（2）电极化强度矢量与极化电荷分布

闭合曲面的电极化强度矢量通量等于该闭合曲面内的极化电荷的负值。

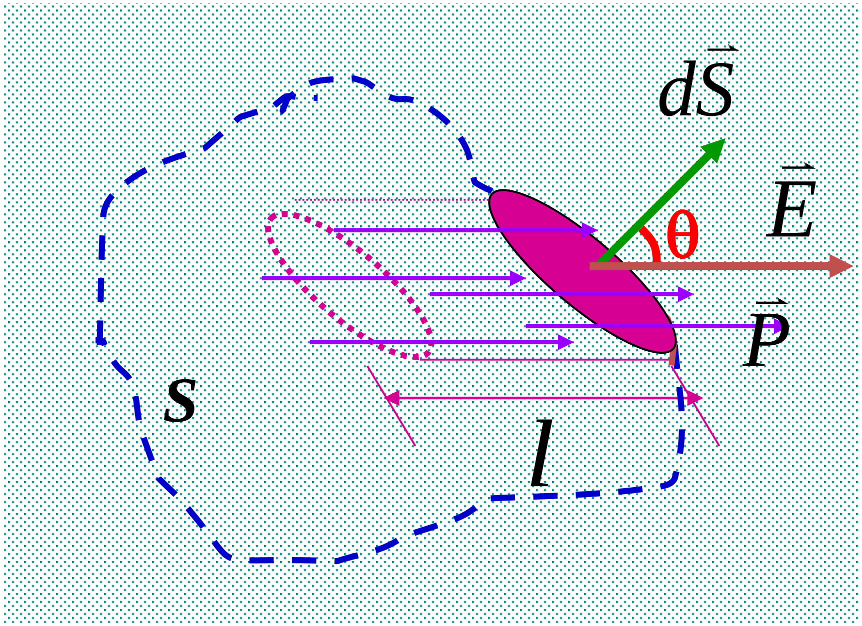
$$\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum_{内} q'$$

