南開大學
Nankai University

上节课您印象深刻的是什么?

学习目标：

会求解运动学方程的第二类问题

已知速度或者加速度随时间的变化规律，

能否知道速度、位置矢量随时间的变化规律？

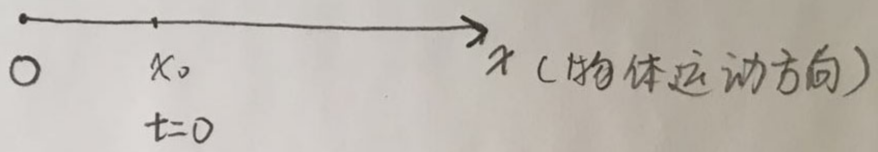
质点运动学第二类基本问题

- 已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，可求质点速度及其运动方程.

积分

南開大學
Nankai University

物体做以速度v做匀速直线运动，在t=0时刻，物体位于x0，请运用积分的方法求出该物体的运动学方程。



矢量：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

标量：$v=\dfrac{dx}{dt}$

$$dx=v\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t v\,dt$$

$$x-x_0=vt$$

$$x=vt+x_0$$

运动学方程：$\vec{r}=(vt+x_0)\vec{i}$

南開大學
Nankai University

物体做自由落体运动，在t=0时刻，物体位于0处，请运用积分的方法求：

（1）该物体速度随时间变化的规律；

（2）此物体的运动学方程；

（3）此物体速度与路程的关系；

O $t=0,\ y_0=0,\ v_0=0$

竖直向下 $y\ (\vec{j})$

矢量：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

标量：$g=\dfrac{dv}{dt}$

$$dv=g\,dt$$

$$\int_0^v dv=\int_0^t g\,dt$$

$$\underline{\underline{v=gt}}$$

$$v=\frac{dy}{dt}$$

$$gt=\frac{dy}{dt}$$

$$dy=gt\,dt$$

$$\int_0^y dy=\int_0^t gt\,dt$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

运动学方程：

$$\vec{r}=\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

O

$t=0,\ y_0=0,\ v_0=0$

竖直向下: y $(\vec{j})$

矢量: $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

标量: $g=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}$

$\therefore\ v\,dv=g\,dy$

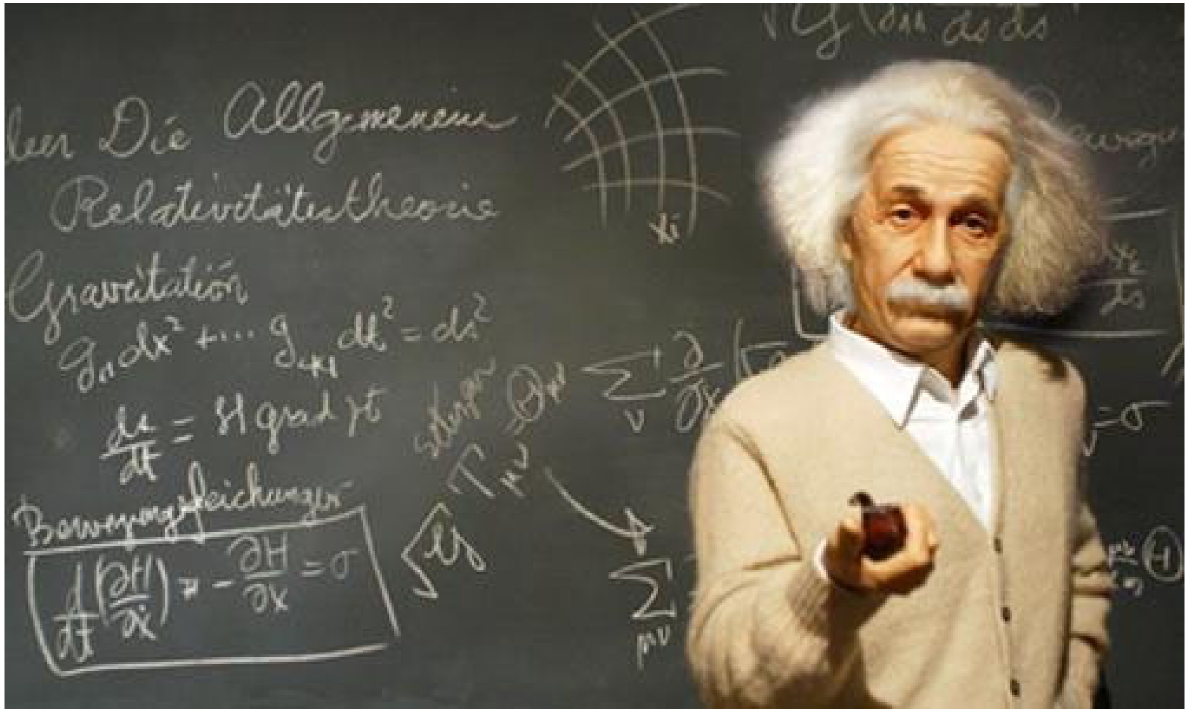
$$\int_{v_0}^{v} v\,dv=\int_{y_0}^{y} g\,dy$$

$$v^2-v_0^2=2g(y-y_0)$$

当 $y_0=0,\ v_0=0$ 时:

