第一章　行列式

1.

() 23154　1　1　0　1　0　3该数列为奇排列

( )　631254 =5　2　0　0　1　0=8该排列为偶排列

(3)　n(n　1)　321　(n　1)　(n　2)　(n　3)　$\frac{n(n\quad 1)}{2}$

当n　4m或n　4m　1时，　n(n　1)　321 为偶数，排列为偶排列

当n　4m　2或n　4m　3时，　n(n　1)　321 为奇数，排列为奇排列（其中　m　0,1,2　）

(4)　135　(2n　1)246　(2n)　0　1　2　3　(n　1)　$\frac{n(n\quad 1)}{2}$

当n　4m或n　4m　1时，　135　(2n　1)246　(2n) 为偶数，排列为偶排列

当n　4m　2或n　4m　3时，　135　(2n　1)246　(2n) 为奇数，排列为奇排列（其中　m　0,1,2　）

2.解：已知排列　$i_1 i_2$　i_n的逆序数为　k，这 n个数按从大到小排列

时逆序数为 (n　1)　(n　2)　(n　3)　$\frac{n(n\quad 1)}{2}$个.

设第 x数i_x之后有　r个数比 i_x小，则倒排后　i_x的位置

变为$i_{n\ x\ 1}$，其后 n　x　r个数比 $i_{n\ x\ 1}$小，两者相加为　n　x

故　$i_n i_{n\ 1}$　i_1　$\frac{n(n\quad 1)}{2}$　$i_1 i_2$　i_n

3　证明：. 因为：对换改变排列的奇偶性，即一次变换后，奇排列改变为偶排列，偶排列改变为奇排列　当　n　2 时，将所有偶排列变为奇排列，将所有奇排列变为偶排列　　因为两个数列依然相等，即所有的情况不变。　偶排列与奇排列各占一半。

4　（1）　$a_{13}a_{24}a_{33}a_{41}$ 不是行列式的项　　$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是行列式的项　　因为它的列排排列逆序列

=(4321)=3+2+0+0=5　为奇数，　应带负号

（2）　$a_{51}a_{42}a_{33}a_{24}a_{51}$ 不是行列式的项　　$a_{13}a_{52}a_{41}a_{35}a_{24}=a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}$　因为它的列排排列逆

序列　(34512)=2+2+2+0+0=6　为偶数　应带正号。

5　解：
a_{11}　a_{23}　a_{32}　a_{44}
a_{12}　a_{23}　a_{34}　a_{41} 利用　为正负数来做，一共六项，　为正，则带正号，　为负则带负
a_{14}　a_{23}　a_{31}　a_{42}

号来做。

6　解：（1）因为它是左下三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$1^{123\cdots n}a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

（2）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{3} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \quad 1^{1\ 1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a_{12} \quad 1^{2\ 1}\begin{vmatrix} a_{21`} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \quad 1^{1\ 1}\ 0 \quad a_{12}a_{21} \quad 1^{1\ 1}\ 0 = 0$$

（3）
$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 34 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 3 \\ 17 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 1^{1\ 2\ 1\ 2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 32$$

（4）

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & x \end{vmatrix} \quad 1^{1\ 2\ 1\ 2}\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y & 0 \\ x & y \end{vmatrix} \quad 1^{2\ 3\ 1\ 2}\begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & 0 & x \end{vmatrix} = x^5 \quad y^5$$

7. 证明：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 将行列式转化为 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{1} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & \ldots & 0 \end{vmatrix}$ 若 零元多于 $n^2 \quad n$ 个时,

行列式可变为 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$ 故可知行列式为 0.

8.（1）

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 5 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 5 \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 5\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 21 & 21 & 0 \\ 13 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad 630$$

第一章　　高数 3 册

9.(1). $y \quad mx \quad b$经过$(x_1, \ y_1)(x_2, \ y_2)$.

斜率$m \quad \dfrac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2}$

$y \quad \dfrac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2} \ x \quad b$代入$(x_1, \ y_1)$

$y_1 \quad \dfrac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2} \ x_1 \quad b \quad b \quad y_1 \quad \dfrac{y_1 \quad y_2 \ x_1}{x_1 \quad x_2} \quad \dfrac{x_1 y_2 \quad x_2 y_1}{x_1 \quad x_2}$

则$y \quad \dfrac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2} \ x \quad \dfrac{x_1 y_2 \quad x_2 y_1}{x_1 \quad x_2}$

又由$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \quad 0$

左边$= \ y_1 \quad y_2 \ x \quad y \ x_1 \quad x_2 \quad x_1 y_2 \quad x_2 y_1 \quad 0$ 右边

则$y \quad \dfrac{y_1 \quad y_2}{x_1 \quad x_2} \ x \quad \dfrac{x_1 y_2 \quad x_2 y_1}{x_1 \quad x_2}$

问题特征：

$$10.\ 1\ \begin{vmatrix} b & c & c & a & a & b \\ b & c & c & a & a & b \\ b & c & c & a & b & a \end{vmatrix}$$

利用性质 4 和 5 .分成六个行列式相加

其余结合为零故

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ b & c & a \\ b & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c & a & b \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \text{性质}\ 2$$

$$2\ \begin{vmatrix} \sin^2 & \cos^2 & \cos 2 \\ \sin^2 & \cos^2 & \cos 2 \\ \sin^2 & \cos^2 & \cos 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 & \cos^2 & \cos 2 \\ 1 & \cos^2 & \cos^2 & \cos 2 \\ 1 & \cos^2 & \cos^2 & \cos 2 \end{vmatrix} \xlongequal{-(2)\text{列}+(1)\text{列}} \begin{vmatrix} 2\cos^2 & 1 & \cos^2 & \cos 2 \\ 2\cos^2 & 1 & \cos^2 & \cos 2 \\ 2\cos^2 & 1 & \cos^2 & \cos 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos 2 & \cos^2 & \cos 2 \\ \cos 2 & \cos^2 & \cos 2 \\ \cos 2 & \cos^2 & \cos 2 \end{vmatrix} \quad 0 \ \ \text{性质}\ 5$$

$$3.\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{3列\ xz\\4列\ xz}]{2列\ yz} \frac{1}{yz\ xz\ xy}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix}$$

4 列 xy

$$\frac{xyz\ xyz}{yz\ xz\ xy}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$11.\ 1\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a\ b & a\ b\ c & a\ b\ c\ d \\ a & 2a\ b & 3a\ 2b\ c & 4a\ 3b\ 2c\ d \\ a & 3a\ b & 6a\ 3b\ c & 10a\ 6b\ 3c\ d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\ 3\ 4列]{1列\ -1加到}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a\ b & a\ b\ c \\ 0 & 2a & 3a\ 2b & 4a\ 3b\ 2c \\ 0 & 3a & 6a\ 3b & 10a\ 6b\ 3c \end{vmatrix} \xrightarrow[2行\ \ 3+4行]{2行\ \ 2+3行}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a\ b & a\ b\ c \\ 0 & 0 & a & 2a\ b \\ 0 & 0 & 3a & 6a\ 3b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行\ -3\ \ 4行}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a\ b & a\ b\ c \\ 0 & 0 & a & 2a\ b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}\ a^4$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & L & n \\ -1 & 0 & 3 & L & n \\ -1 & -2 & 0 & L & n \\ M & M & M & & M \\ -1 & -2 & -3 & L & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{L\\1列\ -n+n列}]{\substack{1列\ -2+2列\\1列\ -3+3列}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & L & 0 \\ -1 & 2 & 6 & L & 2n \\ -1 & 0 & 3 & L & 2n \\ M & M & M & & M \\ -1 & 0 & 0 & L & n \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{降阶}}1\quad -1^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 6 & & L & 2n \\ 0 & 3 & & L & 2n \\ 0 & 0 & 4 & L & 2n \\ M & M & & & M \\ 0 & 0 & 0 & L & n \end{vmatrix}\ 2\ 3\ 4\ L\ \ n\ \ n!$$

$$3\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & L & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & L & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & L & a_{3n} \\ L & L & L & L & L \\ x_1 & x_2 & x_3 & L & x_n \end{vmatrix}\ x_1\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & L & a_{1n} \\ 1 & x_2 & a_{23} & L & a_{2n} \\ 1 & x_2 & x_3 & L & a_{3n} \\ L & L & L & L & L \\ 1 & x_2 & x_3 & L & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L\\1列\ -x_n+n列}]{1列\ -x+2列} x_1\begin{vmatrix} 1 & a_{12}\ x_2 & a_{13}\ x_3 & L & a_{1n}\ x_n \\ 1 & 0 & a_{23}\ x_3 & L & a_{2n}\ x_n \\ 1 & 0 & 0 & L & a_{3n}\ x_n \\ L & L & L & L & L \\ 1 & 0 & 0 & L & 0 \end{vmatrix}\underline{\underline{降阶}}x_1 1\quad -1^{1+1}\quad 1\begin{vmatrix} a_{12}\ x_2 & a_{13}\ x_3 & L & a_{1n}\ x_n \\ & a_{23}\ x_3 & L & a_{2n}\ x_n \\ & & L & a_{3n}\ x_n \\ L & L & L & L \\ & & L & a_{n\ 1n}\ x_n \end{vmatrix}$$

习题一

13 （1）

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \quad D$$

根据“定义法” $D \quad x^n \quad (\ \ 1)^{I(2.3.4.5...n)} y^n \quad x^n \quad (\ \ 1)^{n\ \ 1} y^n$

（2） $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\ \ 1 & n \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\ \ 1\ \ 1 & n \end{vmatrix} \quad D$$

