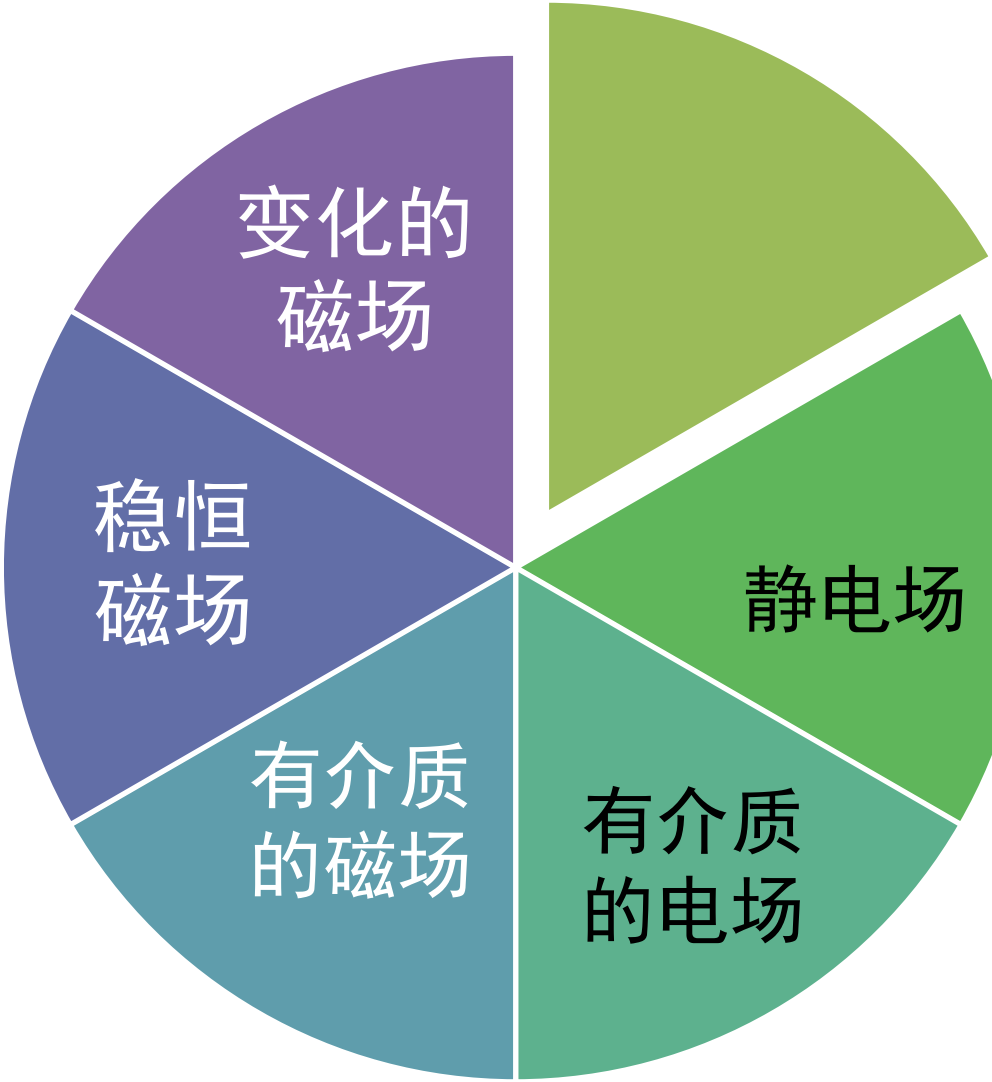
Maxwell电磁场方程组

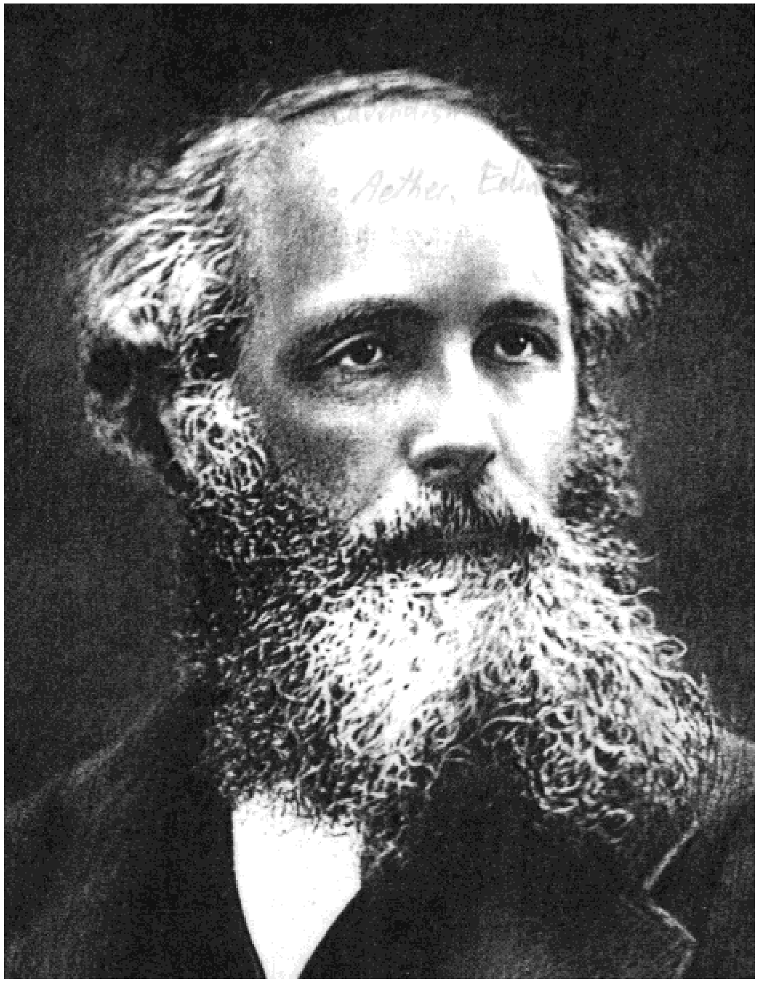


变化的磁场
静电场
稳恒磁场
有介质的磁场
有介质的电场

通过本次课的学习，您需要：

- 理解位移电流的物理意义；
- 会计算位移电流；
- 掌握麦克斯韦方程组的积分和微分形式。

麦克斯韦（1831－1879）英国物理学家



- 经典电磁理论的奠基人，统计物理学的论创始人之一.提出了有旋电场和位移电流的概念，建立了经典电磁理论，预言了以光速传播的电磁波的存在.
- 在统计物理学方面，提出了气体分子按速率分布的统计规律.

1865 年麦克斯韦在总结前人工作的基础上，提出完整的电磁场理论。

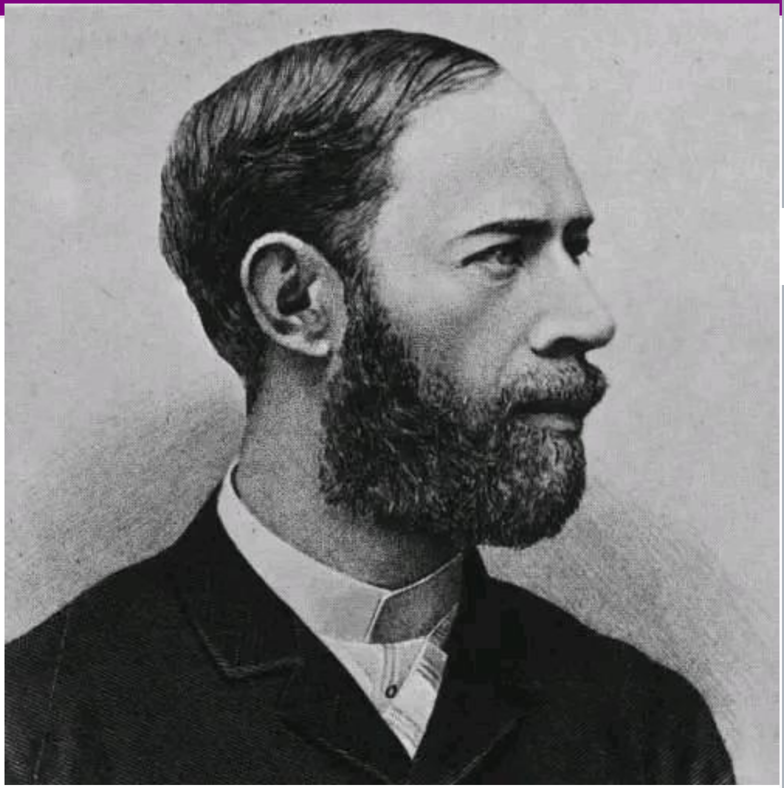
他的主要贡献是提出了“有旋电场”和“位移电流”两个假设，从而预言了电磁波的存在，并计算出电磁波的速度（即光速）.

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

（真空中）

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

（真空中 ）



海因里希·鲁道夫·赫兹　德国
