第二章 矩阵代数

第四节　转置矩阵和一些重要的方阵

§ 2.4.1转置矩阵

定义 设A是一个$m\times n$矩阵，若将A的行顺次改成列，所得$n\times m$矩阵称为A的**转置矩阵**. 记作A^{T}.

$$A=(a_{ij})_{m\times n}，\text{则 } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

A^{T}的(i, j)元$=A$的(j, i)元.

例如:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$;

(5) 若A为可逆矩阵，则$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$

关于(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$的证明

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则AB为$m\times s$矩阵，$(AB)^{\mathrm{T}}$为$s\times m$矩阵， 显然B^TA^T也为$s\times m$矩阵.

下面证明$(AB)^{\mathrm{T}}$与B^TA^T对应的元相等即可.

设 $C=AB=(c_{ij})_{m\times s}$, $A^T=(a'_{ij})_{n\times m}$, $B^T=(b'_{ij})_{s\times n}$,

$$C^T=(AB)^T=(c'_{ij})_{s\times m}, \quad D=B^TA^T=(d_{ij})_{s\times m}.$$

则 $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$, $\quad d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a'_{kj}b'_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$,

故 $c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}=d_{ij}$.

所以有$(AB)^{\mathrm{T}}= B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例1: 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求$(AB)^T$.

解法1: 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

所以 $(AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}$.

解法2:

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

例2 设A为n阶实矩阵，若$AA^{\mathrm{T}}=O$，试证明：$A=O$.

证明：设$A=(a_{ij})_n$，则

$$AA^T=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法可得AA^{T}的(i, i)元为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2, \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

而$AA^{\mathrm{T}}=O$，且A的元都为实数，故

$$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0,(i=1,2,\cdots,n)$$

从而$A=O$.

例3 设n阶矩阵A满足$AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|=-1$，证明矩阵$E+A$是退化的.

证明：(目标 $|E+A|=0$)

(不容易估计, 但若出现$|E+A|=-|E+A|$ 就有希望了.)

$$|E+A| = |AA^T + AE| = |A\,(A^T + E)| = |A|\,|\,(A^T + E)|$$

$$= -|\,(A^T + E)\,| = -|(A^T + E)^T\,| = -|\,A+E|$$

所以 $2|E+A|=0$

故$|E+A|=0$， 即矩阵$E+A$是退化的.

§ 2.4.2 几个重要的方阵

1. 对称矩阵

定义1 若实矩阵A满足$A^{T}=A$，则A称为对称矩阵.

由定义可知，对称矩阵为方阵.

例如 $A=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称阵.

说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

n阶方阵 $A=(a_{ij})$为对称矩阵$\Leftrightarrow$ $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

另例，若B是一个$m\times n$矩阵，则由于

$$(BB^T)^T=(B^T)^T B^T=BB^T$$

故BB^T为m阶对称矩阵．

2. 反对称矩阵

定义2 若实矩阵A满足$A^T=-A$，则A称为反对称矩阵.

由定义可知，反对称矩阵为方阵.

n阶方阵$A=(a_{ij})$为反对称矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij}=\begin{cases}-a_{ji}, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases}$

既为对称矩阵又为反对称矩阵的矩阵为零矩阵.

例1 证明奇数阶反对称矩阵的行列式必为0.

证: 由 $A^{\mathrm{T}}=-A$ 得

$$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|$$

当n为奇数时 $|A|=-|A|$，故$|A|=0$.

例2 若A为实对称矩阵，且$A^2=O$，证明$A=O$.

证：由于A为对称矩阵，故有$A^T=A$，所以$A^2=AA^{\mathrm{T}}$.

转化为前面的题目.

例3　设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足　$X^TX=1$, E 为 n 阶单位矩阵, $H=E-2XX^T$, 证明 H 是对称矩阵, 且 $HH^T=E$.

证明:　$\because H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-2\left(XX^T\right)^T$

$$=E-2XX^T=H,$$

$\therefore H$ 是对称矩阵.

$$HH^T=H^2=\left(E-2XX^T\right)^2$$

$$=E-4XX^T+4\left(XX^T\right)\left(XX^T\right)=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E.$$

例4 证明任一 n 阶矩阵 A 都可表示成对称阵与反对称阵之和.

证明 设 $C = A + A^T$

则 $C^T = \left(A + A^T\right)^T = A^T + A = C,$

所以C为对称矩阵.

设 $B = A - A^T$, 则 $B^T = \left(A - A^T\right)^T = A^T - A = -B,$

所以B为反对称矩阵.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2},$$ 命题得证.

3. 对角形矩阵

定义3 形如

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

的n阶矩阵称为对角形矩阵.

常记为 $D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，且$D$为对称矩阵.

