



请分享至少一个您上节课学到的知识点

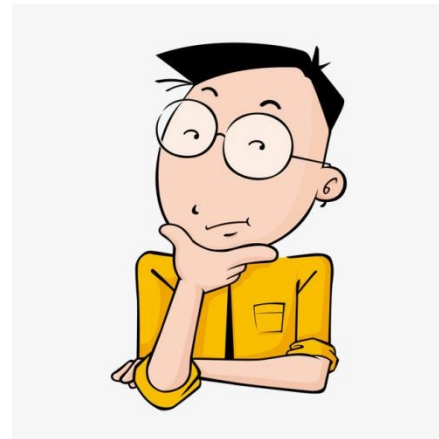
您将学习：

- 阻尼振动
- 受迫振动



§ 7. 阻尼振动 (Damped oscillation)

如果弹簧振子在振动过程中存在阻力，会发生什么现象？



□ 振幅（或机械能）随时间而减小的振动叫阻尼振动。它不是简谐振动。

以振动系统受介质粘滞阻力的振动为例：

当质点速度不太大时，粘滞阻力与速度的大小成正比：

即：
$$f = -\gamma v$$

γ —— 阻力系数

由牛二定律知：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}, \quad \text{或} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\text{令} \frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{\gamma}{m} = 2\beta,$$

$$\text{则有} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

β —— 阻尼因数, ω_0 —— 固有频率

1) 阻力较小，弱阻尼： $\beta^2 < \omega_0^2$

解为：

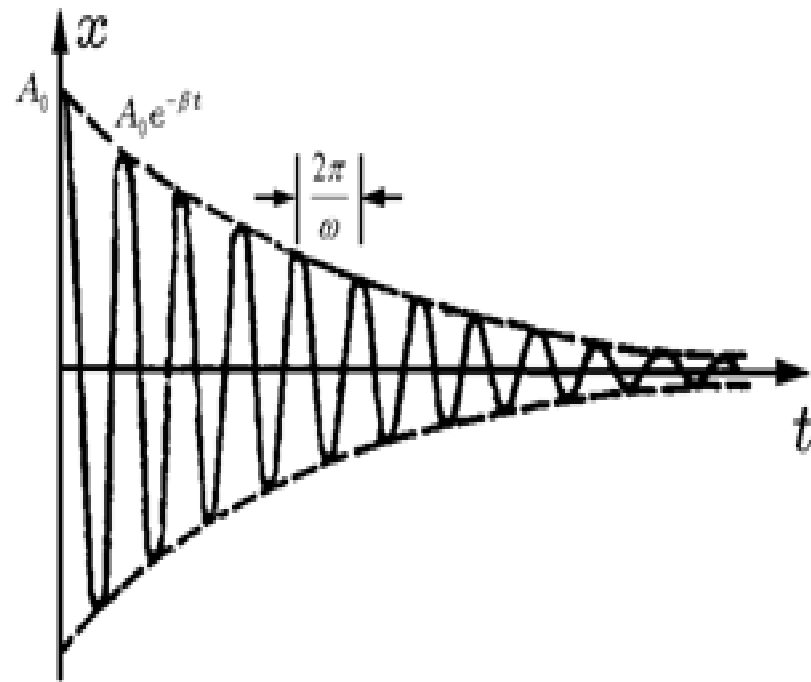
$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi)$$

