请说一下您对电场的理解

通过本次课的学习，您将学会：

- 高斯定理
- 利用高斯定理求解电场

§2 高斯定理

高斯定理反映：

静电场是有源场

高斯 德国

1777-1855

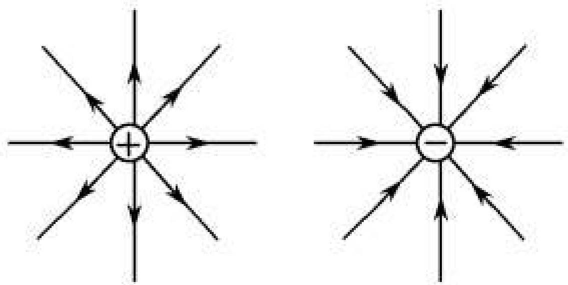
高等数学 --- 通量的概念

二　电场线　电通量

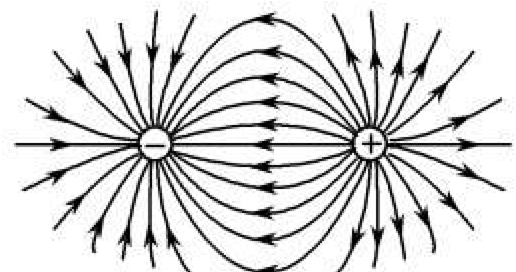
1. 电场线：

(1) 线上每一点的切线方向与该点电场强度方向一致。

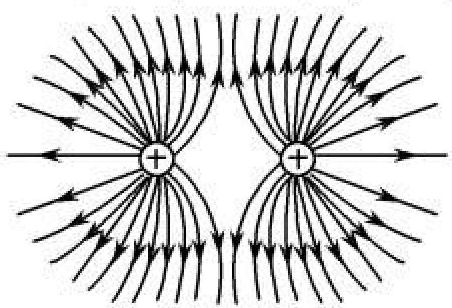
(2) 电场线的密度反映了电场强度的大小。



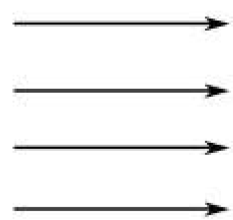
孤立点电荷的电场



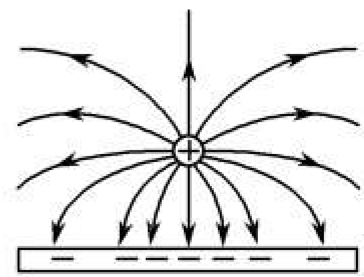
等量异种点电荷的电场



等量同种点电荷的电场



匀强电场



点电荷与金属板间的电场

静电场的电场线性质：

◆ 电场线始于正电荷（或∞），终于负电荷（或∞）

电场线不会在无电荷的地方中断。

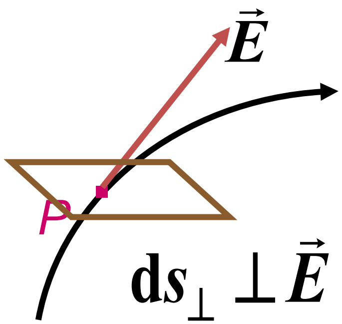
◆ 静电场的电场线不能形成**单一绕向**的**闭合**线。

◆ 同一电场的任何两条电场线不会相交。

规定：取垂直于某点P 场强方向的面积元$ds_{\perp}$，

若该点场强大小为E，

则通过此面积元的电场线数目为：



$$\mathrm{d}N = E\,\mathrm{d}s_{\perp}$$

即：电场强度E的大小

$$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s_{\perp}}$$ （电场线密度）

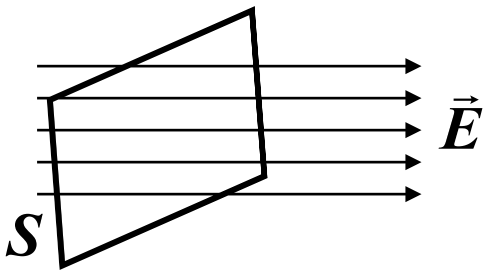
物理意义： 单位垂直面上的电场线数目。

2、电通量：

指通过电场中任意给定面的电场线总数。

2.1 匀强电场、过平面的电通量：

1. 给定平面 $S \perp E$ 的情况：

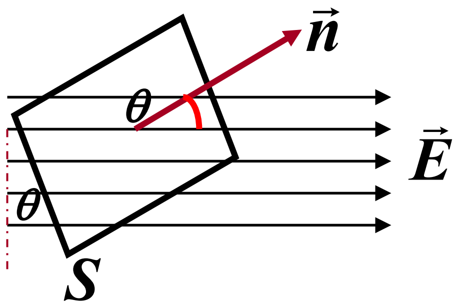


通过S 平面的电场线总数目：

$$\Phi_e = E\,S = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

2. 给定平面S 与场强有夹角(≠90°)情况:

通过S 平面的电场线总数目，即电通量为:

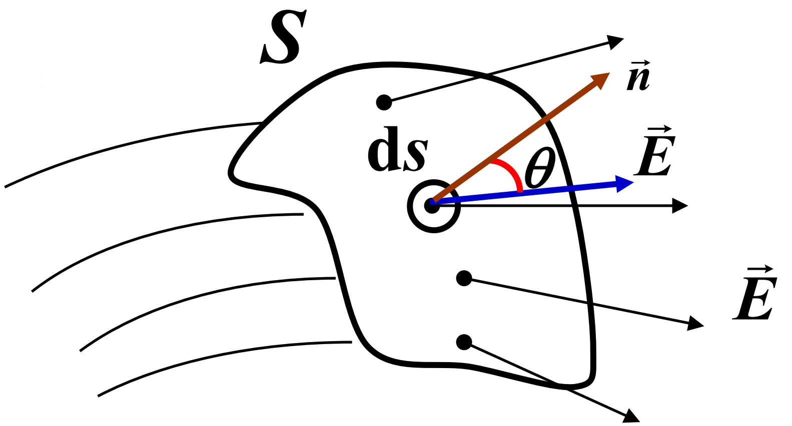


$$\Phi_e = E\,S_\perp = ES\cos\theta$$

定义：面积矢量 $\vec{S} = S\,\vec{n}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

2.2　任意电场、任意面的电通量：



则通过面元d*s*的电通量为：

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\,\mathrm{d}s\cos\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}s\,\vec{n}$$

面元矢量

则通过整个曲面S的电通量为： $\Phi_e = \iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$

当S为闭合曲面时： $\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$

说明：

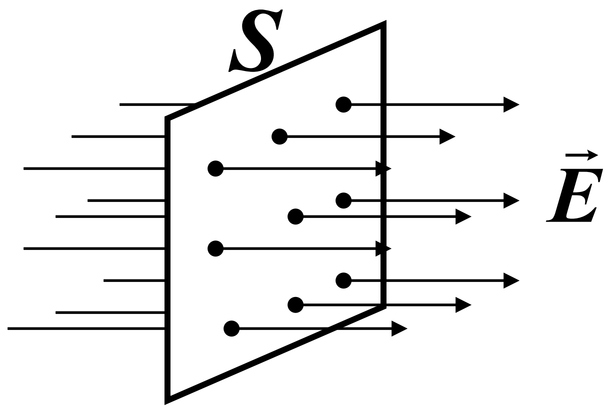
1. 对于闭合曲面的计算规定：

$$\begin{cases} \text{电场线穿出曲面时：} \theta < \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_e > 0 \\ \text{电场线穿入曲面时：} \theta > \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_e < 0 \end{cases}$$

