# 静电场能量

# 通过本次课的学习，您将：

- 电容器储能
- 静电场的能量
- 铁电体与压电体

- 我们如何将电荷分离呢？

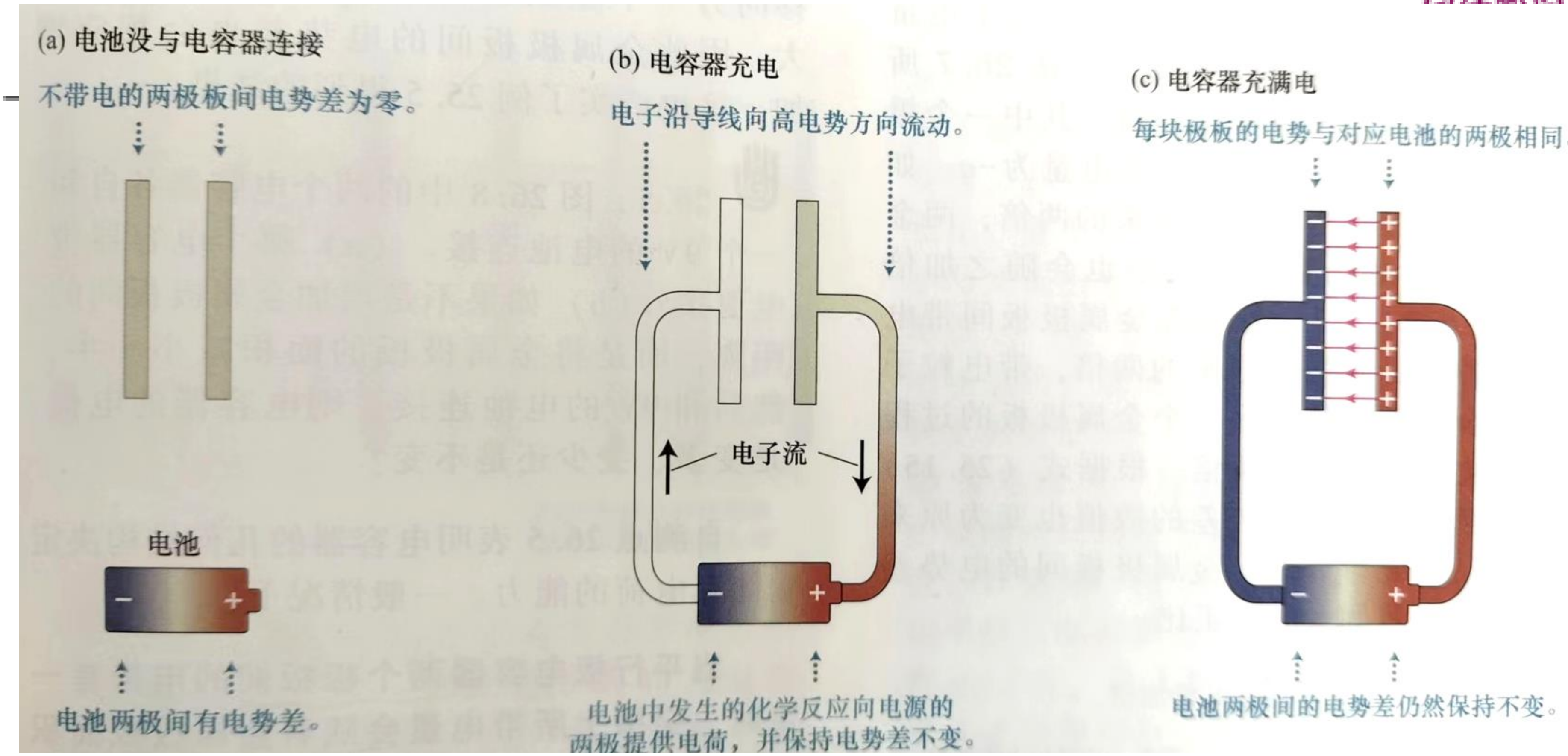
  电荷分开的过程伴随着做功

- 正负电荷分开后，能量存储在哪里？

# 一、电容储能

## Energy  stored in a capacitor

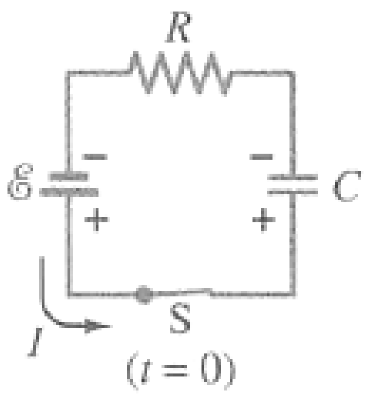
https://www.khanacademy.org/science/physics/circuits-topic/circuits-with-capacitors/v/energy-capacitor



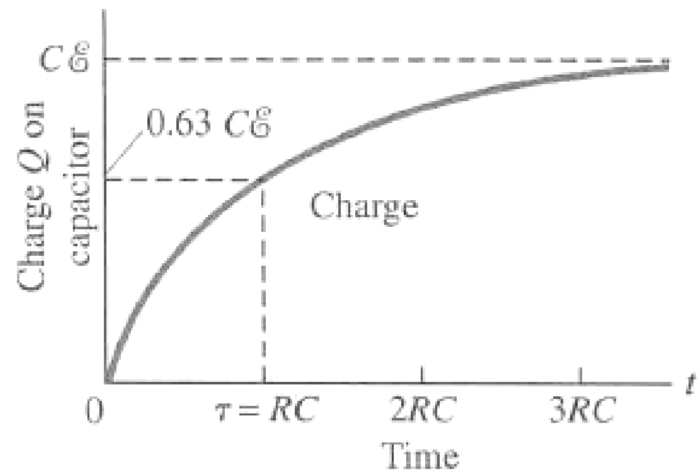

两极板间的电势在逐渐升高

电源对电容器的充电过程中，电容器获得的能量，设电容器的电容为C。

设充电过程中某时刻极板上电量的绝对值为q，正极、负极电位，及该时刻正负极电位差分别为 $u_+, u_-, u$ 。