根据“降阶法” $D \xrightarrow{\text{将第2~n列加到第(1)列上得}} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n\ \ 2 & n\ \ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{将前一行乘以 -1加到后一行得}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\ \ n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\ \ n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1\ \ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{变为 (n-1)阶} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{将(2)~(n)列加到(1)列上得}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{-1 (1)列加到(2)~(n)列}} -\frac{n(n\ \ 1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 1 & \cdots & n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\ \ 1)^{\frac{(n\ \ 1)(n\ \ 2)}{2}} (\ \ 1)^{n\ \ 2} \frac{n(n\ \ 1)}{2} \quad (\ \ 1)^{\frac{n^2\ \ 3n\ \ 2}{2}\ \frac{2n\ \ 2}{2}} n^{n\ \ 1} \frac{n\ \ 1}{2} \quad (\ \ 1)^{\frac{n(n\ \ 1)}{2}} n^{n\ \ 1} \frac{n\ \ 1}{2}$$

（3）

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 & \cdots & (a-1)^{n-1} \\ 1 & a-2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a-n+1 & (a-n+1)^2 & \cdots & (a-n+1)^{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n+1 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n+1)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n+1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{范达蒙行列式}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1!2!\cdots(n-1)!$$

注：根据范达蒙行列式原式 $=(-1)\cdot(-2)\cdots(-n+1) \quad (-1)^{1+2+3+\cdots+(n-1)}1!2!\cdots(n-1)!$

$$(-1)\cdot(-2)\cdots(-n+2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$-1 \quad =(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}1!2!\cdots(n-1)!$$

（4）
$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第}n\text{行提出}a_n^n\text{得}}$$

$$a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & a_1^{-1}b_1 & a_1^{-2}b_1^2 & \cdots & a_1^{1-n}b_1^{n-1} & \frac{b_1^n}{a_1^n} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \cdots & \frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}} & \frac{b_2^n}{a_2^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} & \cdots & \frac{b_{n+1}^{n-1}}{a_{n+1}^{n-1}} & \frac{b_{n+1}^n}{a_{n+1}^n} \end{vmatrix}$$

$$=a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_1^2}{a_1^2} & \cdots & \frac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}} & \frac{b_1^n}{a_1^n} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \cdots & \frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}} & \frac{b_2^n}{a_2^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} & \cdots & \frac{b_{n+1}^{n-1}}{a_{n+1}^{n-1}} & \frac{b_{n+1}^n}{a_{n+1}^n} \end{vmatrix} = a_1^n a_2^n a_3^n \cdots a_{n+1}^n \prod \left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right) \quad \prod (a_j b_i - a_i b_j)$$

14 （1）证明：$\begin{vmatrix} \cos\frac{}{2} & \sin\frac{}{2} & \cos\frac{}{2} \\ \cos\frac{}{2} & \sin\frac{}{2} & \cos\frac{}{2} \\ \cos\frac{}{2} & \sin\frac{}{2} & \cos\frac{+}{2} \end{vmatrix}$

$$=\cos\frac{}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{}{2} & \cos\frac{}{2} \\ \sin\frac{}{2} & \cos\frac{}{2} \end{vmatrix} \quad \cos\frac{}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{}{2} & \cos\frac{}{2} \\ \sin\frac{+}{2} & \cos\frac{+}{2} \end{vmatrix}$$

$$+\cos\frac{-}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{}{2} & \cos\frac{}{2} \\ \sin\frac{+}{2} & \cos\frac{+}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\cos\frac{}{2}(\sin\frac{}{2}\cos\frac{}{2} \quad \cos\frac{}{2}\sin\frac{}{2}) \quad \cos\frac{}{2}(\sin\frac{}{2}\cos\frac{}{2} \quad \cos\frac{+}{2}\sin\frac{+}{2})$$

$$\cos\frac{}{2}(\sin\frac{}{2}\cos\frac{+}{2} \quad \cos\frac{}{2}\sin\frac{}{2})$$

$$\cos\frac{}{2}\sin\frac{}{2} \quad \cos\frac{}{2}\sin\frac{}{2} \quad \cos\frac{}{2}\sin\frac{}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sin(\quad) \quad \frac{1}{2}\sin(\quad) \quad \frac{1}{2}\sin(\quad)$$

$$\frac{1}{2}\ \sin(\quad) \quad \sin(\quad) \quad \sin(\quad)$$

(2) 证明：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix} \qquad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad 1$

（3）$\begin{vmatrix} a & x_1 & a & a & L & a & a \\ a & & a & x_2 & a & L & a & a \\ M & & M & M & & M & M \\ a & & a & a & & a & x_n & a \\ a & & a & a & & a & a \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{最后一行乘以(-1)加到(1)\sim(n)行得}}$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & L & 0 & 0 \\ M & M & M & & M & M \\ 0 & 0 & 0 & L & x_n & 0 \\ a & a & a & L & a & a \end{vmatrix} \quad x_1x_2L\ x_na \quad ax_1x_2x_3L\ x_n$$

（4）“ 递推法 ” $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & L & 0 & 0 \\ a_1 & x & 1 & L & 0 & 0 \\ M & M & M & & M & M \\ a_{n\ 2} & 0 & 0 & L & x & 1 \\ a_{n\ 1} & 0 & 0 & L & 0 & x \end{vmatrix}$

$\underline{\underline{降阶}}(-1)^{n+n} x \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & L & 0 \\ a_1 & x & 1 & L & 0 \\ M & M & M & & M \\ a_{n\ 2} & 0 & 0 & L & x \end{vmatrix} \quad a_{n\ 1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & L & 0 & 0 \\ x & 1 & L & 0 & 0 \\ M & M & & M & M \\ 0 & 0 & L & x & 1 \end{vmatrix} (\ 1)^{n\ 1}$

$xD_{n\ 1} \quad a_{n\ 1}$

由此类推 :

$D_{n\ 1} \quad xD_{n\ 2} \quad a_{n\ 2}$

L

$D_2 \quad xD_1 \quad a_1$

$D \quad a_0 x^{n\ 1} \quad a_1 x^{n\ 2} \quad L \quad a_{n\ 1}$

15.(1) =+

=(ab+1)(cd+1)-[a(-d)]=(ab+1)(cd+1)+ad

(2) ==(4-6) (-1-15)=32

(3) =++

=-a(c-d) -a(d-b) -a(d-c)

=abd

= abd(c-b)(d-b)(c-d)

(4) = =

=(

==

16. 范达 行列式 V()==

（1）因为为常数。所以 p(x) 是 n-1 次的多项式

（2）令 p(x)=0. 得 x=.x=...... 即 p(x) 的根为

第二章 矩阵代数

4. 计算下列矩阵乘积

（1） ==

(2)==

(3). (1,-1 , 2) =(1*2+(-1)*1+2*4,1*1+(-1)*1+2*2, 1*0+(-1)*3+2*1=(9, 4, 1)

(4) (x,y,1)

=(x,y,1)

=

(5)

=

=

5. 设 A=, B=, 求

==

==

==

==

==

6.

(1)A=

n=1 时 A=

n=2 时 =

=

n=3 时 =A=

=

假设

(1 当 n=1 时, =

(2 假设当 n2 时(n 为自然数)成立,令 n=k,则 =成立;

当 n=k+1 时

=A=

=

=成立

综上当 n 微自然数时

$$(2)\ A \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时}, \quad A^{1} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

当 n=2 时， $A^2 \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

当 n=3 时， $A^3 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

假设 $A^n = \begin{matrix} 1 & n & \frac{n(n \quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

当 n=1 时 $A^1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

假设 n=k+1 时

$$A^{k \quad 1} \quad A^K A \quad \begin{matrix} 1 & 1 \quad k & \frac{k(k \quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 \quad k & k \quad \frac{k(k \quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & k \quad 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 \quad k & \frac{k(k \quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \quad k \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$ 成立

综上当 n 为自然数时， $A^n \quad \begin{matrix} 1 & n & \frac{n(n \quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$A \quad \begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix}$$

当 A=2时 $$A^2 \quad \begin{matrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{matrix}$$

n=3 时 $$A^3 \quad \begin{matrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{matrix}$$

n=4 时 $$A^4 \quad \begin{matrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a \\ 0 & a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{matrix}$$

n=5 时 $$A^5 \quad \begin{matrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 & 10a^2 \\ 0 & a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & 0 & a^5 \end{matrix}$$

假设 n 3时成立 $$A^n \quad \begin{matrix} a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} & C_n^3 a^{n\ 3} \\ 0 & a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{matrix}$$

当 n=3 时 $$A^3 \quad \begin{matrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{matrix}$$

假设 n=k 时成立 $$A^k \quad \begin{matrix} a^k & ka^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 2} & C_k^3 a^{k\ 3} \\ 0 & a^n & na^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{matrix}$$

当 n=k+1 时 $$a^{k\ 1} \quad \begin{matrix} a^k & ka^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 2} & C_k^3 a^{k\ 3} \\ 0 & a^k & ka^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{matrix} \quad \begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix}$$

$$
= \begin{matrix} a^k & a & ka^{k\ 1} & ka^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 2} & C_k^3 a^{k\ 2} \\ 0 & & a^{k\ 1} & a^k & ka^k & ka^{k\ 1} & C_k^2 a^{k\ 1} \\ 0 & & 0 & & a^{k\ 1} & a^k & ka^k \\ 0 & & 0 & & 0 & & a^{k\ 1} \end{matrix}
$$