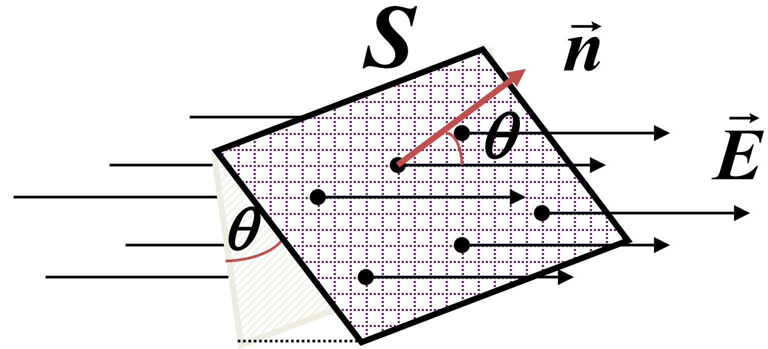
2. 在解决电通量问题时，必须明确场强分布、面元法向。

3. 矢量 $\vec{A}$ 的通即为： $\Phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

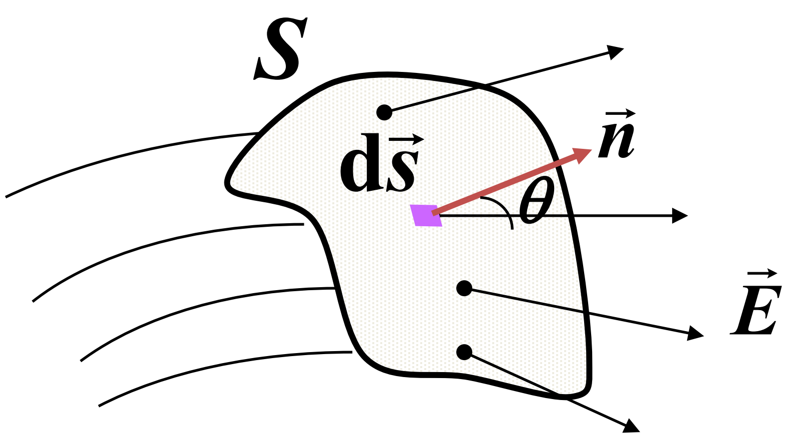
综上有：电通量的计算



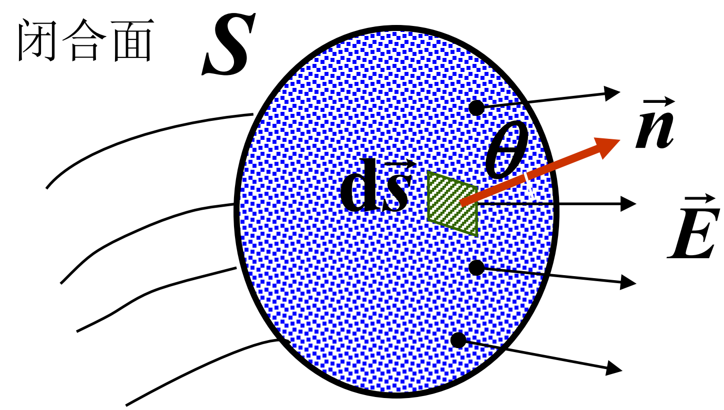
$$\Phi_e = ES$$



$$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{S} = ES\cos\theta$$



$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S E\,ds\cos\theta$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S E\cos\theta\,ds$$

说明：

- 电通量有两种方法理解：通过某一曲面电力线根数；电场强度矢量的面积分，即电场强度矢量的大小与垂直于场强的截面面积的乘积。

- 电通量是标量，但有符号，可正可负。

- 宏观曲面的电通量需要面积分，积分范围是整个曲面，面元矢量取外法线方向。

三 高斯定理

高斯面

1 定理内容

在真空中静电场，穿过任一**闭合曲面**的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 .

$$\boxed{\varPhi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{\mathrm{in}}}$$

2 定理的证明

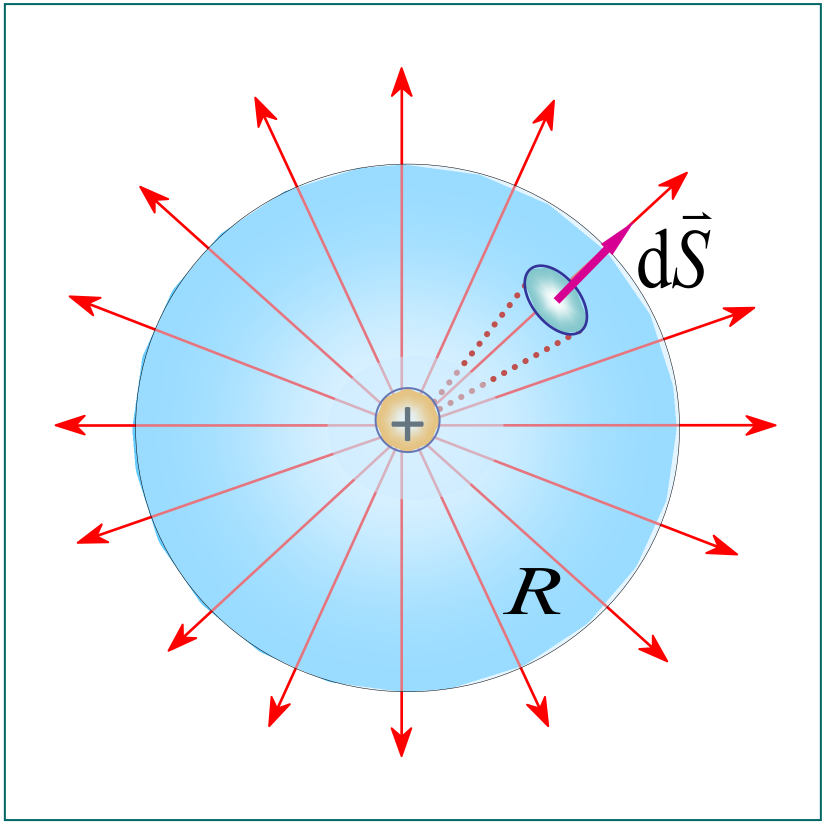
◆ **点电荷位于球面中心**

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\oint_S dS$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$