1857–1894

1888 年赫兹的实验证实了他的预言，麦克斯韦理论奠定了经典电动力学的基础，为无线电技术和现代电子通讯技术发展开辟了广阔前景.

起初：电、磁无关。

1820年：奥斯特发现了电流的磁效应。（运动电荷可以产生磁场）

1831年：法拉第发现电磁感应定律。Maxwell提出变化的磁场可以产生电场——涡旋电场。

1865年：麦克斯韦提出，变化的电场可以产生磁场。预言了电磁波的存在，总结出了电磁场的基本方程（麦克斯韦电磁场方程组）——可解决所有宏观电磁场问题，计算出了电磁波传播速度等于光速。

1888年：赫兹用实验验证了电磁波的存在。

麦克斯韦电磁场方程组，由15个方程组成：

◆基本方程（4个积分形式，4个微分形式）——电磁普适方程。（对宏观电磁问题普遍适用）

◆物质方程（3个）——物性方程（反映电磁场与物质相互作用）

◆边界条件（4个）——（电磁场在边界上面的性质）

一、位移电流

- **传导电流及运流电流：**电荷宏观定向运动。
- **磁化电流：**分子电流有序排列的宏观表现。
- **位移电流：**电场随时间变化而产生的电流。

稳恒状态的安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f = \iint_s \vec{j}_0 \cdot d\vec{s}$$

