Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

3° Teste de Cálculo Diferencial e Integral I - LEC, LEME

23 de Janeiro de 2023, 8h   Duração: 60 minutos   Versão A

Nome: ______________________ N.° aluno: ____________ Curso: ________

(6,0 val.) **1.** Calcule os integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{2\arctan x}}{1+x^2}\,dx.$ $\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot e^{u}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot e^{-\pi} =$

$\displaystyle = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$

let $u = 2\tan^{-1} x$
$\displaystyle du = 2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$u(0) = 0$
$u(-1) = -\frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln x\,dx.$ $\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\ln x\ \sqrt{x}\Big]_1^4 - \frac{1}{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\ x^{-1}\,dx =$

$\displaystyle = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\cdot 2}\cdot\ln 4 - 0 - \sqrt{x}\Big|_1^4$

$= \ln 4 - 2 + 1 = \ln 4 - 1$

let $u = \ln x$
$\displaystyle du = \frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle v = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$
$\displaystyle dv = \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx$

$\displaystyle \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ldots} = 2x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}$ $= 2\sqrt{x}$

(c) $\displaystyle\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{2}{\sqrt{4+e^x}}\,dx$. (Sugestão: mudança de variável $t^2 = 4 + e^x$.)

let $t^2 = 4 + e^x$

$t = \sqrt{4+e^x}$

$4 \iff e^x = t^2 - 4$

$\iff x = \ln|t^2 - 4|$

$dx = \dfrac{2t}{t^2-4}\,dt$

$t(\ln 12) = \sqrt{4+12} = 4$

$t(\ln 5) = \sqrt{4+5} = 3$

$$= \int_3^4 \frac{2}{\cancel{t}} \cdot \frac{2\cancel{t}}{t^2-4}\,dt = \Big[\ln(t-2) - \ln(t+2)\Big]_3^4 =$$

$(t-2)(t+2)$

$2 = A(t+2) + B(t-2)$

$\boxed{x=2}$ $4 = 4A \iff A = 1$

$\boxed{x=-2}$ $4 = -4B \iff B = -1$

$= \ln 2 - \ln 6 \cancel{- \ln 1} + \ln 5$

$= \ln \frac{10}{6} = \ln \frac{5}{3}$

2. Calcule, justificando, a derivada da função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{1/x} \arctan\left(t^2\right) dt$.

(2,0 val.)

Pelo Teorema fundamental do Cálculo,

— Como t^2 é contínua em $\mathbb{R}^+$ e $\tan^{-1} t$ também, $\tan^{-1} t^2$ é contínua em $\mathbb{R}^+$

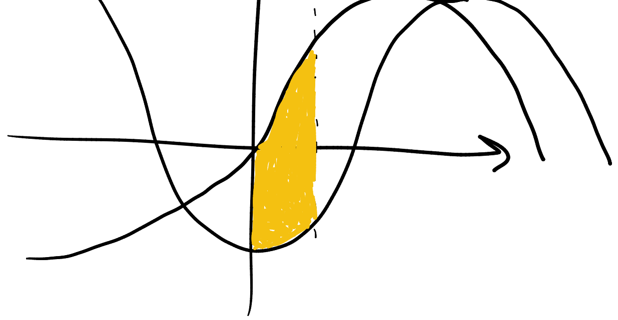
— $\frac{1}{x}$ e $-x$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$

Logo: $F'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + (x)' \tan^{-1}(-x)^2 = -\frac{1}{x^2} \tan^{-1}\frac{1}{x^2} + \tan^{-1} x^2$

(2,0 val.) **3.** Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \operatorname{sen}(x), \quad y = -\cos(x), \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\, dx = \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 0$



$= 1$

4. Determine a natureza (convergência absoluta, convergência simples ou divergência) das seguintes séries:

(4,5 val.)

(a) $\displaystyle\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{2n}}{5^n+1}}_{}.$

$$a_n < \frac{n4^n}{5^n} = n\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{4}{5} \lim \frac{(\cancel{n}+1)}{\cancel{n}} \cdot \frac{\left(\cancel{\frac{4}{5}}\right)^n}{\left(\cancel{\frac{4}{5}}\right)^n} = \frac{4}{5} < 1,$$ logo b_n converge

Logo, pelo critério de comparação, a_n é convergente.