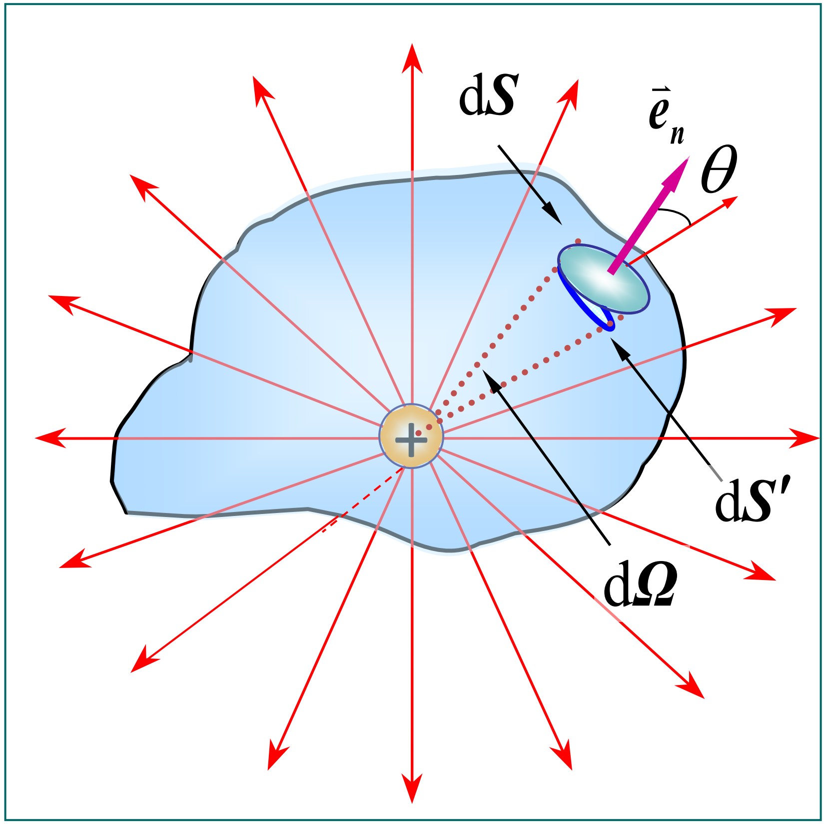
◆ 点电荷在闭合曲面内

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}S'}{r^2} = \mathrm{d}\Omega$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



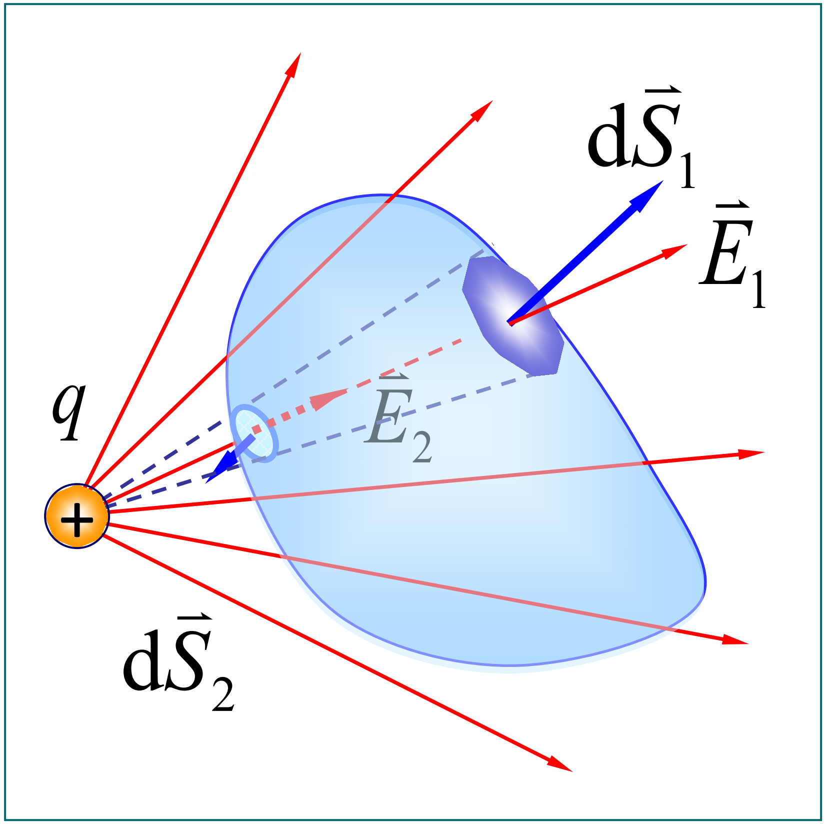
◆ 点电荷在闭合曲面外

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



高斯定理的说明：

（1） 高斯定理中的封闭曲面称为“高斯面”。

（2） 定理中的场强是空间所有电荷共同产生的。

（3） 电通量只与高斯面内包含的电荷代数和有关，

但应注意：封闭面内电荷的分布会影响场强分布。

（4） 物理含义：高斯定理说明**静电场是有源场。**

3　高斯定理的应用

用高斯定理求电场强度的一般步骤为：

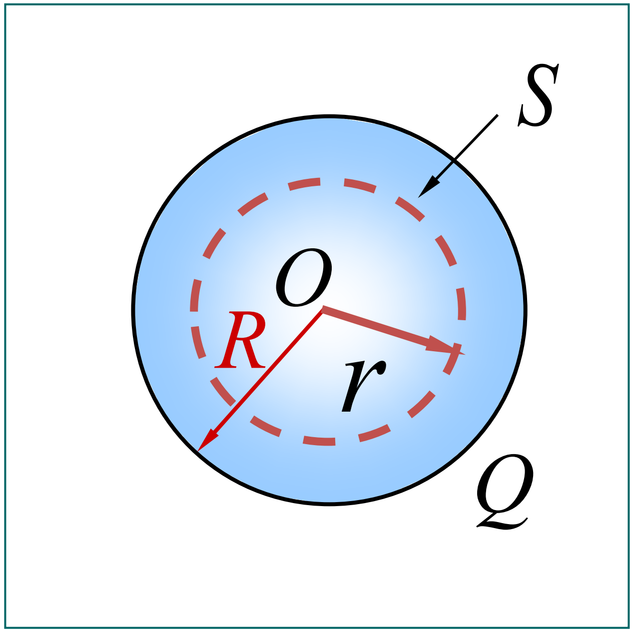
- 对称性分析；
- 根据对称性选择合适的高斯面；

  1）高斯面必须通过待求电场的场点；

  2）高斯面的每部分法线与电场矢量的夹角已知（ $0,\dfrac{\pi}{2},$或已知确定角度 ）；

  3)高斯面的全部或部分电场值不变；
- 应用高斯定理计算.

例1 设有一半径为R，均匀带电Q 的球面. 求球面内外任意点的电场强度.