方向变换周期：

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

——阻尼振动的周期





$$\because \quad \omega < \omega_0$$

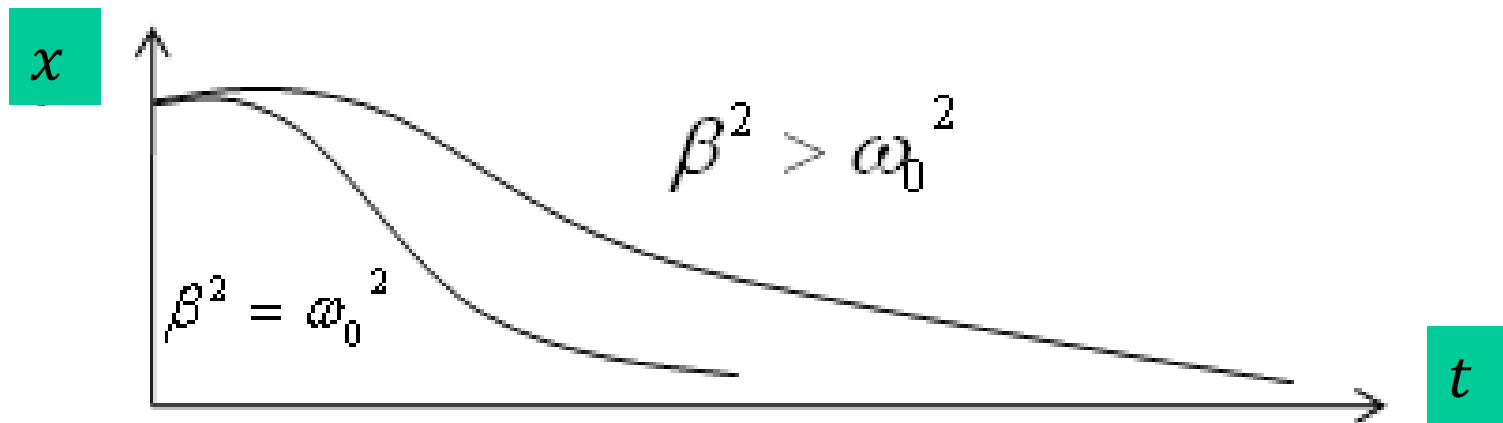
阻尼振动周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

大于无阻尼振动简谐振动的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

2) 阻力较大, 过阻尼

$$\beta^2 > \omega_0^2$$

解为:
$$x = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$



不振动, 逐渐停止在平衡位置。

3) 临界阻尼

$$\beta^2 = \omega_0^2$$

解为: $x = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$

即刚好不能振动, 很快回到平衡位置。

▣ 阻尼的应用:

① 精密天平

② 灵敏电流计

加大阻尼, 最好加到临界阻尼的程度, 此时回到平衡位置最快。

欠阻尼

臨界阻尼

過阻尼



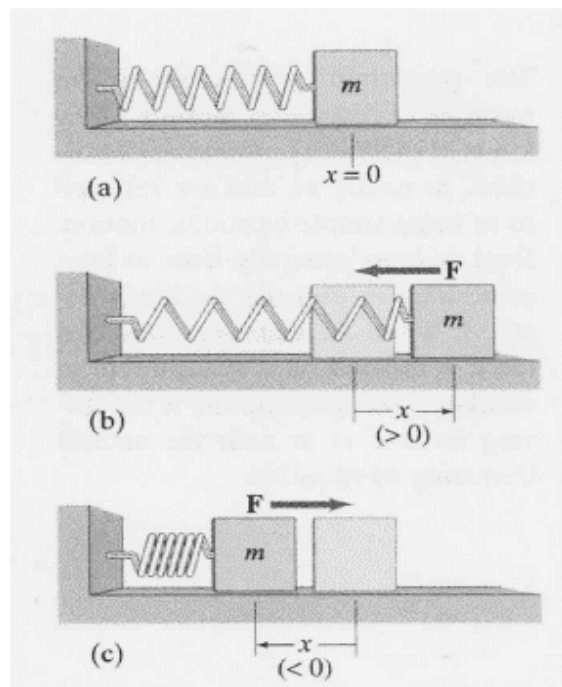
§ 8. 受迫振动 (Forced harmonic motion)




<https://www.bilibili.com/video/av78921535/>

1、 受迫振动的运动学方程

大胆猜一猜：



如果一个周期性的外力 F 作用于 m ,
稳定后 m 的振动频率会是怎样的？



●不受外力作用下的振动叫**自由振动**。

●振动系统在外界周期性强迫力作用下的振动，叫做**受迫振动**。

设周期性外力：

$f = H \cos(pt)$ f ——强迫力，

H ——强迫力的振幅，

p ——强迫力的角频率。周期是： $T = \frac{2\pi}{p}$

1、动力学方程及其解

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + H \cos pt$$

$$\text{令 } \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\gamma}{m} = 2\beta, \quad h = \frac{H}{m}$$

$$\text{则 } \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \cos pt$$

此为非齐次二阶微分方程



该方程的解（两个特解的线性叠加）为：

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi') + A \cos(pt - \varphi)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 只剩第二项：

