第二章课后作业

截至日期：10月 日 点

总分: 100

*此封面页请勿删除，删除后将无法上传至试卷库，添加菜单栏任意题型即可制作试卷。本提示将在上传时自动隐藏。

主观题 10分 设置

一房间有 3 扇同样大小的窗子，其中只有一扇是打开的，有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出. 鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间. 假定鸟是没有记忆的，它飞向各扇窗子是随机的.

(1) 以 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 X 的分布律.

(2) 户主声称，他养的一只鸟是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次. 以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数. 如户主所说是确实的，试求 Y 的分布律.

(3) 求试飞次数 X 小于 Y 的概率和试飞次数 Y 小于 X 的概率.

答案

（1）本题的试飞次数是指记录鸟儿飞向窗子的次数加上最后飞离房间的一次，其分布律为：

$$P\{X=k\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)，k=1,2,\cdots。$$

（2）由题意Y的可能值为1，2，3。{Y=1}表明鸟儿从3扇窗子中选对了一扇，因对鸟儿而言，3扇窗是等可能被选取的，故$P\{Y=1\}=\frac{1}{3}$。{Y=2}表明第一次试飞失败（选错了窗子），失败方式有2，故第一次失败概率为$\frac{2}{3}$，第二次，鸟儿舍弃已飞过的那扇窗，而从余下的一开一关的两窗选一，成功机会为$\frac{1}{2}$，故$P\{Y=2\}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$。对有记忆鸟儿来说，$\sum_{i=1}^{3}P\{Y=i\}=1$，故$P\{Y=3\}=\frac{1}{3}$。即Y的分布律为$P\{Y=i\}=\frac{1}{3}$，i=1，2，3。

（3）（i）{X<Y}可分解为下列3个两两不相容的事件之和，即$\{X<Y\}=\{(X=1)\cap(Y=2)\}\cup\{(X=1)\cap(Y=3)\}\cup\{(X=2)\cap(Y=3)\}$，故$P\{X<Y\}=P\{(X=1)\cap(Y=2)\}+P\{(X=1)\cap(Y=3)\}+P\{(X=2)\cap(Y=3)\}$。因为两只鸟儿的行动是相互独立的，从而$P\{X<Y\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}+P\{X=1\}P\{Y=3\}+P\{X=2\}P\{Y=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$。

（ii）$P\{Y<X\}=1-P\{X<Y\}-P\{X=Y\}=1-\frac{8}{27}-\sum_{k=1}^{3}P\{(X=k)\cap(Y=k)\}=1-\frac{8}{27}-\sum_{k=1}^{3}P\{X=k\}P\{Y=k\}=1-\frac{8}{27}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}-\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{38}{81}$。

主观题 10分

设置

以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间（以分计），X 的分布函数是

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.4x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

求下述概率:

(1) P{至多 3 分钟}.

(2) P{至少 4 分钟}.

(3) P{3 分钟至 4 分钟之间}.

(4) P{至多 3 分钟或至少 4 分钟}.

(5) P{恰好 2.5 分钟}.

答案

（1）P{至多3分钟}=P{X≤ 3}=F_X（3）=1-$e^{-1.2}$。

（2）P{至少4分钟}=P{X≥4}=1-P{X<4}=1-P{X≤4}=1- F_X（4）= $e^{-1.6}$。（因为F_X（x）是指数分布随机变量X的分布函数，X是连续型随机变量，故P{X=4}=0，P{X<4}=P{X ≤4} ）

（3）P{3分钟至4分钟之间}=P{3 ≤X ≤4}=P{3<X ≤4}= F_X（4）- F_X（3）= $e^{-1.2}$- $e^{-1.6}$。

（4）P{至多3分钟或至少4分钟}=P{（X ≤ 3）∪（X ≥ 4）}= P{X ≤ 3} + P{X ≥ 4}=1- $e^{-1.2}$+ $e^{-1.6}$。

（5）P{恰好2.5分钟}=P{X=2.5}=0。

主观题 10分

设置

设 $f(x)$，$g(x)$ 都是概率密度函数，求证：

$h(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)g(x),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 也是一个概率密度函数.

答案

因为f，g都是概率密度函数，故有f(x)≥ 0，g(x) ≥ 0，且

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$， $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{g}(x)dx = 1$，现在0≤ $\alpha \leq 1$，故1-$\alpha \geq 0$，

由$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 有αf(x) ≥0，(1- α)g(x) ≥ 0，于是h(x) ≥ 0。

又由$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{g}(x)dx = 1$有

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}(x)dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \alpha + (1-\alpha) = 1$，所以h(x)是一个概率密度函数。

主观题 10分

设置

设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 服从均匀分布.