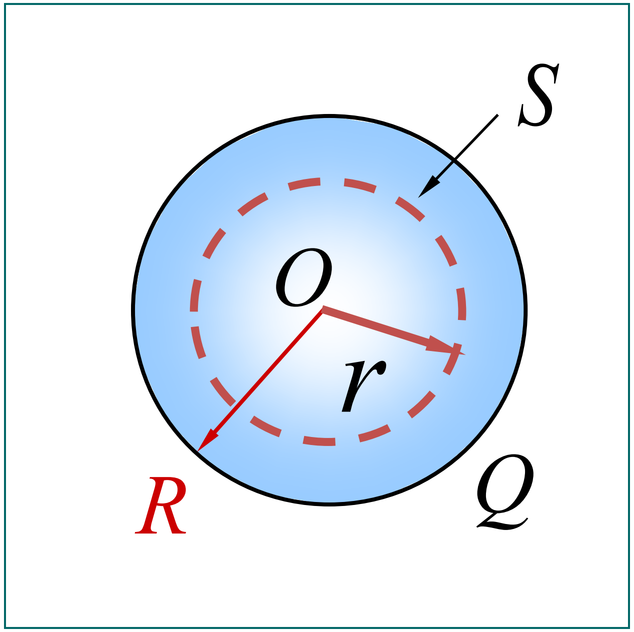
第一步：分析电场分布特点

场强大小相同各点的集合是同心球面。

方向：沿径向向外。

第二步：选取合适的高斯面

取同心球面为高斯面。

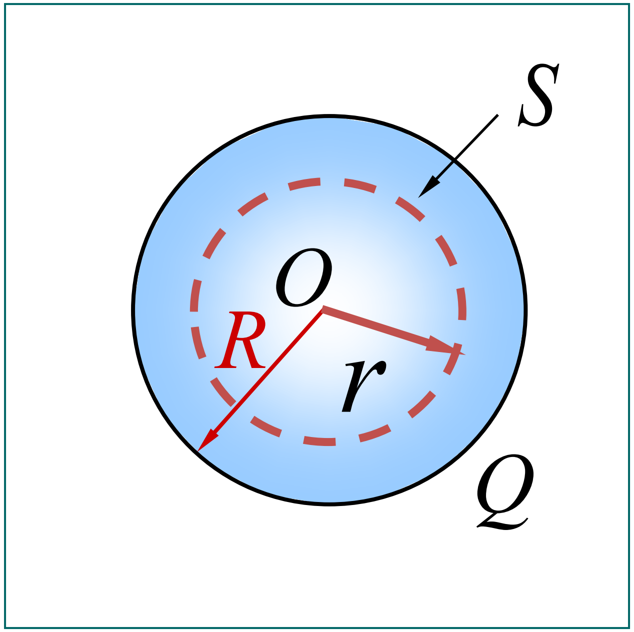


第三步：利用高斯定理计算

(1) $0 < r < R$

$\because \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

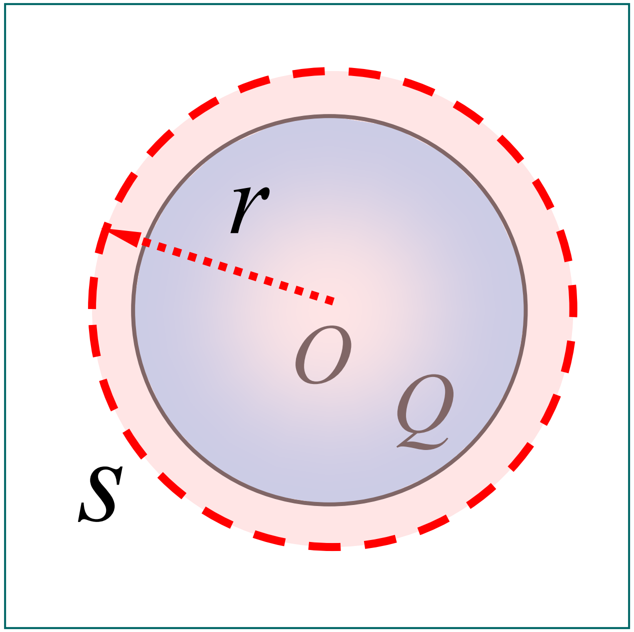
$\therefore \vec{E} = 0$



(2) $r > R$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

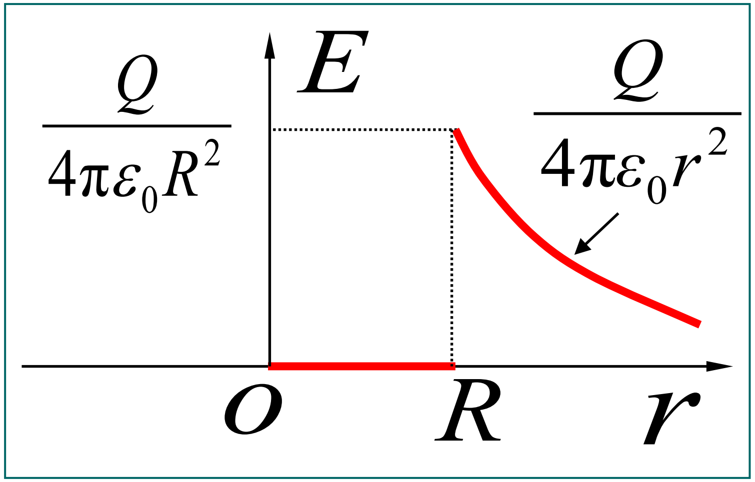
$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



结论

(1) 均匀带电球面的场强在球表面不连续。

(2) 均匀带电球面在其外部产生的场强， 相当于把电荷全部集中于球心时点电荷的场强。

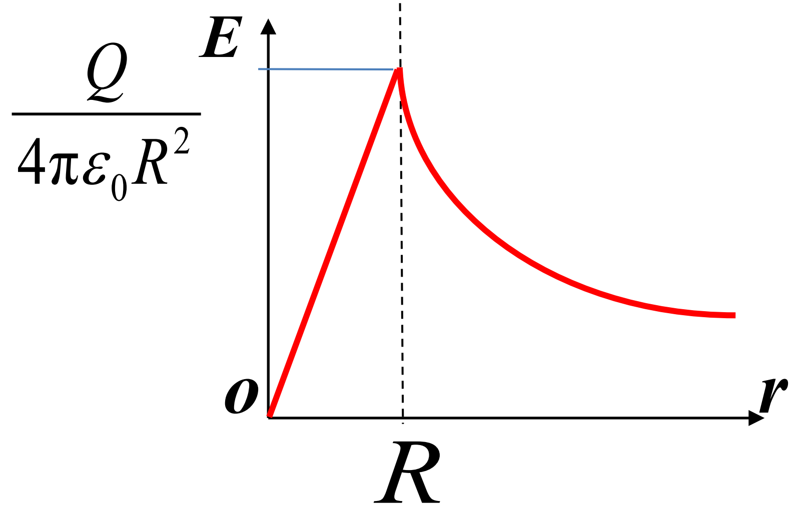


均匀带电球体的场强分布

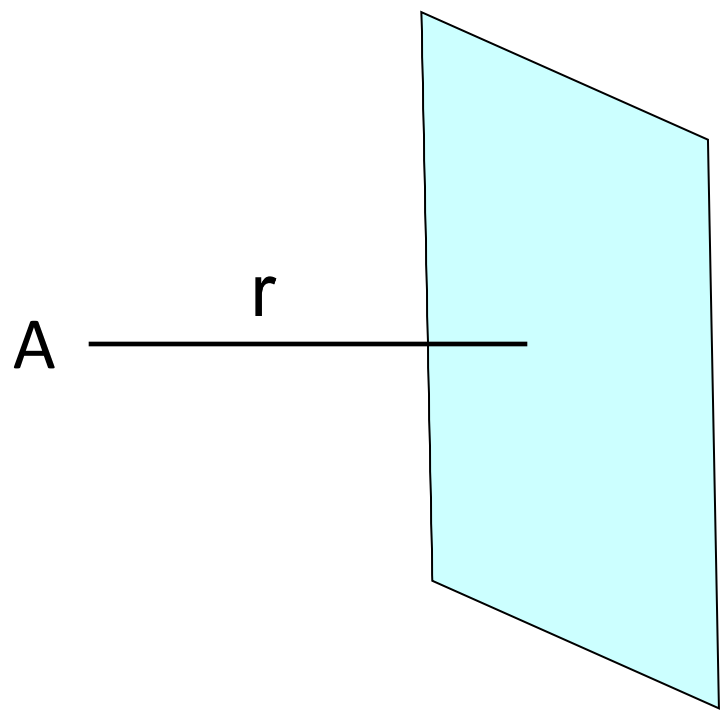
课本P303， 例 8.10

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}, & (r>R)\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qr}{R^3}\vec{r}^{\,0}, & (r\le R)\end{cases}$$

(球体)



例2 设有一无限大均匀带正电平面，电荷面密度为σ，求距平面为r处某点的电场强度.