受迫振动的运动学方程： $x = A \cos(pt - \varphi)$

稳定后的受迫振动：等幅振动频率与强迫力相同，但与强迫力存在一相位差。



将此特解代入原微分方程得到：

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$$

稳定后的受迫振动，其振幅和位相与初始条件无关，与系统的固有频率，阻力和周期性外力的频率决定。

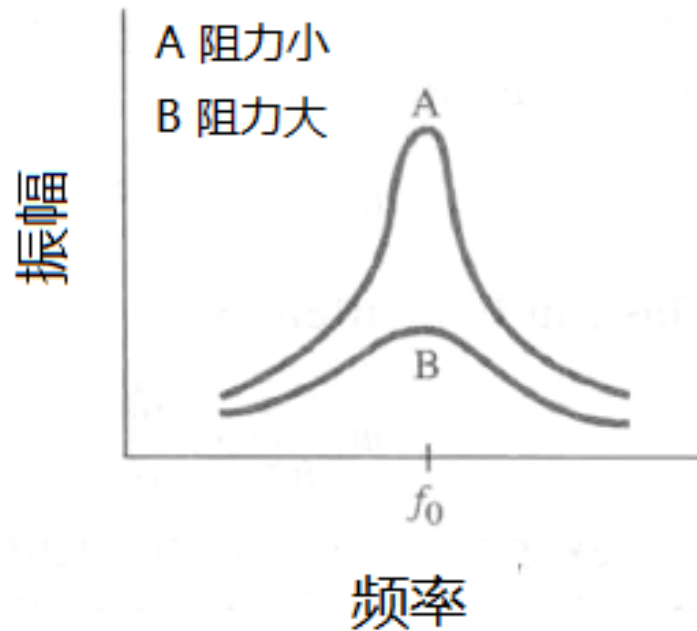
稳定后的受迫振动的运动学方程

$$x = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}} \cos(pt - \varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$$

2、共振 (Resonance)

什么是共振现象？将2个音叉放在同一平面上，有趣的现象发生了_好看视频 (baidu.com)



受迫振动中，外界向系统传递能量。能量的传递的效率与系统的固有频率，周期性外力的频率和阻力都有关系。当周期性外力的频率与系统的频率接近时，振幅最大。

——共振现象

理论论证

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

求极大值问题：p为何值时，A取最大值？

求 $\Delta = (\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2$ 的最小值

令A对p的一阶导数等于零

$$\Delta' = 2(\omega_0^2 - p^2)(-2p) + 8\beta^2 p = 0$$

即 $-p(\omega_0^2 - p^2 - 2\beta^2) = 0$

可证明 $p = 0$ 或 $p^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ 时，A取极值

$$p^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \quad \Delta'' > 0, \text{ 故 } \Delta \text{ 取最小值,}$$

当周期性外力的频率为 p_r 时振幅最大：

共振角频率 $p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \dots\dots\dots(1)$

共振的振幅
$$A_r = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_r^2)^2 + 4\beta^2 p_r^2}}$$
$$= \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \dots\dots\dots(2)$$

受迫振动的相位：

$$\varphi_r = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \dots(3)$$

共振角频率、共振振幅、共振时受迫振动的相位差都与系统的固有频率、阻力有关。

阻力在共振中的作用

$$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_r = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_r^2)^2 + 4\beta^2 p_r^2}} = \frac{h}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

β 越小, p_r 接近 ω_0 , A_r 越大

尖锐共振: $\beta = 0$, $p_r = \omega_0$, $A_r \rightarrow \infty$

$$\varphi_r = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

尖锐共振时的位相：

$$\varphi_r = \operatorname{tg}^{-1} (+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

