第二章

数学归纳法

基本原理

算法难点：小规模问题与大规模问题之间的联系.

1）如果对于带有参数n的命题P，当n=1时P成立；

2）对每一个n，n>1，若n-1时P成立可推出n时P也成立；

结论：那么对任意自然数，P都成立。

条件1容易得证

条件2关注如何通过减小n的值对命题进行归约

例：对任意的自然数x($x \neq 1$)和n，x^n-1能被$x-1$除尽。

！注意选取对什么参数进行归纳

$$x^n-1=(x^{n-1}-1+1)x-1=x(x^{n-1}-1)+x-1$$

数学归纳法的一种简单变形(1)

强归纳法：

1）如果对于带有参数n的命题P，当n=1时P成立；

2）对每一个n，n>1，若对任意小于n的自然数P成立能推出对n命题P也成立；

结论：对任意自然数，P都成立。

数学归纳法的一种简单变形(2)

1）如果对于带有参数n的命题P，当n=1和n=2时P都成立；相当于分成了奇数和偶数序列

2）对每一个n，n>2，若n-2时P成立能推出n时P也成立；

结论：对任意自然数，P都成立。

数学归纳法的一种简单变形(3)

1）如果对于带有参数n的命题P，当n=1时P成立；

2）对每一个n（n大于1且是2的整数幂），若n/2时命题P成立能推出对n命题P也成立；

结论：对任意一个2的整数幂的自然数，P都成立。

$2^1, 2^2, \cdots 2^n$

对什么进行归纳

在大多数情况下，可对衡量问题规模的n进行归纳，但有时归纳的量度并不是显而易见的。

例：对任意的自然数x(x□1)和n，xn-1能被x-1除尽。

如果对x而不是对n进行归纳，那么证明就会复杂得多。

在没有现成的可以用来衡量问题规模的参数时，为了使用归纳法，必须构造出一个，而常用的思路就是考虑如何把命题从小的结构拓展到大的结构。

三个简单的例子

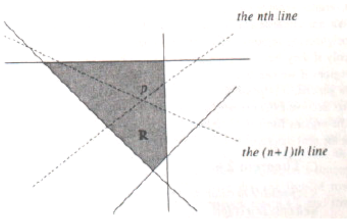
例1：前n个自然数之和为n(n+1)/2。

例2：级数8+13+18+23+…+(3+5n)之和是2.5n2+5.5n

例3：若n是自然数，且1+x>0，则(1+x)n≥1+nx。

平面内区域的计数

例：平面上n条居一般位置的直线能把平面分割成多少块区域?



$n=1 \cdots 2$

2

$n=2 \cdots 4$

3

$n=3 \cdots 7$

4

$n=4 \cdots 11$

$\vdots$

$n \quad \frac{n(n+1)}{2}+1$

规律：$S_n - S_{n-1} = n$

$l_1 \cdots l_{n-1} \quad l_n \quad l_{n+1}$

加 l_n 与 l_{n+1} 增加 $n-1+n-1+4$

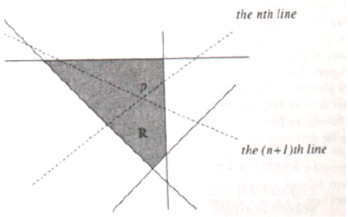
单独只加 l_n 增加 n

故 l_n 后加 l_{n+1} 增加：

$(n-1+n-1+4)-n = n+1$ 个区域

平面内区域的计数

例：平面上n条居一般位置的直线能把平面分割成多少块区域?



评述：1）归纳假设处理的是所求函数的增长率，而不是直接对函数本身进行处理；2）同样的归纳假设用在两个不同的情况下；3）先猜测再证明

简单的着色问题

例：证明平面上任意条直线构成的区域可以仅使用两种颜色有效着色，使得相邻的两个区域不同色。

将 l_n 一侧区域颜色不变，一侧颜色反转

R_1 R_2 同侧（l_n 没有分割它们），则加 l_n 前颜色都不同

两侧.（l_n 将原来的一块区域分为两块）显然不同色

简单的着色问题

例：证明平面上任意条直线构成的区域可以仅使用两种颜色有效着色，使得相邻的两个区域不同色。

评述：这个例子告诉我们的基本方法就是如何寻求灵活性，即更大的自由度。解题的思想就是要尽可能地拓展并充分利用归纳假设。对这道题而言，关键的想法就是已知有效着色的前提下，反转所有区域的颜色得到的仍是有效着色，从而解决添加直线后产生新的区域的着色问题的。