Como a_n é STNN, é absolutamente convergente

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}.$ $\rightarrow$ Alternada

Série dos Módulos

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ $\rightarrow$ Comparação $m_n < b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+2}}_{m_n}$

$\lim \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = \lim \dfrac{1}{1+\underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}}}_{\to 0}} = 1 \neq 0, \pm\infty$, logo b_n e m_n têm o mesmo comportamento $\to$ Logo m_n diverge

$\dfrac{1}{\sqrt{n}+2} \to 0$ e é decrescente, logo $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$ converge

Como $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$ converge, mas $\sum_{n\geq 1} \left| \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2} \right|$ não, a série é simplesmente convergente.

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}^{a_n}.$$

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n = \lim e^n = e^{+\infty} = +\infty$

Como os termos tendem para $+\infty$, a série diverge

5. Considere função f definida pela série de potências:

(4,0 val.)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n (x+3)^n}{3^{2n+1}}}_{a_n}.$$

(a) Calcule $f(0)$.

$$f(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, 3^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \left(-\frac{3}{9}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

→ série geométrica convergente: $|r| < 1$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\frac{4}{\cancel{3}}} = \frac{1}{4}$$

(b) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente. Centrada em -3 → $(x+3)$

$D = \lim \left| \frac{a_n}{\ldots} \right| = \lim \frac{3^{2(n+1)+1}}{\ldots} = \lim 3^{\cancel{2n}-\cancel{2n}+2+\cancel{1}-\cancel{1}} = 9$

$x = -12$; $\sum_{n\geq 0} \frac{\cancel{(-1)^n (-9)^n}}{3 \cdot \cancel{9^n}} = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} 1$ → divergente

$$R = \lim \left| \frac{}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{}{3^{2n+1}}$$

$$x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cancel{9^n}}{3 \cdot \cancel{9^n}} = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} (-1)^n$$ divergente

Absolutamente Convergente : $x \in]-12, 6[$

Divergente : $x \in]-\infty, -12] \cup [6, +\infty[$

(c) Indique $f^{(15)}(-3)$.

$$\frac{f^{(15)}(-3)}{15!} = \frac{(-1)^{15} (0)^{15}}{3^{2 \cdot 15 + 1}} \Leftrightarrow f^{(15)}(-3) = -\frac{15!}{3^{31}}$$

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e positiva e, para $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \inf_{x \in [n,n+1]} g(x)$. Considere

(1,5 val.)

$$I_k = \int_1^k g(t)dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $\lim_{n\to\infty} na_n = L \in]0, +\infty[$, então $\lim_{k\to+\infty} I_k = +\infty$.

$\lim n a_n = \lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = L \neq 0, +\infty$, logo a_n comporta-se como a harmónica - Diverge

$I_K = \int_1^k g(t)\,dt \geq \underline{S}_P(g) = \sum_{i=1}^{K-1} \left[\inf_{[i,i+1]} g(x)\right] \cancel{(i+1-i)} = \sum_{n=1}^{k-1} a_n$ ↘ divergente

para P uma partição $\{1, 2, \dots k\}$

$I_K \geq \underline{S}_P(g)$, e $\underline{S}_P(g)$ diverge ← Critério de comparação

$a_n < b_n$ e a_n diverge

$\Rightarrow b_n$ diverge

Logo $\lim I_K = +\infty$

RASCUNHO / CONTINUAÇÃO DE RESOLUÇÕES

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

3° Teste de Cálculo Diferencial e Integral I - LEC, LEME

23 de Janeiro de 2023, 8h Duração: 60 minutos Versão B

Nome: ______________________ N.° aluno: __________ Curso: ________

(6,0 val.) **1.** Calcule os integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-4\arctan x}}{1+x^2}\,dx.$ $= -\frac{1}{4}\int_0^{-\pi} e^{v}\,dv = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0} e^{v}\,dv = \frac{1}{4}e^{v}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{4} - \frac{e^{-\pi}}{4} = \frac{1-e^{-\pi}}{4}$

let $v = -4\tan^{-1} x$ $v(1) = -4 \cdot \frac{\pi}{4} = -\pi$

$dv = \frac{-4}{1+x^2}\,dx$ $v(0) = 0$

(b) $\displaystyle\int_1^9 \frac{3}{2x^{3/2}} \ln x\,dx.$ $= \left[-\frac{3}{\sqrt{x}} \ln x\right]_1^9 + \int_1^9 \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x}\,dx = -\ln 9 - \cancel{\ln 1} - 2 + 6$

$= -\ln 9 + 4$

let $u = \ln x$ $v = -\frac{3}{\sqrt{x}}$

$du = \frac{dx}{x}$ $dv = \frac{3}{2x\sqrt{x}}\,dx$

$3\int x^{-3/2}\,dx = 3\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$

$\frac{3}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{3}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{\sqrt{x}}$

