Modelagem em Previsão do tempo e clima

Parte 2: as equações do núcleo dinâmico dos modelos

Cláudio Moisés Santos e Silva

Semestre 2015.2

PPGCC/UFRN

Equações que regem a dinâmica da atmosfera

Relembrando o “Modelo de Richardson (1922)”:

- contempla a “dinâmica” de um fluido ideal em coordenadas cartesianas;

- são 6 equações diferenciais parciais (EDP), “prognósticas”, resolvidas a partir de condições iniciais e por meio de diferenças finitas; além de uma equação “diagnóstica”, a equação de estado dos gases ideais;

- são variáveis prognosticadas: 3 componentes do vento, densidade (massa específica) do ar, pressão atmosférica, temperatura;

- o método de solução consiste em:

  - coletar dados de todas as variáveis independestes das equações em um tempo inicial, to, e distribuir os dados em uma “malha” de pontos fixos;
  - usar o método das diferenças finitas como uma aproximação para resolver as derivadas parciais tanto no tempo quanto no espaço;
  - calcular a nova distribuição das variáveis dentro da malha para o tempo posterior, to+Δt;
  - repetir o procedimento anterior;

Leis e princípios físicos usados em um modelo (genérico)

1. Segunda Lei de Newton

$$F_r = \frac{dp}{dt} \qquad (1)$$

❖ O efeito conjunto de forças externas (Fr) provoca uma variação no tempo da quantidade de movimento (p) de um sistema mecânico.

$$p = m.V \qquad (2)$$

❖ Quantidade de movimento: é uma “massa se movendo”

$$F_r = \frac{dm}{dt}V + m\frac{dV}{dt}$$

❖ Substituindo 2 em 1 e aplicando a derivada do produto

$$F_r = m\frac{dV}{dt}$$

❖ Considerando que não há ganho ou perda de massa: sistema fechado

$$\frac{F_r}{m} = \frac{dV}{dt}$$

❖ A variação temporal da velocidade (ou aceleração) pode ser obtida pela soma das forças dividido (normalizada) por unidade de massa do sistema

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

❖ Vetor vento: tridimensional

Vento: é o movimento do ar relativo à superfície da terra

- Campo vetorial: componente zonal (u), meridional (v) e vertical (w)

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \qquad \textbf{(m/s)}$$

- Componente horizontal

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} \qquad \textbf{(m/s)}$$

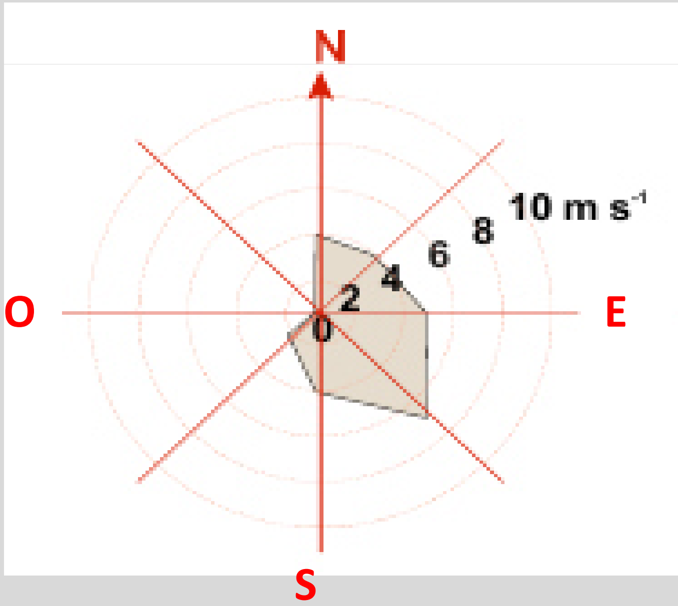
- Velocidade vertical
  - Cartesiana → $W = \frac{dz}{dt}$ **(m/s)**
  - Isobárica → $\omega = \frac{dP}{dt}$ **(hPa/s)**

- Velocidade horizontal

$$|V| = \left(u^2 + v^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Direção do vento: “de onde ele vem”
- Referência: Norte geográfico

$$direção = actg\left(\frac{v}{u}\right)$$

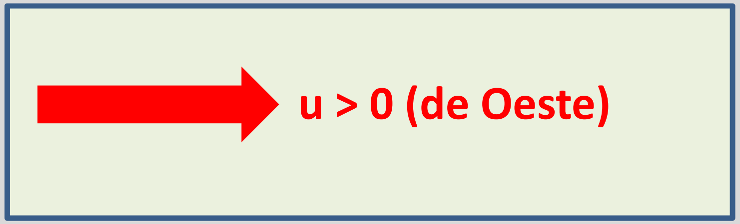


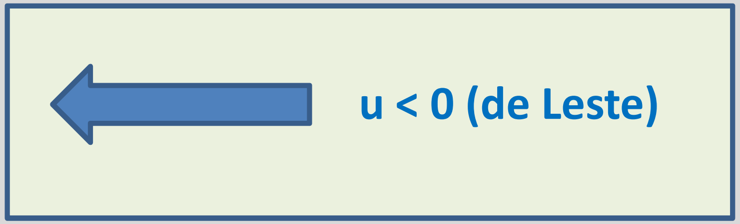
Convenção:

- **dir = 0º (vento calmo, V = 0)**
- **dir = 360º (vento de Norte)**

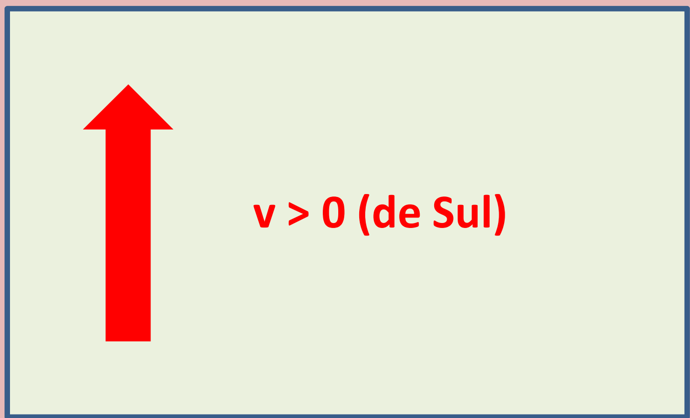
Análise do sinal do vento horizontal por componente

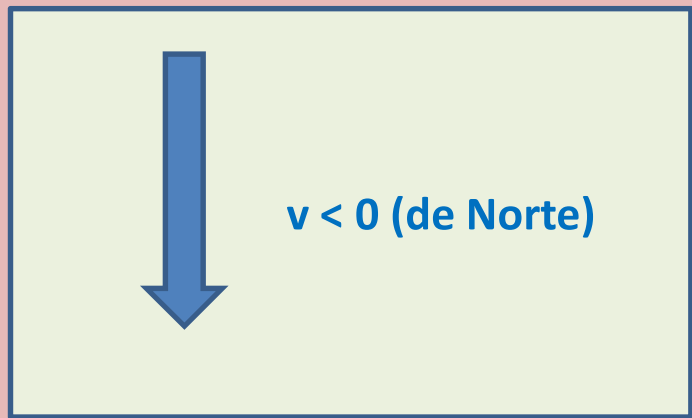
- Componente zonal (u): **negativa** quando é **de Leste** e **positiva** quando é **de Oeste**