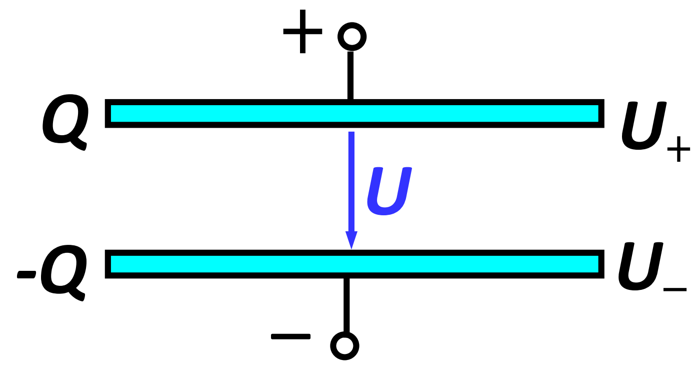
(a)



(b)

充电时电源提供的外力不断将-dq的电荷从正极移到负极，此时电位能增加为：

$$dW = (-dq)u_- - (-dq)u_+$$
$$= dq(u_+ - u_-)$$
$$= udq$$



设该电容器的容量为C, 则当正负极电位差为u时，正极上的电量q = uC

$$\therefore u = \frac{q}{C} \qquad \therefore dW = \frac{q}{C}dq$$

正极电量由$0 \to Q$，同时负极电量由$0 \to -Q$。

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

又$C = \dfrac{Q}{U} \Rightarrow W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}QU$