$= \frac{-6}{\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$. (Sugestão: mudança de variável $t^2 = 1 + e^x$.) $= \displaystyle\int_2^3 \frac{\cancel{t}^{-1} \cdot 2\cancel{t}}{t^2-1}\,dt =$

let $t^2 = 1 + e^x$

$\underset{t>1}{x} = \ln(t^2-1) \to dx = \frac{2t}{t^2-1}\,dt$

$t(x) = \sqrt{1+e^x}$

$t(\ln 8) = 3$

$t(\ln 3) = 2$

$= \displaystyle\int_2^3 \frac{2}{(t+1)(t-1)}\,dt = \left[-\ln(t+1) + \ln(t-1)\right]_2^3 =$

$2 = A(t-1) + B(t+1)$

$t=-1 \rbrack\ 2 = -2A \Leftrightarrow A = -1$

$t = 1 \rbrack\ 2 = 2B \Leftrightarrow B = 1$

$= -\ln 4 + \ln 2 + \ln 3 - \cancel{\ln 1} =$

$= \ln\frac{6}{4} = \ln\frac{3}{2}$

2. Calcule, justificando, a derivada da função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_{-1/x}^{x} \arctan\left(t^2\right) dt.$

(2,0 val.)

T.F.C.: Como $\tan^{-1}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e x^2 também, logo $\tan^{-1} t^2$ é contínua em $\mathbb{R}^+$

E como $-\frac{1}{x}$ e x são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$

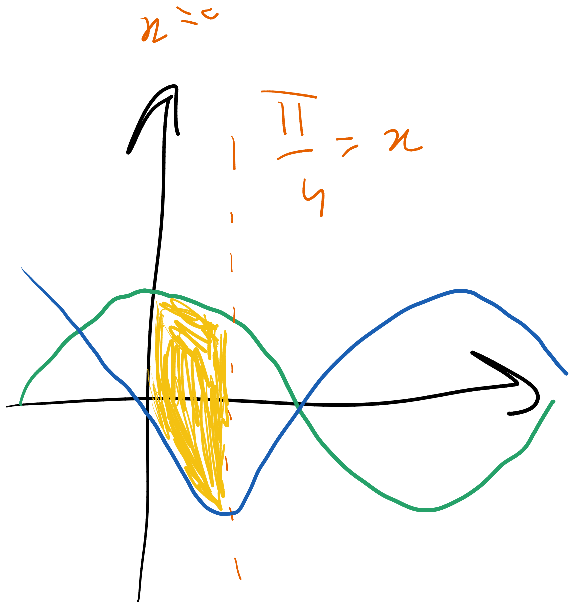
Temos que $F'(x) = \underbrace{x'}_{=1} \tan^{-1} x^2 - \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)'}_{=\frac{1}{x^2}} \tan^{-1} x^2 = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \tan^{-1} x^2$

(2,0 val.)

3. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$y = -\operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$ e $x = \pi$/[illegible]

$$y = -\operatorname{sen}(x), \quad y = \cos(x), \quad x = 0 \quad e \quad x = \frac{\pi}{4}.$$



$-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x$

$-\sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$A_D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 = 1$$

4. Determine a natureza (convergência absoluta, convergência simples ou divergência) das seguintes séries:

(4,5 val.)

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{\underbrace{2^{2n}+1}_{a_n}}.$$ → Sequência de Termes não negativos

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\,3^{n+1}}{2^{2(n+1)}+1} \cdot \frac{2^{2n}+1}{n\,3^n} = \lim \frac{3n\cancel{3^n}}{\cancel{n3^n}} \cdot \frac{\cancel{2^{2n}}+1}{2^2 \cdot \cancel{2^{2n}}+1} = \lim 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} < 1$$

Série Absolutamente Convergente

$a_n \geq 0$

OU Critério d'Alembert

$$a_n = \frac{n3^n}{2^{2n}+1} < \underbrace{n\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{b_n} \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^{\cancel{n}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{3}{4} < 1 \to b_n \text{ converge}$$

$(2^2)^n = 4^n$

Logo, pelo critério da comparação, $\sum a_n$ converge

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1}.$$ → Série Alternada

Série dos módulos : $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ $\sqrt{n}$

↳ divergente

↳ $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, Logo $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge e $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ também

Leibniz: $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} \to 0$

e é decrescente,

logo $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ converge, mas como $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1} \right|$ não converge,

a série converge simplesmente

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} = \left(\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^n = e^{+\infty} \to +\infty$ logo a série diverge