$$v^2=2gy$$

杀鸡用牛刀？？？



牛刀当然是用来杀牛的！！！

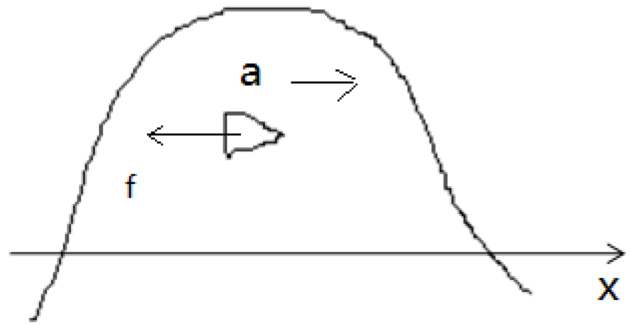
一质量为m的子弹射入沙堆。设子弹在沙堆中受到的阻力的大小与子弹的速度成正比，比例系数为k，　若子弹进入沙堆前的速度为v0，忽略子弹所受的重力，　求在沙堆中前进时，子弹的速度随时间的变化规律。

变加速度问题!

解：选择子弹进入沙堆的位置为坐标原点，子弹前进方向为正方向，建立一维坐标系

$$t = 0, v = v_0$$

$$a = \frac{-kv}{m}$$



$$\frac{-kv}{m} = \frac{dv}{dt}$$

x

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v} dv = \int_0^t -\frac{k}{m} dt \qquad \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

必看

教课书P24, 例 1.10 和 1.11。

采用积分解决运动学问题

微积分的数学工具，使我们能够解决更为一般的物理问题。

您能求解运动学方程的第二类问题吗？

Nankai University

- 例1：

质点直线运动方程为 $x = 3\,sin\,\frac{\pi}{6}t$ ，求：

a）什么时刻x=0？什么时刻位移最大？

b）最大、最小速率时的位置；

c）最大、最小加速度时的位置；

解： x=0时位移最小

$$3\sin\frac{\pi}{6}t=0$$

$$\frac{\pi}{6}t=k\pi$$

$$t=6k$$

当 t=0、6、12…. 时，x=0

x=±1时，位移最大

$$\frac{\pi}{6}t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$t=3(2k+1)$$

当t=3、9、15…时，位移最大

b）速度： $$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{6}t$$

速率最小时： $$\frac{\pi}{6}t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$t=3(2k+1)$$

此时x最大，为±3

速率最大时： $$\frac{\pi}{6}t=2k\frac{\pi}{2}$$

$$t=6k$$

此时x最小，为0

c）加速度：

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{12}sin\frac{\pi}{6}t$$

加速度最大时： $\sin\frac{\pi}{6}t=\pm 1,\quad |a|=\frac{\pi^2}{12},$

$$x=\pm 3$$

加速度最小时： $\sin\frac{\pi}{6}t=0,\quad |a|=0$

$$x=0$$

c) $a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{12}sin\frac{\pi}{6}t$

|a|最大： $\sin\frac{\pi}{6}t=\pm1$， $|a|=\frac{\pi^2}{12}$， $x=\pm3$

|a|最小： $\sin\frac{\pi}{6}t=0$， $|a|=0$， $x=0$

- 斜抛运动的情况，同学们可运用所学知识自行推导。

抛物运动

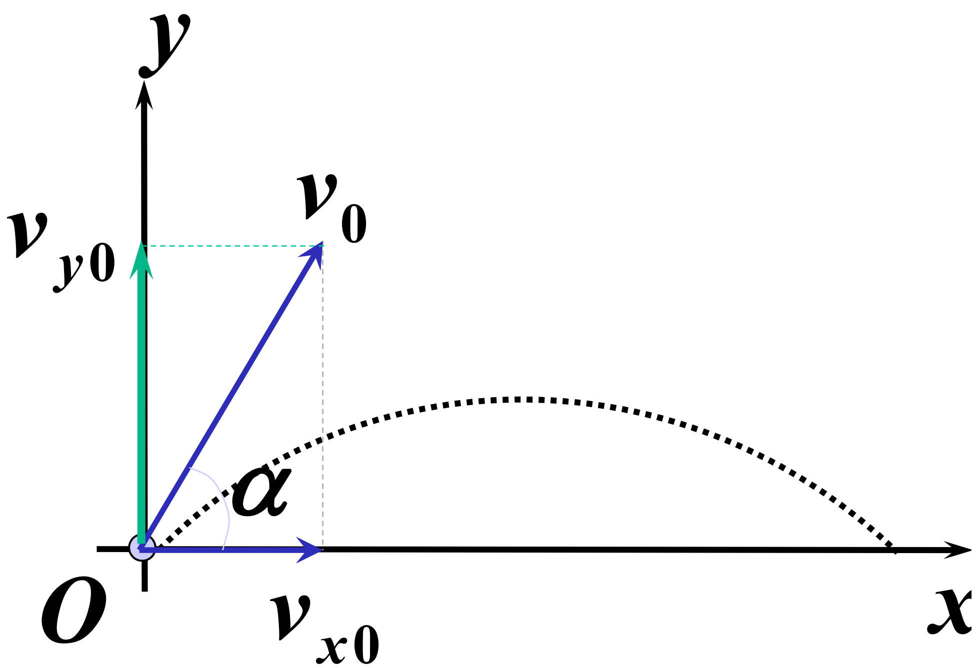
抛物运动：从地上基点把一物体以某一角度投射出去，如忽略空气阻力，物体在空中的运动。

a. x、y方向是直线运动

b. 运动方程：

x=x(t)

y=y(t)



