第四章

动量定理和动量守恒

通过本次课的学习，您将学会：

- 质点系的动量定理和动量守恒
- 反冲和火箭的原理

1　动量

动量 $\vec{p} = m\vec{v}$　　矢量，kgm/s

含义：　反映机械运动强度的物理量

物体动量的改变与施加在物体上的和外力成正比：

牛顿第二定律的一般形式：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

当物体的速度远远小于光速时：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

冲量

力对时间的累积效应是冲量

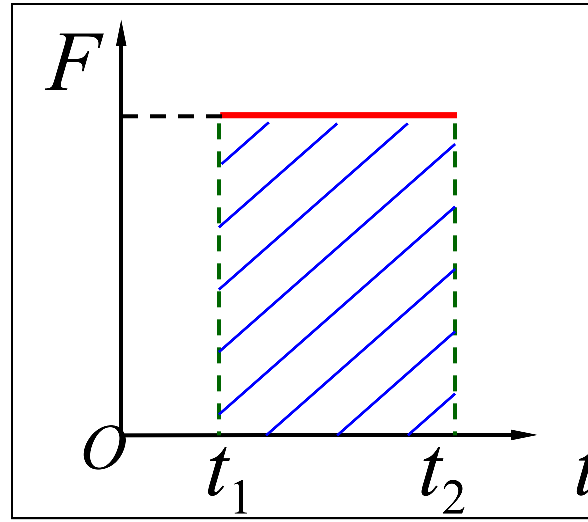
微分形式 $$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

积分形式 $$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

讨论

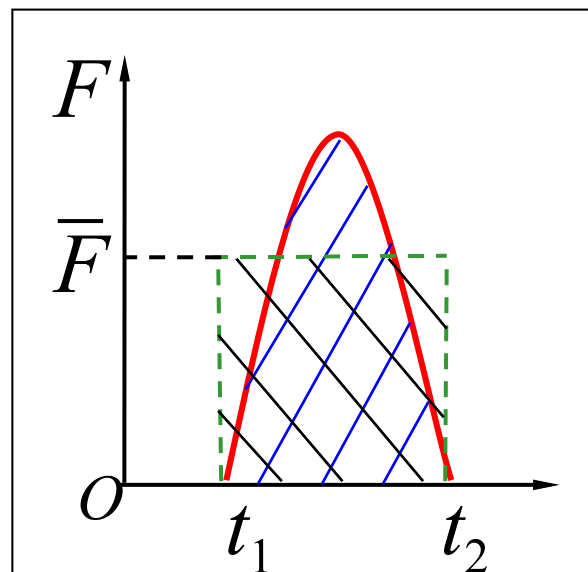
（1） F 为恒力

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$$



（2） F 为变力，作用时间很短

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \overline{\vec{F}}(t_2 - t_1)$$



2 质点的动量定理

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1}$$

质点动量定理：在给定的时间间隔内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量.