5. Considere função f definida pela série de potências:

(4,0 val.)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+4)^n}{4^{2n+1}}.$$

(a) Calcule $f(0)$.

$$f(0) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cancel{4^n}}{\cancel{4^n} \cdot 4^n \cdot 4} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{4}\right)^n =$$

série geométrica

$r = -\frac{1}{4} \to |r| < 1$

logo série converge

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

(b) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (x+4)^n}{4^{2n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{x+4}{4^2}\right)^n$$

Série geométrica de razão $-\frac{x+4}{16}$

Convergencia Absoluta: $-1 < R < 1$

$\hookrightarrow \left|+\frac{x+4}{16}\right| < 1 \iff x+4 < 16 \wedge x+4 > -16$

$x < 12 \wedge x > -20$

Divergente em $|A| \geq 1 \rightarrow x \geq 12 \wedge x \leq -20$

OU

$\rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}} \rightarrow$ Centrada em -4

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\cancel{(-1)^n}}{(-1)^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{4^{2n}} \cdot 4^3}{\cancel{4^{2n}} \cdot 4}\right| = |-16| = 16$$

Absolutamente Convergente: $-20 < x < 12$

Divergente: $x \in]-\infty, -20] \cup [12, +\infty[$

$x = 12$: $\frac{1}{4}\sum \frac{(-1)^n (16)^n}{4^{2n+1}} = \frac{1}{16}\sum (-1)^n \frac{\cancel{16^n}}{\cancel{16^n}}$

$\searrow$ Divergente

$x = -20$, $\frac{1}{16}\sum \frac{\cancel{16^n}}{\cancel{16^n}} = \frac{1}{16}\sum 1 \rightarrow$ Divergente

(c) Indique $f^{(10)}(-4)$.

$$\frac{f^{(10)}(-4)}{10!} = \frac{(-1)^{15}}{4^{2\cdot 10+1}} \iff -\frac{10!}{4^{21}} = f^{(10)}(-4)$$

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e positiva e, para $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \inf_{x\in[n,n+1]} g(x)$. Considere

(1,5 val.)

$$I_k = \int_1^k g(t)dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $\lim_{n\to\infty} na_n = L \in]0,+\infty[$, então $\lim_{k\to+\infty} I_k = +\infty$.

$I_k = \int_1^k g(t)\,dt \geq \underline{S}(g)$

↳ Soma inf.

$P = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ partição

$\underline{S}_P(g) = \sum_{n=1}^{k-1}\left(\inf_{[n,n+1]} g(x)\right) \cancel{(n+1-n)} = \sum_{n=1}^{k-1} a_n \to S_{k-1}$ somas parciais de $\sum a_n$

$g(x) \geq 0 \to$ STNN

$\Rightarrow a_n \geq 0$

$\Rightarrow I_k \geq S_{k-1}\,, \forall k$

$\lim n a_n = \lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = L \neq 0, +\infty \Rightarrow \frac{1}{n}$ e a_n tem a mesma natureza - séries harmónicas

$\Rightarrow a_n$ diverge

RASCUNHO / CONTINUAÇÃO DE RESOLUÇÕES

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n-1}}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}}{5^n} \cdot \frac{5^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{3}{5} \overset{<1}{\longrightarrow} \text{converge}$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \frac{a_0}{1-r} = \frac{15}{1-\frac{3}{5}} = \frac{15}{\frac{2}{5}} = \frac{75}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alternada

$\rightarrow$ $n! >> c^n$, logo a_n é decrescente e tende para 0

Logo é convergente

Série dos Módulos

$$\sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{(\pi/3)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{m_n} \longrightarrow \lim \frac{m_{n+1}}{m_n} = \lim \frac{(\pi/3)^{2n+3}}{(\pi/3)^{2n+1}} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{\pi^2}{9} \lim \frac{\cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}} = 0$$

logo a série é absolutamente convergente

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, converge sse $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}\, dn \in \mathbb{R}$, mas o integral não existe em $\mathbb{R}$, logo a_n diverge

positiva $\searrow 0$

let $u = \ln n$
$du = \frac{1}{n}\, dn$

$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| = \ln\left|\frac{1}{n}\right|$

$\ln \frac{1}{n} \Big|_2^{+\infty} = \ln +\infty + \ln 2 = +\infty \notin \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}\, dn = \int_{\ln 2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{-\left(\frac{1}{u}\right)'} du = -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = -0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \in \mathbb{R}$$

let $u = \ln n$ $\quad u(+\infty) = +\infty$
$du = \frac{1}{n}\, dn$ $\quad u(2) = \ln 2$