□ 在x，y方向上，分别可直接应用直线运动的结论：

✓X方向： $a_x = 0$ 匀速直线运动

初始条件： $t = 0$时$, x = 0, v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$

$$a_y = -g$$

✓Y方向：匀变速运动

初始条件： $t = 0$时$, y = 0, v_{y_0} = v_0 \sin \alpha$

求： 抛物运动的速度方程、运动方程、飞行时间、射程、射高、轨迹方程

速度方程：

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

运动方程：

$$\begin{cases} \mathrm{x} = v_0 \cos\alpha \bullet t \\ \mathrm{y} = v_0 \sin\alpha \bullet t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

南開大學 Nankai University

以上是四个基本方程，由此可得：

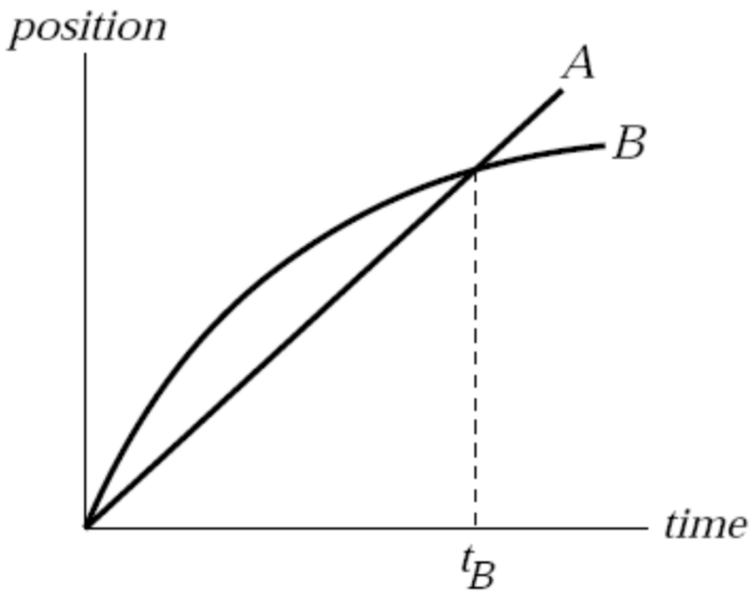
✓ 飞行时间 $T = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

✓ 射程 $X = \dfrac{v_0^{\ 2} \sin 2\alpha}{g}$

✓ 射高 $Y = \dfrac{v_0^{\ 2} \sin^2\alpha}{2g}$

轨迹方程 $y = x \cdot tg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$

- 重点掌握4个基本方程（由具体情况而定），其他可由各点的特性推出。



- 平均速度：$\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

- 平均加速度：$\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

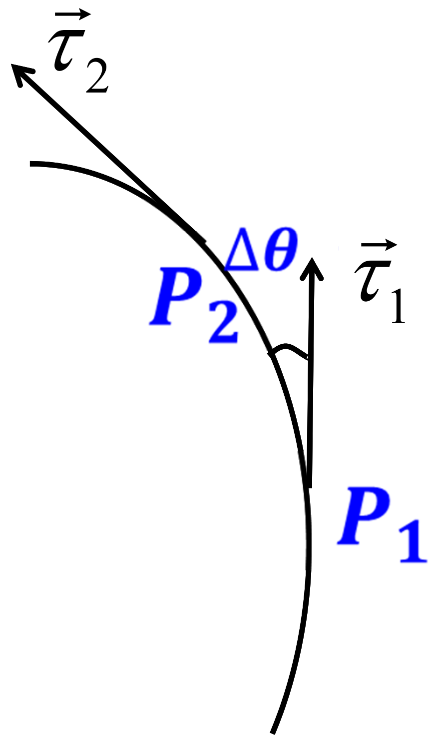
§2. 曲线（圆周）运动

南開大學 Nankai University

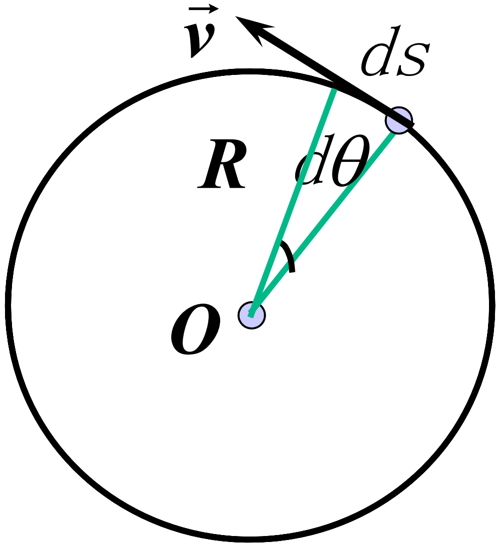
通过本次课的学习，您将学会：

- 自然坐标系，自然坐标系下的速度，加速度；
- 圆周运动的角量表述；
- 相对运动的矢量表示

平均曲率：$\bar{k} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 叫做 P_1和P_2间曲线平均曲率。

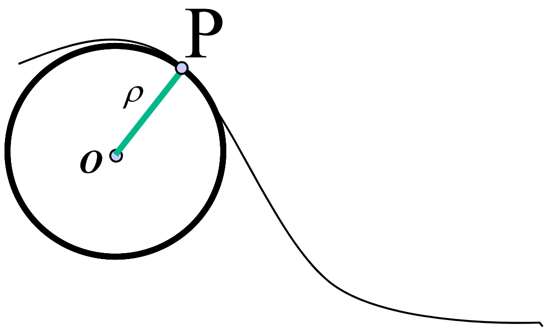


P1点的曲率：$k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s} = \dfrac{d\theta}{ds}$