冲量（平均力的方向）的方向利用动量定理可以确定。

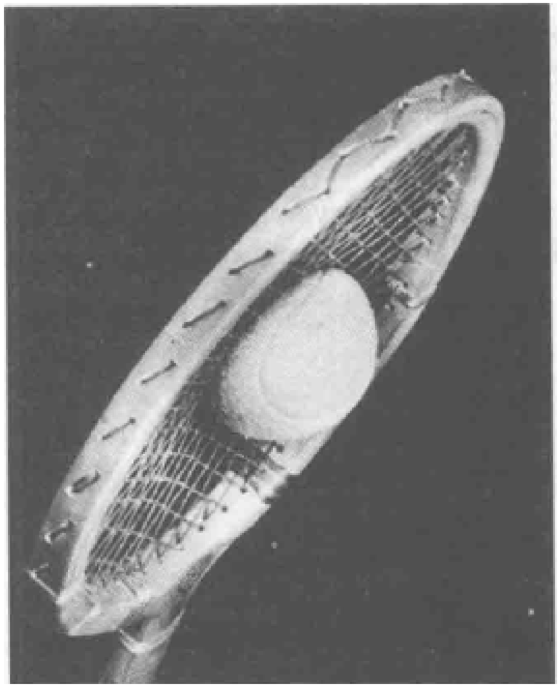
- 动量定理矢量表示为直角坐标系下的标量形式：

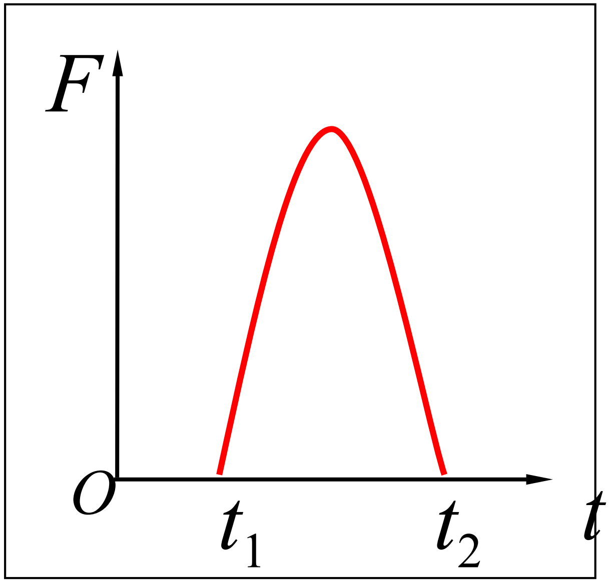
$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_x dt = \mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{0x} \\ \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_y dt = \mathbf{P}_y - \mathbf{P}_{0y} \\ \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_z dt = \mathbf{P}_z - \mathbf{P}_{0z} \end{cases}$$