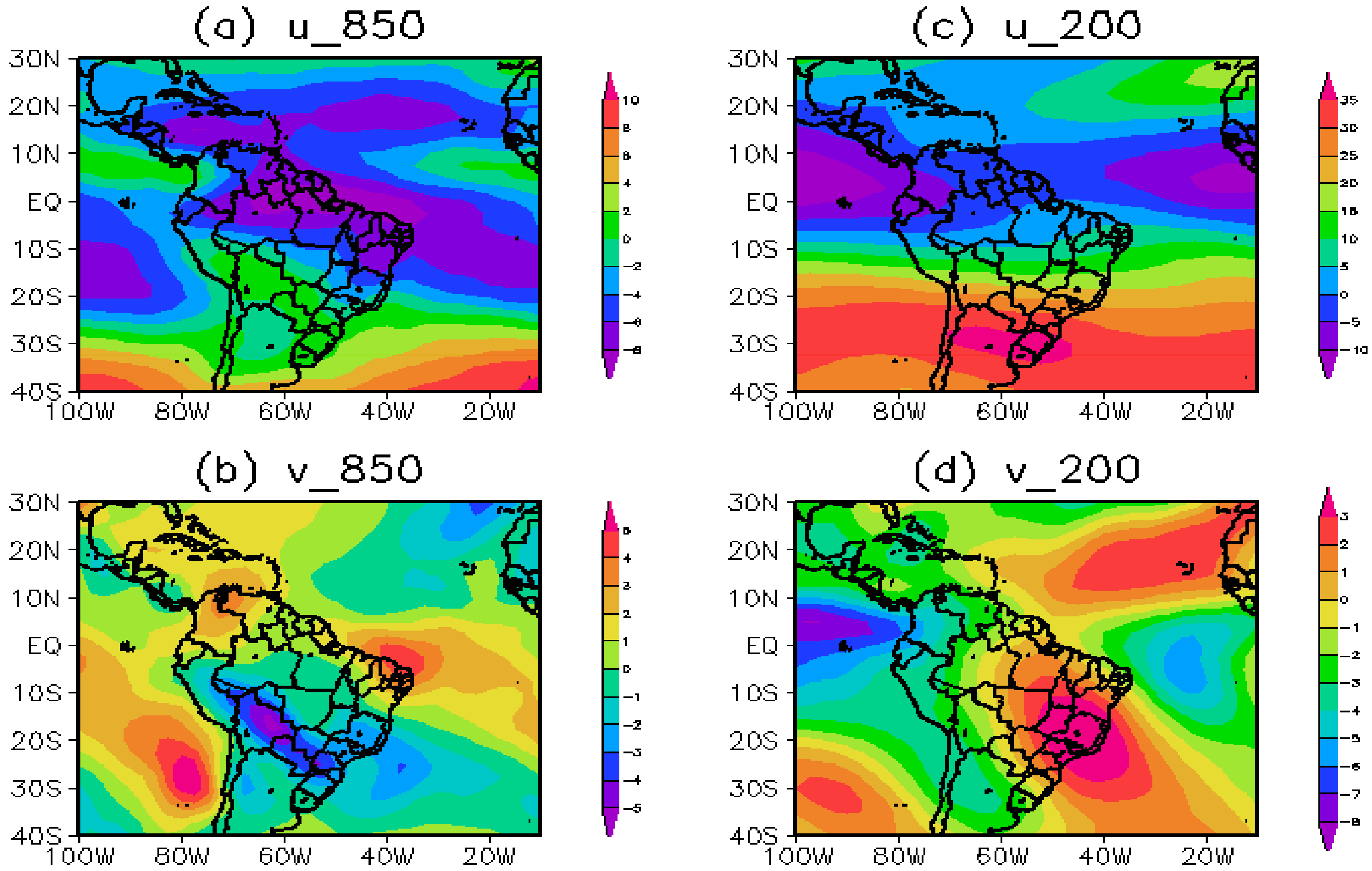
- Componente meridional (v): **negativa** quando é **de Norte** e **positiva** quando é **de Sul**





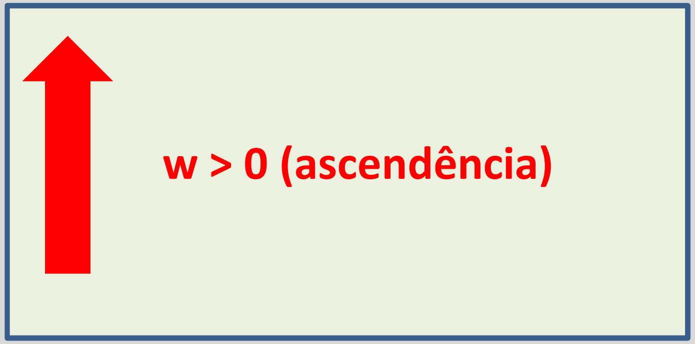
u – vento zonal (leste-oeste); v – vento meridional (norte-sul)

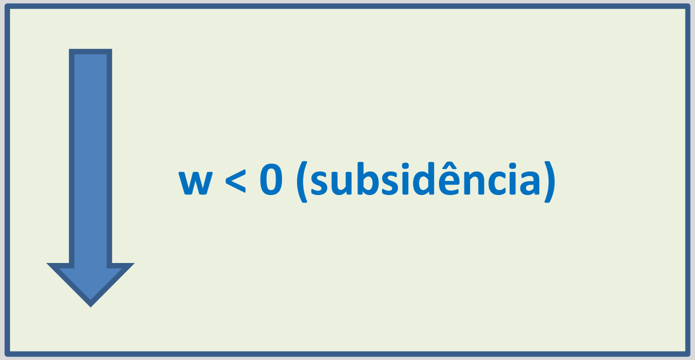
Exemplo: climatologia (1979-2014) de setembro



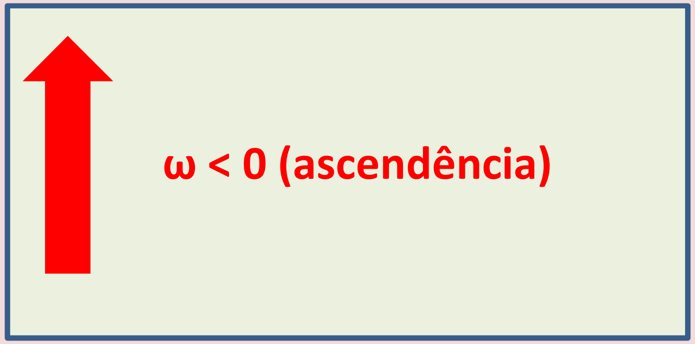
Análise do sinal do vento vertical por sistema de coordenada