运动学方程：

$$f = H \cos(pt)$$

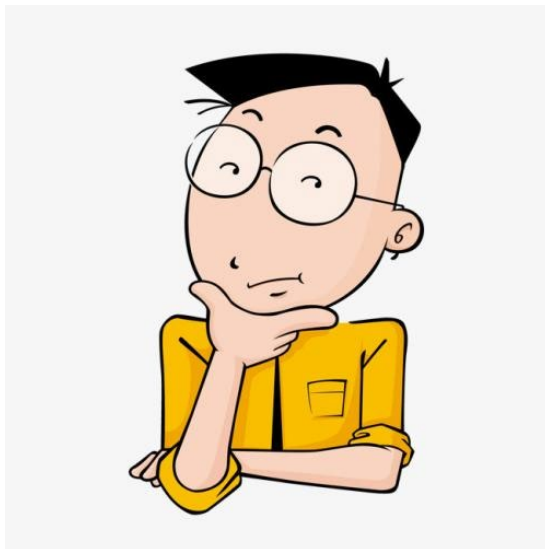
周期性外力：

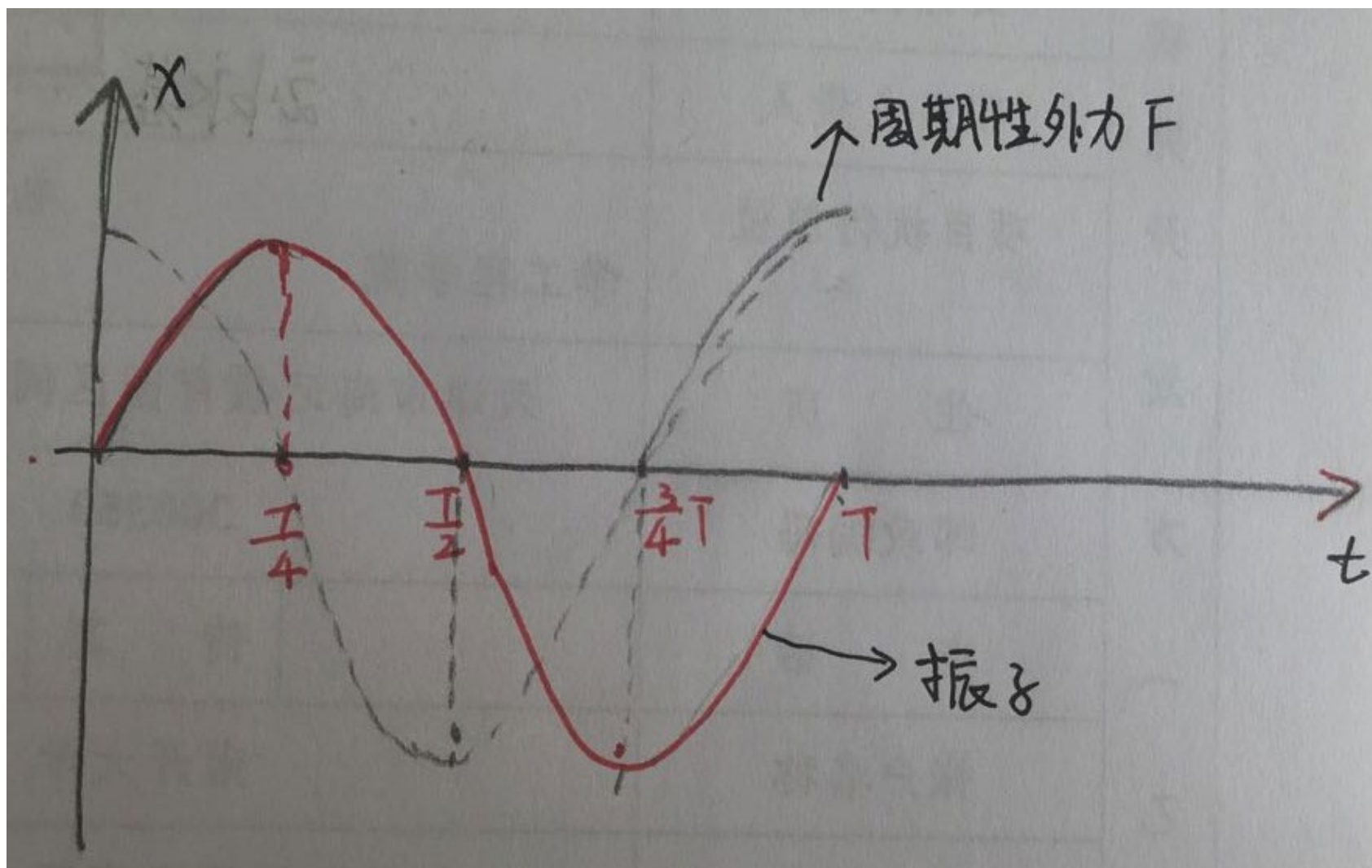
$$x_r = A_r \cos\left(pt - \frac{\pi}{2}\right)$$