整理得

$$
a^{k\ 1} \quad \begin{matrix} a^{k\ 1} & (k\ \ 1)a^k & C_{k\ 1}^2 a^{(k\ 1)\ 2} & C_{k\ 1}^3 a^{(k\ 1)\ 3} \\ 0 & a^{k\ 1} & (k\ \ 1)a^k & C_{k\ 1}^2 a^{(k\ 1)\ 2} \\ 0 & 0 & a^{k\ 1} & (k\ \ 1)a^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k\ 1} \end{matrix} \quad \text{成立}
$$

所以 $A^n \quad \begin{matrix} a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} & C_n^3 a^{n\ 3} \\ 0 & a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{matrix} \quad (n\ \ 3)$

综 上

$$
A^n = \begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix} \ (n\ \ 1) \quad \begin{matrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{matrix} \ (n\ \ 2) \quad \begin{matrix} a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} & C_n^3 a^{n\ 3} \\ 0 & a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{matrix} \ (n\ \ 3)
$$

7、已知 $B = \begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{matrix}$

证明 B^n {E, 当 n 为偶数；

B, 当 n 为奇数

证明：∵

$$
B^2 \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}
$$

$\therefore B^{2k} \quad (B^2)^k \quad E^k \quad E$

$B^{2k\ 1} \quad B^{2k}B \quad EB \quad B$

$\therefore B^n$ = {E, 当 n 为偶数；

B, 当 n 为奇数

8、证明两个 n 阶上三角形矩阵的乘积仍为一个上三角形矩阵。

证明：设两个 n 阶上三角形矩阵为 A,B,

且 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

根据矩阵乘法，有

$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \quad a_{12}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{1n} \quad a_{12}b_{2n} \quad \cdots \quad a_{nn}b_{nn} \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \quad \cdots \quad a_{nn}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$

则可知 AB 为上三角形矩阵

同理，可得 BA 也为上三角形矩阵。

9、若 AB=BA,AC=CA,证明：A、B、C 为同阶矩阵，且 A(B+C)=(B+C)A,A(BC)=BCA.

证：设 $A=(a_{ij})_{m\ n}$，$B=(B_{ij})_{n\ t}$，$C=(C_{ij})_{n\ s}$

由题知 AB、BA 有意义，则可知必有 m=s,又由于 AB=BA,且 AB 为 m× n 阶矩阵，则可知 m=n,所以 A、B 均为 n 阶矩阵。同理可知 A、C 均为 n 阶矩阵，故可得 A、B、C 为同阶矩阵

②

③

10、已知 n 阶矩阵 A 和 B 满足等式 AB=BA，证明：

（1）

（2）

（3）

11、

12、证明

13、

14、

15、

$$(2)\ A \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

当 n=1 时， $A^1 \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

当 n=2 时， $A^2 \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

当 n=3 时， $A^3 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

假设 $A^n = \begin{matrix} 1 & n & \dfrac{n(n\quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

当 n=1 时 $A^1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

假设 n=k+1 时

$$A^{k\quad 1} \qquad A^K A \qquad \begin{matrix} 1 & 1\quad k & \dfrac{k(k\quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1\quad k & k\quad \dfrac{k(k\quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & k\quad 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1\quad k & \dfrac{k(k\quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & 1\quad k \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$ 成立

综上当 n 为自然数时， $A^n \quad \begin{matrix} 1 & n & \dfrac{n(n\quad 1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$A \quad \begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix}$$

当 A=2时 $A^2 \quad \begin{matrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{matrix}$

整理得

n=3 时 $A^3 \quad \begin{matrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{matrix}$

n=4 时 $A^4 \quad \begin{matrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a \\ 0 & a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{matrix}$

n=5 时 $A^5 \quad \begin{matrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 & 10a^2 \\ 0 & a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & 0 & a^5 \end{matrix}$

假设 n 3时成立 $A^n \quad \begin{matrix} a^n & na^{n\ 1} & C_n^2a^{n\ 2} & C_n^3a^{n\ 3} \\ 0 & a^n & na^{n\ 1} & C_n^2a^{n\ 2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{matrix}$

当 n=3 时 $A^3 \quad \begin{matrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{matrix}$

假设 n=k 时成立 $A^k \quad \begin{matrix} a^k & ka^{k\ 1} & C_k^2a^{k\ 2} & C_k^3a^{k\ 3} \\ 0 & a^n & na^{k\ 1} & C_k^2a^{k\ 2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{matrix}$

当 n=k+1 时 $a^{k\ 1} \quad \begin{matrix} a^k & ka^{k\ 1} & C_k^2a^{k\ 2} & C_k^3a^{k\ 3} \\ 0 & a^k & ka^{k\ 1} & C_k^2a^{k\ 2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{matrix} \quad \begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix}$

$= \begin{matrix} a^k & a\ \ ka^{k\ 1} & ka^{k\ 1}\ \ C_k^2a^{k\ 1} & C_k^2a^{k\ 2}\ \ C_k^3a^{k\ 2} \\ 0 & a^{k\ 1} & a^k\ \ ka^k & ka^{k\ 1}\ \ C_k^2a^{k\ 1} \\ 0 & 0 & a^{k\ 1} & a^k\ \ ka^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k\ 1} \end{matrix}$

整理得

$a^{k\ 1} \quad \begin{matrix} a^{k\ 1} & (k\ \ 1)a^k & C_{k\ 1}^2a^{(k\ 1)\ 2} & C_{k\ 1}^3a^{(k\ 1)\ 3} \\ 0 & a^{k\ 1} & (k\ \ 1)a^k & C_{k\ 1}^2a^{(k\ 1)\ 2} \\ 0 & 0 & a^{k\ 1} & (k\ \ 1)a^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k\ 1} \end{matrix}$ 成立

所以 $A^n \quad \begin{matrix} a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} & C_n^3 a^{n\ 3} \\ 0 & a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{matrix} \quad (n \quad 3)$

综 上

$$A^n = \begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix} \ (n \quad 1) \ \begin{matrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{matrix} \ (n \quad 2) \ \begin{matrix} a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} & C_n^3 a^{n\ 3} \\ 0 & a^n & na^{n\ 1} & C_n^2 a^{n\ 2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n\ 1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{matrix} \ (n \quad 3)$$

16、（1）

解：设 $x \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x_1 \quad 5x_3 \quad 4① \\ 2x_2 \quad 5x_4 \quad 6② \\ x_1 \quad 3x_3 \quad 2③ \\ x_2 \quad 3x_4 \quad 1④ \end{matrix}$$

由①②③④得：

$x_1 \quad 2; x_2 \quad 23; x_3 \quad 0; x_4 \quad 8;$

得 $x \quad \begin{matrix} 2 & 23 \\ 0 & 8 \end{matrix}$

（2）设 $x \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3x_1 \quad 4x_2 \quad 2① \\ 6x_1 \quad 8x_2 \quad 4② \\ 3x_3 \quad 4x_4 \quad 9③ \\ 6x_3 \quad 8x_4 \quad 18④ \end{matrix}$$

由①②③④，得：

$x_1 \quad x_1; x_2 \quad \frac{1}{4}(2 \quad 3x_1); x_3 \quad x_3; x_4 \quad \frac{1}{4}(9 \quad 3x_3)$

得： $X \quad \begin{matrix} x_1 & \frac{1}{4}(2 \quad 3x_1) \\ x_3 & \frac{1}{4}(9 \quad 3x_3) \end{matrix}$

（3）设 $X \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x_1 \quad 3x_2 \quad x_3 \quad 2 \\ x_1 \quad 2x_2 \quad 0 \quad 1 \\ x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3 \quad 3 \end{matrix}$$

由方程组，得：

$x_1 \quad 1; x_2 \quad 1; x_3 \quad 3$

得 $X \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$

（4）设 $X \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 9 \\ 1 & 11 \\ 7 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3x_1 \quad x_3 \quad 2x_5 \quad 3 \\ 3x_2 \quad x_4 \quad 2x_6 \quad 9 \\ 4x_1 \quad 3x_3 \quad x_5 \quad 1 \\ 4x_2 \quad 3x_4 \quad 3x_6 \quad 11 \\ x_1 \quad 3x_3 \quad 7 \\ x_2 \quad 3x_4 \quad 5 \end{matrix}$$

得 $x_1 \quad x_1; x_2 \quad x_2; x_3 \quad \frac{1}{3}(7 \quad x_1);$

$x_4 \quad \frac{1}{3}(7 \quad x_2); x_5 \quad \frac{1}{3}(8 \quad 5x_1); x_6 \quad \frac{1}{3}(8 \quad 5x_2);$

得： $x \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \frac{1}{3}(7 \quad x_1) & \frac{1}{3}(7 \quad x_2) \\ \frac{1}{3}(8 \quad 5x_1) & \frac{1}{3}(8 \quad 5x_2) \end{matrix}$

（5）

设 $X \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_4 & x_6 & x_5 \\ x_1 & x_3 & x_2 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

得 $\begin{matrix} x_1 \quad 2; x_2 \quad 1; x_3 \quad 0; x_4 \quad 1; \\ x_5 \quad 3; x_6 \quad 4; x_7 \quad 1; x_8 \quad 0; x_9 \quad 2 \end{matrix}$

得 $x \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$

19、

（1）

解：

$$D \quad |A| \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 12 \quad 0$$

$$D_1 \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 24$$

$$D_2 \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} \quad 24$$

$$D_3 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} \quad 36$$

方程组的解为：

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \frac{D_1}{D}, \quad \frac{D_2}{D}, \quad \frac{D_3}{D} \quad 2 \quad 2 \quad 3$$

（2）

$$D \quad |A| \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \quad 142 \quad 0$$

$$D_1 \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \quad 142; \; D_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \quad 284$$

$$D_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} \quad 426; \; D_4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad 142$$