Logo $\sum a_n$ converge

b) $\dfrac{1}{(x+1)^2} = f(x)$, $a = 0$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{1-(-x)} (+c) = -\sum_{n \geq 1} (-x)^{n-1} (+c) = -\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^{n-1} (+c) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n x^{n-1} (+c)$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n \geq 1} (-1)^n x^{n-1} \cancel{(+c)} = \sum_{n \geq 1} (n-1)(-1)^n x^n$$

$|-x| < 1 \iff x \in]-1, 1[$

a) $f(x) = (x-2)^2 e^x$, $a = 2$

$$f(x) = e^2 (x-2)^2 e^{x-2} = e^2 (x-2)^2 \sum_{n\geq 0} \frac{(x-2)^n}{n!} = e^2 \sum_{n\geq 0} \frac{(x-2)^{n+2}}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{e^2 (x-2)^n}{(n-2)!}$$

Seja f a função definida pela expressão $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{4^{n-1}}$ no conjunto dos pontos onde a série é convergente. Determine o domínio da função f e calcule $f(-1)$.

$$f(x) = \sum_{n\geq 2} \underbrace{\frac{2^n}{4^{n-2}}}_{a_n} x^n \rightarrow \text{Centrada em } 0$$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left(\frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{4^{n-1}}{4^{n-2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$\boxed{x = -2}$: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1}}{4^{n-1}} = 16 \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}$ → Divergente

$\boxed{x = 2}$: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{4^{n+1}}{4^{n-1}} = 16 \sum_{n\geq 1} 1$ → Divergente

Absolutamente convergente em $x \in]-2, 2[$

Divergente em $x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

$$r(-1) = \lim \frac{(-2)^{n+2}}{4^n} \cdot \frac{4^{n-1}}{(-2)^{n+1}} = -2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 1, \text{ converge}$$

$$S_1 = \frac{(-2)^2}{4^0} = 4$$

Logo $\displaystyle f(-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^{n+1}}{4^{n-1}} = \frac{S_1}{1-r} = \frac{4}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$

$h(x) = \ln(3x+1)$, $a = 0$

$$h'(x) = \frac{d}{dx} \ln(3x+1) = \frac{3}{3x+1} = 3 \cdot \frac{1}{1-(-3x)} = 3 \sum_{n\geq 0} (-3x)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n 3^{n+1} x^n$$

↳ $|3x| < 1$

$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

$$h(x) = \int h'(x)\,dx = \sum_{n\geq 0} (-1)^n 3^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \underbrace{\cancel{+C}}_{\ln(3\cdot 0+1)=0} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} 3^n \frac{x^n}{n}$$

b) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série seguinte é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} (x-2)^n. \quad a = 2$$

$$r = \lim \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{r} = 2$$

Absolutamente Convergente em $x \in \,]0, 4[$

Divergente em $x \in \,]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

$\boxed{x = 0}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n (-2)^n = \sum_{n\geq 1} \left(-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{n\geq 1}\left(1 + \frac{(-2)}{n}\right)^n (-1)^n$

Divergente

$$\lim \left(1 + \frac{(-2)}{n}\right)^n (-1)^n = \underbrace{e^{-2}}_{\text{não tende para } 0} \cdot \underbrace{\lim (-1)^n}_{\nexists}$$

$\boxed{x = 4}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-2)}{n}\right)^n \xrightarrow{+\infty} e^{-2} \neq 0$, logo diverge

Determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) de cada uma das séries seguintes:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(n-1)^3 + n^2}{3^{n+1} + n^4}}_{a_n}, \qquad , \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[4]{n} + \sqrt[6]{n}}.$$

a) STNN

$$a_n = \underbrace{\frac{(n-1)^3}{3^{n+1}}}_{b_n} \cdot \frac{1 + \frac{n^2}{(n-1)^3}}{1 + \frac{n^4}{3^{n+1}}}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1+\frac{n^2}{(n-1)^3}}{1+\frac{n^4}{3^{n+1}}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0, +\infty$$ logo b_n tem o mesmo comportamento que a_n

$$\lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim \left(\frac{n^3}{(n-1)^3} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} \right) = \left(\lim \frac{n}{n-1} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$ logo b_n converge

Logo a_n converge e, como $a_n \geq 0$, a_n é absolutamente convergente.