- 冲量及动量关系，对于各自在直角坐标系下的分量，动量定理仍成立。

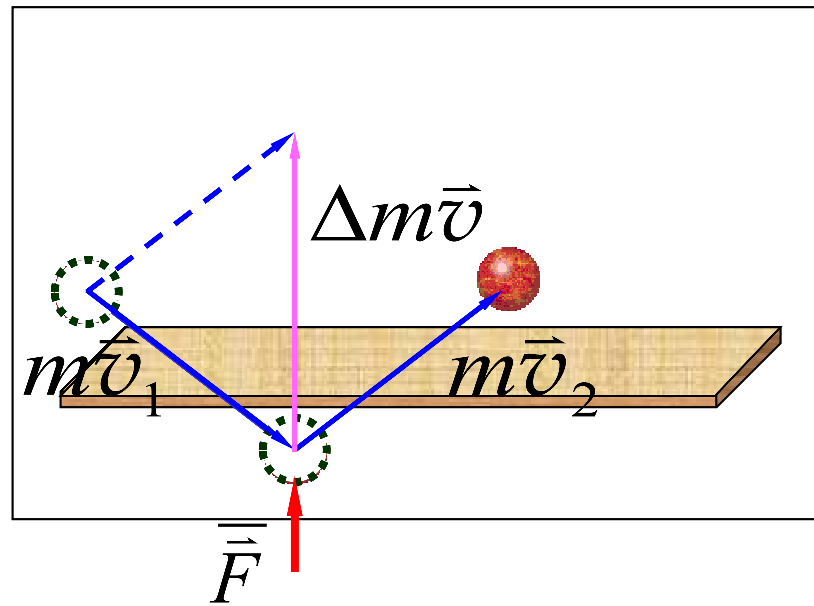
动量定理常应用于碰撞问题

这个过程中，作用时间短，数值非常大的变力—称作冲力。





$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

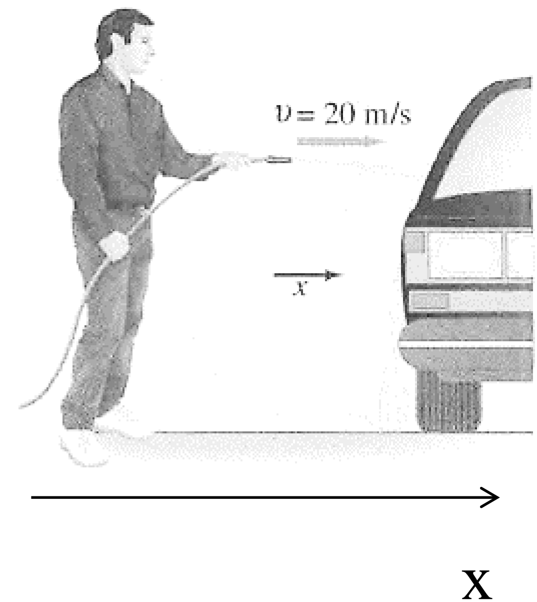


在$\Delta\vec{p}$一定时

Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大

例子1

水管每秒喷出的水为1.5 kg，水离开水管的速度是20 m/s.水浇到车的一侧，车使水完全停止（也就是没有水喷溅回来）。那么水施加在车上的力是多少？



$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{p_2-p_1}{\Delta t}=\frac{0-1.5\times 20kg\cdot m/s}{1s}=-30N$$

F为水所受的外力，其反作用力为水施加在车上的力，大小为30N，方向为x轴正方向。

单选题 1分

设置

水浇到车的一侧，如果车使水喷溅回来。那么水施加在车上的力比前述情况大还是小？

A 增大

B 减小

C 相同

D 无法确定

提交

必看

P 143　例 4.1- 4.3

例子 2

一个70kg的人从高度3.0m的地方跳到地面，请计算下面两种情况下，地面对人的脚施加的力。（a）人屈膝落地，通过屈膝，设人移动了50cm；（b）人直腿落地，设人仅仅移动1.0 cm

例子 2

一个70kg的人从高度3.0m的地方跳到地面，请计算下面两种情况下，地面对人的脚施加的力。（a）人屈膝落地，通过屈膝，设人移动了50cm；（b）人直腿落地，设人仅仅移动1.0 cm

解： 落地时的速度

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgh$$

$$v = \sqrt{2gh} = 7.7m/s$$

y

人受到的冲量

$$I = p_2 - p_1 = 0 - 70kg \cdot 7.7m/s = -540N \cdot s$$

（a）

$$\bar{v} = (0 + 7.7\,\mathrm{m/s}) = 3.8\,\mathrm{m/s}$$

$$\Delta\,\mathrm{t} = \frac{d}{\bar{v}} = \frac{0.5m}{3.8\,\mathrm{m/s}} = 0.13s$$

物体受到的合外力的平均值

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{-540N\cdot s}{0.13s} = -4153N$$

地面对物体的力

$$F = \bar{F} + mg = -4153 + 70\times 9.8 \approx -3467N$$

方向：　向上

$$\overline{v} = (0 + 7.7\,\mathrm{m/s}) = 3.8\,\mathrm{m/s}$$

（b）

$$\Delta t = \frac{d}{\overline{v}} = \frac{0.01m}{3.8\,\mathrm{m/s}} = 2.6\times10^{-3}s$$

物体受到的合外力的平均值

$$\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{-540N\cdot s}{2.6\times10^{-3}s} = -2.1\times10^{5}N$$

地面对物体的力

$$F = \overline{F} + mg = -2.1\times10^{5} - 70\times9.8 \approx -2.1\times10^{5}N$$