方程组的解为：

$$x_1, \quad x_2, \quad x_2, \quad x_{4,} \quad \frac{D_1}{D}, \quad \frac{D_2}{D}, \quad \frac{D_3}{D} \quad \frac{D_4}{D} \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 1$$

（3）

$$D \quad |A| \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} (\;1)^{1\;2\;1\;2} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} (\;1)^{1\;2\;1\;3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad 19 \quad 65 \quad 30 \quad 19 \quad 19 \quad 35 \quad 665 \quad 0$$

$$D_1 \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad 703; D_4 \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad 395 \; D_5 \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 212$$

方程组的解为：

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad \frac{D_1}{D}, \quad \frac{D_2}{D}, \quad \frac{D_3}{D}, \quad \frac{D_4}{D}, \quad \frac{D_5}{D},$$

（4）

$$\frac{1507}{665}, \quad \frac{1145}{665}, \quad \frac{703}{665}, \quad \frac{395}{665}, \quad \frac{212}{665}$$

$D \quad |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad ab^2 \quad bc^2 \quad ca^2 \quad b^2c \quad a^2b \quad c^2a$ 有且仅有 $a \quad b \quad c$ 或 $a \quad b \quad c \quad 0$ 时，D=0 无

$ab(b \quad a) \quad bc(c \quad b) \quad ac(a \quad c)$

意义；则其他情况 $D \quad |A| \quad 0$

$$D_1 \begin{vmatrix} a \quad b \quad c & 1 & 1 \\ a^2 \quad b^2 \quad c^2 & b & c \\ 3ac & ca & ab \end{vmatrix} \quad a^2b^2 \quad abc^2 \quad a^3c \quad ab^2c \quad a^3b \quad a^2c^2$$

$$D_2 \begin{vmatrix} 1 & a \quad b \quad c & 1 \\ a & a^2 \quad b^2 \quad c^2 & c \\ bc & 3abc & ab \end{vmatrix} \quad ab^3 \quad b^2c^2 \quad a^2bc \quad b^3c \quad a^2b^2 \quad abc^2$$

$$D_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \quad b \quad c \\ a & b & a^2 \quad b^2 \quad c^2 \\ bc & ca & 3abc \end{vmatrix} \quad ab^2c \quad bc^3 \quad a^2c^2$$ 方程组的解为：

$b^2c^2 \quad a^2bc \quad ac^3$

$$x,\quad y,\quad z \qquad \frac{D_1}{D}, \quad \frac{D_2}{D}, \quad \frac{D_3}{D} \qquad a,\quad b,\quad c$$

（4）

$$A \quad \begin{matrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$|A| \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 1$$

$$A^* \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 38 & 41 & 34 \\ 27 & 29 & 24 \end{matrix}$$

$$A^{1} \quad \frac{A^*}{|A|} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 38 & 41 & 34 \\ 27 & 29 & 24 \end{matrix}$$

（5）

$$A \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{matrix}$$

由 $A \quad E \xrightarrow{\text{经过初等变换}} E \quad A^{1}$

得 $A \quad E \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$\begin{array}{c} 2C_1 \quad C_2 \\ C_1 \quad C_3 \\ C_1 \quad C_4 \end{array} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} C_2 \quad (\quad 1) \\ C_2 \quad C_3 \\ 2C_2 \quad C_3 \end{array} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} C_3 \quad (\frac{1}{3}) \\ \frac{5}{3}C_3 \quad C_4 \end{array} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} C_4 \\ C_4 \quad C_3 \\ 18C_4 \quad C_2 \\ 12C_4 \quad C_1 \end{array} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 22 & 5 & 30 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} 5C_3 \quad C_2 \\ 3C_3 \quad C_1 \end{array} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 12 & 4 & 14 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 & 5 & 20 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$$2C_2 \quad C_1 \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & 6 & 26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 & 5 & 20 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{matrix} = E \quad A^{1}$$

$$A^{1} \quad \begin{matrix} 22 & 6 & 26 & 17 \\ 17 & 5 & 20 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{matrix}$$

(6)

$$A \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$|A| \quad 32$$

$$A^{*} \quad \begin{matrix} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$$

$$A^{1} \quad \frac{A}{|A|} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

24. 证： Q A为对称矩阵

A=A’

$A^{1}A = A^{1}A' = E$

$A^{1}A'(A')^{1} = E(A')^{1}$

$A^{1} = (A')^{1}$

Q A为可逆对称矩阵

（A’） ^{1}=(A ^{1}) ’

$A^{1} = (A^{1})'$

可逆对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵。

25. 证：（1）$(A^2)'=(AA)'=A'A'$

$\because$ A为 n 阶对称矩阵

$A'=A$

$(A^2)'=A^2$

A^2 为对称矩阵

$(B^2)'=(BB)'=B'B'$

$\because$ B是 n 阶反对称矩阵

$B'=-B$

$(B^2)'=(BB)'=B'B'$

$\because$ B是 n 阶反对称矩阵

$B'=-B$

$(B^2)'=(-B)(-B)=B^2$

B^2 是对称矩阵

$(AB-BA)'$

$=(AB)'-(BA)'$

$=B'A'-A'B'$

$=-B\cdot A-A\cdot(-B)$

$=AB-BA$

AB-BA为对称矩阵。

（2）必要性： $\because$ AB为反对称矩阵

$(AB)'=-AB$

又$\because$ $(AB)'=B'A'=-BA$

$AB=BA$

充分性： $\because$ $AB=BA$

$(AB)'=B'A'=-BA$

AB为反对称矩阵

综上所述： AB是反对称矩阵的充分必要条件是 AB=BA。

26. 解：设矩阵 X 为 $x=\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$

则 $x^T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{pmatrix}$

$\because$ $x^T Ax=o$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & ??? & x_{n1} \end{pmatrix}_{1\ n} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ??? & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ??? & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & ??? & A_{3n} \\ A_{41} & A_{42} & ??? & A_{4n} \end{pmatrix}_{n\ n} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ M \\ x_{n1} \end{pmatrix}_{n\ 1} =0$$

即

$$\begin{pmatrix} A_{11}x_{11} & A_{21}x_{21} & L & A_{n1}x_{n1} ? A_{12}x_{11} & A_{22}x_{21} & L & A_{n2}x_{n1} L & A_{1n}x_{11} & L & A_{nn}x_{n1} \end{pmatrix}_{1\ n}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ M \\ x_{n1} \end{pmatrix}_{n\ 1} =0$$

$$x_{11}\ A_{11}x_{11}\ L\ A_{n1}x_{n1}\ \ x_{21}\ A_{12}x_{11}\ L\ A_{n2}x_{n1}\ L\ x_{n1}\ A_{1n}x_{11}\ L\ A_{nn}x_{n1}\ _{1\ 1}\ 0$$

$$x_{11}{}^2 A_{11}\ x_{11}x_{21}A_{21}\ L\ x_{11}x_{n1}A_{n1}\ x_{11}x_{21}A_{12}\ x_{21}{}^2A_{22}\ L\ x_{n1}{}^2A_{nn}\ 0$$

Q 对任意 n 1 矩阵都成立

$$A_{11}\ A_{21}\ L\ A_{nn}\ 0$$

A=0

27. 证： ：Q A 为正交矩阵

$$A^T = A^{1}$$

$$A^{1} = \frac{A}{|A|} = A^* = A^T$$

又 Q 正交矩阵为可逆矩阵

$$A^{1} = A$$

$$A_{ij}\ a_{ij}\ (i, j\ 1,2L\ n)$$

$$:Q\ A_{ij}\ a_{ij}\ |A|\ 1$$

$$A^{1} = \frac{A}{|A|} = A^* = A$$

$$A^T\ (A^{1})^T$$

$$= (A^T)^{1}$$

$$= (AE^T)^{1}$$

$$= EA^{1}$$

$= A^{1}$

28. 解： $A ? A^{1} \quad (B \quad UV^{'}) \quad B^{1} \quad \frac{1}{r} ? \; B^{1} U \quad V^{'} B^{1}$

$= \quad E \quad \frac{1}{r} UV^{'} B^{1} \; 1 \quad r \quad UV^{'} B^{1}$

$= \quad E \quad E \quad 0$

$V \quad 1 \quad UV^{'} B^{1}$ 时 $A ? A^{1} \quad E$

依次用 V 左乘和用 U 右乘 $V \quad 1 \quad UV^{'} B^{1}$ 消去 $V^{'} U$

得从而得证

29. 解：（1）判断 X 可逆即：

$$\left|X\right| \quad \begin{vmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{vmatrix} \quad 1 \left|A\right|\left|C\right|$$

因 A、C 可逆,

则 $\left|A\right| \quad 0 \left|C\right| \quad 0$ 即 $\left|X\right| \quad 0$

则 X 可逆。

（2）设 $x^{1} \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 则

由 $x ? x^{1} \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & A \\ C & 0 \end{matrix}$

$= \quad \begin{matrix} Ca_{11} & Aa_{12} \\ Ca_{21} & Aa_{22} \end{matrix}$

$=E$

$$\begin{matrix} Ca_{12} & E & a_{12} & C^{1} \\ Ca_{11} & 0 & a_{11} & 0 \\ Ca_{22} & 0 & a_{22} & 0 \\ Aa_{21} & E & a_{21} & A^{1} \end{matrix}$$

$$x^{1} \quad \begin{vmatrix} 0 & C^{1} \\ A^{1} & 0 \end{vmatrix}$$

30. 证明： $A^{2} \quad A \quad E \quad 0$

$A \quad A^{2} \quad E$

$E \quad A \; E \quad A$

A 为可逆矩阵

$A^{1} \quad E \quad A$

31. 解：（1） $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}^{3}$

$$A_1^3 \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}^{3} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$A_2^3 \quad 8$$

$$A_3^3 \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}^{3} \quad \begin{matrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 27 & 27 & 9 \\ 0 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 27 \end{matrix}$$

$$原式 = \begin{matrix} A_1^3 & 1 & 0 \\ 0 & A_2^3 & 1 \\ 0 & 0 & A_3^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \end{matrix}$$