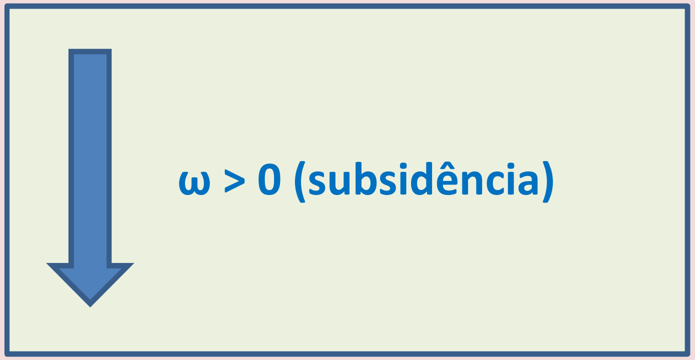
• Coordenada cartesiana (w): **negativa** quando o vento aponta **para baixo** e **positiva** quando aponta **para cima**



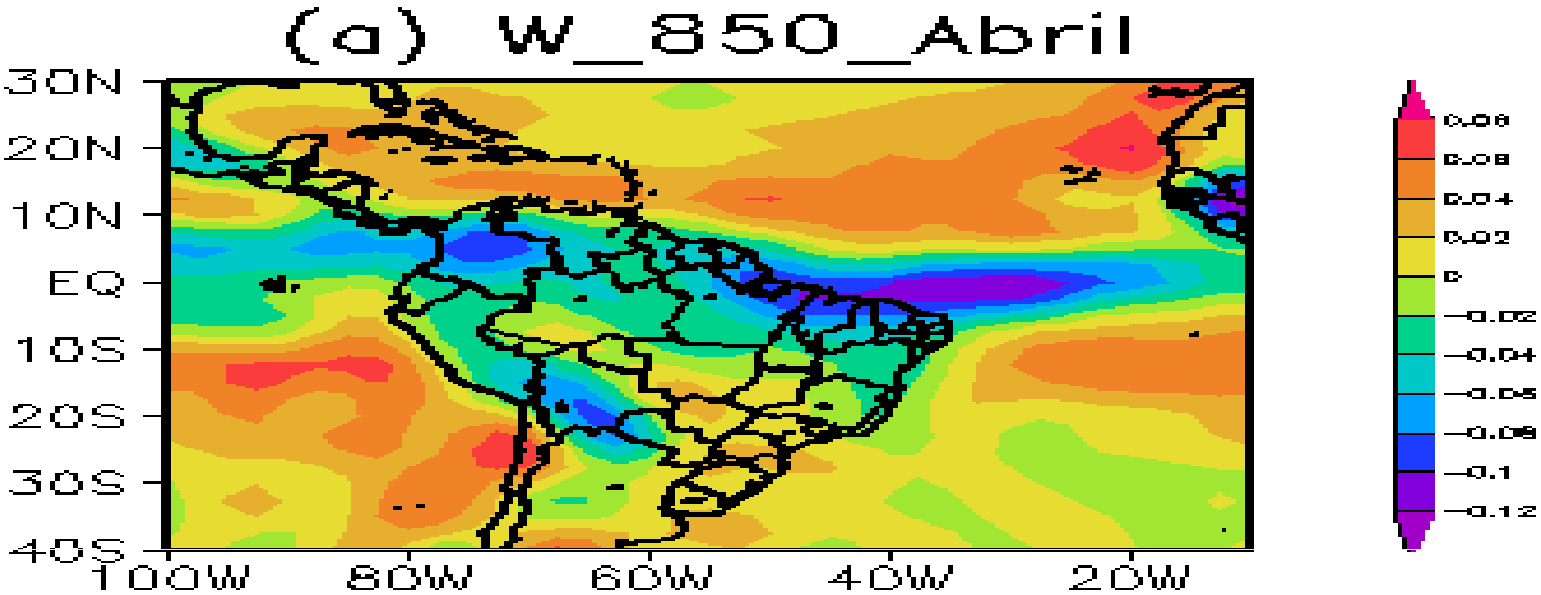


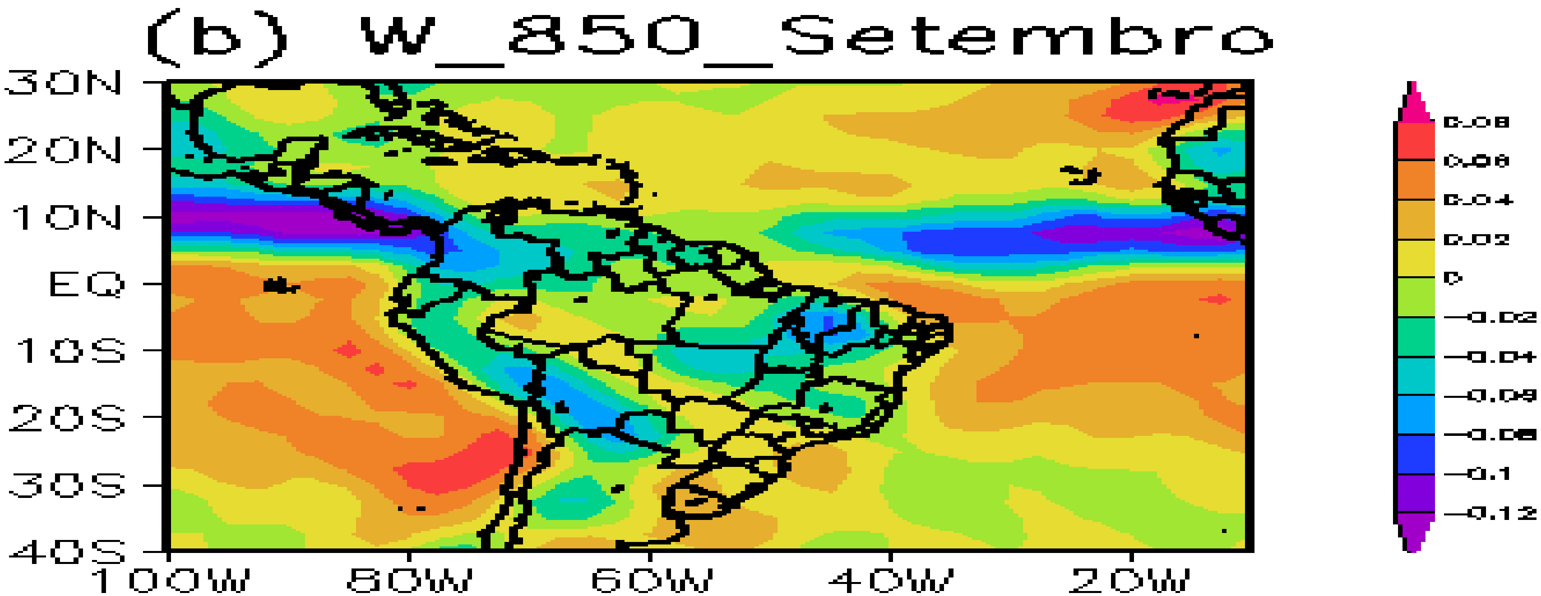
• Coordenada isobárica (ω): **negativa** quando o vento aponta **para cima** e **positiva** quando aponta **para baixo**





Vento vertical (ω) em coordenadas isobáricas





Segunda Lei de Newton “nas direções x, y, z”

Horizontal

Aceleração devido a fenômenos de transporte: “advecção”, convecção

Aceleração devido à força do gradiente de pressão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Aceleração local: “derivada local”

Aceleração devido ao efeito de Coriolis

Vertical

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \boxed{g} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Aceleração devido à força de atração gravitacional

- Usando o conceito de derivada total (ou derivada substantiva ou derivada material);

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

- Calculando o efeito de Coriolis: função da latitude e da velocidade de rotação da terra;

- Incluindo a desaceleração devido ao atrito (tensão de cisalhamento)