■圆周的曲率：

$$ds = Rd\theta, \quad k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$$



■ 曲线上任意一点的曲率：

$$k = \frac{1}{\rho}$$

南開大學
Nankai University

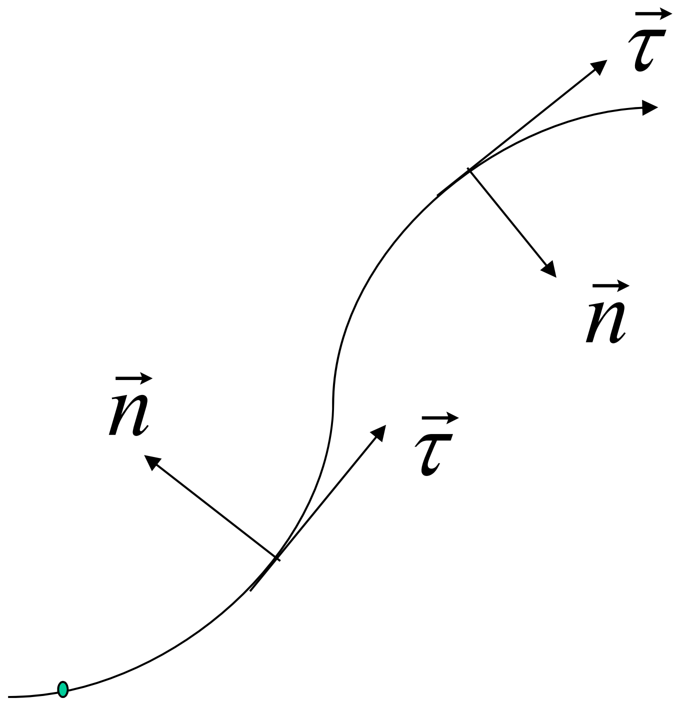
匀速率圆周运动我们通常怎么描述？

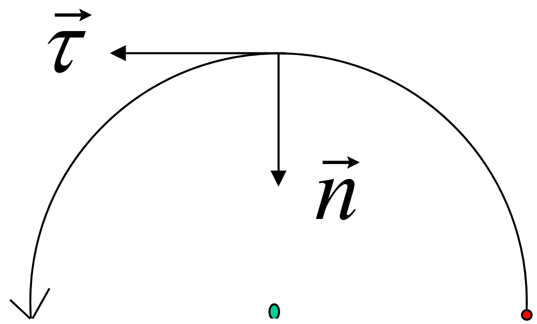
曲线运动的表征

自然坐标系、速度、
切向加速度、法向加速度

描述曲线运动所用的坐标系：自然坐标系。

在质点运动轨道上取任一点作为坐标原点o，在运动质点上沿轨道的切线和法线方向建立两个互相垂直的坐标轴。切向坐标轴的方向指向质点前进的方向，法线坐标轴的方向指向曲线的凹侧。