算法设计与正确性证明

一道复杂一点的加法题

考察下面的三角形。

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
3+5 &= 8 \\
7+9+11 &= 27 \\
13+15+17+19 &= 64 \\
21+23+25+27+29 &= 125
\end{aligned}
$$

证明：上述三角形中第i行的和是i3。

一道复杂一点的加法题

考察下面的三角形。

$$1 = 1$$

$$3 + 5 = 8$$

$$7 + 9 + 11 = 27$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$$

2 4 6 8

$\underbrace{S_{i+1}}_{(i+1)^3} - \underbrace{S_i}_{i^3} = 2i \times i + N(i+1, i+1)$

证明 $N(i+1, i+1) = i^2+3i+1$

再次利用归纳法 证明 $N(i+1, i+1) - N(i, i) = 2i+2$

证明：上述三角形中第i行的和是i3。

评述：这段证明同样告诉我们，整个证明过程不必在一步内完成。只要能取得进展，分步递进就不失为一个好办法。这段证明还体现了“逆向而行”的方法，我们可以从最后的问题开始，通过归约逐步简化问题，而不是从一开始的简单问题开始向最后问题进军。

一个简单的不等式

例：证明1/2+1/4+...+1/2n<1

$n=1$ 成立

n 成立时，

$n+1$：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n+1)}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)}_{<1}<1$

一个简单的不等式

例：证明$1/2+1/4+...+1/2n<1$

评述：在归纳法证明中不必把最后一项看作第$n+1$项。有时候考察第一项来得更容易。有些情况下可以把最后一项认为是满足特殊性质的特殊项。如果遇到这样的问题，要灵活一些，考察尽可能多的方案。

欧拉公式

例：证明任意一张连通平面图的节点数(V)、边数(E)和面数(F)的关系可由公式V+F=E+2表示。

F=1

1) V=1

2) V=n E=n-1

当V=n+1时 E=n = n+1-1 成立

F=n-1 → F=n 时，存在f个回路构成

欧拉公式

例：证明任意一张连通平面图的节点数(V)、边数(E)和面数(F)的关系可由公式V+F=E+2表示。

评述：本定理有三个参数。证明过程中我们对其中一个参数（面数）进行归纳，而归纳基础的成立则需要对另一个参数（结点数）进行归纳。这段证明说明选择归纳顺序的时候要小心谨慎。有时归纳过程从一个参数转到另一个参数，有时归纳与几个参数同时都有关，有时需要同时对两个不同的参数进行归纳。选择不同的顺序进行归纳，证明的难度也大相径庭。

图论中的一个问题

例：令G=(V,E)是一个有向图。证明G中存在一个独立集(任意两点都不相邻的点构成的集合)S(G)使得G中的每一个结点都可以从S(G)的某一个结点通过一条长度不超过2的路可达。

1) $n \leq 3$ ✓

2)

图论中的一个问题

例：令G=(V,E)是一个有向图。证明G中存在一个独立集(任意两点都不相邻的点构成的集合)S(G)使得G中的每一个结点都可以从S(G)的某一个结点通过一条长度不超过2的路可达。

评述：证明中“归约”的量并不是固定的。也就是说，我们可以根据实际问题把问题的规模从n缩减到比n小的数目，而且这个规模小一些的问题并不是任意一个问题，它与原来那个特定的问题关系非常密切。为了让证明容易一些，我们拿掉了足够多的结点。在此，我们取得了一个很好的平衡：既没有拿掉太多的结点使假设太弱，也没有拿掉太少的结点使假设太强。在许多情况下，找到这个平衡点是证明的关键。请注意：这里用了强归纳法，因为我们需要假设对小于某个数的所有数定理都成立。