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v sen(\varphi) + F_{rx} \\[2em] \dfrac{Dv}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u sen(\varphi) + F_{ry} \\[2em] \dfrac{Dw}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + g + F_{rx} \end{cases}$$

Efeitos do atrito no escoamento

Ω a velocidade de rotação da terra ($7{,}259\times10^{-5}$rad/s); ϕ é a latitude

2. Conservação de massa: equação da continuidade

Advecção: transporte horizontal

Transporte vertical

Divergência de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u\frac{\partial \rho}{\partial x} - v\frac{\partial \rho}{\partial y} - w\frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho_o\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Variação local da massa específica do ar

$$\rho_o = \frac{m}{v}\ (kg/m^3)$$

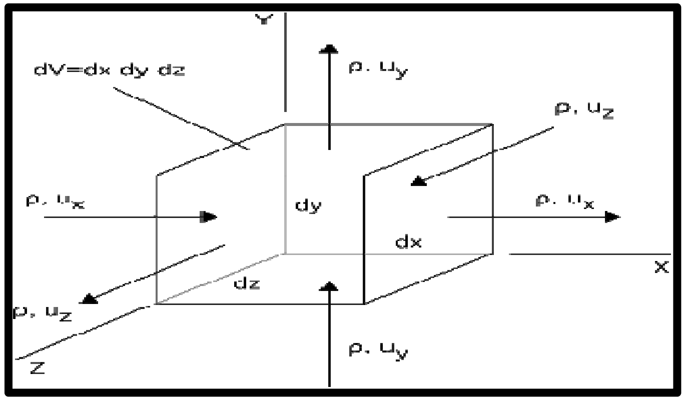
$$\frac{1}{\rho_o}\frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

Usando o conceito de derivada total: a variação total de massa é compensada pela divergência do fluxo.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

Para fluidos incompressíveis: a variação no tempo da umidade específica é nula.