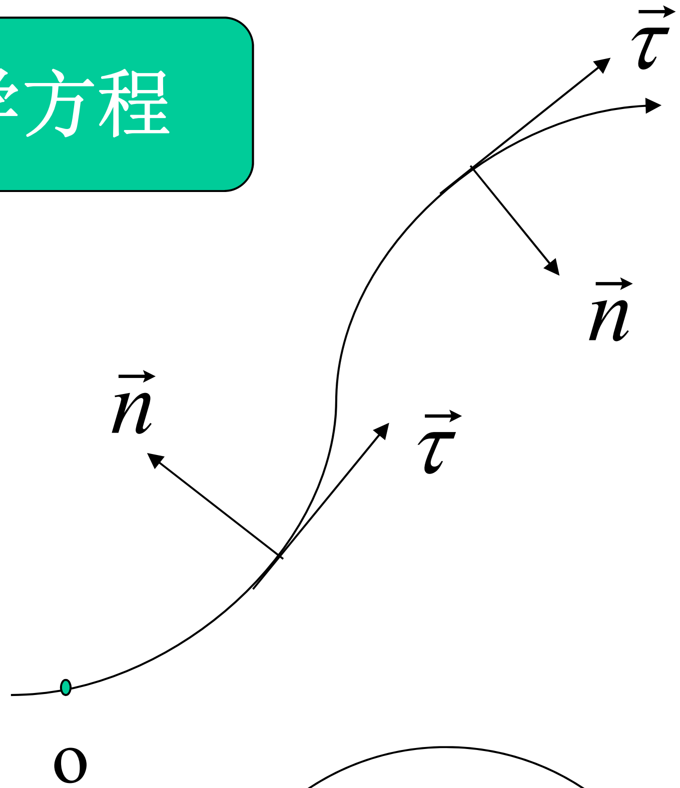




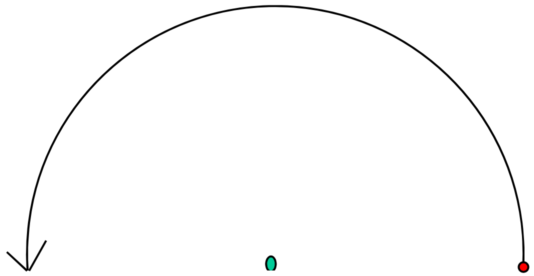
运动轨迹为圆时
的自然坐标系

在自然坐标系下质点的运动学方程

$$s = f(t)$$

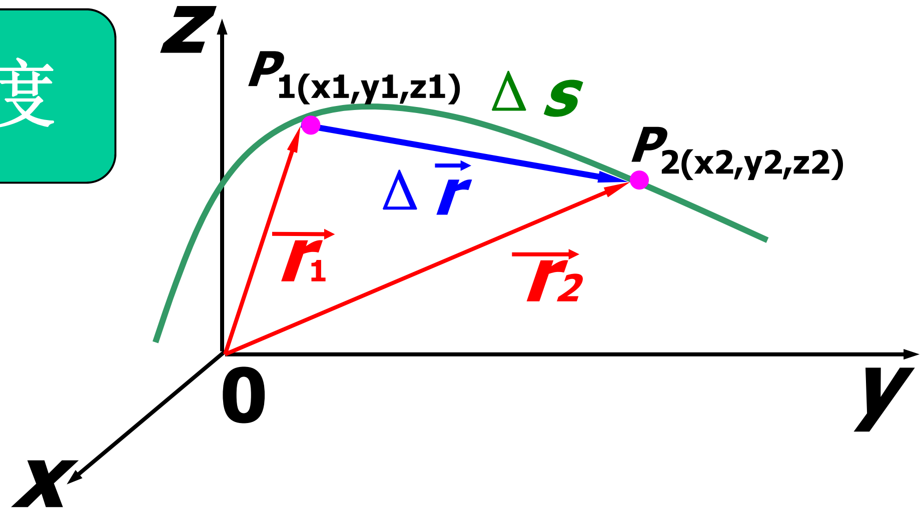


$$s = f(t)$$



运动轨迹为圆时的自然坐标系

在自然坐标系下的质点的速度



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

大小： $$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

方向： 曲线的切线，指向质点的运动方向。

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$

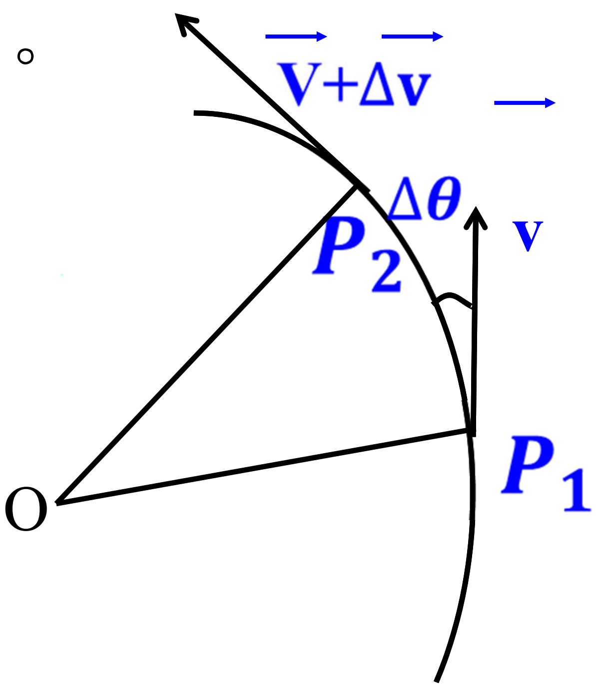
在自然坐标系下的质点的加速度

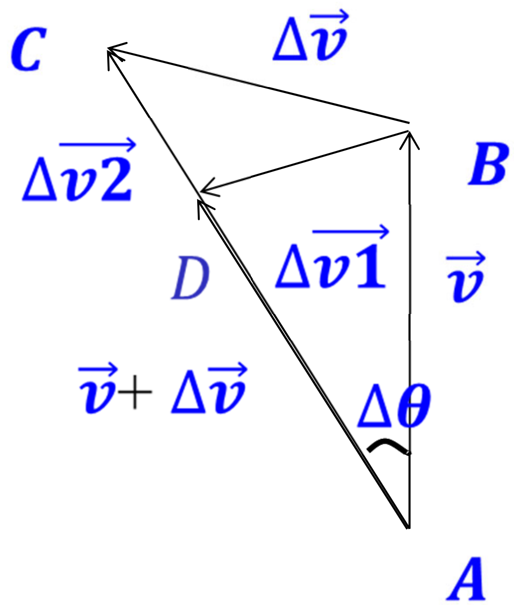
如图： $AB = AD$, $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2$

$\Delta\vec{v}_1$ 反映了速度方向的改变，$\Delta\vec{v}_2$反映了速度数值的改变。

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta\theta \to 0, \angle ABD \to \dfrac{\pi}{2}$ 在极限情况下，$\Delta\vec{v}_1 \perp \vec{v}$