方向：　向上

物理模型2

质点系

- 多个质点组成
- 各个质点的相对位置可以变化
- 各质点之间有相互作用力

3　物体系的动量定理

已知条件：

外力作用于质点系的外力；

质点系内各个质点的相互作用力；

力作用之前，各个质点的速度；

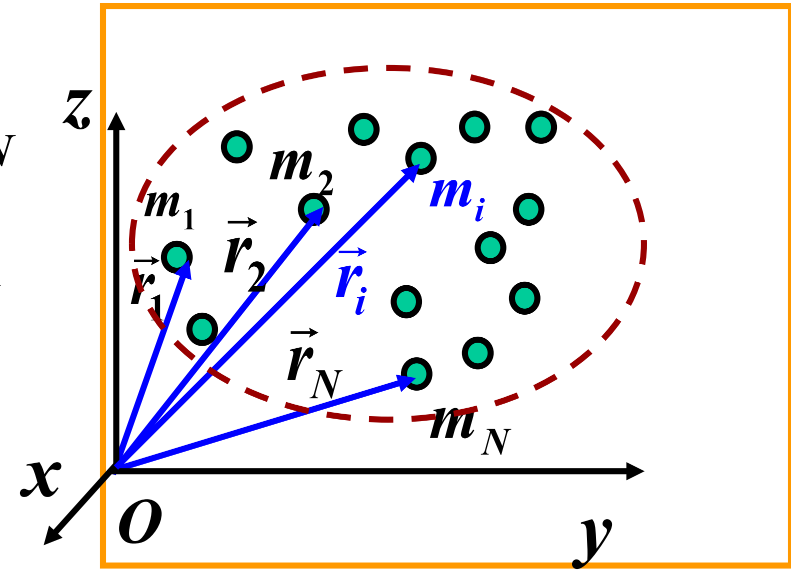
力作用之后，各个质点的速度。

质点系的动量

质量分别为：$m_1, m_2, \cdots m_i, \cdots m_N$

位矢分别为：$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_i, \cdots \vec{r}_N$

动量分别为：$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots \vec{p}_i, \cdots \vec{p}_N$



质点系总动量：

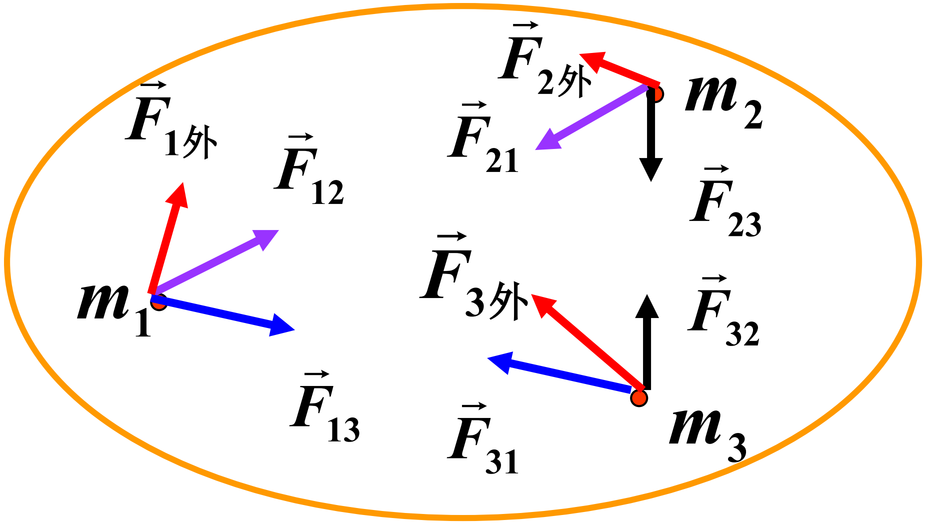
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

• 质点系的力

内力——质点系内质点间的相互作用力

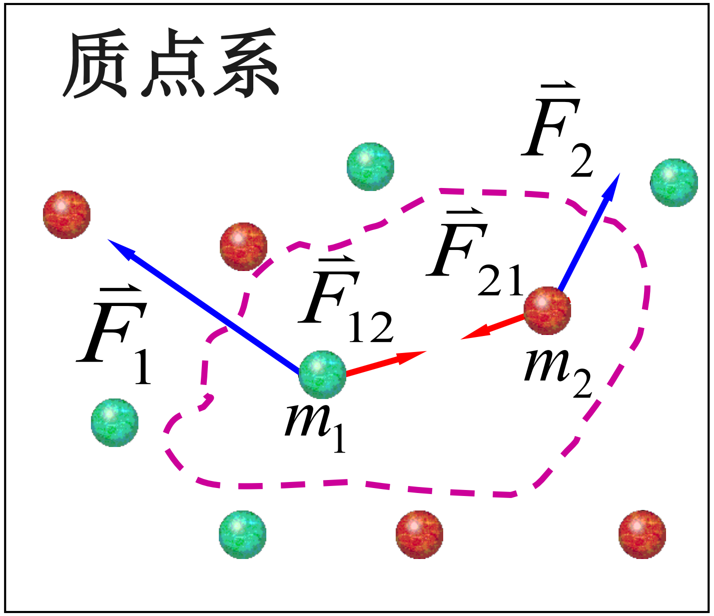
外力——质点系外的物体对系内任一质点的作用力

$$\vec{F}_{外}=\sum_i \vec{F}_{i外}$$



南開大學

- 对两质点分别应用质点动量定理：



$$m_1: \quad \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$m_2: \quad \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10} \\ \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20} \end{cases}$$