在图上寻找无重边的路

例：令G=(V,E)是连通的无向图，O是V中度数为奇数的结点的集合，证明可以把O中的结点分成结点对，在每一对中都能找到连接这两个结点的无重边的路。

在图上寻找无重边的路

例：令G=(V,E)是连通的无向图，O是V中度数为奇数的结点的集合，证明可以把O中的结点分成结点对，在每一对中都能找到连接这两个结点的无重边的路。

评述：我们通过加强归纳假设来证明定理，这是一个十分有效的方法，主要的技巧就是要根据需要来改变归纳假设，尽管需要证明的东西变多了，然而由于归纳基础变强了，因而证明的基础比以前更好了，这样即使定理因此变强了，证明却有可能变得简单。

数学平均数和几何平均数

证明如果x1,x2,…,xn都是正数，则

$$(x_1 x_2 \boxed{?} x_n)^{1/n} \le \frac{x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n}{n}$$

数学平均数和几何平均数

证明如果x1,x2,…,xn都是正数，则

$$(x_1x_2\boxed{?}x_n)^{1/n} \le \frac{x_1+x_2+\boxed{?}+x_n}{n}$$

逆向归纳法原理：如果命题P对某个自然数的无穷子集成立，且P对n成立能推出其对n-1成立，那么P对任意自然数都成立。

① $\sqrt{x_1x_2} \le \frac{x_1+x_2}{2}$

② 令 $n=2^k$. 假设成立. 考察 $2n=2^{k+1}$ 的情况:

令 $y_1=(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ $y_2=(x_{n+1}\cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$

$\therefore (x_1\cdots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1y_2} \le \frac{y_1+y_2}{2}$

$\therefore \sqrt{y_1y_2} \le \frac{y_1+y_2}{2} \le \frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}$

$\therefore (x_1\cdots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \le \frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}$. 成立

故对所有n. 命题成立.

循环不变量

用以证明主体结构为循环的算法的正确性，与数学归纳法证明命题正确性相似

要点：

1. 首先定义算法的循环体所操作的数据或数据结构上的一个关键性质（称为循环不变量）
2. 证明该性质在循环体开始之前是成立的
3. 证明循环体每次执行之后该性质仍然成立
4. 最后证明算法结束时该关键性质保证了算法的正确性

循环不变量：将十进制数转换为二进制数

证明当算法Convert_to_Binary终止时，n的二进制表示存放在数组b中。

```
Algorithm Convert_to_Binary(n)
Input: n (a positive integer)
Output: b (an array of bits corresponding to the binary representation of n)
Begin
    t:=n; {use a new variable t to preserve n)
    k:=0;
    while t>0 do
        k:=k+1;
        b[k]:=t mod 2;
        t:=t div 2;
    end
```

不变量: $n=t\cdot 2^k+m$

(m是由 $b_k\cdots b_1$ 二进制数对应的整数)

1) $k=0$ $m=0$

2) 第k次开始时 $n=t\cdot 2^k+m$

t为偶 $t\%2=0$ m不变

$t/2$, $k+1$

t为奇 $b[k+1]=1$ $m'=m+2^k$ $t'=\frac{t-1}{2}$

3) $t=0$时 $n=0\times 2^k+m=m$

故算法正确

常见错误

如果你对一个定理深信不疑，往往就会把一些看上去可以从该定理推出的“事实”用在证明中。

数学归纳法证明中的主要的一步就是要证明定理对n成立能推得定理对n+1也成立。可以先给出n+1时的情况，然后证明其可以从n时的情况得到；也可以先给出n时的情况，然后证明其能推出n+1时的情况。这两种方法都可以，然而，n+1时的情况必须是任意的！

例：所有马颜色相同.

定理中有特殊情况存在

不能用特殊代表一般

小结

- 数学归纳法的第一步就是定义归纳假设，要决定对哪个参数进行归纳。
- 每次用归纳法证明都分成两步：归纳基础和归约。归纳基础一般都比较容易，核心是归约，归约的要点在于要完整地保留原命题，不能在归约后的命题里加入任何多余的假设，除非这些假设是特别包含在归纳假设中的。归约也可以被看作是扩展。对某个特定的参数，把命题从较小的值扩展到较大的值，必须保证这样的扩展覆盖了参数中所有可能的值，且扩展后的命题是定理的一般形式，没有其它多余的假设或限制。