I为穿过以闭合回路为边界的任意曲面S的传导电流

$$\iint_{s_1} \vec{j}_0 \cdot d\vec{s} = \iint_{s2} \vec{j}_0 \cdot d\vec{s}$$

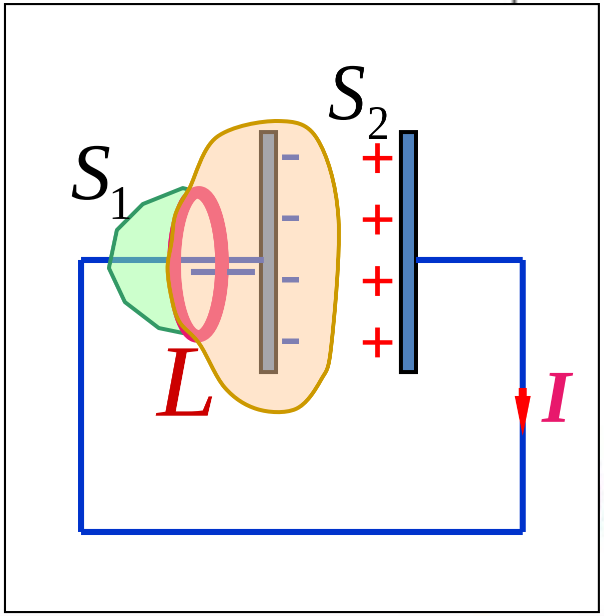
如果电流是非稳恒电流，情况如何？

非稳恒条件下：电容器充电/放电过程

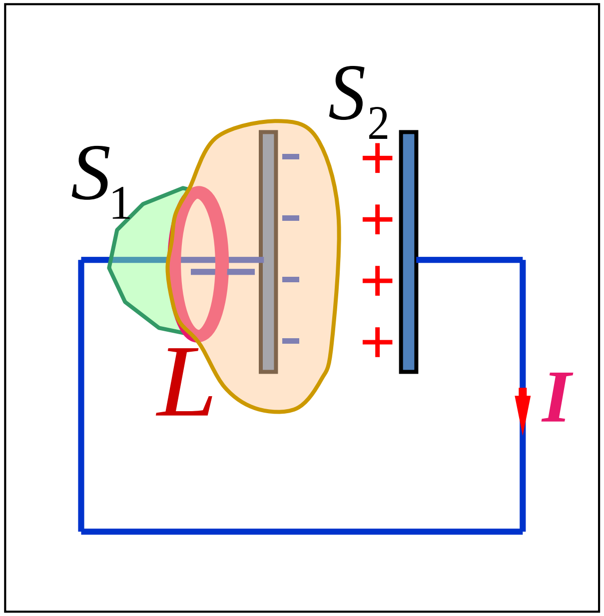
安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = i_f$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$



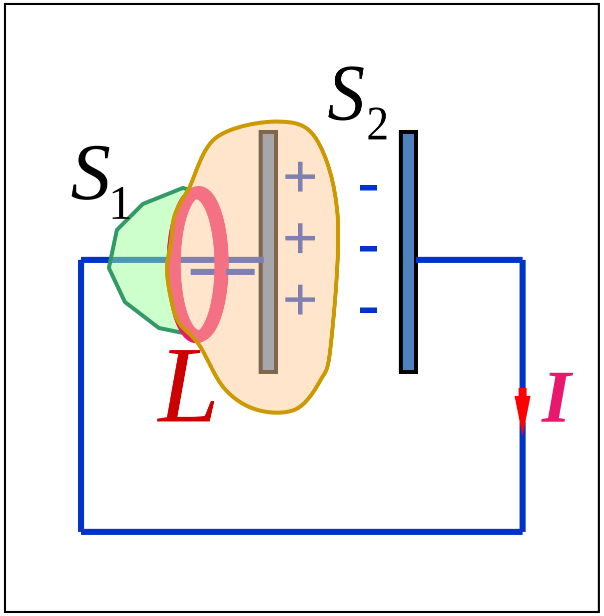
在非恒定电流产生的磁场中，安培环路定理用于不同的曲面，得到的结果不同！！！！



在两极板间有变化的电场，如果变化的电场能够产生电流，则前述的矛盾能够解决。

非恒定条件下电流的连续原理:

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_f}{dt}$$



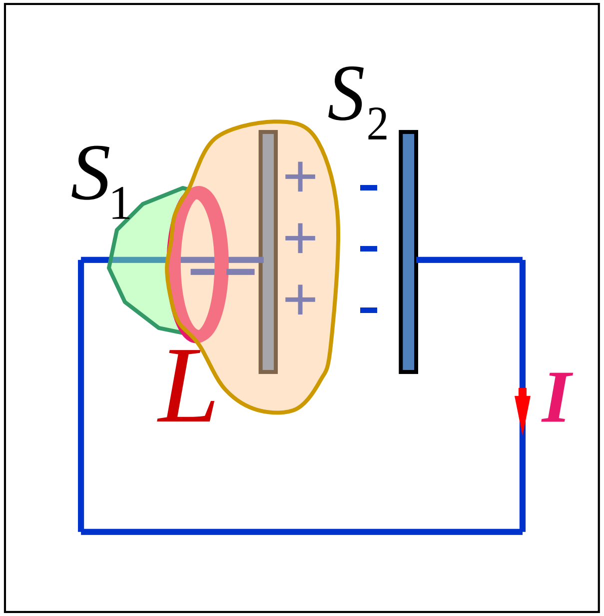
选S1和S2组成的高斯面，根据高斯定理:

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f$$

$$\frac{dq_f}{dt} = \frac{d}{dt}\oint\!\!\!\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = -\oint\!\!\!\oint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_s (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$$



$$\iint_{s1} (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \iint_{s2} (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

只要边界L相同，$(\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ 在不同曲面上的面积分相同

位移电流

$$i_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

位移电流为电位移矢量的通量对时间的变化率

位移电流密度矢量

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

位移电流密度矢量的方向与电位移矢量的方向和随时间变化规律有关

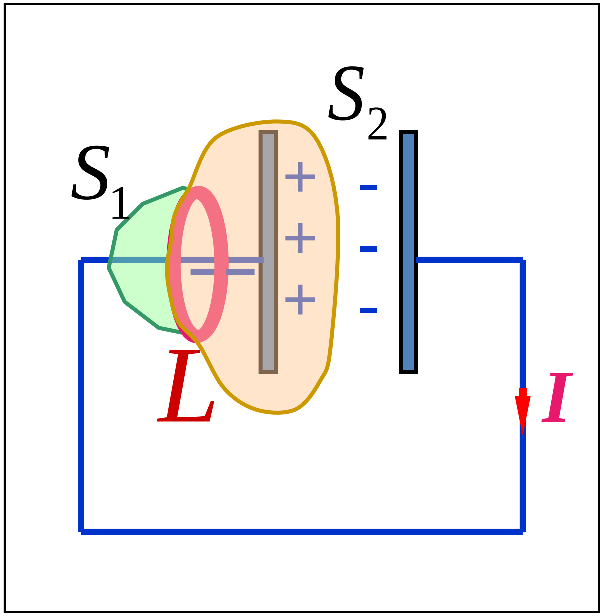
$$i_d = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$$

全电流密度： $\vec{j}=\vec{j}_f+\vec{j}_d$

适用于稳态和非稳态的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=i_f+i_d=\iint_S(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$$