设一个分子因极化产生的正负电荷的数量分别为+q和-q。电场作用产生的位移为l。设单位体积内有n个分子

在已极化的介质内任意作一闭合面S

1）dS对S内极化电荷的贡献

在**dS**附近厚为l的薄层内

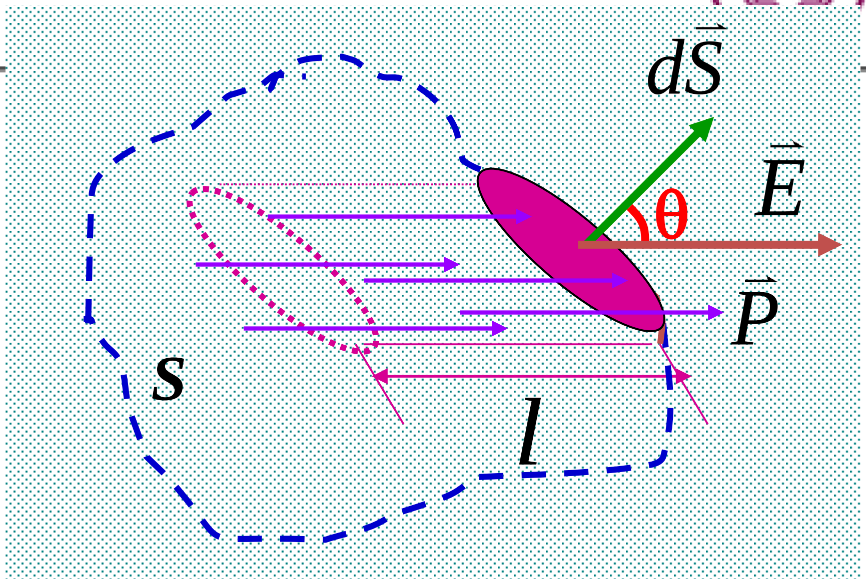


穿过ds面的极化电荷：

$$dq_1' = qndV$$

$$= qnl\,dS\cos\theta$$

$$= PdS\cos\theta = \vec{P}\cdot d\vec{S}$$



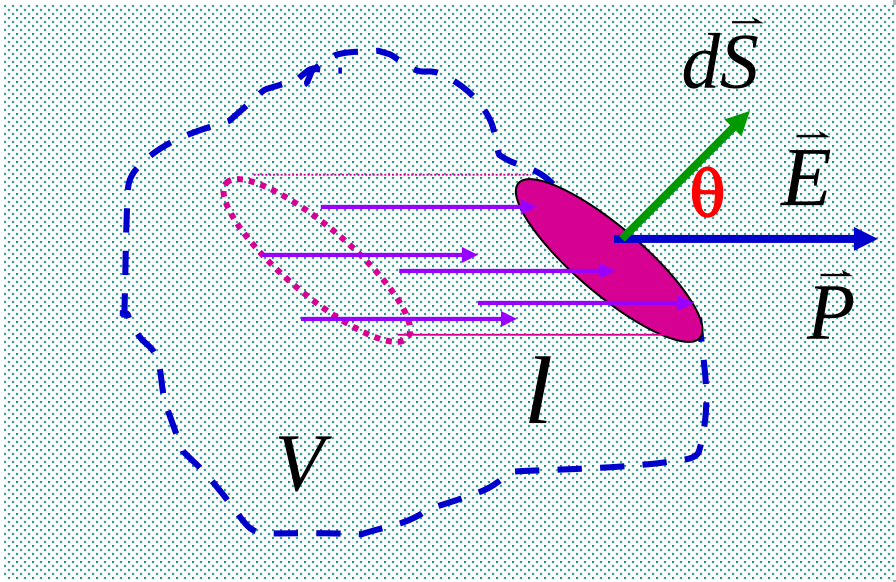
所以，**ds**对**S**内极化电荷的贡献为：

$$dq' = -\vec{P}\cdot d\vec{s}$$

2）*S*所围的体积内的极化电荷为

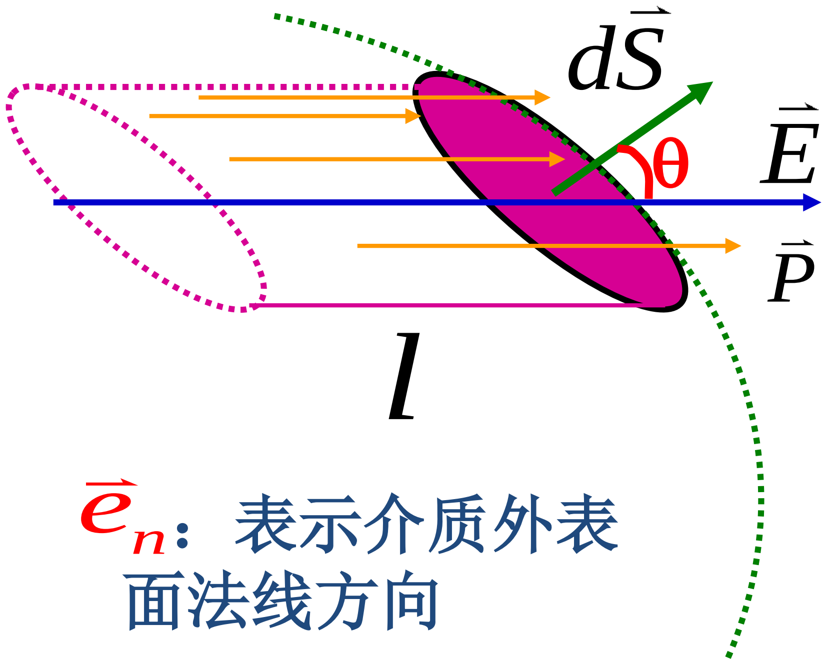
$$dq' = -\vec{P} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_{S内} q'$$



封闭面内体束缚电荷等于通该封闭面的电极化强度的通量的负值。

电介质表面极化电荷面密度



$\vec{e}_n$：表示介质外表面法线方向

$$dq' = \vec{P} \cdot d\vec{S} = PdS\cos\theta$$

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P\cos\theta$$

$$\boxed{\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n}$$

极化电荷面密度等于电极化强度沿介质表面法线方向的分量。

电介质表面极化电荷面密度：

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$

$\vec{n}$：表示介质外表面法线方向

三、有电介质时静电场规律

1、高斯定理

存在电介质时，静电场的高斯定理仍然成立。

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

其中：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}',$$

$$\sum q = \sum q_f + \sum q'$$

$$\oiint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_f + \sum q',$$

$$\because \oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum q'$$

$$\therefore \quad \oiint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum q_f$$