对角形矩阵性质

设A、B为n阶对角形矩阵，k为实数，则$A+B$，kA，AB皆为对角形矩阵，且

$$AB = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n) \times diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$
$$= diag(a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n) = BA$$

$$A^m = diag(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m)$$ （m为自然数）

对角形矩阵可逆 ⇔ 它主对角线上元全不为零.

而且当A可逆时，

$$A^{-1} = diag(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$$

另外，

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \cdots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \cdots & d_ma_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \cdots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_na_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1a_{m1} & d_2a_{m2} & \cdots & d_na_{mn} \end{pmatrix}$$

4. 正交矩阵

定义4 若n阶实矩阵A满足$A^{T}A=E$，则A称为**正交矩阵**.

显然，正交矩阵为**可逆**矩阵.

正交矩阵性质 (课本71页)

(1) n阶矩阵A为正交矩阵的充要条件是 $A^T = A^{-1}$.

(2) n阶矩阵 $A=(a_{ij})$是正交矩阵的充要条件是等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

中**至少**有一个成立.

(3) A为正交矩阵，则$A^T = A^{-1}$也是正交矩阵 .

(4) A为正交矩阵，则A的行列式必为＋1或－1，
即 $|A|=\pm 1$.

(5) 若A、B为n阶正交矩阵，则AB（或BA）
也是正交矩阵.

例5 若A为n阶正交矩阵，试证A^*也是正交矩阵.

证:　由A为正交矩阵知A可逆，且$|A|^2=1$，又由

$AA^* = |A|E$ 有 $A^* = |A|A^{-1}$

故 $A^*(A^*)^T = (|A|A^{-1})(|A|A^{-1})^T = |A|^2 A^{-1}(A^{-1})^T$

$$= A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = E$$

因此A^*为正交矩阵.

例6 设A是n阶对称矩阵，T是n阶正交矩阵，试证$T^{-1}AT$为对称矩阵.

证: 由A为对称矩阵知$A^T=A$,

由T是n阶正交矩阵知$T^{-1}=T^T$,

故
$$
\begin{aligned}
(T^{-1}AT)^T &= T^T A^T (T^{-1})^T \\
&= T^{-1}A(T^T)^T \\
&= T^{-1}AT
\end{aligned}
$$

所以$T^{-1}AT$为对称矩阵.

5. 埃尔米特矩阵和酉矩阵(选学)

定义5 当$A=(a_{ij})$为复方矩时，用$\overline{a}_{ij}$表示a_{ij}的共轭复数，记$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$，$\overline{A}$称为$A$的**共轭矩阵**.

运算性质

（设A, B为复矩阵，λ为复数, 且运算都是可行的）

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;

(4) $\left|\overline{A}\right|=\overline{\left|A\right|}$

(5) $\overline{A^T}=(\overline{A})^T$

(6) 若A为可逆矩阵，则 $\overline{A}$ 也为可逆矩阵，且

$$(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$$

显然，当a_{ij}全为实数时，$\overline{A}=A$.

定义6 若矩阵A满足$A^T=\overline{A}$，称A为**埃尔米特矩阵**.

当A的元全为实数时，埃尔米特矩阵就是对称矩阵，**但一般的复对称矩阵并不是埃尔米特矩阵**.

埃尔米特矩阵主对角线上的元必为**实数**，且

$$a_{ij}=\overline{a}_{ji}$$

性质

- 两个同阶埃尔米特矩阵的**和（差）及实数乘**埃尔米特矩阵的结果仍为埃尔米特矩阵；
- 可逆的埃尔米特矩阵的逆矩阵**也是**埃尔米特矩阵；
- 埃尔米特矩阵的行列式必为**实数**.

定义7 若n阶矩阵A满足条件 $A^T=\overline{A^{-1}}$

则A称为酉矩阵.

(或 $A^{-1}=\overline{A^T}=(\overline{A})^T$，称为$A$的**共轭转置矩阵**)

显然，条件 $A^T=\overline{A^{-1}}$等价于条件 $A\overline{A^T}=\overline{A^T}A=E$.

设 $A=(a_{ij})_n$，利用上式可得酉矩阵满足条件

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\overline{a}_{jk}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

和

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

当酉矩阵的元都是实数时，酉矩阵就是**正交矩阵**.

关于酉矩阵结论

对应n阶酉矩阵A，B

- 转置矩阵A^{T}和逆矩阵A^{-1}都是酉矩阵；
- AB（或BA）是酉矩阵；（有限个同阶酉矩阵的乘积仍为酉矩阵）
- 酉矩阵的行列式（一般为复数）的模为1。

小 结

- 转置矩阵及其性质
- 对称矩阵 和反对称矩阵 及其性质
- 对角形矩阵 及其性质
- 正交矩阵 及其性质
- 两个重要的复矩阵——埃尔米特矩阵和酉矩阵 (选学)