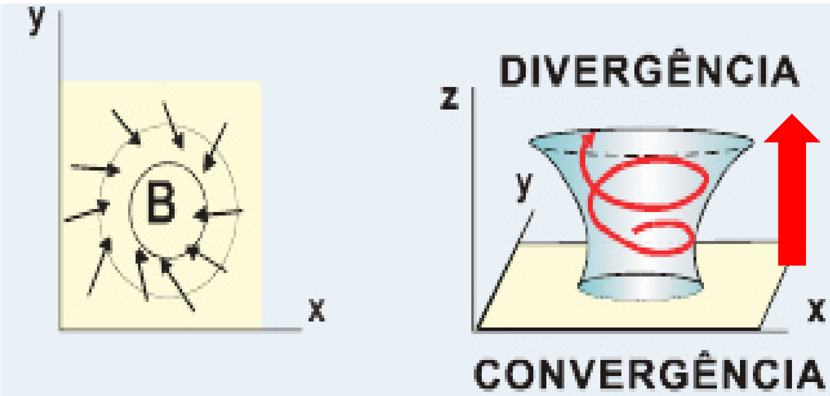
2. Conservação de massa: interpretação física e aplicação em meteorologia

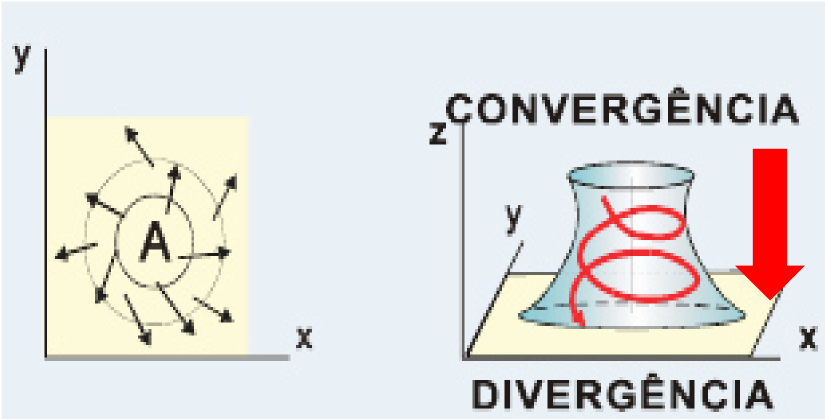


Fisicamente reflete o balanço entre os fluxos que "entram" e "saem" nas três direções. Ou seja, não é possível criar nem destruir a massa no volume de controle, apenas transportá-la de um lado para outro.

Em meteorologia/modelagem existem muitas aplicações, uma das mais conhecidas são os movimentos de escala sinótica em torno de centros de pressão.