令 $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \rightarrow$ 电位移矢量

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_f$$

有电介质存在时的高斯定理

闭合曲面的电位移矢量通量等于闭合曲面内的自由电荷代数和。事实上在真空中也是成立的，它是普遍成立的高斯定理。

$$\oint\!\!\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_f$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

说明：

- $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ 其中 $\vec{E}$为总的电场强度矢量
- q_f 为自由电荷

2. $\vec{D},\vec{E},\vec{P}$ 之间的关系

$$\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}$$ （普遍关系）

$$\because\quad \vec{P}=\chi\varepsilon_o\vec{E}$$

$$\therefore\quad \vec{D}=\varepsilon_{\rm o}\vec{E}+\chi\varepsilon_{\rm o}\vec{E}=\varepsilon_{\rm o}(1+\chi)\vec{E}$$

令 $\varepsilon_r=(1+\chi)\rightarrow$相对介电常数, 则 $\vec{D}=\varepsilon_{\rm o}\varepsilon_r\vec{E}$

令 $\varepsilon=\varepsilon_{\rm o}\varepsilon_r\rightarrow$（绝对）介电常数, 则 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

对于真空： $\vec{P}=0$ $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$

ε_0 真空介电常数； $\varepsilon_r=1$

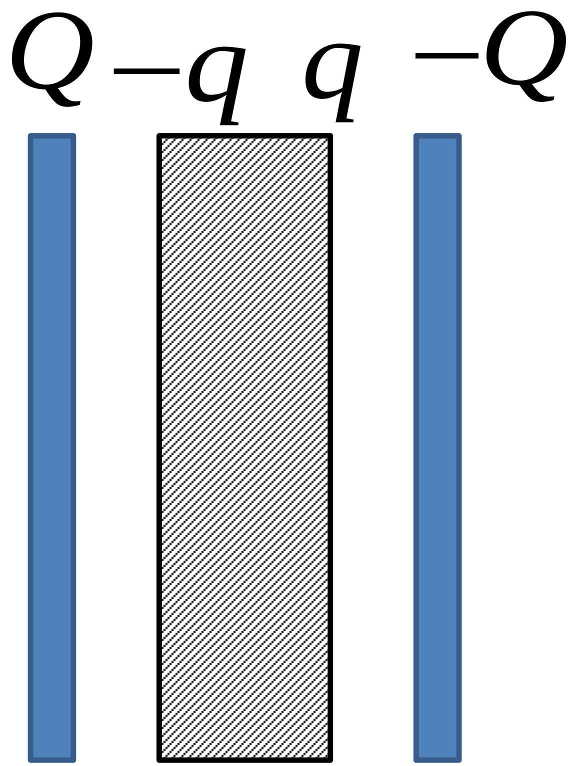
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_S \varepsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{S}=\sum q_f$$

其它电介质： $\varepsilon_r=(1+\chi)>1$

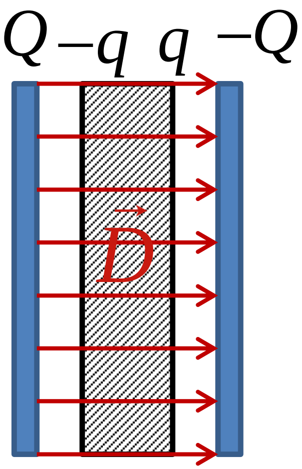
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_f$$