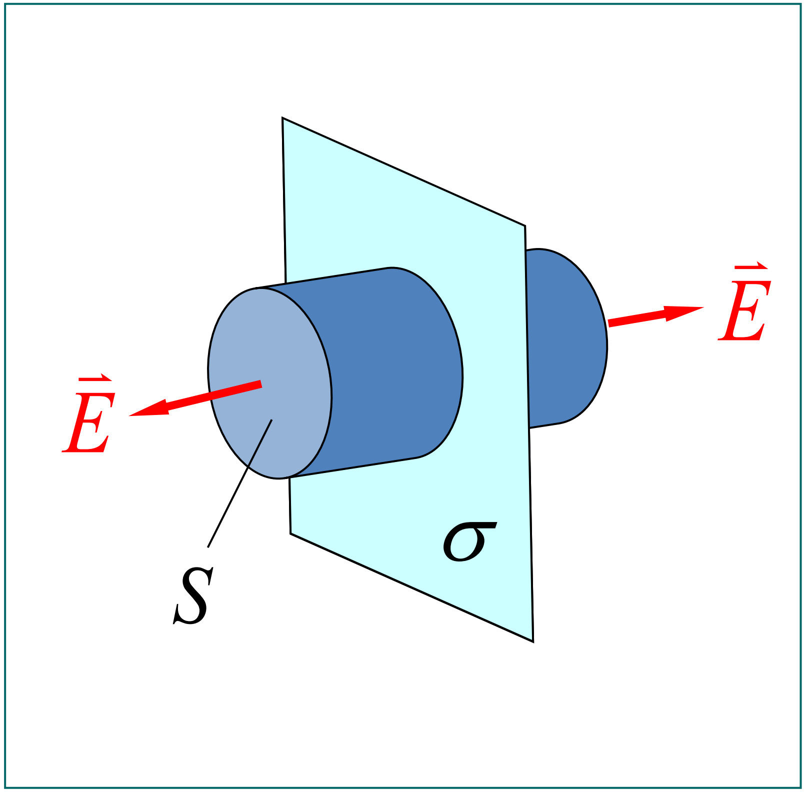


第一步：分析电场分布特点

场强方向：垂直平面且指向外。

场强大小相同点的集合：

距平面等距的点。



第二步：　选取合适的高斯面

取两底面与该平面平行且对称于该平面的封闭柱面为高斯面。

第三步利用高斯定理计算

通过此高斯面的电通量为:

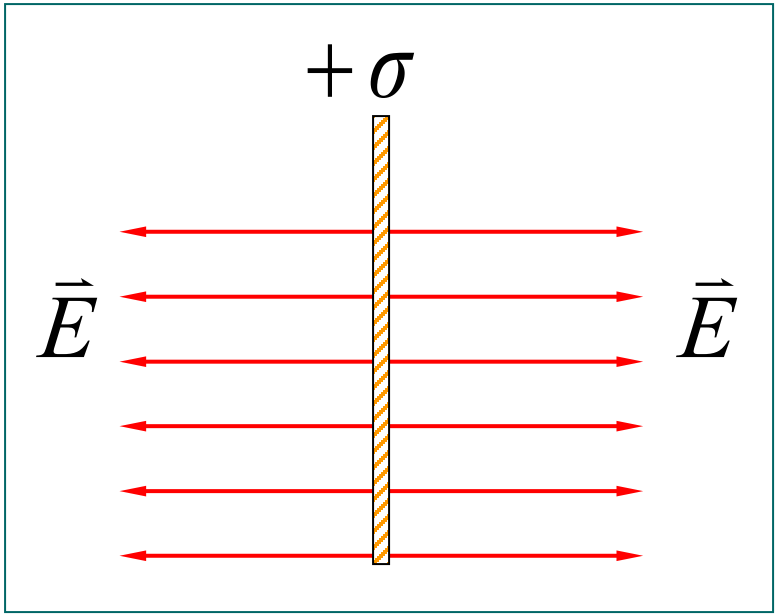
$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \overbrace{\int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{s}}^{=0} + \overbrace{\int_{左底} \vec{E}\cdot d\vec{s}}^{=ES_0} + \overbrace{\int_{右底} \vec{E}\cdot d\vec{s}}^{=ES_0}$$

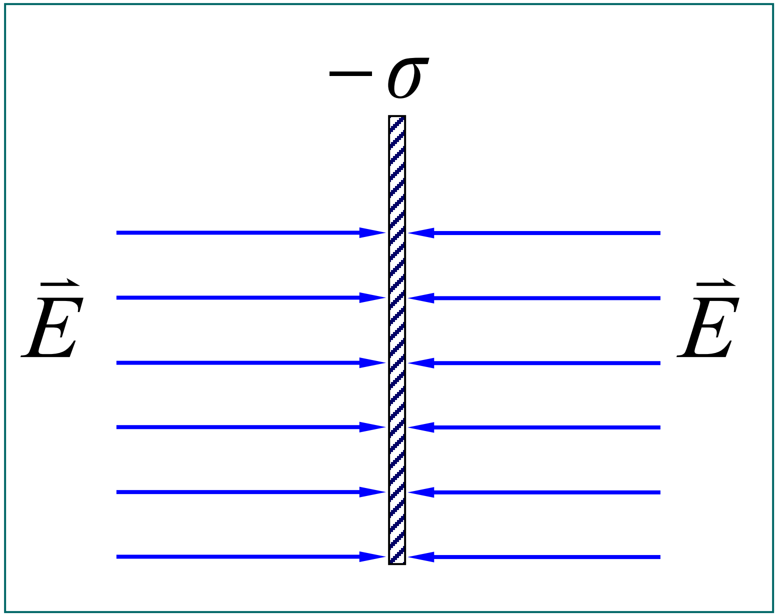
$$= 2ES_0$$

高斯面内有: $$\frac{\sum q_{i内}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0}$$