即$\Delta\vec{v}_1$沿P_1点的法线方向，指向曲率中心。$\Delta\vec{v}_2$沿P_1点的切线方向。

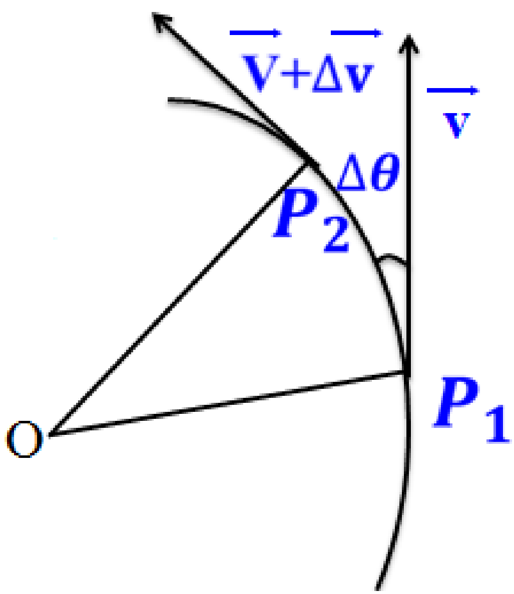


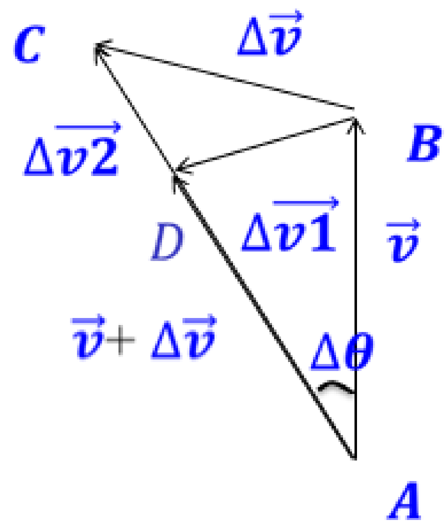


∴加速度： $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$: $\Delta \vec{\mathrm{v}}_1 = v \Delta \theta \vec{n}, \quad \Delta \vec{\mathrm{v}}_2 = \Delta v \vec{\tau}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \vec{n} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{\tau} = v \frac{d\theta}{dt} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$$





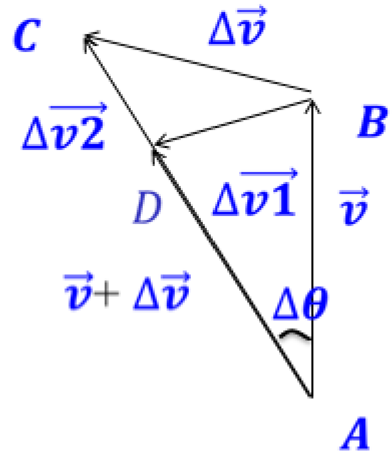
$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0} v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\vec{\tau}=v\frac{d\theta}{dt}\vec{n}+\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \qquad \frac{ds}{dt}=v \qquad \frac{d\theta}{ds}=k=\frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}}$$

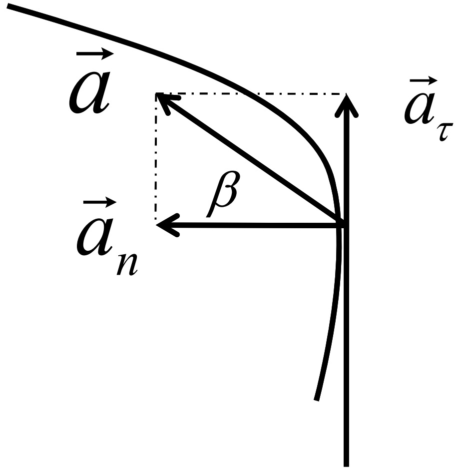
$$\vec{a}_\tau=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$ ——速率变化

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$ ——方向变化



加速度的数值为： $a = \sqrt{(\frac{dv}{dt})^2 + (\frac{v^2}{\rho})^2}$

方向： $tg\beta = \frac{a_\tau}{a_n}$



a_τ 正，$\vec{a}_\tau$ 与 $\vec{v}$ 同向，速率增大
负，$\vec{a}_\tau$ 与 $\vec{v}$ 反向，速率减小
0， 匀速曲线运动

a_n 正，方向指向曲率中心
0，$\rho \to \infty$，即直线运动，$\vec{a} = \vec{a}_\tau$

$\vec{a}_\tau$ 与 $\vec{a}_n$ 这两个分量与固定坐标系无关，常常叫做自然坐标系的分量。

例： 一个质点在oxy平面运动的运动学方程为：

$$x = 6t, y = 4t^2 - 8$$

则t=1s时，质点的切向加速度和法向加速分别为多少？

例： 一个质点在oxy平面运动的运动学方程为：

$$x = 6t, y = 4t^2 - 8$$

则t=1s时，质点的切向加速度和法向加速分别为多少？

解：

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6, v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36 + 64t^2}$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(36 + 64t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 128 \cdot t \Big|_{t=1} = 6.4 m/s^2$$

南開大學 Nankai University

法切向加速度

$$y = 4\left(\frac{x}{6}\right)^2 - 8 = \frac{x^2}{9} - 8$$

$$y' = \frac{2x}{9} = \frac{2(6t)}{9} = \frac{4t}{3}$$

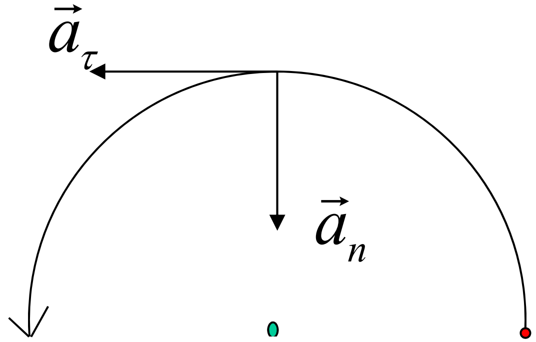
$$y'' = \frac{2}{9}$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = kv^2\Big|_{t=1} = 4.8\,m/s^2$$