(2) $\begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{matrix}^{1} \quad \begin{matrix} A_1^{1} & 0 \\ 0 & A_2^{1} \end{matrix}$

$$A_1^{1} \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{matrix}^{1} \quad \begin{matrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$A_2^{1} \quad \begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$
原式=\begin{matrix} 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{matrix}
$$

（3） $$\begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{matrix}^{-1} = \begin{matrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{matrix}^{1}$$

$$Q\ AA^{1}\quad E$$

$$\begin{matrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{matrix} \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \quad E$$

$$\begin{matrix} A_1X & & A_1Y \\ A_2X & A_3Z & A_2Y & A_3T \end{matrix} \quad \begin{matrix} Z_2 & 0 \\ 0 & Z_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_1X & Z_2 \\ A_1Y & 0 \\ A_2X & A_3Z & 0 \\ A_2Y & A_3T & E_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} X & A_1^{1} \\ Y & 0 \\ Z & A_3^{1}A_2A_1^{1} \\ T & A_3^{1} \end{matrix}$$

$$\left|A_1\right| \quad 8 \quad 6 \quad 2A_1 \quad \begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1 \quad \begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$X \quad A_1^{1} \quad \begin{matrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$同理 EA_3^{1} \quad \begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$Z \quad \begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & \frac{7}{12} \\ 3 & \frac{7}{6} \\ 2 & \frac{11}{12} \end{matrix}$$

$$A^{1} \quad \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{11}{12} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \frac{1}{6} \quad \begin{matrix} 24 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & \frac{7}{2} & 1 & 1 & 3 \\ 18 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 12 & \frac{11}{2} & 7 & 1 & 3 \end{matrix}$$

第三章　线性方程组

1. 证：假设 ${}_1 \quad {}_2$，${}_2 \quad {}_3$，${}_3 \quad {}_1$线性相关，

   则 ${}_1$，${}_2$，${}_3$不会为 0，使得

   $${}_1 \quad {}_1 \quad {}_2 \,,\, {}_2 \quad {}_2 \quad {}_3 \,,\, {}_3 \quad {}_3 \quad {}_1 \quad 0$$

   整理得：$({}_1 \quad {}_3) \; {}_1 \quad {}_1 \quad {}_2 \quad {}_2 \quad {}_2 \quad {}_3 \quad {}_3 \quad 0$

   又由 ${}_1$，${}_2$，${}_3$线性无关 ，故

   $${}_1 + {}_3 = 0$$
   $${}_1 + {}_2 \quad 0$$
   $${}_2 \quad {}_3 \quad 0$$

   由于 $|D| \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 2 \quad 0$

   故由克莱默法则知：${}_1 \quad {}_2 \quad {}_3 \quad 0$, 矛盾

   故结论正确。

2. 解： $= x_1, x_2, x_3, x_4$

   由$3 \quad {}_1 - \quad +2 \quad {}_2 \quad 5 \quad {}_3$ 可得：

$3\ {}_1+2\ {}_2-5\ {}_3=6$

即 $3\ \ 2,5,1,3\ \ +2\ \ 10,1,5,10\ \ -5\ \ 4,1,-1,1$

$=6\ \ x_1,x_2,x_3,x_4$

根据矩阵相等，则对应元相等，得

$6x_1\quad 3\quad 2\quad 2\quad 10\quad 5\quad 4$

$6x_2\quad 3\quad 5\quad 2\quad 1\quad 5\quad 1$

$6x_3\quad 3\quad 1\quad 2\quad 5\quad 5\quad (\quad 1)$

$6x_4\quad 3\quad 3\quad 2\quad 10\quad 5\quad 1$

得：

$x_1\quad 1$

$x_2\quad 2$

$x_3\quad 3$

$x_4\quad 4$

$1,2,3,4$

3、不一定。原式： $k_1\ {}_1\ {}_1\quad k_2\ {}_2\ {}_2\quad L\quad k_m\ {}_m\ {}_m\quad 0$

故仅可得到 ${}_1\ {}_1,\ {}_2\ {}_2,L,\ {}_m\ {}_m$ 线性无关

将每个向量任意拆分得到的新向量显然不一定仍然线性相关

例如向量成比例或含有零向量

例： ${}_1 =\ 0,1\ ,\ {}_1\quad 0,2$ 或 ${}_1 =\ 0,1$ $\quad {}_1,\ {}_2$ 任一一个为零向量

${}_2\quad 1,0\ ,\ {}_2\quad 2,0\qquad {}_2\quad 1,0$

4、不正确　使两等式成立的两组系数一般来说是不相等的，所以不可以做那样的公式提取

即 $k_1\quad k_1^{'}L\quad k_m\quad k_m^{'}$

5、提示：含有零向量就一定线性相关

极大线性相关组中每一向量都无法用其他组中向量给出，　因此可用一极大线性无关组加零向量构成向量组

6. 证：假设 ${}_1,\ {}_2,L,\ {}_m$ 线性相关，

由题意知，必存在一组使得

${}_1\ {}_1\quad L\quad {}_m\ {}_m\quad 1$

由假设 ${}_1,\quad {}_2,L,\quad {}_m$ 线性相关

必存在一组不全为 0的数 $k_1,k_2,L\ \ k_m$

使得：$k_1\ {}_1\quad L\quad k_m\ {}_m\quad 0\quad 2$

由<1>与<2>可能：

$=\ {}_1\ k_1\ {}_1\ L\quad {}_m\ k_m\ {}_m$

但 的表示式是唯一的，故

$_1+k_1 \quad _1, L \;, \; _n \quad k_m \quad _m$

即得：$k_1 \quad k_2 \quad L \quad k_m \quad 0$ 矛盾

故结论成立。

7. 证：设 $_1, \quad _2, L \;, \quad _n$ 为 A 的列向量，

则 AB 0 可写成：

$$
_1, \quad _2, L \quad _n \quad
\begin{matrix}
b_{11} & b_{12} & L & b_{1p} \\
b_{21} & b_{22} & L & b_{2p} \\
M & M & L & M \\
b_{n1} & b_{n2} & L & b_{np}
\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}
_1 b_{11} & _2 b_{21} & L & _n b_{n1} & 0 \\
_1 b_{12} & _2 b_{22} & L & _n b_{n2} & 0 \\
 & & M & & \\
_1 b_{1p} & _2 b_{2p} & L & _n b_{np} & 0
\end{matrix}
$$

由于 $_1, \quad _2, L \;, \quad _n$ 线性无关，则

$b_{ij} \quad 0, 1 \quad i \quad n, 1 \quad j \quad p$，故 B=0。

6、证明：假设 $_1, \quad _2, L \;, \quad _m$ 线性相关，则 $_1, \quad _2, L \;, \quad _m, \quad$ 线性相关（部分相关则全体相关）

所以存在 m+1 个不完全为 0 的数满足

$$_1 \; _1 \quad _2 \; _2 \quad L \quad _m \; _m \qquad 0$$

$_1, \quad _2, L \;, \quad _m$ 本来线性相关，故 可为 0，可不为 0

（1） 0 则 无法用 $_1, \quad _2, L \;, \quad _m$ 线性表出

（2） 0 $\quad \frac{1}{\;} \quad _1 \; _1 \quad _2 \; _2 \quad L \quad _m \; _m$

而 $_1, \quad _2, L \;, \quad _m$ 线性相关，根据定义，至少有一个向量可用其他 m-1 个向量表出，我们不妨设

$$_m \quad k_1 \; _1 \quad k_2 \; _2 \quad L \quad k_{m-1} \; _{m-1}$$

则 $\quad \frac{1}{\;} \quad _1 \; k_1 \; _1 \quad _2 \; k_2 \; _2 \quad L \quad _{m-1} \; k_{m-1} \; _{m-1} \quad 0 \quad _m$

这样得到了 的另一种表出式，即表出不唯一

综上，假设成立条件下得到的结论与“ 可用 $_1, \quad _2, L \;, \quad _m$ 唯一表出”矛盾

故假设不成立，$_1, \quad _2, L \;, \quad _m$ 线性无关

7、将 A 表示为 $A \quad _1, \quad _2, L \;, \quad _n$ ， B 表示为 $B \quad \begin{matrix} _1 \\ _2 \\ M \\ _n \end{matrix}$

$AB \quad _1 \; _1 \quad _2 \; _2 \quad L \quad _n \; _n \quad 0$

若 $_1, \quad _2, L \;, \quad _n$ 线性无关，则必有 $_1 \quad _2 \quad L \quad _n \quad 0 \quad B \quad 0$

同理可证 A

P117 T8

解：（1）

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 10 & 0 \\ 7 & 8 & 18 & 4 \\ 17 & 18 & 40 & 10 \\ 3 & 7 & 13 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{3\,1\text{行}+4\text{行} \\ 17\,1\text{行}+3\text{行} \\ 7\,1\text{行}+2\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & -20 & 18 & 4 \\ 0 & -50 & -130 & 10 \\ 0 & -5 & -17 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}\,2\text{行}+4\text{行} \\ \frac{5}{2}\,2\text{行}+3\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & -20 & -52 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{互换 }3,4\text{ 行}} \begin{matrix} 1 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & -20 & -52 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此 r=3