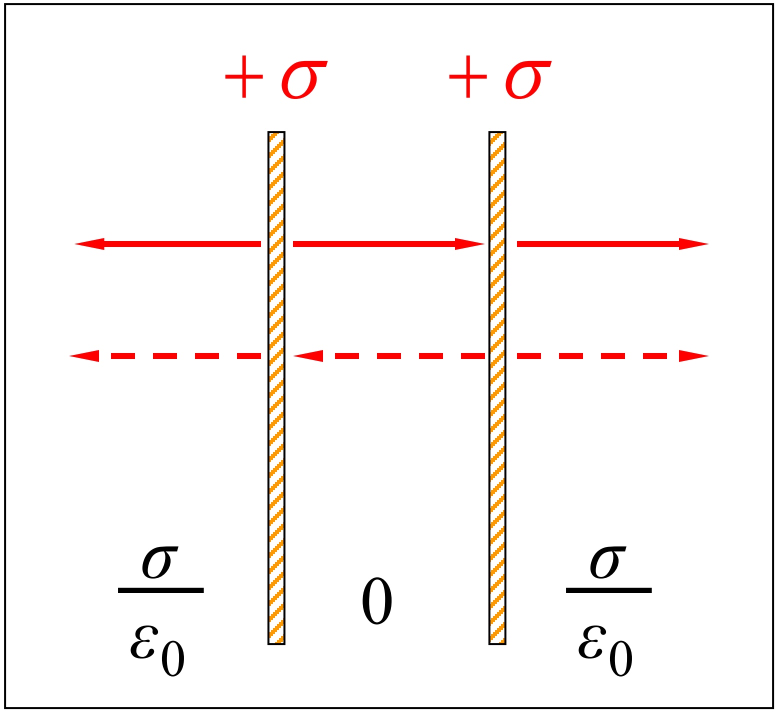
$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

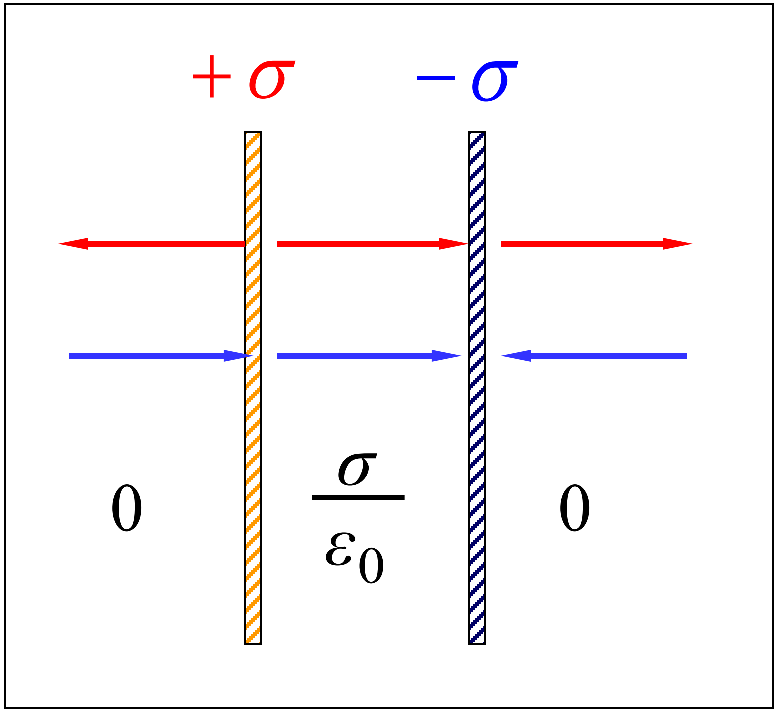
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$





无限大带电平面的电场叠加问题

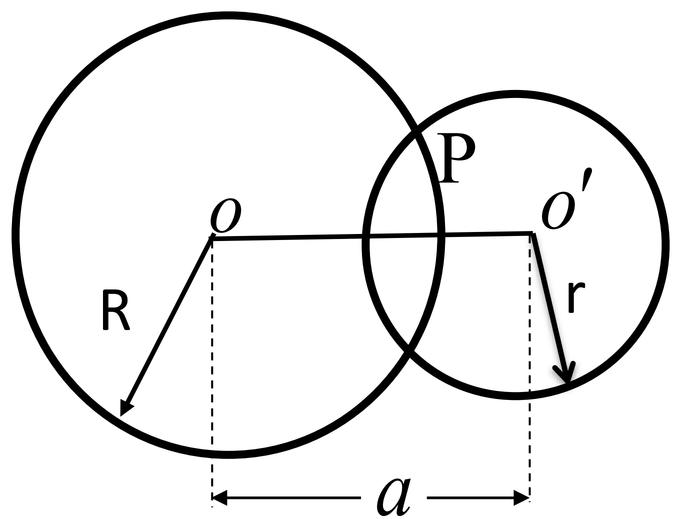




无限长均匀带电直线的电场分布

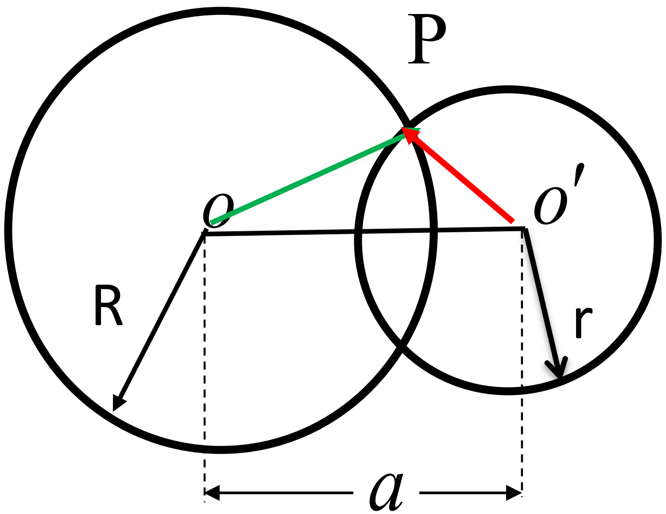
课本　P301 例8.8

例4. 半径分别为R， r 的两球均匀带电。且相交，体电荷密度分别为ρ和-ρ 。两球相距为a，a<R+r，求两球面相交处P的电场矢量。（两球相交部分的电荷体密度为0）

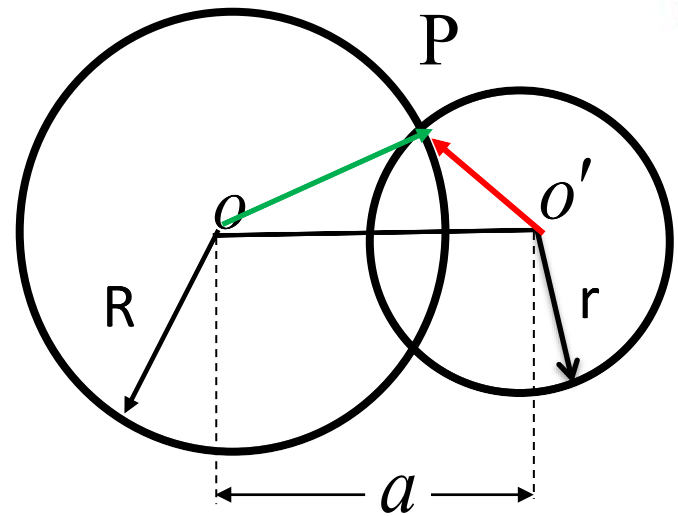


解：
（1）对称性不好，可以利用高斯定理及电场叠加原理求得。
（2）先求单个球在P点产生的场强，然后叠加。可利用已知结果。

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\vec{r}^{\,0}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\vec{r}^{\,0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$



$$\vec{E}_R = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OP}, \qquad \vec{E}_r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O'P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{PO'}$$