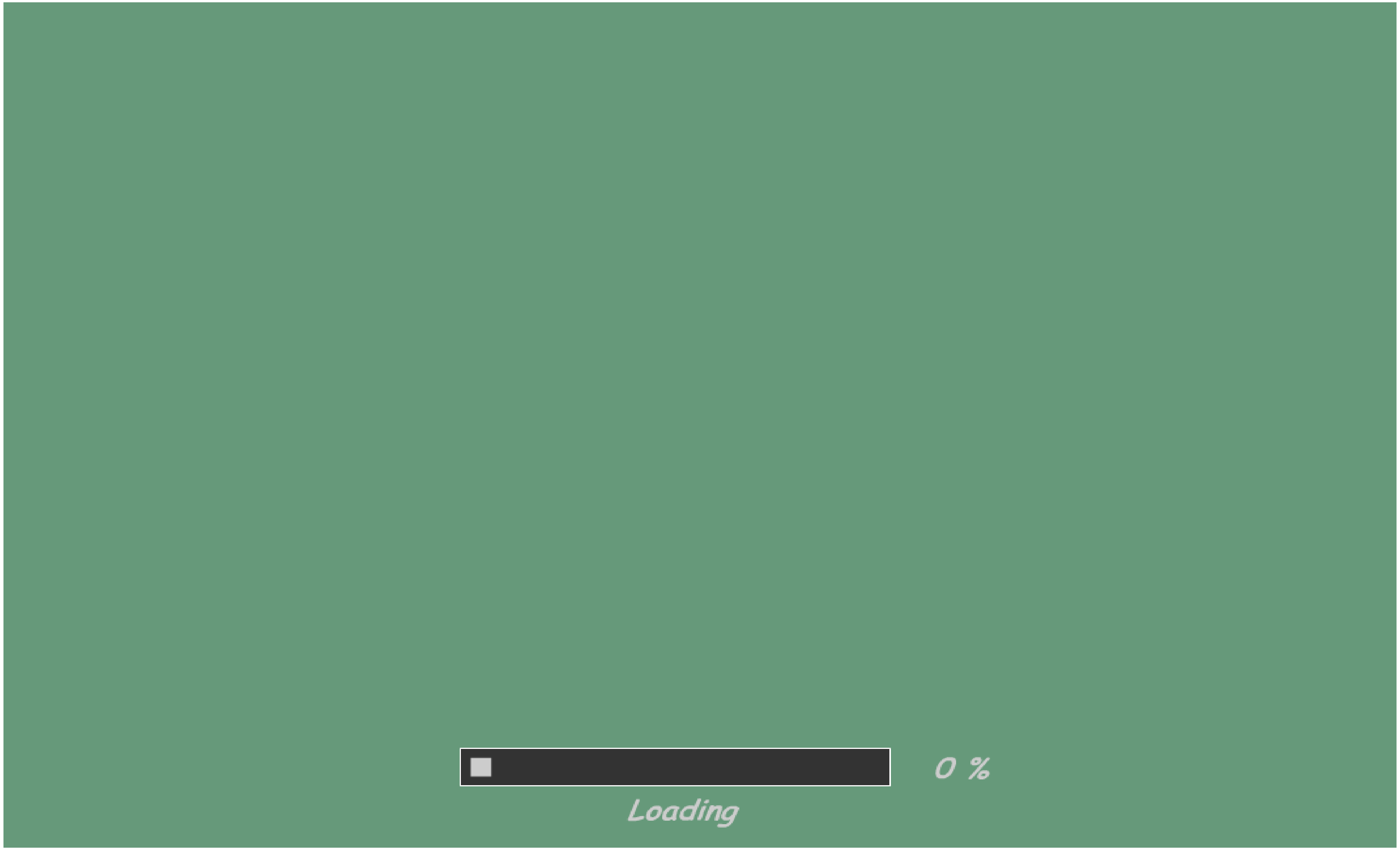
Exemplo: Circulação ciclônica e anti-ciclônica no Hermisfério Sul





Fonte: Varejão-Silva (2006)

Ciclones (baixa pressão) e anticiclones (alta pressão)
L (low) e H (high)



3. Equação da energia termodinâmica

$$dq = c_v dT + p d\alpha$$

❖ Primeira Lei da termodinâmica

$$c_v dT + p d\alpha = c_p dT - \alpha dp$$

❖ Pode ser escrita dessa forma
❖ ver Holton (2006)

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \omega\frac{\partial T}{\partial p}\right) - \alpha\omega = J$$

❖ Usando derivada total
❖ ver Holton (2006)

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Variação local de temperatura}} + \overbrace{\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right)}^{\text{Variação local de temperatura}} - \underbrace{S_p\,\omega}_{\text{Transporte vertical de calor}} = \overbrace{\frac{J}{c_p}}^{\text{Fontes ou sumidouros de calor}}$$

Variação local de temperatura

Fontes ou sumidouros de calor

Variação local de temperatura

Transporte vertical de calor

$$S_p \equiv \frac{RT}{c_p p} - \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial p}$$