2、圆周运动的加速度

圆周运动：轨迹为圆周的运动叫圆周运动。



- 切向加速度：$a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ ，方向总是切线方向。
- 法向加速度：$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ ，方向总是指向圆心——向心加速度。

$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau}_0 + a_n \vec{n}_0$ ，方向偏向圆心。

对于匀速（率）圆周运动

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

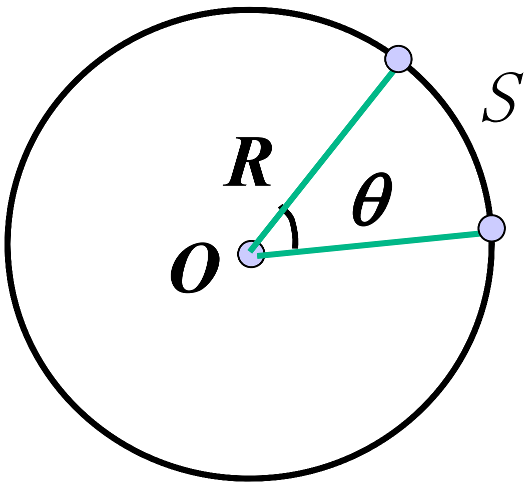
$$a = a_n = \frac{v^2}{R}$$

只有向心加速度。

3、圆周运动的角量表示：

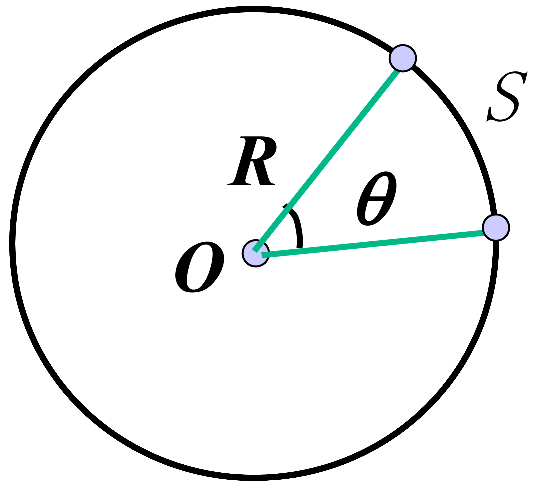
圆周运动线量表示：

$$s,\vec{v},\vec{a}(\vec{a}_n,\vec{a}_\tau)$$



圆周运动角量表示：

θ, ω, α



θ 角位移

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ 角速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ 角加速度

Nankai University

角量和线量的关系

$$S = R\theta$$

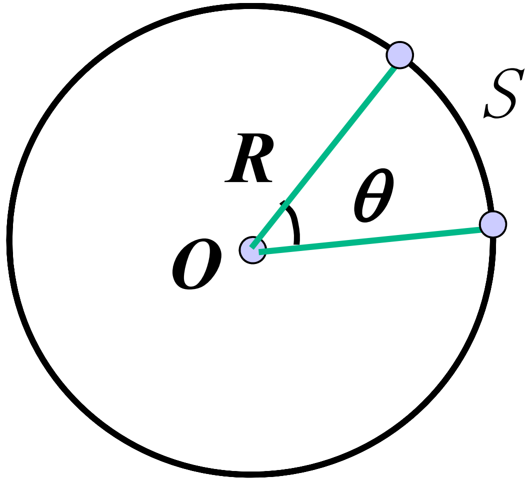
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$v = R\omega$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_\tau = R\alpha, a_n = R\omega^2$$



对于匀速（率）圆周运动

$$t=0,\theta_0=0 \qquad \theta=\omega t$$

$$a_\tau=0, a_n=R\omega^2$$

匀变速率圆周运动： $\alpha=C$

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

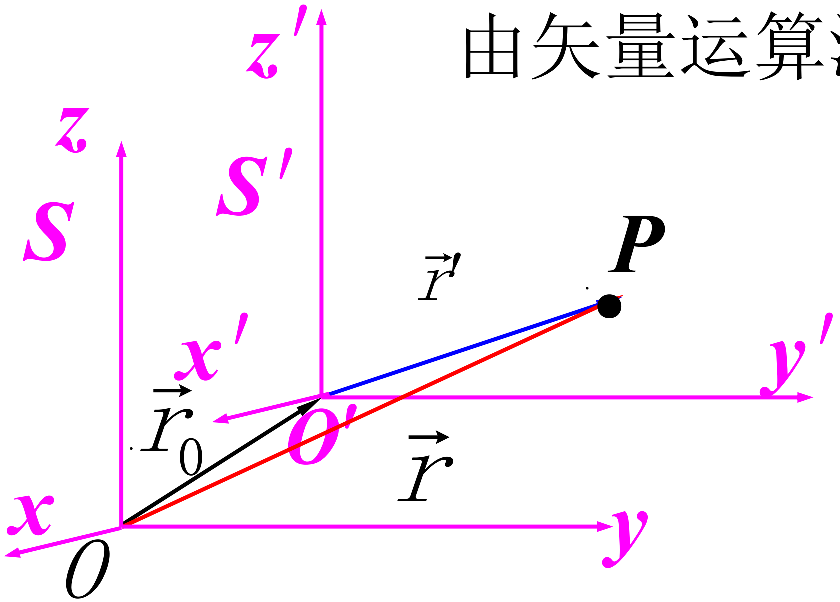
$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\left(\theta-\theta_0\right)$$