S是以L为边界的任意曲面



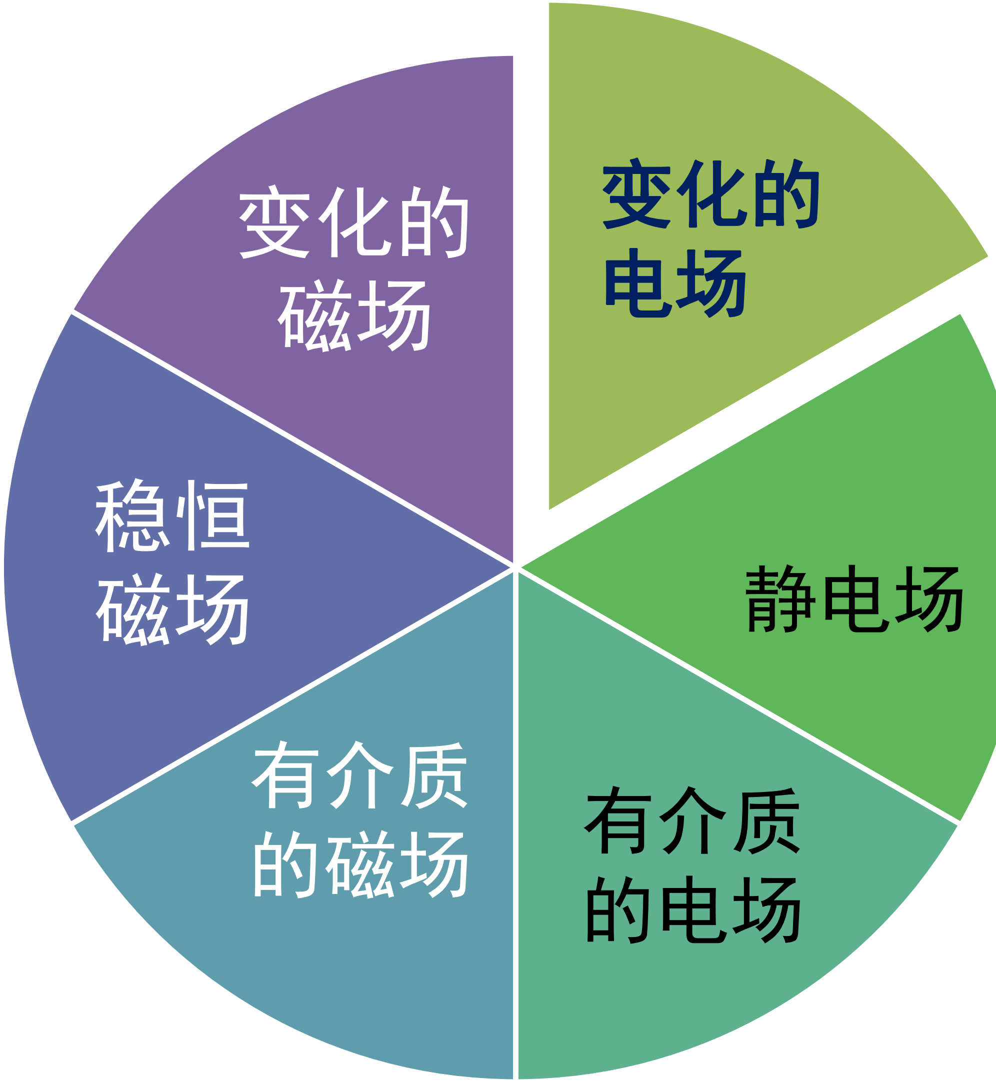
说明：

(1) 变化电场产生位移电流，位移电流会产生磁场。

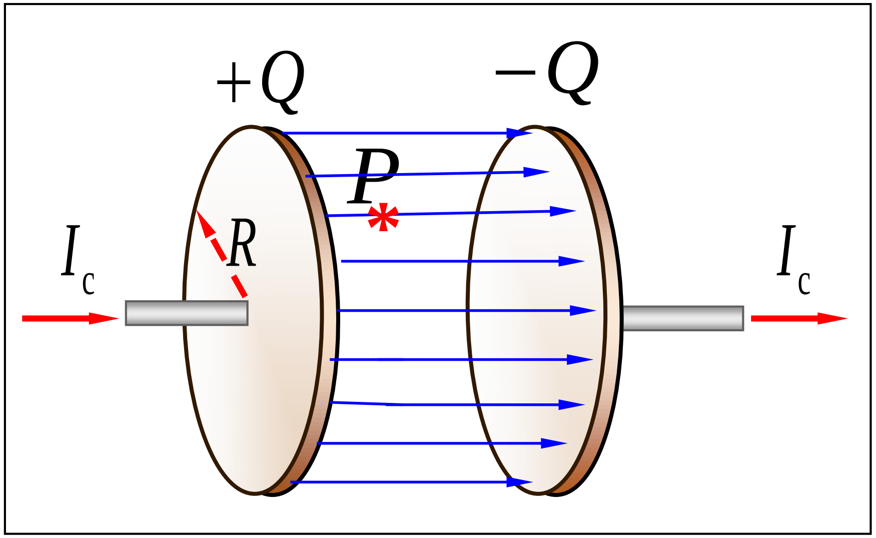
即：变化电场$\Leftrightarrow$变化磁场（相互转化、依存）

正因如此，才产生了电磁波。

(2) 传导电流产生焦耳热，位移电流不产生焦耳热.


变化的电场
静电场
有介质的电场
有介质的磁场
稳恒磁场
变化的磁场

例1　有一圆形平行平板电容器，$R = 3.0\ \mathrm{cm}$
现对其充电，使电路上的传导电流，$I_c = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 2.5\ \mathrm{A}$
若略去边缘效应：
求（1）两极板间距，平行于极板的半径为r的圆内通过的位移电流；（2）两极板间离开轴线的距离为 $r = 2.0\mathrm{cm}$ 的 P 点处的磁感强度．



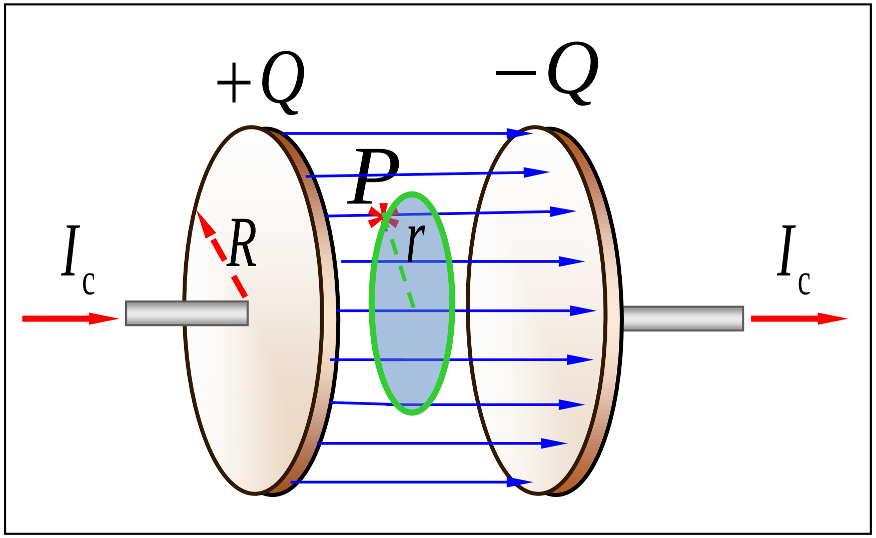
解 如图作一半径为 r 平行于极板的圆形回路，通过此圆面积的电位移通量为

$$\Psi = D(\pi r^2)$$

$$\because D = \sigma$$

$$\therefore \Psi = \frac{r^2}{R^2} Q$$

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$



$$\because \oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{c}} + I_{\mathrm{d}} = I_{\mathrm{d}}$$

