$)$\in \delta$(q，a，A)需要用如下形式的产生式模拟。**
  - $[q, A, q_{n+1}] \rightarrow a[q_1, A_1, q_2]\,[q_2, A_2, q_3] \ldots [q_n, A_n, q_{n+1}]$
  - q_2，…，q_n是分别对应PDA恰“处理完”A_1进而处理A_2，…，恰“处理完”A_{n-1}进而处理A_n的状态。当然就有了恰“处理完”A_n而进入的状态q_{n+1}，这个状态就是“处理完”A后其次栈顶变为栈顶的状态。

PDA与CFG等价

取CFG $G=(V, \Sigma, P, S)$，其中：

$V=\{S\}\cup Q\times\Gamma\times Q$

$P=\{S\rightarrow[q_0, Z_0, q] \mid q\in Q\}\cup$

$\cup\{[q, A, q_{n+1}]\rightarrow a[q_1, A_1, q_2][q_2, A_2, q_3]\ldots[q_n, A_n, q_{n+1}] \mid (q_1, A_1A_2\ldots A_n)\in\delta(q, a, A)$ 且 $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，$q_2$、$q_3$、…、$q_n$、$q_{n+1}\in Q$ 且 $n\geq 1\}\cup$

$\cup\{[q, A, q_1]\rightarrow a \mid (q_1, \varepsilon)\in\delta(q, a, A)\}$

PDA与CFG等价

(2) 构造的正确性。

- 先证一个更一般的结论：$[q，A，p] \Rightarrow^{*} x$的充分必要条件是$(q，x，A) \vdash (p，\varepsilon，\varepsilon)$，然后根据这个一般的结论得到$q=q_0$，$A=S$时的特殊结论——构造的正确性。
- 必要性：设 $[q，A，p] \Rightarrow^{i} x$，施归纳于i，证明$(q，x，A) \vdash^{*} (p，\varepsilon，\varepsilon)$
- 充分性：设$(q，x，A) \vdash^{i} (p，\varepsilon，\varepsilon)$成立，施归纳于i证明$[q，A，p] \Rightarrow^{*} x$。

小结

- **PDA M**是一个七元组：**M= (Q**，Σ，Γ，δ，**q_0**，**Z_0**，**F)**
- 它是**CFL**的识别模型，它比**FA**多了栈符号，这些符号和状态一起用来记录相关的语法信息。
- 在决定移动时，它将栈顶符号作为考虑的因素之一。

小结

- **PDA**可以用终态接受语言，也可以用空栈接受语言。
- 与**DFA**不同，$\forall$**(q，a，Z)**$\in$**Q**$\times\Sigma\times\Gamma$，**DPDA**仅要求$|\delta(q, a, Z)|+|\delta(q, \varepsilon, Z)| \leqslant 1$

小结

关于CFG和PDA主要有如下结论：

(1)对于任意PDA M_1，存在PDA M_2，使得 $N(M_2)=L(M_1)$;

(2)对于任意PDA M_1，存在PDA M_2，使得 $L(M_2)=N(M_1)$;

(3)对于任意CFL L，存在PDA M，使得 $N(M)=L$;

(4)对于任意的PDA M，存在CFG G使得 $L(G)=N(M)$。

习题

1 构造产生下列语言的PDA。

(1) $\{a^nb^{2m}a^n \mid m, n \geq 1\}$。

(2)含有相同个数0和1的所有0、1串。

2 构造PDA M，使

$L(M)=\{1^n0^n \mid n\geq 1\} \cup \{1^n0^{2n} \mid n\geq 1\}$。

3 构造PDA M，使

$N(M)=\{1^n0^n \mid n\geq 1\} \{1^n0^{2n} \mid n\geq 1\}$。