## 使电容器电量从0增加到Q，外力所做的功为：

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

电容器电量从0增加到Q，电容器储存的能量

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

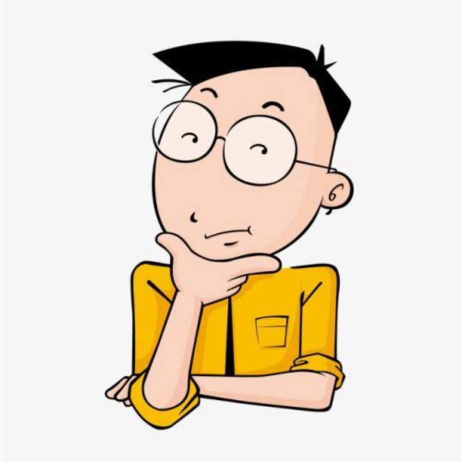
电容器的电容，表征了电容器储能本领的大小

# 二、静电场储能

电荷的电位能： W=qU

电容器储能：

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

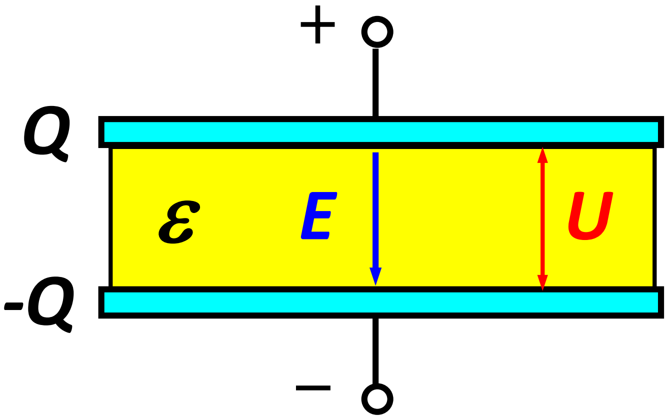


静电能与电场联系，静电能是否存分布在电场中？？

# 以有介质的平行板电容器为例:

$$W = \frac{1}{2}QU, \qquad \sigma = \frac{Q}{S}$$

$D = \sigma$(仅适合平行板电容器)




$$\because D = \frac{Q}{S},$$

$$\therefore Q = DS$$

$$\because U = Ed$$

$$\therefore \mathrm{W} = \frac{1}{2} QU$$

$$= \frac{1}{2} DSEd$$

$$= \frac{1}{2} DEV$$

$V = Sd$是电容两极的体积，也就是电场分布的总体积。

平行平板电容器电场的能量密度：单位体积静电场的能量

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} DE$$

各向异性的电介质，$\vec{D}$与$\vec{E}$ 的方向不同

静电场的能量密度：

$$\omega = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

各向同性线性电介质：

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

真空：

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

# 电场空间所存储的能量

均匀电场：

$$W = \omega V = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}V$$

$V$

非均匀电场：

$$W = \iiint_V \omega dV = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

# 四、应用举例

例1、半径为R的导体球带电量为Q，处于静电平衡状态，已知球外是真空，求

（1）电场能量W。

（2）导体球的外部，多大半径范围内，所储存的能量为总能量的一半。

解：（1）导体静电平衡，内部电场为零。导体外

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2 dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}(k\frac{Q}{r^2})^2 4\pi r^2 dr=\frac{kQ^2}{2R}$$

注：可以按照孤立导体球电容及电容器储能计算。

令 $R_x$ 处, $W_x = \frac{1}{2} W$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^{R_x} (k \frac{Q}{r^2})^2 4\pi r^2 dr = \frac{kQ^2}{2} (\frac{1}{R} - \frac{1}{R_x})$$

$$\frac{kQ^2}{2} (\frac{1}{R} - \frac{1}{R_x}) = \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{2R}$$

$$R_x = 2R$$

例2、平行板空气电容器的板面积为S，经充电后，两板分别带电+Q和－Q，求断开电源，外力匀速将二板距离由d拉到2d的过程中，外力所做的功。

# 方法 1

解：拉动前 $C_1=\dfrac{\varepsilon_0 s}{d}$ ，拉动后 $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 s}{2d}$