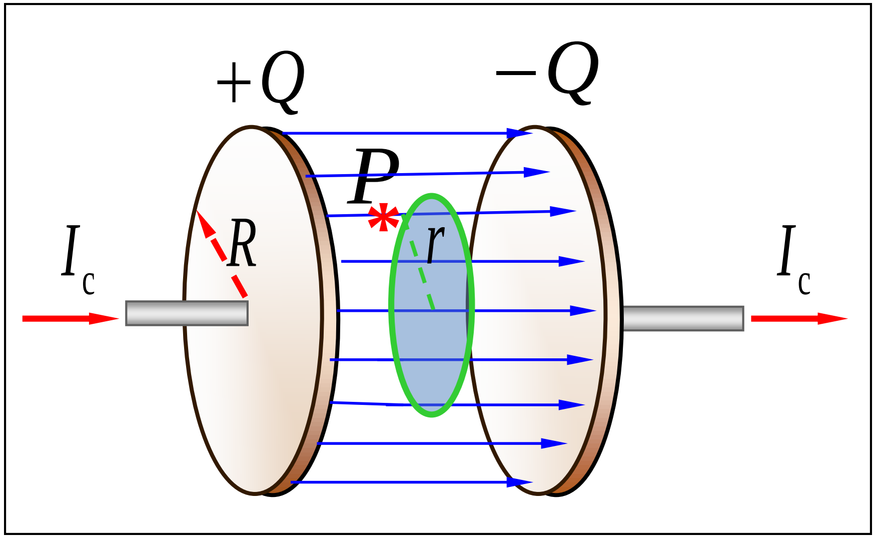
$$\therefore H(2\pi r) = \frac{r^2}{R^2} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

计算得 $H = \dfrac{r}{2\pi R^2} \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

代入数据计算得

$$B = 1.11 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$



二、普适方程积分形式

- 电场有两种：静电场、涡旋电场：

任意电场： $\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{涡}$ $\vec{D}=\vec{D}_{静}+\vec{D}_{涡}$

对于静电场： $\oint\!\!\!\oint \vec{D}_{静}\cdot d\vec{S}=q_f$

对于涡旋电场： $\oint\!\!\!\oint \vec{D}_{涡}\cdot d\vec{S}=0$

任意电场的电位移矢量对闭合曲面的通量等于闭合曲面所包围的自由电荷代数和。

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_f \text{ ——— } (1)$$

对于静电场： $\oint_L \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$

对于涡旋电场： $\oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

任意电场沿闭合环路的线积分，等于以环路为边界的任意曲面的磁通量随时间的变化率的负值

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{——(2)}$$

磁场：

- 对于任意磁场，不管是由传导电流、运流电流、磁化电流、还是位移电流产生的，其共同特点是磁力线总是闭合的，故有：

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{———} (3)$$

任意磁场对闭合曲面的磁通量都等于零

任意磁场的磁场强度矢量沿闭合环路的线积分等于穿过以环路为边界的任意曲面的传导电流和位移电流的代数和。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + I_D \text{———} (4)$$

$$I_D = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

S是以L为边界的曲面

麦克斯韦电磁场基本方程普适方程的积分形式

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \text{——} \quad (1)$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \text{——} \quad (2)$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \text{——} \quad (3)$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + I_D \text{——} \quad (4)$$

$$I_D = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \text{——} \quad (S\text{为以}L\text{为边界的曲面})$$

三、物性方程

- 物性方程描述的是物质的性质参数与电磁场物理量之间的关系。
- 对于一般物质有：

电介质： $\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}$——（5）

磁介质： $\vec{B}=\mu_o(\vec{H}+\vec{M})$——（6）

导体： $\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{K})$——（7）

四、边界条件

- 边界条件反映电、磁场在两种物质分界面上的性质。由前面介绍的内容可知：

$$(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\cdot\hat{n}=0 \text{——}\quad (8)$$

$$(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\times\hat{n}=0 \text{——}\quad (9)$$

条件：界面无传导电流和位移电流

$$(\vec{D}_2-\vec{D}_1)\cdot\hat{n}=0 \text{——}\quad (10)$$

条件：界面无自由电荷

$$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times\hat{n}=0 \text{——}\quad (11)$$

条件：界面无变化的磁场

- $\hat{n}$为从介质1指向介质2的界面法线方向单位矢量。

五、普适方程的微分形式

- 积分形式只能反映一定大小空间内各物理量的关系，而不能反应逐点的性质，为此研究其微分形式。
- **散度的定义：**

任一矢量$\vec{f}$，在空间中M点的散度定义为：

$$\nabla\cdot\vec{f}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\Delta S}\vec{f}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}\qquad\left(\begin{array}{l}\text{点}M\text{在}\Delta S\text{内，}\Delta V\\ \text{为}\Delta S\text{包围的体积}\end{array}\right)$$

反过来有：$$\oint\!\!\!\oint_S\vec{f}\cdot d\vec{S}=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{f})dV$$

V是S包围的体积

$$\therefore \quad \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{D})dV$$

S包围的自由电荷：

$$q_f = \iiint_V \rho_f dV$$ —（ρ_f为自由电荷密度）

由(1)式得：$$\iiint_V (\nabla\cdot\vec{D})dV = \iiint_V \rho_f dV$$

$$\therefore \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \text{ —— } (1)'$$

- 空间任一点的电位移矢量的散度等于该点自由电荷体密度。

• 旋度的定义：

任一矢量$\vec{f}$在M点的旋度定义为：

$$(\nabla\times\vec{f})_{\hat{n}}=\lim_{S\to 0}\frac{\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{l}}{S}$$

（旋度在S的法线方向$\hat{n}$的分量，点M在S内，S以L为界。）

斯托克斯定律：$\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{f})\cdot d\vec{S}$

$$\therefore\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

由(2)知： $$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

比较可得： $$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{——} \quad (2)'$$

- 空间任一点电场强度矢量的旋度等于该点磁感应强度矢量随时间变化率的负值。

用类似的方法可以得到：

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \text{——} (3)'$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \text{——} (4)'$$