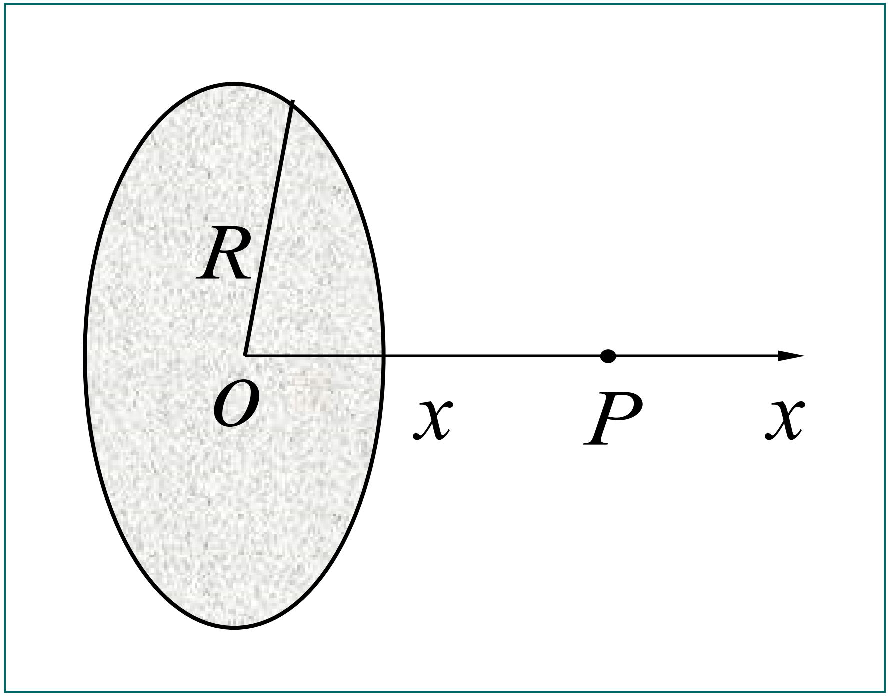
$$\vec{E}_p = \vec{E}_R + \vec{E}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO'}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\hat{O}\hat{O}'$$

作业

- P351 T8.10 T8.14 T8.16 T8.20;

例2 有一半径为R，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为σ． 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

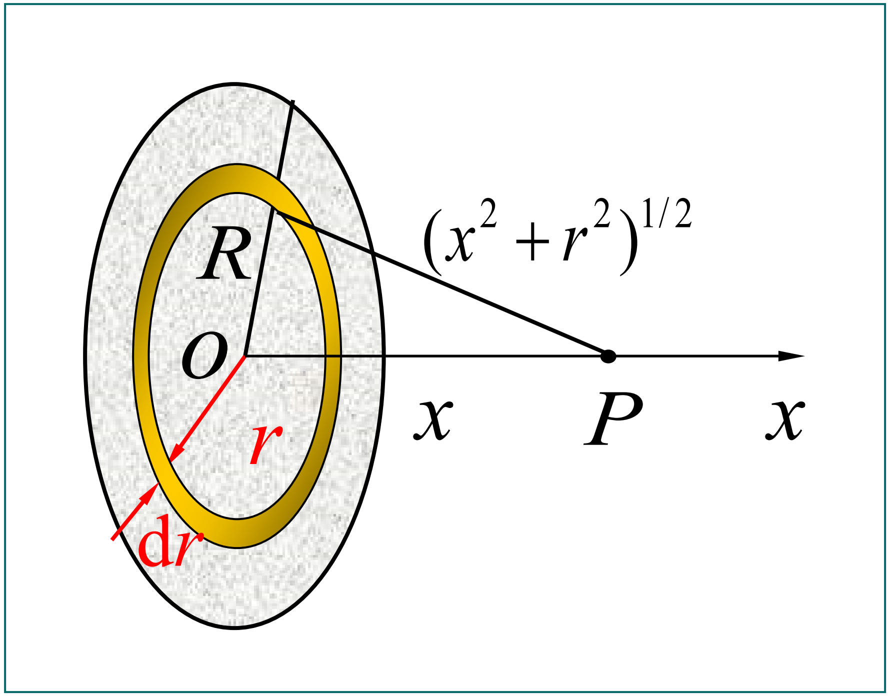


解 $\sigma = q/\pi R^2$ $\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xr\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_0^R dE_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$



P点处E的方向沿x轴正向

讨论

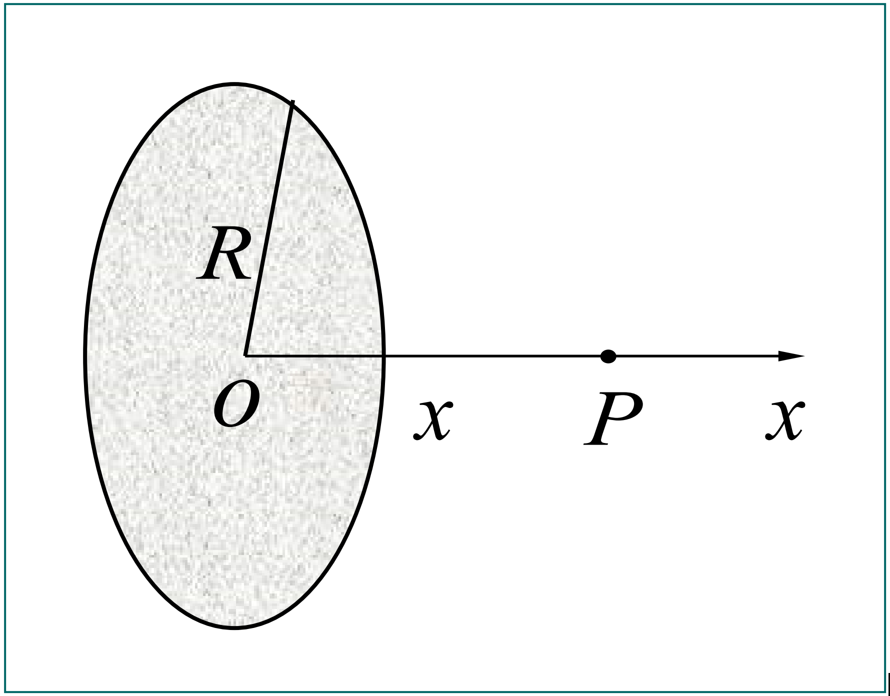
$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