解：（2）

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{\text{互换 }1,2\text{ 行}} \begin{matrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 11 & 56 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{4\,1\text{行} \quad 3\text{行} \\ 1\text{行} \quad 4\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 4 & 16 & 4 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{3\,2\text{行} \quad 3\text{行} \\ 4\,2\text{行} \quad 4\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此 r=2

解：（3）

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\text{互换 }1,3\text{ 行} \\ \text{互换 }2,4\text{ 行}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{4\,1\text{行} \quad 3\text{行} \\ 1\text{行} \quad 2\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{5}{2}\,2\text{行} \quad 3\text{行} \\ \frac{1}{2}\,2\text{行} \quad 4\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 18 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{3\text{行} \quad 4\text{行} \\ \frac{2}{3}\,3\text{行} \quad 5\text{行}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此 r=3

解：（4）

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}\,1\text{行} \quad 3\text{行} \\ \frac{3}{2}\,1\text{行} \quad 2\text{行}}} \begin{matrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \xrightarrow{2\text{行} \quad 3\text{行}} \begin{matrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此 r=2

解：（5）

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{互换 }2,3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{3}{2}1\text{行}\ \ 2\text{行}]{2\,1\text{行}\ \ 3\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{11}{2} & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 7 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\,2\text{行}\ \ 3\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{11}{2} & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

由此 r=3

解：（6）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{互换 }4,5\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}\ \ 2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{行}\ \ 4\text{行}]{2\text{行}\ \ 3\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{行}\ \ 4\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此 r=5

T9 解（1）：设向量组线性相关，则

$_{1\ 1}\quad _{2\ 2}\quad _{3\ 3}\quad _{4\ 4}$

$(_1,3 _1,5 _1, 4 _1,0)\ (_2,3 _2,2 _2, 2 _2, _2)\ (_3, 2 _3, _3, _3, _3)\ (_4, 4 _4, _4, _4, _4)$

$(_1 \ _2 \ _3 \ _4,3 _1 \ 3 _2 \ 2 _3 \ 4 _4,5 _1 \ 2 _2 \ _3 \ _4, 4 _1 \ 2 _2 \ _3 \ _4, _2 \ _3 \ _4)$

0

$_1 \ _2 \ _3 \ _4 \quad 0\ 1$

$3 _1 \ 3 _2 \ 2 _3 \ 4 _4 \quad 0\ 2$

$5 _1 \ 2 _2 \ _3 \ _4 \quad 0\ 3$

$4 _1 \ 2 _2 \ _3 \ _4 \quad 0\ 4$

$_2 \ _3 \ _4 \quad 0\ 5$

由 1， 3 得： $_1 \ - 2 _2$

由 3， 4 得： $_1 \ \ 2 _4$

$_2 = \ _4,\quad _3 = 0$

代入 3 式，得：$5\ _1 \quad 2\ _2 \quad _4 \quad 10\ _2 \quad 3\ _2 \quad 0$

$_2 \quad 0$

$_1 \quad _2 \quad _3 \quad _4 \quad 0$

线性无关

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1行+2行\\1行+3行\\1行+4行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{互换\ 2，4行} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{7}2行+3行} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{21}{8}3行+4行} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

由此 r=4

10（1）证：由 $_1,\ _2, L,\ _m$ 线性相关

则必有一组不全为 0 的数 $_1,\ _2, L,\ _m$

使得 $_1\ _1,\ _2\ _2, L,\ _m\ _m \quad 0$

既有：$_1a_{11},\ _2a_{21}, L,\ _ma_{m1} \quad 0$

$$(*)\quad \begin{cases} _1a_{12},\ _2a_{22}, L,\ _ma_{m2} \quad 0 \\ K \\ _1a_{1n},\ _2a_{2n}, L,\ _ma_{mn} \quad 0 \end{cases}$$

从 $_1,\ _2, L,\ _m$ 中每一个向量中去掉第 i_1, i_2, L, i_s，就相当于在上述方程组中去掉 S 个方程

剩下的方程仍成立

既有不全为零的数 $_1,\ _2, L,\ _s$

使得：$_1\ _1,\ _2\ _2, L,\ _s\ _s \quad 0$

从而：$_1,\ _2, L,\ _s$ 线性相关

显然当 $_1,\ _2,L,\ _s$ 线性无关时

由上面的证明可知 $_1{}^p,\ _2{}^p,L,\ _s{}^p$ 肯定线性无关

（2）由（1）的证明很显然得到结论

11、证明：把 $_i \quad (1,t_i,t_i^2,K,t_i^{n\ 1}) \quad (i \quad 1,2,K,r,r \quad n)$ 作为矩阵 A 行向量写成矩阵 A

即： $$A \quad \begin{matrix} 1 & t_1 & t_1^2 & L & t_1^{r\ 1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & L & t_2^{r\ 1} \\ & L & & L & \\ 1 & t_r & t_r^2 & L & t_r^{r\ 1} \end{matrix}$$

只须证 A 的行量组线性无关即可

即证： $r_A \quad r$

显然 A 中有一个 r 阶子式

$$D_r \quad \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & L & t_1^{r\ 1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & L & t_2^{r\ 1} \\ & L & & L & \\ 1 & t_r & t_r^2 & L & t_r^{r\ 1} \end{vmatrix} \quad 0$$ 而 A 内的所有 $r \quad 1$ 阶子式为 0，因为 A 的行数

故有 $r_A \quad r$，从而结论成立

12、证：先证当 $_1,\ _2,L,\ _s$ 可由 $_1,\ _2,L,\ _m$ 线性表示出时，$_1,\ _2,L,\ _s$ 的秩小于等于 $_1,\ _2,L,\ _m$ 的秩

不妨设： $_1,\ _2,L,\ _s$ 的极大无关组为 $_1,\ _2,L,\ _r$；

$_1,\ _2,L,\ _m$ 的极大无关组为 $_1,\ _2,L,\ _t$

只须证： $r \quad t$ 即可

假设 $r \quad t$

那么由条件可知： $_1,\ _2,L,\ _r$ 可由 $_1,\ _2,L,\ _t$ 线性表出，即存在一矩阵 $k_{t\ r}$，使得

$$_1,\ _2,L,\ _r \qquad _1,\ _2,L,\ _t \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & L & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & L & a_{r2} \\ M & M & & M \\ a_{1t} & a_{2t} & L & a_{rt} \end{matrix} \qquad _1,\ _2,L,\ _t \quad k_{t\ r}$$

在上式两端同右乘一列向量 $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_r \end{matrix}$，即得：

$$
{}_1, {}_2, \cdots, {}_r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \quad {}_1, {}_2, \cdots, {}_t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}
$$

只要找到一组不全为 0 的数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$，使得：

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \quad 0 \text{ 成立}
$$

就能说明 ${}_1, {}_2, \cdots, {}_r$ 线性相关，与 ${}_1, {}_2, \cdots, {}_r$ 线性无关矛盾

事实上：由于 $r \quad t \quad r_{k_{s\,t}}$，所以上述方程组一定有非 0 解

故结论成立，同理可证 $r \quad t$，从而有 $r \quad t$

13. 证：

（1） $r \quad s$ 时，

若 $\det(k) \quad |k| \quad 0$，

则 $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} \quad k^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ s \end{pmatrix}$

说明，向量组 B 与 A 可相互线性表示，又由 A 线性无关，其秩

所以 $r(B) \quad S$，从而 B 线性无关

反之：若 B 线性无关，考察 ${}_1 \; {}_1 + {}_2 \; {}_2 + \cdots + {}_s \; {}_s \quad 0$

代入并整理得：

$$
{}_1, {}_2, \cdots, {}_s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} \quad {}_1, {}_2, \cdots, {}_s \; k \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ s \end{pmatrix}
$$

令 $k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}_{r\,s}$

由上式可得：

$$
\begin{aligned}
&({}_1 a_{11} \quad {}_2 a_{21} \quad \cdots \quad {}_s a_{s1}) \; {}_1 \\
&({}_1 a_{12} \quad {}_2 a_{22} \quad \cdots \quad {}_s a_{s2}) \; {}_2 \quad \cdots \\
&({}_1 a_{1s} \quad {}_2 a_{2s} \quad \cdots \quad {}_s a_{ss}) \; {}_s
\end{aligned}
$$

由 $_1$，$_2$,L ，$_s$ 线性无关，所以

$$(*)\begin{cases} {}_1a_{11} \quad L \quad {}_sa_{s1} \quad 0 \\ \qquad L \\ {}_1a_{s1} \quad L \quad {}_sa_{ss} \quad 0 \end{cases}$$

若 $|k|$ 0，则 (*) 有非 0 角

从而 $_1$，$_2$,L ，$_s$

由 $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ M \\ r \end{matrix} \quad k \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ M \\ s \end{matrix}$

故 $^T_1$，$^T_2$,L ，^T_r $\quad$ $^T_1$，$^T_2$,L ，^T_s k^T

考查： $_1{}^T_1$ $\quad _2{}^T_2$ L $\quad _r{}^T_r$ 0

即 $^T_1$，$^T_2$,L ，^T_r $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ M \\ r \end{matrix}$ 0

将 $^T_1$，$^T_2$,L ，^T_r $\quad$ $^T_1$，$^T_2$,L ，^T_s k^T 代入上式得：

$$^T_1，{}^T_2,L ，{}^T_s\ k^T \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ M \\ r \end{matrix} \quad 0$$