$\vec{j}_f$为传导电流密度矢量。

- 空间任一点磁感应强度矢量的散度为0。
- 空间任一点磁场强度矢量的旋度等于该点传导电流密度与位移电流密度的矢量和。

普适方程的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \text{———} (1)'$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{———} (2)'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{———} (3)'$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{———} (4)'$$

- ⑴′ —（4)′ 式是麦克斯韦电磁场基本方程的微分形式。它比积分形式应用更广，故提到基本方程，通常指微分形式。

- 麦氏方程式对宏观电磁规律的高度概括。可用以确定任一时刻的电磁场分布情况，在实际当中，应用非常广泛。

本章小结：

掌握：位移电流的概念；

麦克斯韦电磁场方程组。

重点：普适方程（基本方程）的积分形式

及物理意义。

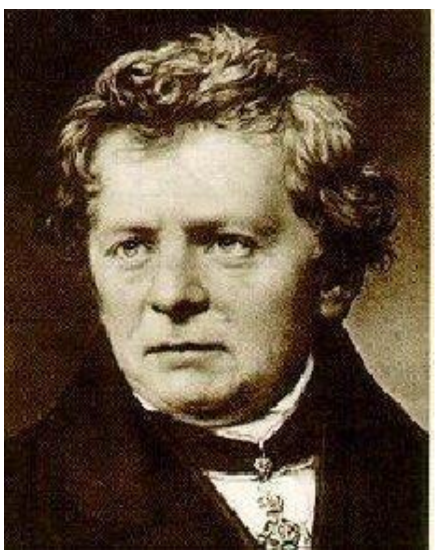
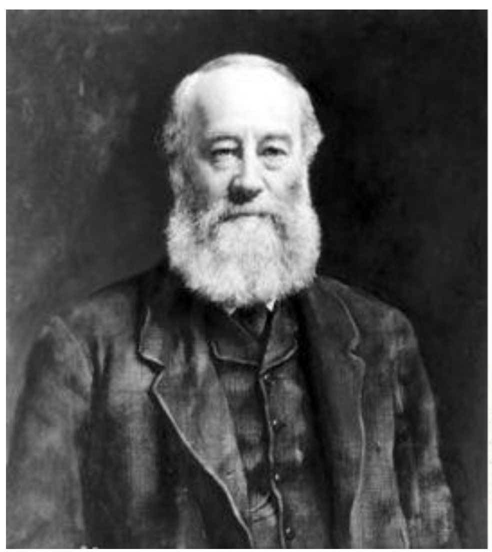
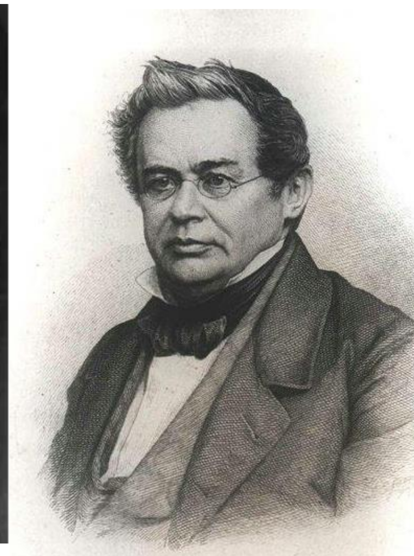
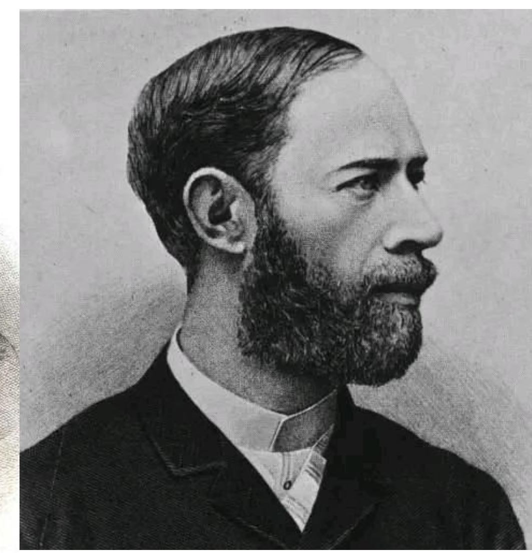
会当凌绝顶，一览众山小