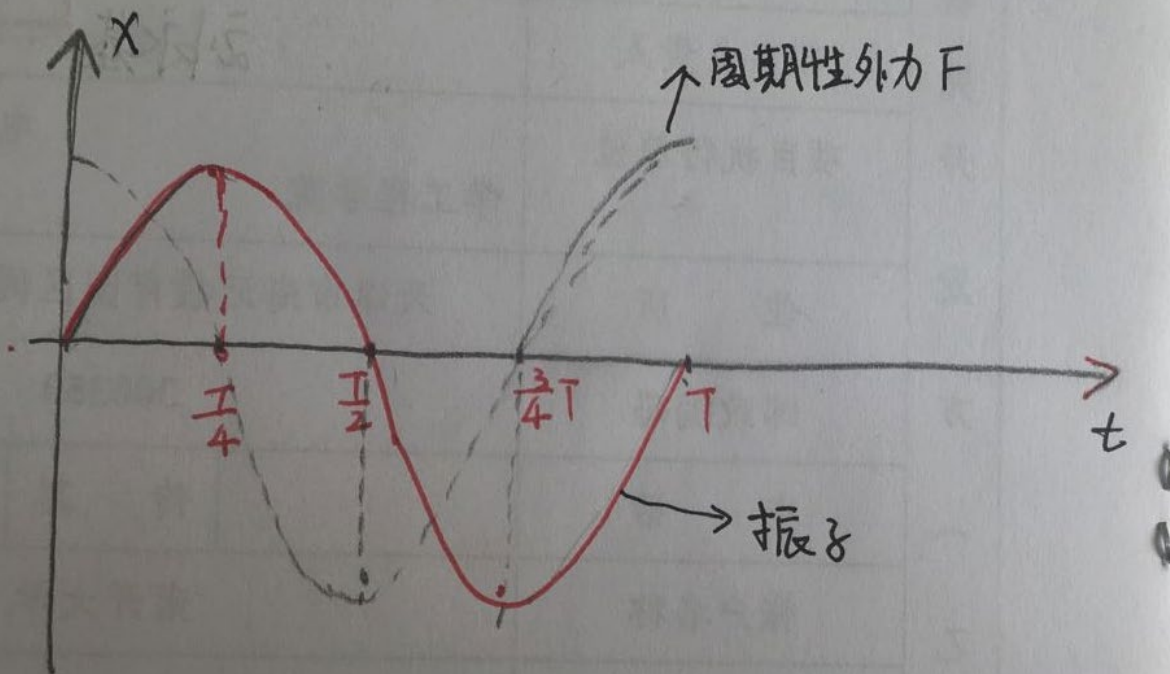
此时受迫振动落后于强迫力 $\frac{\pi}{2}$ （四分之一周期）。

此时受迫振动落后于强迫力 $\frac{\pi}{2}$ （四分之一周期）。

这意味着什么？







在 $\frac{T}{4}$ 周期: 振子向 x 正向运动. F 的方向为正, 使振子加速
 在 $[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}]$ 周期. 振子向 x 负向运动: F 的方向为负,
 在 $[\frac{T}{2}, \frac{3}{4}T]$
 在 $[\frac{3}{4}T, T]$ 振子向 x 正向运动, F 的方向为正, 使振子加速