(1) 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

(2) 求 $Y = -2\ln X$ 的概率密度.

答案

X的概率密度为f(x)=$\begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$分别记X，Y的分布函数为$F_X(x), F_Y(y)$。

（1）先来求Y的分布函数$F_Y(y)$，因Y=$e^x > 0$，故当y≤0时，$F_Y(y)$=P{Y ≤y}=0，从而$f_Y(y)$=0。当y>0时，$F_Y(y)$=P{Y ≤y}=P{$e^x \le$ y}=P{X $\le \ln y$}= $F_X(\ln y)$。

将上式关于y求导，得$f_Y(y) = f_X(\ln y)\frac{1}{y} =$

$\begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y}, & 0 < \ln y < 1 \\ 0 & , \ln y < 0 \text{或} \ln y > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & 0 < y < 1 \text{或} y > e \end{cases}$，故有

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

（2）先来求$F_Y(y)$。当X在(0,1)取值时Y>0，故当y ≤0时，$F_Y(y)$=0，从而$f_Y(y)$=0。当y>0时，$F_Y(y)$=P{Y ≤y}=P{-2 $\ln X$ ≤y}=P{X≥ $e^{-\frac{y}{2}}$}=1-P{X< $e^{-\frac{y}{2}}$}=1- $F_X\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)$，

于是$f_Y(y)$=- $f_X\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

主观题 10分

设 X ~ N(0, 1).

(a) 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

(b) 求 $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度.

(c) 求 $Y = |X|$ 的概率密度.

答案

（1）因为Y=e^X，故Y不取负值，从而，若y<0，则$f_Y(y)=0$；若y>0，注意到X~$N(0,1)$，故Y的分布函数为

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$=P{0<Y≤y}=P{0<$e^X\le y$}=P{-∞$<X\le \ln y$}=$\phi(\ln y)$。

从而，y>0时，

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dx}\phi(x)|_{x=\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}\cdot\frac{1}{y}$$

于是，Y=e^X的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-(\ln y)^2/2}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）因Y=$2X^2+1$，故Y在[1,+∞)取值，从而y<1时$f_Y(y)=0$；若y≥1，注意到X~N(0,1)，故Y的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}$$

$$=\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-\phi\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=2\phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1$$

故y>1时，

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}\left[2\phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}-1\right)\right]=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y-1)/4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2(y-1)}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-(y-1)/4}$$

于是Y=$2X^2+1$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-(y-1)/4}, & y>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）对于Y=|X|，显然，当y<0时，$f_Y(y)=0$，当y≥ 0时，注意到X~N(0,1)，就有

$F_Y(y)=P\{0\le Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\phi(y)-\phi(-y)$
$=2\phi(y)-1$。

因此，y>0时，$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[2\phi(y)-1]=$

$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$，故Y=|X|的概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

设随机变量 X 的的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

求 $Y = e^X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

分别记 X,Y 的的分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$, 下面先求 $F_Y(y)$。

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)$$

因为 $Y=e^x>0$, 知当 $y\leq 0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $y>0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq lny)=F_X(lny)$。

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导得到

$$f_Y(y)=f_X(lny)(\frac{1}{y})=\frac{1}{\pi y(1+ln^2y)}$$

因此 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi y(1+ln^2y)}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

主观题 10分

设置

设随机变量X~N(0,σ^2)，问：当σ取何值时，X落入区间(1,3)的概率最大？(提示：最大值求解可利用极值和导数的关系求解)

因为 $X \sim N(0,\sigma^2)$,$P(1<X<3)=P(\frac{1}{\sigma}<\frac{X}{\sigma}<\frac{3}{\sigma})$

$$=\Phi(\frac{3}{\sigma})-\Phi(\frac{1}{\sigma})=g(\sigma)$$

利用微积分中求极值的方法，有

$$g'(\sigma)=(-\frac{3}{\sigma^2})\Phi'(\frac{3}{\sigma})+\frac{1}{\sigma^2}\Phi'(\frac{1}{\sigma})$$

$$=-\frac{3}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-9}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}}[1-3e^{\frac{-8}{2\sigma^2}}]=0$$

得

$$\sigma_0^2=\frac{4}{ln3},$$

则

$$\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{ln3}}$$

又 $g''(\sigma_0)<0$ 故 $\sigma_0<\frac{2}{\sqrt{ln3}}$ 为极大值点且唯一。

故当 $\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{ln3}}$ 时 X 落入区间 (1,3) 的概率最大。

主观题 10分

设置

某单位招聘 155 人，按考试成绩录用，共有 526 人报名，假设报名者的考试成绩 $X \sim N(\mu, \sigma 2)$. 已知 90 分以上的 12 人,60 分以下的 83 人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为 78 分，问此人能否被 录取?