6) Alternada

S. dos módulos: $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt[4]{n}+\sqrt[6]{n}}}_{m_n} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}_{b_n}$

$\frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$

Logo $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ diverge

$$\lim \frac{m_n}{b_n} = \lim \frac{\sqrt[4]{n}}{2\sqrt[4]{n}+\sqrt[6]{n}} = \frac{1}{2} \lim \frac{1}{1+\frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[4]{n}}} = \frac{1}{2} \lim \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{n}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \neq 0, +\infty,$$ Logo m_n comporta-se como b_n, i.e. diverge

$$\frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[4]{n}} = n^{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}$$

$$\left| \frac{(-1)^n}{2\sqrt[4]{n}+\sqrt[6]{n}} \right| \searrow 0,$$ logo segundo Leibniz, $\sum a_n$ converge

Como $\sum a_n$ converge, mas $\sum |a_n|$ não, $\sum a_n$ é simplesmente convergente

CDI-1 - LEIC-A e LEEC

EXAME (Versão A) - 23 de janeiro de 2023 - 19h - Duração: 1 hora

Nome: ______________________________

Nº: ______________ **Curso:** ______________________

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Calcule os seguintes integrais:

(2 val.) (a) $\displaystyle\int_{-1}^{e-2} \frac{\ln^3(x+2)}{x+2}\,dx$ $= \displaystyle\int_0^1 u^3\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

let $u = \ln(x+2)$ $\quad u(e-2) = \ln e = 1$

$du = \frac{1}{x+2}\,dx$ $\quad u(-1) = \ln 1 = 0$

Resolução:

$$\int_{-1}^{e-2} \frac{\ln^3(x+2)}{x+2}\,dx = \int_{-1}^{e-2} \ln^3(x+2)(\ln(x+2))'\,dx$$

$$= \left[\frac{\ln^4(x+2)}{4}\right]_{-1}^{e-2} = \frac{\ln^4 e}{4} - \frac{\ln^4 1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$\ln|u|\Big|_1^2 = \ln 2$

(2,5 val.) (b) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \arctan(x^4)\,dx$ $= \left[\frac{x^4}{4}\tan^{-1} x^4\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x^4 \cdot \frac{x^3}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^8}\,dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du$

let $u = \tan^{-1} x^4$ $\quad v = \frac{x^4}{4}$

$du = \frac{4x^3}{1+x^8}$ $\quad dv = x^3\,dx$

$= \frac{\pi}{16} - \frac{\ln 2}{8}$

let $u = 1+x^8$

$du = 8x^7\,dx$

Resolução: Integrando por partes

Resolução: Integrando por partes:

$u(0) = 1$
$u(1) = 2$

$$\int_0^1 x^3 \arctan(x^4)\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\arctan(x^4)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4}{4}\cdot\frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{16} - \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^8}\, dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(1+x^8)'}{1+x^8}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\left[\ln|1+x^8|\right]_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{\ln 2}{8}.$$

(2,5 val.) (c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x(1+\ln x)}\, dx$ $= \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \left[\ln|t| - \ln|t+1|\right]_1^2$ $= \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2$ $= \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$

$\to$ Racional : $1 = A(t+1) + Bt$

$t = -1$: $1 = -B \Leftrightarrow B = -1$

$t = 0$: $1 = A \Leftrightarrow A = 1$

Sugestão: considere a substituição de variável $t = \ln x$.

let $t = \ln x$ $\quad t(e^2) = 2$

Resolução: $dt = \frac{1}{x}$ $\quad t(e) = 1$

Para usar a fórmula de substituição de variável com a substituição sugerida, constatemos que $x \mapsto t$ é injectiva e C^1 em $\mathbb{R}$ e é equivalente a $x = e^t$. Por outro lado, $x = e \Leftrightarrow t = 1$ e $x = e^2 \Leftrightarrow t = 2$. Logo,

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x(1+\ln x)}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{e^t t(1+t)}\,(e^t)' dt = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}\, dt$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t)}\right) dt = \left[\ln|t| - \ln|1+t|\right]_1^2$$
$$= 2\ln 2 - \ln 3.$$