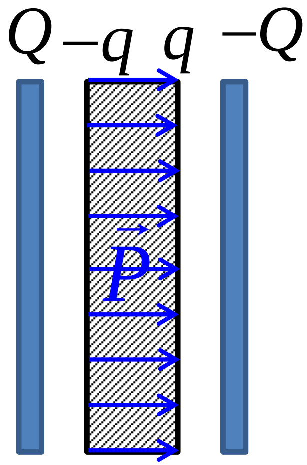
请画出平行平板电容器之间放入一电介质后

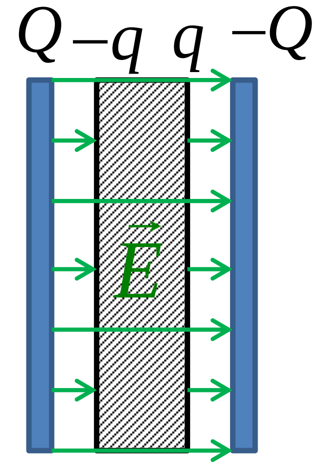
$\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ 在极板间的分布



以平行板电容器说明 $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ 的关系：南开大学







$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_f$$

$$\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum q'$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum (q_f + q')/\varepsilon_0$$

有介质时场强的求解

有介质时的高斯定理

求得 $\vec{D}$

求得 $\vec{E}$ ： $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

3、环路定理

在真空条件下，静电场的环路定理在有电介质存在的情况下仍然成立，即

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

不论是真空还是存在电介质，静电场都是保守场，电场矢量的线积分与积分路径无关，或者说电场矢量沿闭合环路的线积分等于零。

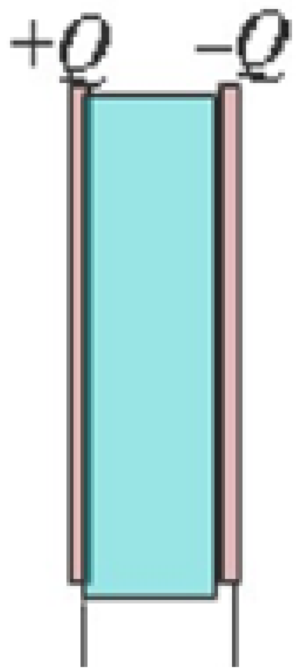
有介质存在时电场的性质

高斯定理：
$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_f$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

环路高斯定理：
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

如果持续增加外电场，会出现什么现象？



4 介电强度

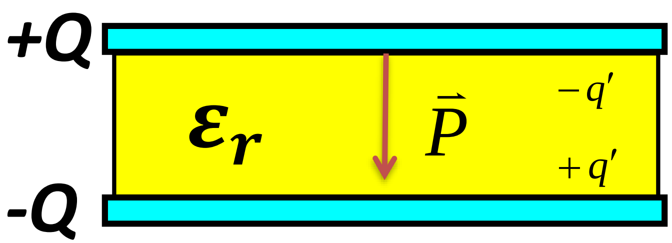
介电强度： 某电介质不发生击穿所能承受的最大电场强度称为该电介质的介电强度。

击穿的机理：电介质在外场作用下，出现极化电荷，起初为束缚电荷，随着电场的增大，当达到一定数值时，束缚电荷就会脱离分子的束缚而成为自由电荷。从而使电介质的绝缘性受到破坏，成为导体。

常以 10^{-6}伏特/米为单位来表示介电强度。如空气：3，玻璃：30，云母：200，等等。

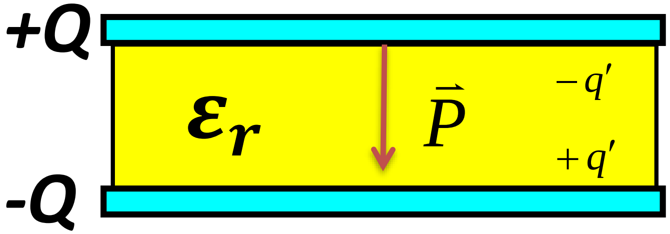
四、应用举例

例1、平行板电容器两极带电为Q和-Q，极间充满均匀电介质，其相对介电常数为 ε_r ，极板面积为S，板间距为d，略去边缘效应，求极化电荷、电位移矢量分布以及电容器电容。



解：极板可看作无限大，设极化荷面密度为 σ'

$$\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n}$$



$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\therefore \sigma' = \chi\varepsilon_0 E$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ （向下）