拉动前后Q不变 $W=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

拉动前电容器储存的能量：$W_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C_1}$

拉动后电容器储存的能量：$W_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C_2}$

外力做的功为：$A=\Delta W=W_2-W_1=\dfrac{1}{2}Q^2\left(\dfrac{1}{C_2}-\dfrac{1}{C_1}\right)=\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 s}$

## 方法 2



$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0(\frac{\sigma}{\varepsilon_0})^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0S^2}$$

$E$不变$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $\Rightarrow\omega$不变

$$W_1=\omega V_1=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0S^2}\cdot Sd=\frac{Q^2d}{2\varepsilon_0S},$$

$$W_2=\omega V_2=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0S^2}\cdot 2Sd=\frac{Q^2d}{\varepsilon_0S}$$

$$A=\Delta W=W_2-W_1=\frac{Q^2d}{2\varepsilon_0S}$$

## 方法3　按照恒力做工计算

正极板产生的电场：

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

负极板在该电场中受到的力为：

$$F=-QE=\frac{-Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

外力所做的功为：

$$W=(-F)d=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

机械能转化成了电能

# §2.4铁电体与压电体

## 一、铁电效应

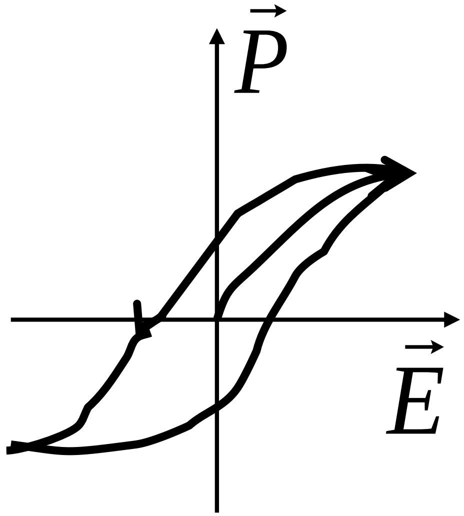
一类特殊电介质，极化性质特别，具有类似于铁磁体在磁场中的性质，故称为铁电体。如钛酸钡、酒石酸钾钠、磷酸二氢钾等。

1）自发极化，有“电畴”存在；

2）介电常数很大，$\varepsilon_r = 10^2 \cdots 10^4$，与电场有关，且非单值函数关系，各向异性；

3）电滞现象；

4）存在居里温度。



## 铁电体的应用：

- 因介电常数大，可制作大容量电容；
- 在交流电路中，流过铁电体为介质的电容的电流，含有丰富的谐波，故可制作倍频器；
- 铁电体同时也是压电体，可制作压电元件。

## 二、压电效应

某些离子型晶体的电介质，在晶体的一些特定方向上，若发生机械形变，能产生电极化现象，即在加力的两个相对面上出现异性电荷，称为压电效应。这种晶体叫做压电体。铁电体都是压电体，但压电体不一定是铁电体。

**应用：**

**压电晶体话筒：**声波作用，产生电信号；

**电唱头：**唱片中的音纹起伏，借助压电晶体转化为电信号。

## 二、电致伸缩效应

在一些晶体某个方向施加电场，晶体会发生形变，这种现象叫做电致伸缩效应。它是压电效应的逆效应。

**应用：**

扬声器：电信号转变为机械振动；

压电效应与电致伸缩结合，可制作晶体振荡器，其频率非常稳定。如石英晶体振荡器。

作业：

**P355 T8.49 T8.52**

# 本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 电容器储能
- 静电场的能量
- 铁电体与压电体

# 本章小结

## 一、静电场中的导体

### 1、静电平衡条件：

$\vec{E}_{内} = 0$（内部电荷无定向运动）

### 2、导体性质（静电平衡）

（1）电场：$\vec{E}_{内} = 0$，$E_{外} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，方向与表面正交