注意：ω、θ、α也可看做矢量，遵从右手定则。

§3. 不同参照系中速度加速度的变换

设两个参考系有相对运动，即S'相对于S以速度 $\vec{v}_0$ 平动的情形，考察质点P的运动。



由矢量运算法则有：$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'}$

$\vec{r}_0$是S'相对于S的位矢。

两边对时间微商：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}'}$$

$\vec{v}$ ——绝对速度，是P相对于静止参照系S的速度

$\vec{v}_0$ ——牵连速度，是 S’ 相对于S的速度

$\vec{v}'$ ——相对速度，是P相对于运动参照系 S’ 的速度

两边再对时间微商：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$$

$\vec{a}$ ——绝对加速度

$\vec{a}_0$ ——牵连加速度

$\vec{a}'$ ——相对加速度

投票 最多可选1项

设置

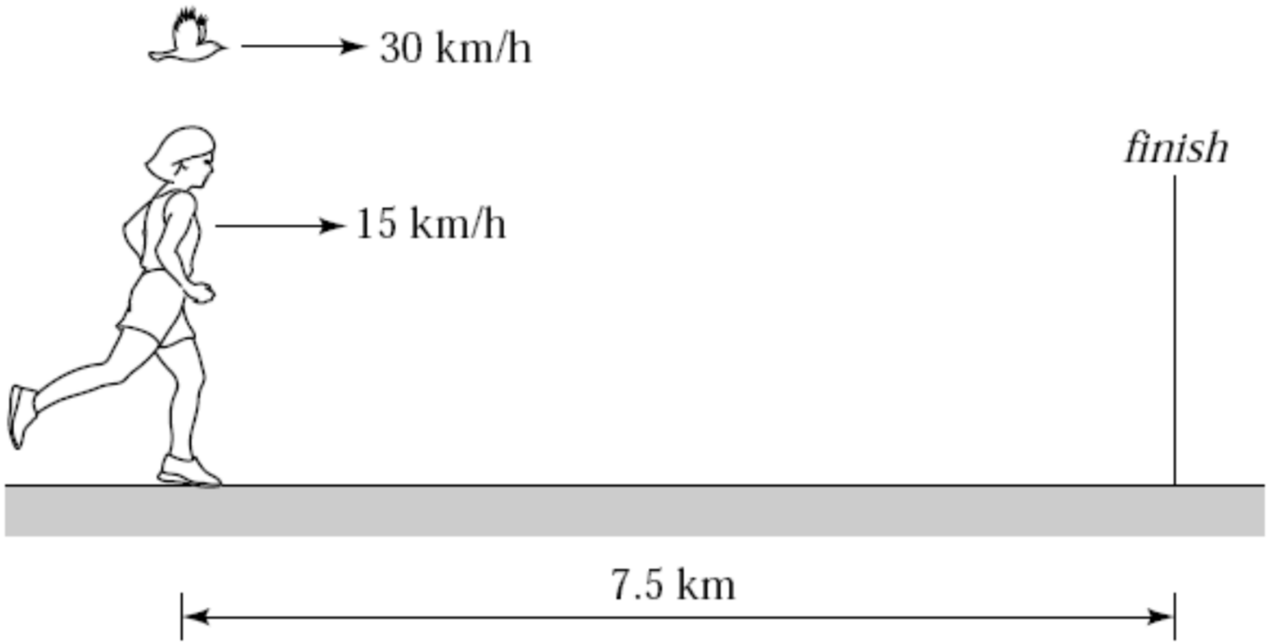
一个马拉松选手以15km/hr的速度前进。当选手距离终点7.5 km时，一个小鸟从选手位置以30km/hr的速度飞向终点。当小鸟达到终点后，又飞回选手处，然后又飞回终点，如此往复，直到选手到达终点。在这个过程中，小鸟飞行了多少距离？

A 10 km

B 15 km

C 20km

D 30km



提交

投票 最多可选1项

设置

竖直上抛一个球，球在重力的作用下减速。假设（*a*）我们录下了这个球的运动，并且倒带播放（视频从球到达最高点后开始播放，播放到球回到出发点的时刻）；（*b*）我们从一个向上匀速直线运动的参照系中观察，参照系的速度与球抛出的时的速大小相同。那么，在哪个坐标下，具有向下的加速度g？

A (*a*) 和 (*b*).

B 只有(*a*).

C 只有(*b*).

D 既不是(*a*) 也不是(*b*).

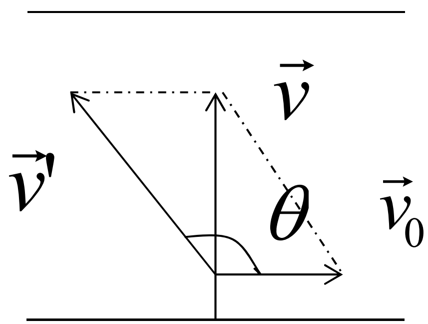
提交

例:
在河水流速2m/s的地方有一小船渡河。如果希望小船以4m/s的速度垂直于河岸横渡，问小船上的指示速率应为多大，船头应指向何方?

解：

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$



$$v' = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47m/s$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{v_0}{2} = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{2}{4} = 116.6^\circ$$

作业

P49　T1.5　T1.9　T1.19　T1.27

此节的学习目标，您掌握了吗？

- 自然坐标系，自然坐标系下的速度和加速度；
- 相对运动中的关系