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = \chi E$$ （向上）

$$E = E_0 - E' = E_0 - \chi E$$

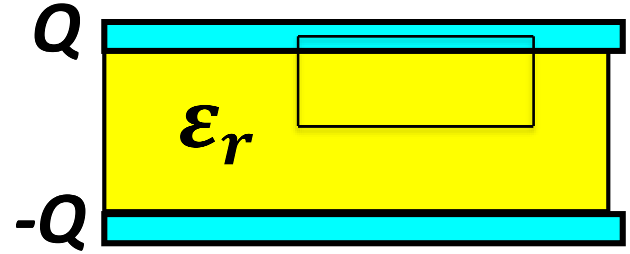
$$E = \frac{E_0}{(1+\chi)} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E = \frac{\chi \varepsilon_0 \sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\chi \sigma}{\varepsilon_r} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r}$$

$$q' = S\sigma' = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r}$$ 上表面为正，下表面为负

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \sigma$$

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$



另一方法：高斯定理

如图作柱形高斯面。因为边缘效应可以忽略，且介质均匀。

因而 $\vec{E}$ 对称，$\vec{D}$也对称

$$\because \oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \qquad \therefore \iint_{上} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \oiint_{下} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \oiint_{侧} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \Delta S\cdot\sigma$$

$$D = \sigma = \frac{Q}{S} \qquad \because D = \varepsilon_r\varepsilon_0 E, \quad \therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

$\vec{D}$

$$\therefore P = \chi\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r}, \qquad \therefore \sigma' = \vec{P}\cdot\hat{n} = p = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r}$$

$$\therefore q' = s\sigma' = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r}$$

求电容：

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}d = \frac{Q}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}d$$

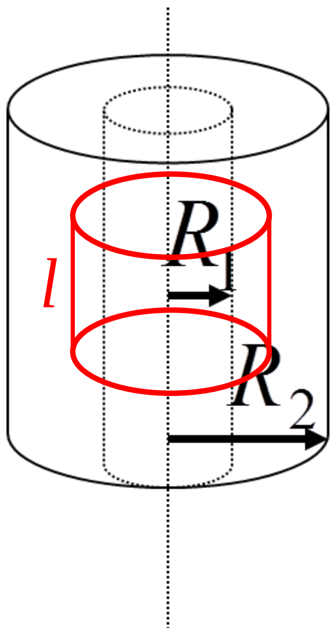
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}$$

与真空相比，扩大到达原来的 ε_r倍。

事实上，从真空到充满电介质，很多结论都是将$\boldsymbol{\varepsilon_0}$变化为$\boldsymbol{\varepsilon_0\varepsilon_r}$。如点电荷的电场、电位、库仑定律、各种电容器的电容等。

例2、柱形电容器的内外半径为 R_1, R_2 ,在内外导体之间充满相对介电常数为 ε_r 的电介质，已知介质的介电强度为 E_m ，求电容的耐压。

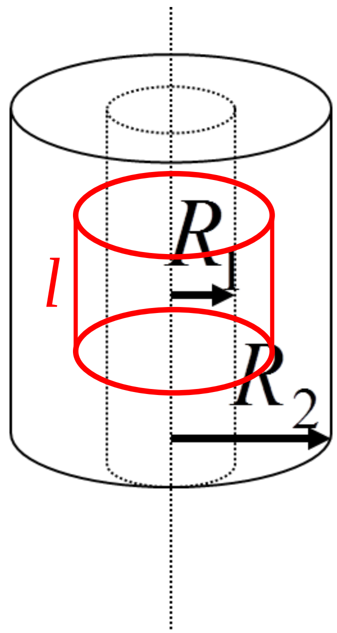
（忽略边缘效应）



解：设内外表面的线电荷密度为 $\lambda, -\lambda$ ，

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\lambda l \Rightarrow D\cdot 2\pi r l=\lambda l \Rightarrow D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

又$D=\varepsilon_0\varepsilon_r E \Rightarrow E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$，$E$为总的场强



结果表明，在内导体的外表面上（ $r=R_1$ ）电场最强，因而该处最先击穿。将 $r=R_1$ 和 $E=E_m$ 带入上式，可得最大的线电荷密度。

$$\lambda_{\max} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_m$$

当带有最大电荷时，介质中的电场强度为：

$$E = \frac{\lambda_{\max}}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_m}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{R_1 E_m}{r}$$