从能量角度分析受迫振动（根据相位分析）

周期性外力：
$$f = H \cos(pt)$$

受迫振动：
$$x = A \cos(pt - \varphi)$$

$$\begin{aligned}\therefore v &= \frac{dx}{dt} = -Ap \sin(pt - \varphi) \\ &= Ap \cos(pt - \varphi + \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

强迫力与速度的相位差：
$$\varphi - \frac{\pi}{2}$$



尖锐共振时：

$$\varphi = \varphi_r = \frac{\pi}{2}$$

强迫力与速度的相位差： $\varphi - \frac{\pi}{2} = \varphi_r - \frac{\pi}{2} = 0$

速度与强迫力相位相同

强迫力只做正功, 因此强迫力只做正功, 故振幅不断增加, 此为尖锐共振。

更为一般的稳定受迫振动形成的原因

强迫力与速度方向相同时，做正功，相反时，做负功。

如正功>负功， v 增大，由于 $f_{\text{阻}} = -\gamma v$ ，
则阻力增大，阻力做负功增加，当正功=负功+阻力做负功时，振幅稳定。这就会稳定受迫振动。

共振的应用：

- 1) 利用共振：使强迫力的频率接近共振频率，减少阻尼因数：利用超声波清洗金属器件等。
- 2) 避免共振：使强迫力的频率与共振频率相差很大，增大阻尼因数：加厚机器底座；火车过桥要慢；排队过桥避免齐步走。

此外，共振在物理学中非常有用：如声学、光学、电磁学、原子物理等，常用共振研究物质的微观结构；还有医学上的核磁共振等。

Wibbly Wobbly Bridge



<https://www.acfun.cn/v/ac19301053>

更为复杂的振动怎么处理呢？



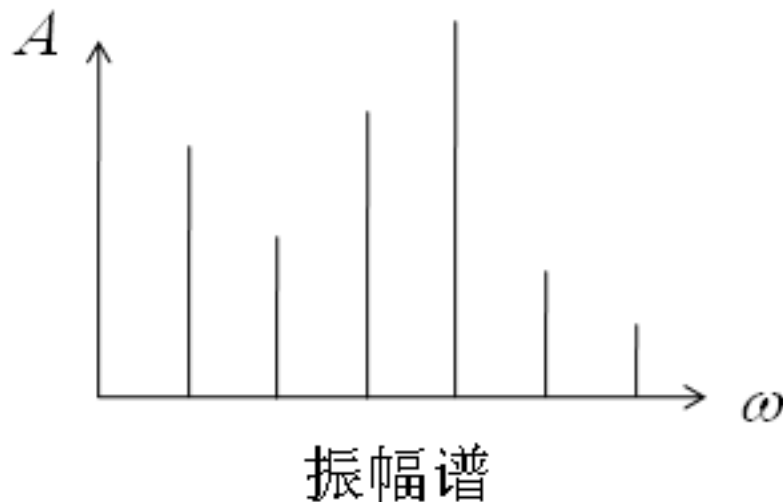
将复杂的振动进行傅里叶展开

- 此级数叫Fourier级数。

这就是说，如果一个振动的表达式可表示为周期函数，在这个振动就可分解为一系列的简谐振动的叠加。

- 其中最小的频率叫基频。

✓ 各频率下的简谐振动的振幅可用振幅谱表示：



作业1: P272 T7.5, T7.7, T7.21, T7.25



本次的学习目标，您达到了吗？

- 阻尼振动的三种阻尼形式是什么？
- 共振现象您能做定性和定量分析吗？

• 本章小结:

① 简谐振动:

系统模型→动力学方程→振动表达式;

各状态参量及其之间的关系;

振幅与初相位的确定;

矢量（几何）表示。

② 简谐振动的合成: 同方向同频率, 分析方法

③ 阻尼振动: 了解三种阻尼形式及特点。

④ 受迫振动: 分析方法, 结论, 共振。

⑤ 振动的分解: 一般了解。