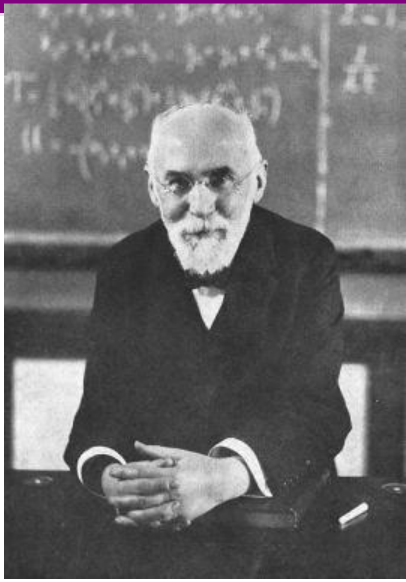
本模块的学习目标，您掌握了吗？

- 位移电流的物理意义是什么；
- 您会计算位移电流吗？
- 您掌握麦克斯韦方程组的积分和微分形式吗？



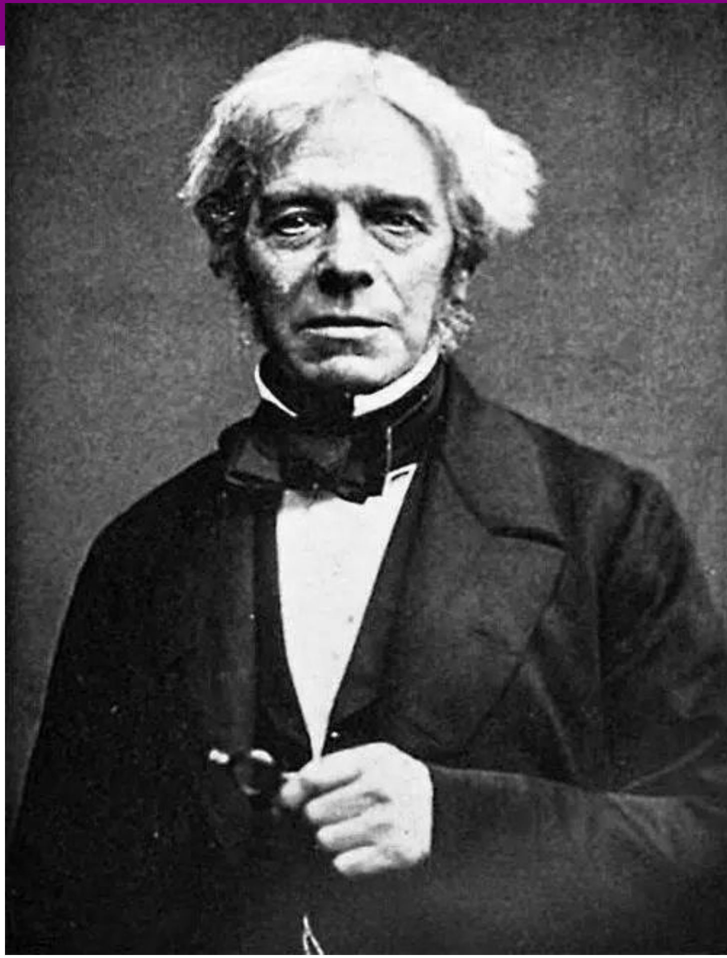


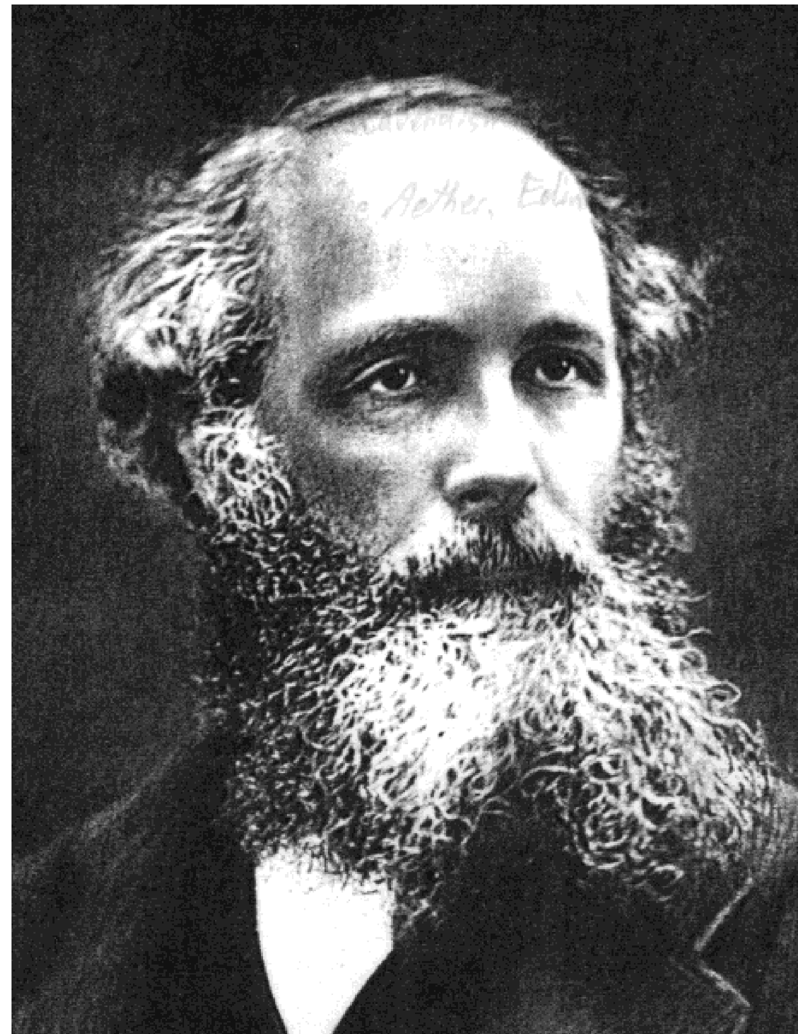













大学物理与高中物理的差别

1 应用高等数学和矢量来解决物理问题；

2 内容向纵深发展；

3 注重理论上的分析、推理、论证，较抽象；

模型的思想

微积分的思想

矢量的思想

祝同学们在未来的学习和生活中收获更多的成长！