电容的耐压为：

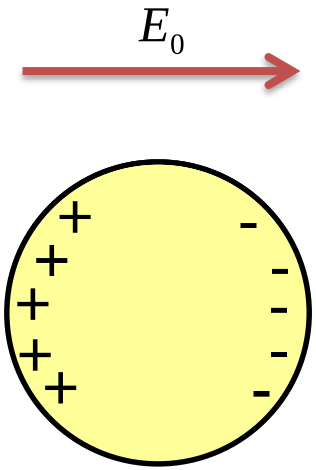
$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_1 E_m}{r} dr = R_1 E_m \ln\frac{R_2}{R_1}$$

例3、在无限大的均匀电介质中，存在外加均匀电场矢量E_0，介质的相对介电常数为ε_r,在介质中挖一个半径为有限值的球形空腔，求

（1）极化电荷面密度σ'。

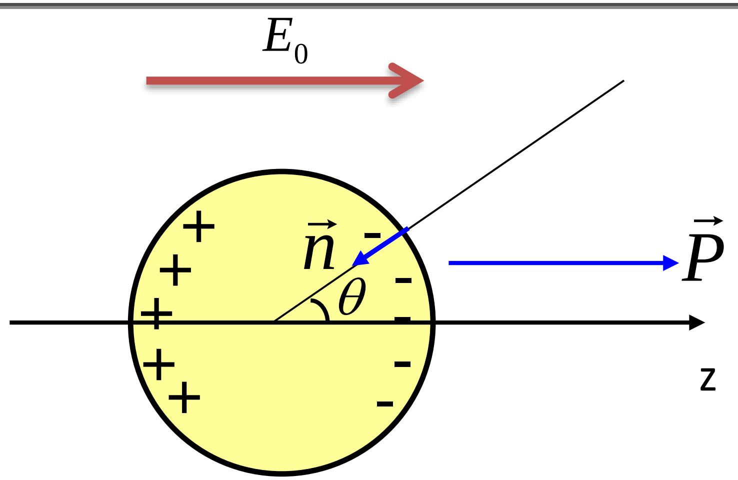
（2）空腔中心处的附加电场矢量。

（3）空腔中心处总电场矢量E。



解：建立求坐标系

$$\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n} = -P\cos\theta$$



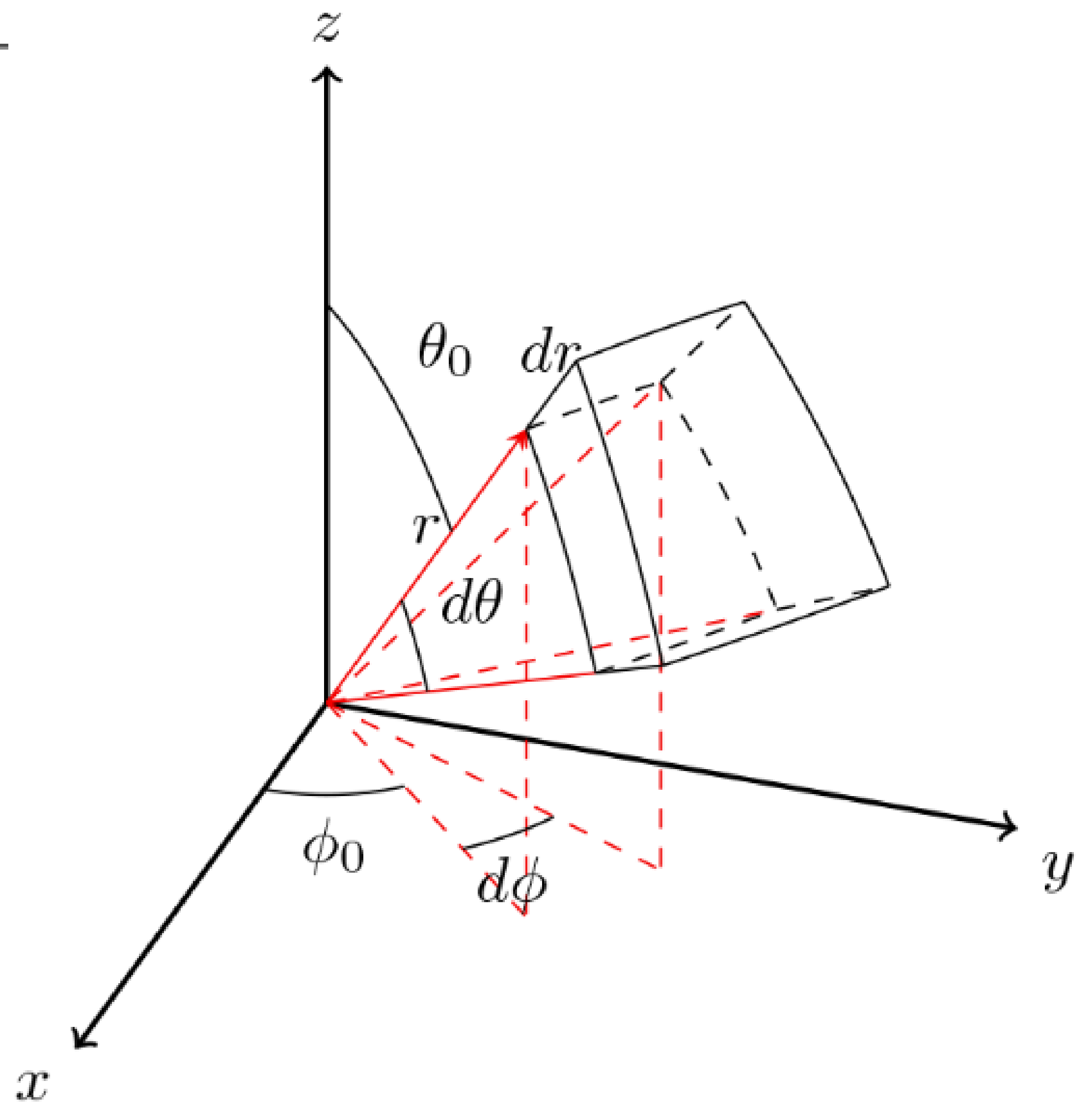
$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

电介质为无限大，空腔内为有限大，在介质内部

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0$$

$$\therefore \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E}_0$$

$$\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n} = -P\cos\theta = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$



z
θ0
dr
r
dθ
φ0
dφ
y
x