本题中只知成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 但不知 μ, σ 的具体值是多少，

所以必须首先求出 μ 和 σ. 根据已知

$P\{X > 90\} = \frac{12}{526} \approx 0.0228, P\{X \le 90\} = 1 - P\{X > 90\} \approx 1 - 0.0228 = 0.9772,$

又因为

$$P\{X \le 90\} \overset{normalizing}{=} P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{90-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{90-\mu}{\sigma})$$

所以

$$\Phi(\frac{90-\mu}{\sigma}) = 0.9772$$

查标准正态分布表得

$$\frac{90-\mu}{\sigma} \approx 2.0①$$

又 $P\{X < 60\} = \frac{83}{526} \approx 0.1588$

$$P\{X < 60\} \overset{normalizing}{=} P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{60-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{60-\mu}{\sigma})$$

所以 $\Phi(\frac{60-\mu}{\sigma}) \approx 0.1588, \Phi(\frac{\mu-60}{\sigma}) \approx 1 - 0.1588 = 0.8412.$

查标准正态分布表得

$$\frac{\mu-60}{\sigma} \approx 1.0②$$

由 ①, ② 联立解出 $\sigma = 10, \mu = 70$, 所以 $X \sim N(70, 10^2)$

某人成绩 78 分，能否被录取，关键在于录取率，已知录取率为 $\frac{155}{526} \approx 0.2947.$

看是否能被录取，解 法有两种。

方法一：看 $P\{X > 78\} = ?$

$$P\{X > 78\} = 1 - P\{X \le 78\} = 1 - P\{\frac{X-70}{10} \le \frac{78-70}{10}\} = 1 - P\{X* \le 0.8\}$$
$$= 1 - \Phi(0.8) \approx 1 - 0.7881 = 0.2119$$

因为 0.2119<0.2947(录取率)，所以此人能被录取.

方法二：看录取分数线。设被录用者的最低分为 $x_0, P\{X \ge x_0\} = 0.2947$(录取率),

$$P\{X \le x_0\} = 1 - P\{X > x_0\} \approx 1 - 0.2947 = 0.7053,$$

而 $P\{X \le x_0\} = P\{\frac{X-70}{10} \le \frac{x_0-70}{10}\} = P\{X^* \le \frac{x_0-70}{10}\} = \Phi(\frac{x_0-70}{10}),$

所以 $\Phi(\frac{x_0-70}{10}) = 0.7053$. 查标准正态分布表得

$$\frac{x_0-70}{10} \approx 0.54$$

解 $x_0 = 75.$

某人成绩 78 分，在 75 分以上，所以能被录取。

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x(-\infty < x < +\infty).$$

试求：

(1) 系数 A 与 B.

(2) X 落在 $(-1, 1]$ 内的概率.

(1) 由于 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$, 可知

$$\begin{cases} A+B(-\frac{\pi}{2})=0 \\ A+B(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$$

于是 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctanx, -\infty<x<+\infty$

(2) $P\{-1<X\leq 1\}=F(1)-F(-1)$.

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctan1)-[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctan(-1)]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 分布函数为 F(x), 求下列随机变量 Y 的概率密度：

(1) $Y = \frac{1}{X}$.

(2) $Y = |X|$.

(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{1}{X}\le y\}$.

① 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{\frac{1}{X}\le 0\}+P\{0<\frac{1}{X}\le y\}$

$$=P\{X\le 0\}+P\{X\ge \frac{1}{y}\}=F(0)+1-F(\frac{1}{y}),$$

故

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=[-F(\frac{1}{y})]'=\frac{1}{y^2}f(\frac{1}{y})$$

② 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{\frac{1}{y}\le X<0\}=F(0)-F(\frac{1}{y})$ 故

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{y^2}f(\frac{1}{y})$$

③ 当 $y=0$ 时，$F_Y(y)=P\{\frac{1}{X}\le 0\}=P\{x<0\}=F(0)$

故这时取 $f_Y(0)=0$

综上所述，有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}\cdot f(\frac{1}{y}), & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

(2) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$.

① 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{-y\le X\le y\}=F(y)-F(-y)$,

这时 $f_Y(y)=f(y)+f(-y)$,

② 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{\phi\}=0$, 这时 $f_Y(y)=0$;

③ 当 $y=0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le 0\}=P\{|X|\le 0\}=P\{X=0\}$

$=0$, 故这时 $f_Y(y)=0$;

综上所述

$$f_Y(y)=\begin{cases}f(y)+f(-y) & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$