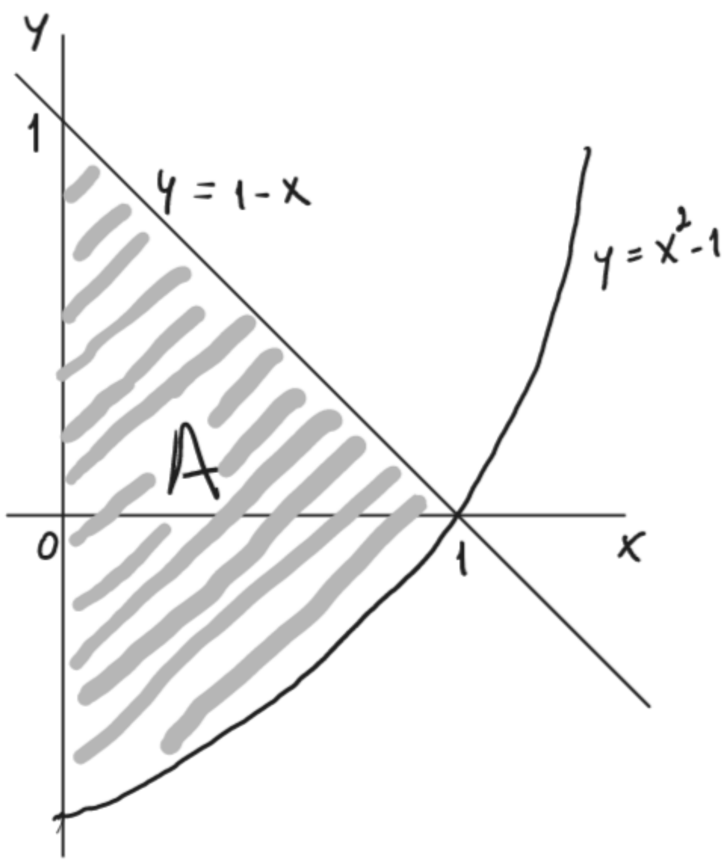
(2,5 val.) **2.** Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades:

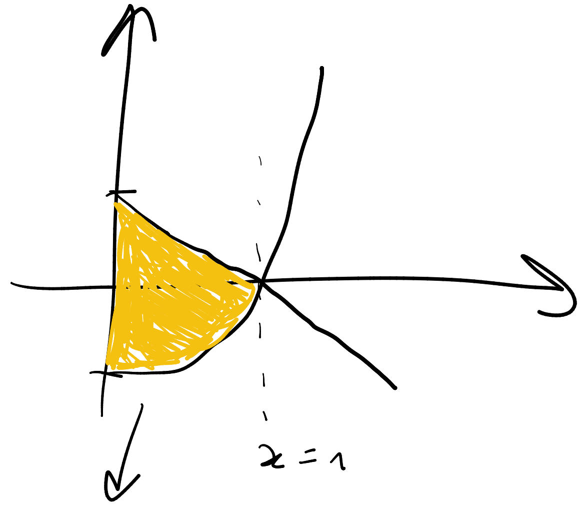
$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant x^2 - 1, \quad y \leqslant 1 - x.$$ $\to 0 = 1 - x \iff x = 1$

$\to 0 = x^2 - 1 \iff$
$\iff x^2 = 1$
$x = \pm 1$

Esboce A e calcule a sua área.

Resolução: Esboço do conjunto A:





$$A_A = \int_0^1 \left[(1-x) - (x^2-1)\right] dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

Notando que as curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x$ intersectam-se no ponto $(1, 0)$, concluímos que o conjunto A é determinado pelas condições $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x$. Logo, a sua área é dada por

$$\int_0^1 \big((1-x)-(x^2-1)\big)\,dx = \int_0^1 (2-x-x^2)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

(2 val.) **3.** Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_1^{x^3} \cos(x) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt.$$

Calcule, justificando, $f'(x)$. $= \cos x \int_1^{x^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt$

Como $e^{-\frac{1}{t^2}}$ é contínua em $\mathbb{R}^+$,
e $\cos x$, x^3 e 1 são diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$.
pelo T.F.C.:

$$f'(x) = (\cos x)' \int_1^{x^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt + \cos x \cdot 3x^2 e^{-\frac{1}{x^6}}$$
$$= -\sin x \int_1^{x^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt + 3\cos x\; x^2 e^{-\frac{1}{x^6}}$$

Resolução: A expressão dada é equivalente a

$$f(x) = \cos x \int_1^{x^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt = \cos x \cdot F(x^3)\,,$$

onde $F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é o integral indefinido

$$F(x) = \int_1^{x} e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt.$$

Sendo a função integranda $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos $F'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Pelos teoremas da derivação do produto de funções e da função composta temos então, para $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x)' F(x^3) + \cos x \frac{d}{dx} F(x^3) \\ &= -\operatorname{sen} x \cdot F(x^3) + \cos x \cdot F'(x^3)(x^3)' \\ &= -\operatorname{sen} x \int_1^{x^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt + 3x^2 e^{-\frac{1}{x^6}} \cos x. \end{aligned}$$

4. Determine se as seguintes séries são convergentes:

(1,5 val.) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$

↪ STNN

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!\ 3^n}{(n+1)!\ 3^{n+1}} = \lim \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)} \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$= \frac{1}{3} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} e < 1$, logo é convergente $(a_n > 0)$

Resolução: Seja $a_n = \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$. Tratando-se $\sum a_n$ de uma série de termos não negativos, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot 3^n}{n^n (n+1)! \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{3} < 1,$$

logo, pelo critério de D'Alembert, a série converge.