（2）电位：导体为等位体，其表面为等位面。

（3）电荷：只分布在表面上。曲率越大，电荷面密度越大。

## 3、导体空腔的性质：

### A、腔内无电荷：

（1）空腔的内表面不存在电荷；
（2）腔内无电场；
（3）腔内电位为常数。

### B、腔内有电荷：

（1）导体空腔的内表面上的电荷与腔内的电荷等值异号；
（2）腔内的电场与电位分布都由腔内电荷决定；
（3）腔内表面电荷分布与腔外情况无关，整个空间的电场和电位分布都受腔内电荷影响；
（4）将空腔外壁接地，腔外电场及电位分布不受腔内电荷影响。

# 二、静电场中的电介质

## 1、极化

位移极化（无极分子，有极分子）

取向极化（有极分子）

$$\vec{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \vec{P}_{分子}}{\Delta V}$$

$$\oiint \vec{P}\cdot d\vec{S}=-\sum q'(\text{曲面内部})$$

表面密度：$\sigma'=\vec{P}\cdot\hat{n}$（$\hat{n}$为表面外法线方向）

$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$（$\vec{E}'$为退极化电场，电极化电荷产生的电场，只能抵消部分外电场）

## 2、极化规律

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$ （各向同性电介质）

$\chi$叫电介质的电极化率，$\vec{E}$为总电场。若$\chi$与总电场无关，只由介质自身性质决定，则该电介质称为线性电介质。

## 3、高斯定理

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_f$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$ （普遍成立）

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$ （各向同性线性电介质）

# 三、电容

## 1、电容

$$C = \frac{Q}{U}$$

（电容只与自身的形状、尺寸、相对位置、极间介质有关。）

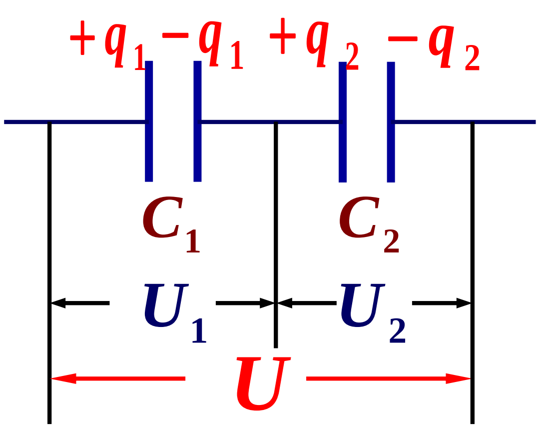
## 2、联接

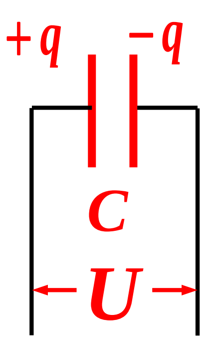
（1）串联：

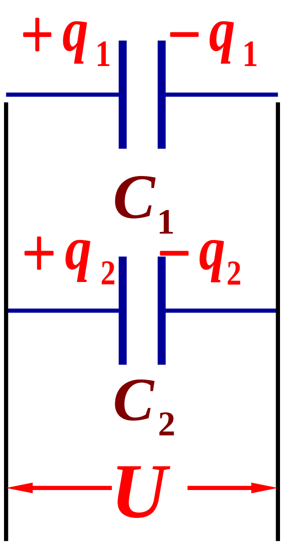
$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_{i=1}}$$

（2）并联：

$$C=\sum_{i=1}^{N}C_i$$



## 3、典型电容

（1）孤立导体球：$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R$

（2）平行板电容器：$C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$

（3）同心球形电容器：$C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

（4）同轴柱形电容器：$C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

# 四、电场能量

## 1、电容储能：$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$

## 2、电场能量密度：$w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

各向同性介质：$w=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$

真空：$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\ E^2$

## 3、电场能量计算

$$\iiint \omega dV=\frac{1}{2}\iiint \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\iiint E^2 dV$$