由于 $_1$，$_2$,L ，$_s$ 线性无关， $^T_1$，$^T_2$,L ，^T_s 也线性无关

故 $k^T \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ M \\ r \end{matrix}$ 0

而方程组 $k^T \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_r \end{matrix}$ 0 只有 0 解 $\quad r_{k^T} \quad r$

而 ${}^{T}_{1}$， ${}^{T}_{2}$$,L$ ， ${}^{T}_{r}$ 线性无关 $k^{T}\begin{matrix}x_1\\M\\x_r\end{matrix}$ 0 只有 0 解，故结论成立

14. 记住一下常用矩阵秩的性质

（1） $r_{A_{min}}$ $\min\ m,n$

（2） r_A $r_{A'}$

（3）若 P,Q 可逆，则 r_{PAQ} r_A

（4） $\max\ r_A, r_B$ $r_{A,B}$ r_A r_B

证法一：由上述性质（ 4）条， $r_{A,B}$ r_A r_B

而 $A\ \ B, B \xrightarrow{列变} A, B$

所以 $r_{A\ B}$ $r_{(A\ B,B)}$ $r_{(A,B)}$ r_A r_B

证法二：设 A $_1$， $_2$$,L$ ， $_n$ ， B $_1$， $_2$$,L$ ， $_n$ （A,B 同型，所以列

则 $A\ \ B$ $_1$ $_1$， $_2$ $_2$$,L$ ， $_n$ $_n$

显然 $A\ \ B$ 的列向量组可由 $_1$， $_2$$,L$ ， $_n$ 与 $_1$， $_2$$,L$ ， $_n$ 的极大无关组线性表出

若设 $_{i_1}$， $_{i_2}$$,L$ ， $_{i_r}$， $_{j_1}$， $_{j_2}$$,L$ ， $_{j_t}$ 分别为 $_1$， $_2$$,L$ ， $_n$ 与 $_1$， $_2$$,L$ ， $_n$ 的极无关组

那么 $A\ \ B$ 的列向量组可由 $_{i_1}$， $_{i_2}$$,L$ ， $_{i_r}$， $_{j_1}$， $_{j_2}$$,L$ ， $_{j_t}$ 线性表出，所以

$r_{A\ B}$ r_A r_B

14、（第二种）证明：设有向量组 $A = a_{ij}\ {}_{mxn}$， $B = b_{ij}\ {}_{mxn}$

A的行向量组为： $_1$， $_2$，· · ·， $_m$ ①

其极大线性无关组为： $_{i1}$， $_{i2}$，···， $_{irA}$

B的行向量组为： $_1$， $_2$，···， $_m$ ②

其极大线性无关组为： $_{j1}$， $_{j2}$，···， $_{jrB}$

A＋B的行向量组记为： $_1$， $_2$，···， $_m$

其中 $_1$ $_1$ $_1$， $_2$ $_2$ $_2$，· · ·， $_m$ $_m$ $_m$

则 1， 2，…， m， i1， i2，…， rA， j1， j2，…， jrB ③

有 ≤ ③≤ A B．又 A B

即有 A A B

习题三

15、⑴解：对增广矩阵进行初等变换.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 1行+3行}]{\text{-3 1行+2行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{-1 2行+3行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

则 A B 无解

⑵解：对方程组的增广矩阵进行初等变换.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{3}\text{ 1行+4行}]{-\frac{7}{3}\text{ 1行+2行}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{11}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{46}{3} & \frac{22}{3} & \frac{38}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{-1 2行+3行}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{11}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则 A B 无解

⑶ 解 ：对 方 程 组 的 增 广 矩 阵 进 行 初 等 变 换 ．（ 课 本 第 1 1 9 页 题 目 出 错 ， 应 该 为

$$\begin{matrix} 2x_1 & 5x_2 & 8x_3 & 8 \\ 4x_1 & 3x_2 & 9x_3 & 9 \\ 2x_1 & 3x_2 & 5x_3 & 7 \\ x_1 & 8x_2 & 7x_3 & 12 \end{matrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&5&8&8\\4&3&9&9\\2&3&5&7\\1&8&7&12\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times 1\text{行}+4\text{行}]{-2\times 1\text{行}+2\text{行}\quad -1\times 1\text{行}+3\text{行}}\begin{pmatrix}2&5&8&8\\0&-7&7&-7\\0&0&3&-1\\0&0&3&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{2}\times 3\text{行}+4\text{行}}\begin{pmatrix}2&5&8&8\\0&-7&7&-7\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $\gamma_A=\gamma_B=3$ 有唯一解。即唯一解为（ 3,2,1, ）。

由方程组 $\begin{cases}2x_1 & 5x_2 & 8x_3 & 8\\ & 7x_2 & 7x_3 & 7\\ & & x_3 & 1\end{cases}$ 解得： $\begin{cases}x_1 & 3\\ x_2 & 2\\ x_3 & 1\end{cases}$

（4)、解：对方程组的增广矩阵进行初等变换.

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&0&2&2\\0&2&2&1&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-1\times 1\text{行}+3\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&2&1\\0&2&2&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2\times 2\text{行}+4\text{行}]{2\text{行}+3\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&1&2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{行}+4\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $\gamma_A=\gamma_B=3<6$ 只方程组有无穷多解。

先求它的一个特解，与阶梯形矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1 & 2x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1\\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 1\\ & & x_4 & 2x_5 & 3x_6 & 2\end{cases}$$

令上式中的 $x_3\ \ x_5\ \ x_6\ \ 0$, 解得 $x_1\ \ 1, x_2\ \ 1, x_4\ \ 2$。

于是得到特解： $x_0\ \ 1,\ 1,0,2,0,0$

导出组的方程为：

$$\begin{cases}x_1 & 2x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0\\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0\\ & & x_4 & 2x_5 & 3x_6 & 0\end{cases}$$

令 $x_3 \quad 1, x_5 \quad x_6 \quad 0$.解得： $x_1 \quad 1, x_2 \quad 1, x_4 \quad 0$.

令 $x_3 \quad 0, x_5 \quad 1, x_6 \quad 0$.解得： $x_1 \quad 1, x_2 \quad 1, x_4 \quad 2$.

令 $x_3 \quad x_5 \quad 0, x_6 \quad 1$。解得： $x_1 \quad 1, x_2 \quad 2, x_4 \quad 3$.

可求得导出组的基础解系： $x_1 \quad 1, \quad 1,1,0,0,0 \quad , \quad x_2 \quad 1,1,0, \quad 2,1,0 \quad , \quad x_3 \quad 1,2,0, \quad 3,0,1$

于是方程组的通解为：

$$x \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad k_1 \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad k_2 \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad k_3 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

16.（1）欲使方程有解，须使 $r_A = r_B$

$$\text{其中 } A= \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 11 \end{matrix} \qquad B= \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 11 & \end{matrix}$$

对 B 进行初等行变换，过程如下：

$$B= \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 11 & \end{matrix} \quad \text{交换(1)(2)行} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 11 & \end{matrix}$$

$$\text{- 2 (1)行 +(2)行} \quad \text{- 1 (1)行 +(3)行} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{matrix}$$

$$\text{(2)行 +(3)行} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix}$$

显然， $=5$ 时， $r_A = r_B = 2$

此时 $\begin{matrix} x_1 \quad 2x_2 \quad x_3 \quad 4x_4 \quad 2 \\ 5x_2 \quad 3x_3 \quad 7x_4 \quad 3 \end{matrix}$ 　　取 x_3, x_4 （ $\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_4$）

$$x_1 \quad \frac{1}{5} \quad 4 \quad \overset{2}{x_3} \quad \overset{2}{6x_4}$$

故

$$x_2 \quad \frac{1}{5} \quad 3 \quad \overset{2}{3x_3} \quad \overset{2}{7x_4}$$

（2）同样地，欲使该方程有解，须使 $r_A = r_B$

其中A $= \begin{matrix} & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \end{matrix}$ B $= \begin{matrix} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & & ^2 \end{matrix}$

对B进行初等行变换，得

$$B = \begin{matrix} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & & ^2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{交换(1)(2)行}} \begin{matrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & ^2 \end{matrix}$$

$$- \quad \cdot\text{(1)行} + \text{(2)行} \quad - \quad 1 \quad \text{(1)行} + \text{(3)行} \quad \begin{matrix} 1 & & & 1 & \\ 0 & 1 & ^2 & 1 & 1 \ ^2 \\ 0 & 1 & & 1 & ^2 \end{matrix}$$

$$\text{交换(2)(3)行} \quad \begin{matrix} 1 & & & 1 & \\ 0 & 1 & & 1 & ^2 \\ 0 & 1 & ^2 & 1 & 1 \ ^2 \end{matrix}$$

$$1 \quad \text{(2)行} + \text{(3)行} \quad \begin{matrix} 1 & & & 1 & \\ 0 & 1 & & 1 & (\quad 1) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1^2 \ 1 \end{matrix}$$

① $= 1$时

$$B = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$ 此时 $r_A = r_B$，故方程有解。

且 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1$ 解为 $\begin{matrix} x_1 & 1 & \overset{2}{x_2} & \overset{2}{x_3} \\ x_2 & \overset{2}{x_2} & & \\ x_3 & \overset{2}{x_3} & & \end{matrix}$

② $= -2$时

$$B = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$ 由于 $r_A \neq r_B$，故方程无解。