因内力$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$，故将两式相加后得：

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) - (m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20})$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}}$$

质点系动量定理： 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i0} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

$$\vec{F}_{外} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{\mathrm{N}}$$

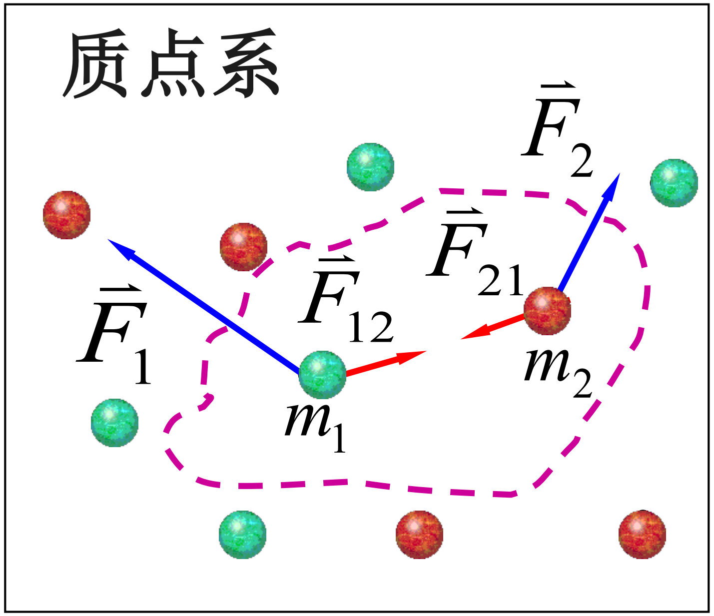
$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

质点系的动量定理分量表示：

$$\begin{cases} \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \sum F_x dt = \sum \mathrm{P}_x - \sum \mathrm{P}_{0\mathrm{x}} \\ \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \sum F_y dt = \sum \mathrm{P}_y - \sum \mathrm{P}_{0\mathrm{y}} \\ \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \sum F_z dt = \sum \mathrm{P}_z - \sum \mathrm{P}_{0\mathrm{z}} \end{cases}$$

质点系所受合外力在某一坐标轴上的分量的冲量，等于各质点在该方向的动量分量之和的变化量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i0}$$



说明:

1 对于一个物体系而言，只有外力的作用才能改变整个体系的动量；体系内的相互作用，能使各物体的动量发生变化，但是体系的总动量不变。

2 质点系动量定理由牛二、牛三定律导出，适合于惯性参照系。

4 动量守恒定律

质点动量守恒定律

当质点所受的合力为零时，质点的动量不变。

$$\vec{F}=0$$

$$\vec{\mathrm{P}}=\mathrm{Constant}$$

质点系动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零

则系统的总动量不变

$$\sum \vec{F}=0$$

$$\sum \vec{\mathrm{P}}=\mathrm{Constant}$$

讨论

（1）系统的总动量不变，但系统内任一质点的动量是可变的.

（2）守恒条件：合外力为零.

$$\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{i外} = 0$$

当 $\vec{F}_{外} << \vec{F}_{内}$ 时，可近似地认为系统总动量守恒.

(3) 若 $\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{外i} \neq 0$ ，但满足 $F_{外x} = 0$

有 $p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x$

$$
\begin{cases}
F_{外x} = 0, \quad p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x \\
F_{外y} = 0, \quad p_y = \sum_i m_i v_{iy} = C_y \\
F_{外z} = 0, \quad p_z = \sum_i m_i v_{iz} = C_z
\end{cases}
$$

(4) 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一.