取一电荷元：　$ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

$$dq' = \sigma' ds = -P\cos\theta ds = -P\cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

电荷元在圆心处产生的电场强度为：

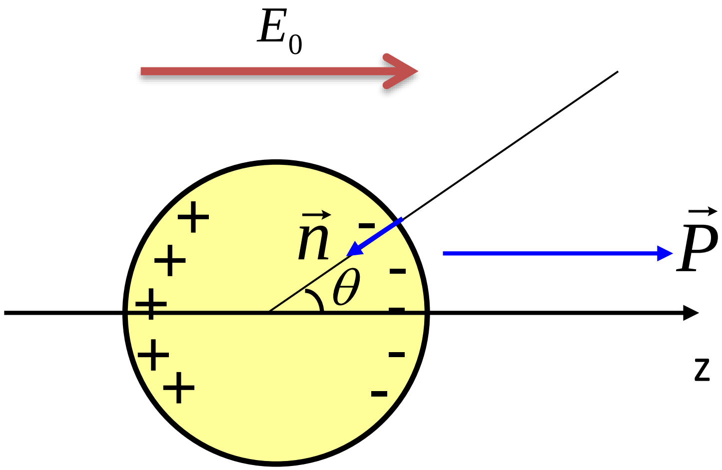
$$d\vec{E}' = k\frac{dq'}{R^2}\hat{\vec{r}} = -k\frac{dq'}{R^2}\hat{\vec{R}} = kP\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi\hat{\vec{R}}$$

$$dE'_z = dE'\cos\theta = kP\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$E'_z = kP\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{3}E_0$$

总的电场为：

$$E = E_0 + E' = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} E_0$$



课本： P346 例8.36， 例8.37

- 作业：

  P356　T8.54　T8.57　T8.58　T8.60

本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 掌握极化现象的微观解释；
- 掌握极化强度的定义；
- 掌握极化电荷与极化电荷的关系；
- 掌握有介质存在的高斯定理和环路定理；
- 会求解相关问题。