③ $\neq 1$ 且 $\neq 2$ 时， $r_A = r_B = 3$，方程有唯一解，且

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$
$$1 \quad x_2 \quad 1 \; x_3 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \; x_3 \quad 1^{2} \; 1$$

$$x_1 \quad \frac{1}{2}$$

故 $$x_2 \quad \frac{1}{2}$$

$$x_3 \quad \frac{1 \quad ^{2}}{2}$$

（此处只考虑 ＝1及 ＝- 2两种特殊情形，原因在于，当 ＝1或 ＝- 2时会使得矩阵第二、三行的首先为零，从而引起 $r_A \neq r_B$ 情况的出现）

综上，① =1 时，方程有无穷多解

$$x_1 \quad 1 \quad \overset{2}{x_2} \quad \overset{2}{x_3}$$
$$x_2 \quad \overset{2}{x_2}$$
$$x_3 \quad \overset{2}{x_3}$$

② =- 2时，方程无解

③ $\neq 1$ 且 $\neq -2$ 时

$$x_1 \quad \frac{1}{2}$$
$$x_2 \quad \frac{1}{2}$$
$$x_3 \quad \frac{(1 \quad)^{2}}{2}$$

17. 证明：记系数矩阵为A，增广矩阵为B。

另外：C = $$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{matrix}$$

假设 $r_A = r$，可设A的前 r 行线性无关且第（ r+1 ）行可用前 r 行线性表出，那么对于第（r+1）行中的每一个值都有 $a_{r \; 1,j} \quad \sum_{i \; 1}^{r} \quad {}_{i}a_{i,j} \; (j \quad 1,2,3 \cdots n)$。但B与A相比多了一

列，有可能使得 $b_{r+1} \neq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i$（当然，这种关系也有可能满足）。

但当这种关系部满足时，$r_A > r_B$，故 $r_A \geq r_B$，同理 $r_c \geq r_B$。

综上：$r_c \geq r_B \geq r_A$

由于 $r_A = r_c$，故 $r_c = r_B = r_A$，方程有解。

18. 解：首先明确在平面直角坐标系中，直线的方程应为A x+By=C.

那么
$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 = C \\ Ax_2 + By_2 = C \\ Ax_3 + By_3 = C \end{cases}$$

用矩阵表示，即为
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix}$$

若将A .B 都看做自变量，将 $x_i \cdot y_i$ 看做系数，那么，增广矩阵即为

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & C \\ x_2 & y_2 & C \\ x_3 & y_3 & C \end{pmatrix}$$

由于列向量线向相关，故 $|B| = C \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

故 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

若为 $n(n > 3)$ 点共线，则增广矩阵 $B' = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & C \\ x_2 & y_2 & C \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & C \end{pmatrix}$

该矩阵中第3个列向量可用前两个线向表出，故 $r_B' < 3$。

考虑直线的特殊情形：

当该直线经过原点（0，0）时，$r_B' = 1$；其余情形下，$r_B' = 2$

故，n点共线的充要条件为 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & C \\ x_2 & y_2 & C \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & C \end{pmatrix}$ 的秩 < 3

即 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$ 的秩 < 3

19. 解：对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

初等行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & a_3 \quad a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \end{pmatrix} = B_1$

方程组有解的充要条件为 $r_A = r_B = 4$ ，则需 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 = 0$

解出 B_1 矩阵对应的方程组得：

$$x_1 \quad x_5 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

$$x_2 \quad x_5 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

$$x_3 \quad x_5 \quad a_3 \quad a_4$$

$$x_4 \quad x_5 \quad a_4$$

令 $x_5 = 0$ 得到方程组的特解

$\vec{x}_0 =$（$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$，$a_2 \quad a_3 \quad a_4$，$a_3 \quad a_4$，$a_4$，0）

导出组的方程为 $x_1 \quad x_5 \quad 0 \qquad x_2 \quad x_5 \quad 0 \qquad x_3 \quad x_5 \quad 0 \qquad x_4 \quad x_5 \quad 0$

令 $x_5 = 1$ 则得导出组的基础解系为 $\vec{x}_1 = (1,1,1,1,1)$

则方程组通解为 $\vec{x} =$（$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$，$a_2 \quad a_3 \quad a_4$，$a_3 \quad a_4$，$a_4$，0）$+k(1,1,1,1,1)$

20. 证明

（1）方程组的系数矩阵 A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & c & d & e \\ a & 1 & c & d & e \\ a & b & 1 & d & e \\ a & b & c & 1 & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & b & c & d & e \\ a\ 1 & b\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\ 1 & c\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\ 1 & b\ 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b\ 1 & e\ 1 \end{pmatrix} = A_1$$

系数 a,b,c,d,e 中有两个等于 -1

即 a+1,b+1,c+1,d+1,e+1 中有两个等于 0

则 r_A=4, 因此方程组必有非零解

（2）

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & b & c & d & e \\ a\ 1 & b\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\ 1 & c\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\ 1 & d\ 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\ 1 & e\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a\ 1 & b\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\ 1 & c\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\ 1 & d\ 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\ 1 & e\ 1 \\ 1 & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\ 1 & 0 & 0 & 0 & e\ 1 \\ 0 & b\ 1 & 0 & 0 & e\ 1 \\ 0 & 0 & c\ 1 & 0 & e\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & d\ 1 & e\ 1 \\ 1 & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

已知任何系数都不等于 -1, 且 $\frac{a}{a\ 1}\ \frac{b}{b\ 1}\ \frac{c}{c\ 1}\ \frac{d}{d\ 1}\ \frac{e}{e\ 1}=1$

则 $\frac{b}{b\ 1}\ \frac{c}{c\ 1}\ \frac{d}{d\ 1}\ \frac{e}{e\ 1}\ \frac{1}{a\ 1}=0$ 得 r_A=4, 因此方程组必有非零解 .

21.

（1）方程组的系数矩阵 A 通过初等行变换化简

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 13 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

矩阵的秩 r_A=2<4, 基础解系由 2 个线性无关的解向量构成 ,

A_1矩阵对应的方程组

$$x_1 \quad \frac{1}{9}x_3^{\circ} \quad \frac{2}{9}x_4^{\circ}$$

$$x_2 \quad \frac{8}{3}x_3^{\circ} \quad \frac{7}{3}x_4^{\circ}$$

令 $x_3 \quad 1, x_4 \quad 0$ 代入解得 $x_1 \quad \frac{1}{9} \quad x_2 \quad \frac{8}{3}$

对应的解的向量为 $\vec{x_1} \quad \frac{1}{9}, \frac{8}{3}, 1, 0$

令 $x_3 \quad 0, x_4 \quad 1$ 代入解得 $x_1 \quad \frac{2}{9} \quad x_2 \quad \frac{7}{3}$

对应的解的向量为 $\vec{x_2} \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{7}{3}, 0, 1$

x_1，x_2是方程组的一个基础解系

则方程组通解为 $\vec{x} \quad k_1\vec{x_1} \quad k_2\vec{x_2}$. 其中 k_1 . k_2 为任意的实数

（2）方程组的系数矩阵 A

$$A \quad \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 17 & 11 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad A_1$$

矩阵 A 的秩 $r_A=2<4$, 基础解系由 2 个线性无关的解构成

A_1对应的方程组为

$$\begin{matrix} x_1 \quad 2x_2 \quad \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 \quad \frac{5}{7}x_4 \end{matrix}$$

令 $x_2 \quad 1, x_4 \quad 0$ 可解得 $x_1 \quad 2, x_3 \quad 0$

对应的解向量为 $\vec{x_1} \quad 2,1,0,0$

令 $x_2 \quad 0, x_4 \quad 1$ 可解得 $x_1 \quad \frac{2}{7}, x_3 \quad \frac{5}{7}$

对应的解向量为 $x_2 \quad \frac{2}{7}, 0, \quad \frac{5}{7}, 1$

$\vec{x_1}, \vec{x_2}$ 是方程组的一个基础解系

方程组的通解为

$\vec{x} \quad k_1\vec{x_1} \quad k_2\vec{x_2}$, 其中 k_1 . k_2 为任意的实数

（3）方程组的系数矩阵

$$A \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$r_A=4$, 基础解系由 2 个线性无关的解向量构成

写出阶梯形对应的方程组

$$\begin{matrix} x_1 & \mathring{x}_5 \\ x_2 & \mathring{x}_4 \\ x_3 & \mathring{x}_4 \\ x_6 & 0 \end{matrix}$$

令 $\mathring{x}_4 \quad 1, \mathring{x}_5 \quad 0$ 解出对应的解向量为 $\vec{x}_1 \quad 0,1,1,1,0,0$

令 $\mathring{x}_4 \quad 0, \mathring{x}_5 \quad 1$ 解出对应的解向量为 $\vec{x}_2 \quad 1,0,0,0,1,0$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 是方程组的一个基础解系

方程组的通解为

$\vec{x} \quad k_1\vec{x}_1 \quad k_2\vec{x}_2$，其中 k_1 . k_2 为任意的实数

（4）方程组的系数矩阵 A

$$A \quad \begin{matrix} 5 & 6 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$r_A=3$, 基础解系应由 2 个线性无关的解构成

阶梯矩阵对应的方程组为

$$\begin{matrix} x_1 \quad 0 \\ x_2 \quad \frac{1}{3}\mathring{x}_3 \quad \frac{2}{3}\mathring{x}_5 \\ x_4 \quad 0 \end{matrix}$$

令 $\mathring{x}_3 \quad 1, \mathring{x}_5 \quad 0$ 解得对应的解向量为 $\vec{x}_1 \quad 0,\frac{1}{3},1,0,0$

令 $\mathring{x}_3 \quad 0, \mathring{x}_5 \quad 1$ 解得对应的解向量为 $\vec{x}_2 \quad 0, \frac{2}{3},0,0,1$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 构成方程组的一个基础解系