$$p = \alpha R T$$

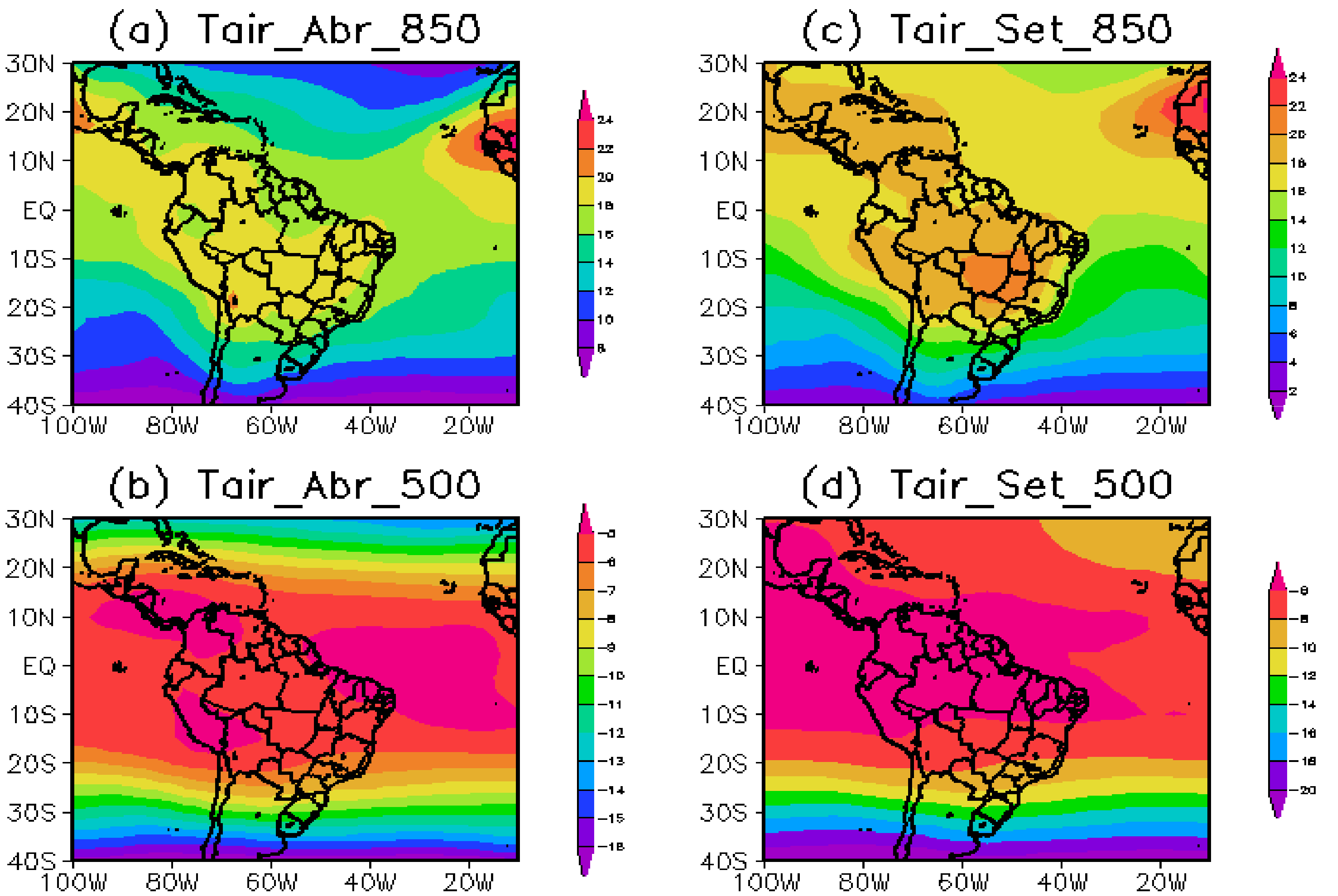
Eq. de Estado dos gases perfeitos

$$\theta = T\left(\frac{p_o}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Temperatura potencial

Cv – calor específico a volume constante; Cp – calor específico a pressão constante; R – constante do ar (considerado como gás ideal); ω velocidade vertical em Pa/s; J – fontes de calor; α – volume específico.

Temperatura do ar em diferentes níveis verticais



O conjunto de “equações primitivas”: núcleo dinâmico do modelo

Prognóstico

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v sen(\varphi) + F_{rx}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u sen(\varphi) + F_{ry}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g + F_{rx}$$

Vento

$$\frac{1}{\rho_o}\frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

Conservação de “massa”: umidade, poluição etc.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - S_p\,\omega = \frac{J}{c_p}$$

Temperatura (energia)

$$p = \alpha R T$$

Pressão: diagnóstico

sendo: $$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Questões importantes

- as variáveis "dinâmicas" do modelo são: u (m/s), v (m/s), w(m/s), q ("massa")(g/m3), T (K), P (hPa);
- são 6 variáveis e 6 equações; portanto, o sistema não é inconsistente;
- em alguns modelos a equação da energia termodinâmica é escrita em termos da derivada parcial da pressão, sendo assim a pressão é prognosticada;
- as equações do núcleo dinâmico do modelo são não-lineares e não possuem solução geral analítica; portanto, devem ser resolvidas através de métodos numéricos;
- quaisquer outras variáveis que se pretende prever ou simular devem ser função dessas cinco. Esse procedimento é chamado de "parametrização";
- além das parametrizações é necessário que essas equações sejam "influenciadas" pelas condições de contorno. Esse procedimento é, normalmente, chamado de "acoplamento".