$x << R$

$$E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$x >> R$

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$



非常典型的例题，必看！！

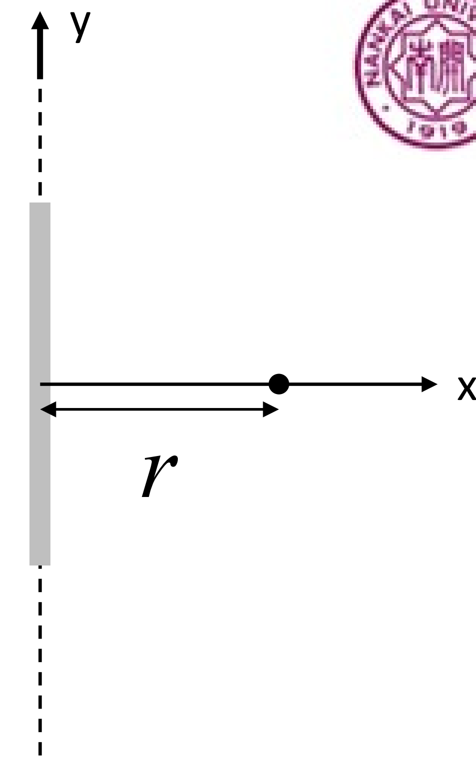
P292 例 8.6

P293 例 8.7

无限长带电直线的电场分布

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_y = 0$$



半限长带电直线的电场分布

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

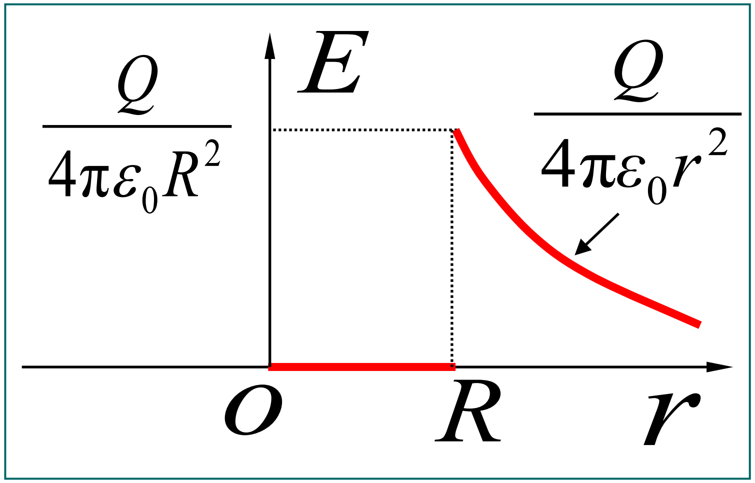
本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 高斯定理
- 求解电场强度的方法

典型结论

均匀带电球面(薄球壳)

$$E=\begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R \end{cases}$$

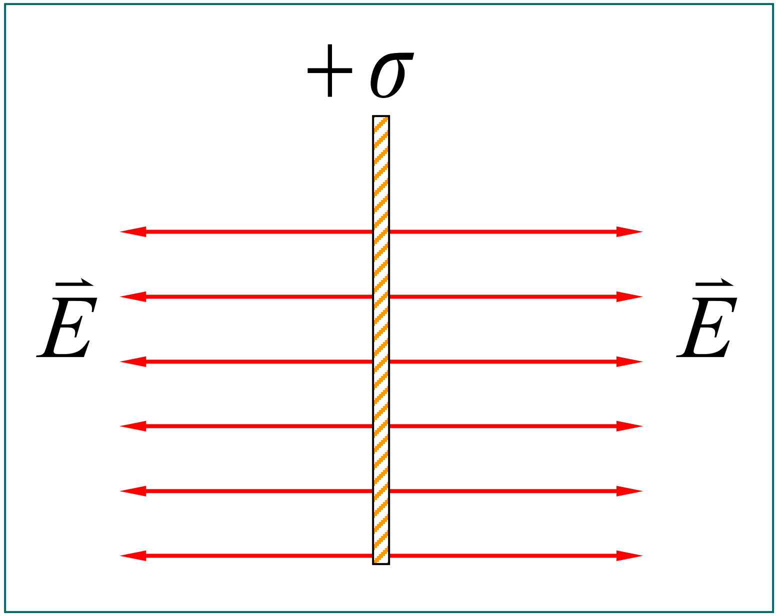


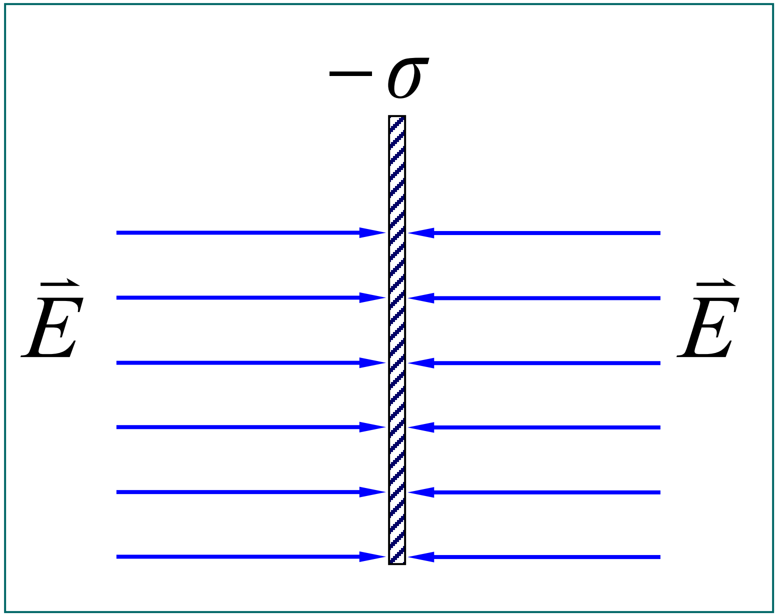
无限长均匀带电直线（及圆柱面）

$$E=\begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r>R \end{cases}$$

无限大均匀带电平面

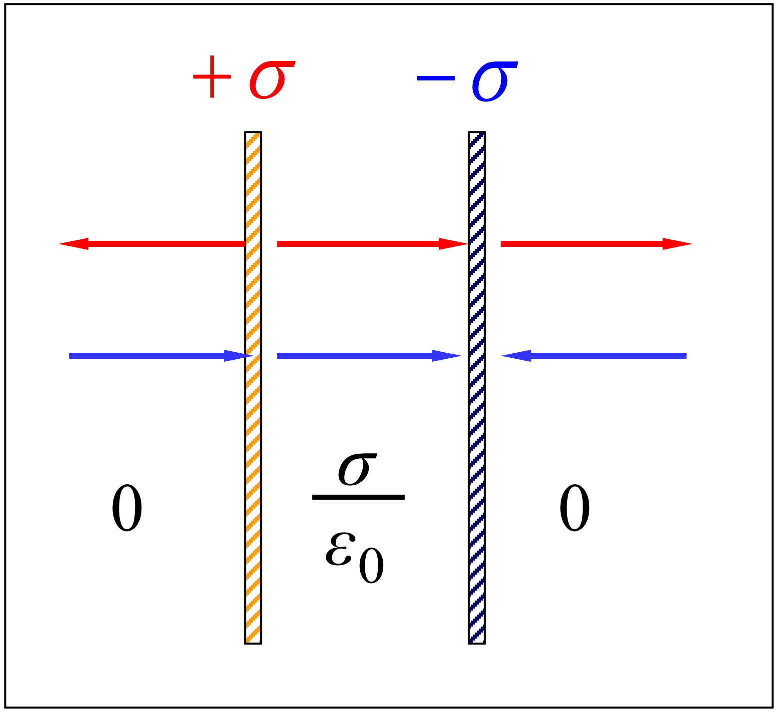
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$





无限大等量异号平行的均匀带电平面

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



关于利用高斯定理计算电场的说明：

（1）能够运用高斯定理的几种情况：

1）球对称分布：点电荷、均匀带电球体、均匀带电球面、均匀带电球壳等；

2）轴对称分布：无限长带电细直线、无限长带电圆柱体、无限长带电圆柱面等；

3）面对称分布：无限大带电平面、无限大带电平板等；

4）以上三种对称分布带电体的组合。