动量定理及动量守恒定律可应用于碰撞问题及反冲现象中。

动量守恒的应用

动量守恒的应用--反冲现象

反冲： 一个静止的物体在内力的作用下分为两部分，一部分向某个方向运动，另一部分必然向相反的方向运动，这种现象叫反冲。

反冲的运动规律： 动量守恒定律

一个5.0 kg的步枪，发射出一个0.05kg的子弹，子弹的速度为120m/s。求步枪的后坐速度。

解： 此问题，动量守恒

$$m_B v_B + m_R v_R = m_B v_B' + m_R v_R'$$

$$0 + 0 = (0.050\ \mathrm{kg})(120\ \mathrm{m/s}) + (5.0\ \mathrm{kg})(v_R')$$

$$v_R' = -1.2\ \mathrm{m/s}.$$

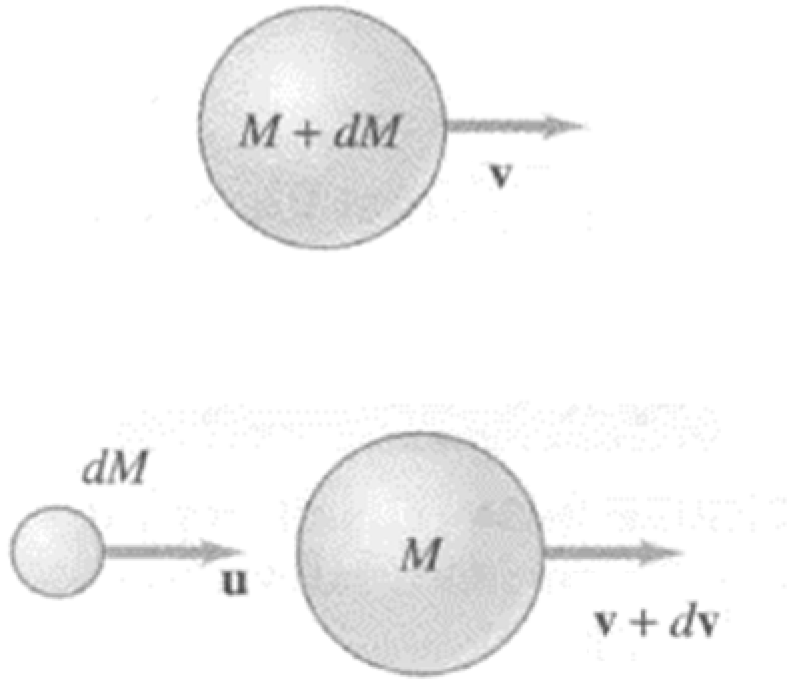
动量守恒的应用火箭原理（变质量问题）

在研究火箭时，通常忽略空气阻力及重力的作用。

火箭的工作原理：利用燃气喷发时的反冲运动进行发射

在火箭发射过程中，燃料不断燃烧变成热气体，并以高速从火箭尾部喷出，因而推动火箭向前加速运动。

设火箭发射前的总质量为 M_0，燃料燃尽后火箭的质量为 M_s，火箭燃气的喷射速度（相对于火箭）为 $\vec{u}$，求燃料燃尽后火箭的飞行速度 $\vec{v}$

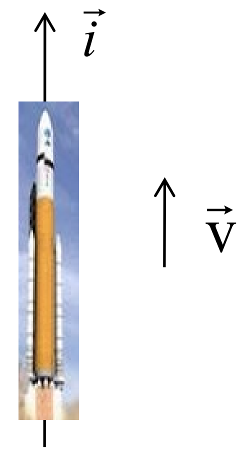


可以看做是碰撞问题

•设t时刻，火箭的质量为M，速度为 $\vec{v}$ ，单位时间喷出气体的质量为 ω ，气体相对于火箭的速度为 $\vec{u}$ ，气体的绝对速度为：$\vec{u}+\vec{v}$

建立如图所示坐标系，则气体的速度为

$$(v-u)\vec{i}$$



dt时间后：

火箭：　$M-\omega dt$ ，(v+dv)

气体：　ωdt ，(v+dv-u)

由动量守恒可知：

$$Mv = (M - \omega dt)(v + dv) + \omega dt(v + dv - u)$$

$$Mdv - u\omega dt = 0$$

dt时间内火箭质量的变化为： $dM = -\omega dt$

$$Mdv + udM = 0 \qquad dv = -u\frac{dM}{M}$$

设t=0时，火箭质量为 M_0 ，速度为 v_0

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{M_0}^{M} (-u\frac{dM}{M})$$