(1,5 val.) (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[3]{n}+1}{n+\sqrt{n}}}}_{a_n}$

$\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[3]{n}}{n}}}_{b_n} = n^{\frac{1}{3}-1} = n^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ ↪ convergente

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sqrt[3]{n}+1}{n+\sqrt{n}} \cdot \sqrt[3]{n^2} = \lim \frac{n + n^{\frac{2}{3}}}{n+\sqrt{n}} = \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} = 1 \neq 0, +\infty.$

logo a_n e b_n têm o mesmo comprimento

Logo, como b_n converge, a_n converge pelo

Resolução: Sejam $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}+1}{n+\sqrt{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$. Temos critério da comparação

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n + n^{\frac{2}{3}}}{n + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \in \mathbb{R}^+,$$

e logo, as séries de termos não negativos $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ têm a mesma natureza: são ambas divergentes.

(1,5 val.) (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cos(n^2)}{3^n}$

Não é STNN

Série dos módulos: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \underbrace{\boxed{\frac{2^n |\cos n^2|}{3^n}}}_{m_n} \leq \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{2^n}{3^n}}_{b_n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ → convergente,

Logo, como $m_n \leq b_n$, m_n é convergente e a_n é absolutamente convergente

Resolução: Trata-se de uma série em que os termos podem assumir tanto valores positivos como negativos. Tentemos usar o critério da convergência absoluta.

Seja $a_n = \frac{2^n \cos(n^2)}{3^n}$. Como $|a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma série geométrica convergente, a série $\sum_n a_n$ é absolutamente convergente e portanto é convergente.

5. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada, para cada $x \in D$, por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{3^n \cdot (n+1)},$$

→ centrado em $x = 0$

→ Alternada

sendo $D \subset \mathbb{R}$ o maior intervalo aberto tal que a série de potências anterior é convergente se $x \in D$.

$R = \left|\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\cancel{3}^{n+1}(n+1+1)}{\cancel{3^n}(n+1)} = 3 \lim \frac{n+2}{n+1} = 3 \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} = 3$

Logo o maior intervalo aberto é $x \in]-3, 3[$

(1,5 val.) (a) Determine D.

Resolução: A série de potências centrada em 0 que define f é $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ com $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}n}$. Dado que

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^n(n+1)}{3^{n-1}n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3,$$

o raio de convergência desta série é 3 e portanto o maior intervalo aberto em que a série é convergente é $]-3,3[$.

(1 val.) (b) Calcule $f^{(10)}(0)$. $\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = a_{10} \iff f^{(10)}(0) = -\frac{10!}{10\cdot 3^9} = -\frac{9!}{9\cdot 3^7} = -\frac{8!}{3^7}$

$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{3^{n-1}\cdot n}$

Resolução: A série de Taylor de f em $x = 0$ é $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Daqui segue que

$$f^{(10)}(0) = 10! a_{10} = \frac{(-1)^9 10!}{3^9 10} = -\frac{9!}{3^9}$$

(1,5 val.) (c) Mostre que, para cada $x \in D$, $f(x) = 3\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$.

Sugestão: Comece por obter a série de Taylor centrada em 0 da função f' a partir da série de potências dada.

Resolução: Pelas propriedades das séries de potências, f é diferenciável em D, onde a sua derivada é dada por

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n x^{n+1}}{3^n \cdot (n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{d}{dx}\left(3\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)\right).$$

Concluímos que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3\ln\left(1+\frac{x}{3}\right) + C$, para todo o $x \in]-3,3[$. Fazendo $x = 0$, obtemos $C = 0$.

f centrada em x

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \cancel{(n+1)}}{3^n \cancel{(n+1)}} x^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{d}{dx} 3\ln\left|1+\frac{x}{3}\right|$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{3}x\right)^n$$

$$\int \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = 3\int \frac{1}{u}\,du = 3\ln|u|$$

let $u = 1+\frac{x}{3}$

$du = \frac{1}{3}dx$

Logo $f(x) = \int f'(x)\,dx =$

$= 3\ln\left|1+\frac{x}{3}\right| + C$

$= 3\ln\left|1+\frac{x}{3}\right|$

centrada em $x=0$

Logo $C = f(0) = a_0 \cdot 0^1 = 0$