有u不随时间 变化，是一常量 $v - v_0 = u\ln\dfrac{M_0}{M}$

即 $v = v_0 + u\ln\dfrac{M_0}{M}$

- 设火箭喷气结束时，质量为 M_s ，火箭初始速率为0，则有：

火箭的最后可达到的速率为：$v_s = u\ln\dfrac{M_0}{M_s}$

$\dfrac{M_0}{M_s}$ ——火箭的质量比

如果考虑空气的阻力和重力的作用，这个问题该如何处理？

P 169　4.5 变质量动力学简介

这一结果是忽略空气阻力及重力的影响，故实际最终速率要小于此值，但具有指导意义：

1）最终速率与喷气相对速率成正比

喷气速率：要求高温、高压、喷口抗高速、高效能燃料，一般 2500m/s （40大气压，3000°C)

2）最终速率与燃料燃烧前后质量比的自然对数成正比

质量比：提高较难。火箭包括外壳、发动机、仪器、卫星、故 M_s 较大。质量比一般在10以下。

➢ 以喷气速度为2500m/s，质量比为6，为例，v_s =4500m/s

➢ 这小于第一宇宙速度：7900m/s，故采用多级火箭，外壳自动脱离，提高质量比。

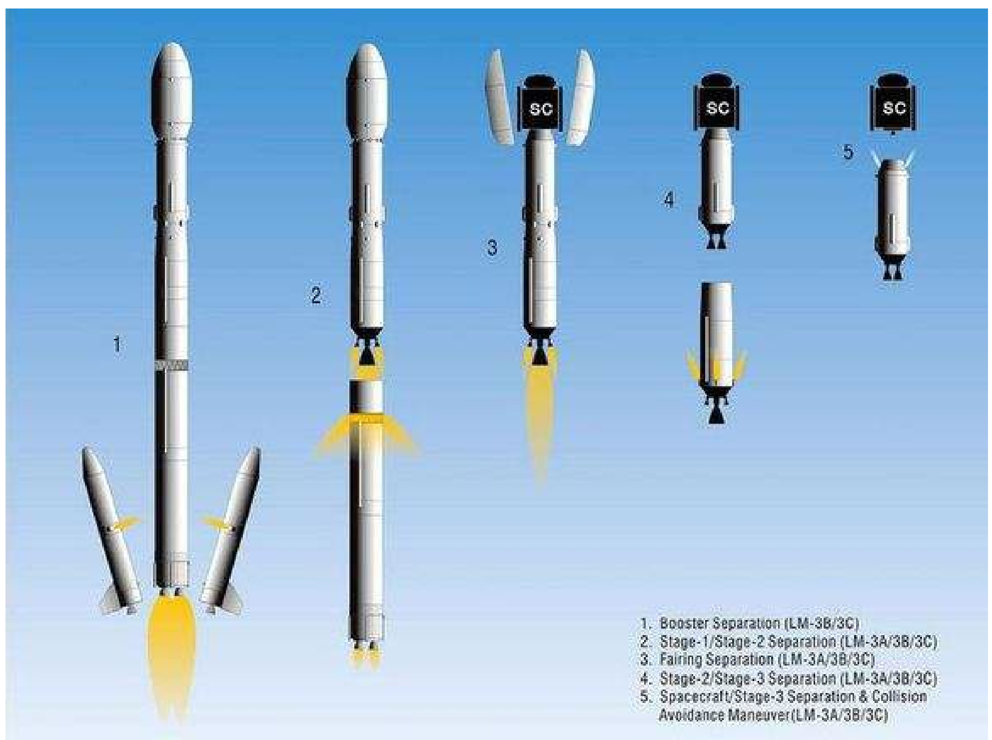


Figure 2-12 LM-3A/3B/3C Separation Events

本节的学习目标，您达到了吗？

- 质点系的动量守恒
- 火箭的原理这类的变质量问题

作业: P173　T4.3 T4.12 T4.15 T4.21