Modelagem em Previsão do tempo e clima

Parte 3:

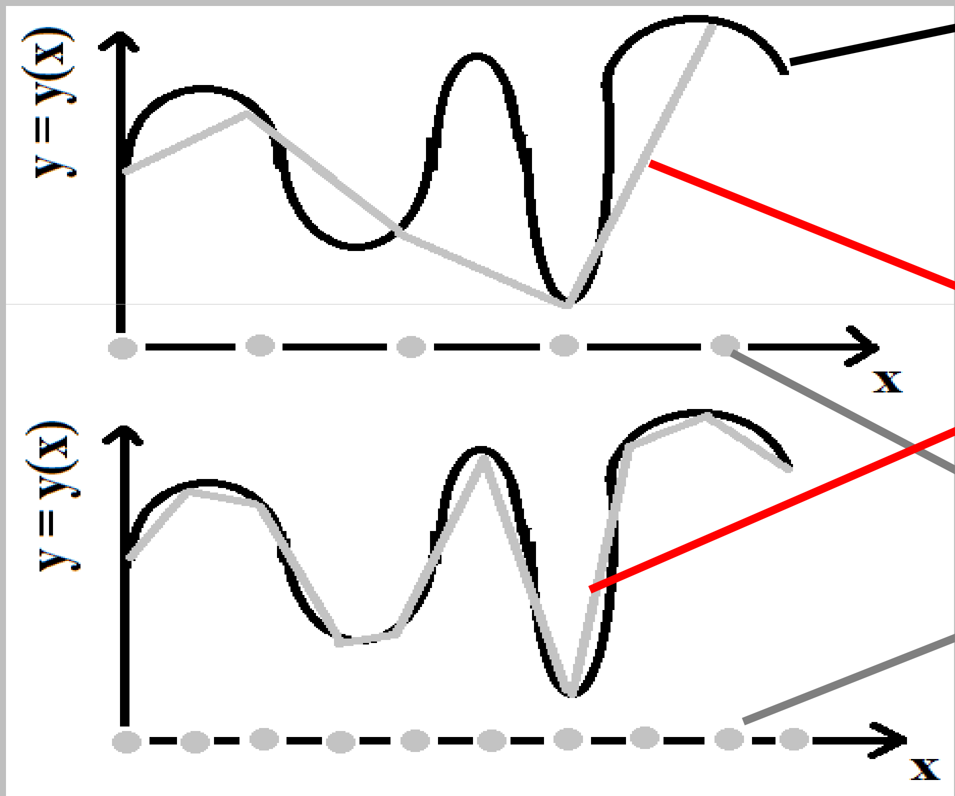
- **Método de diferenças finitas**
- **Grades de Arakawa**
- **Coordenadas verticais (pesquisa)**

Cláudio Moisés Santos e Silva

Semestre 2015.2

PPGCC/UFRN

Método de diferenças finitas: usado para aproximar derivadas (parciais em nosso caso) de funções contínuas, através de pontos discretos.



y=y(x) **é contínua para esse domínio, pois os limites laterais convergem para o mesmo valor em cada ponto do domínio.**

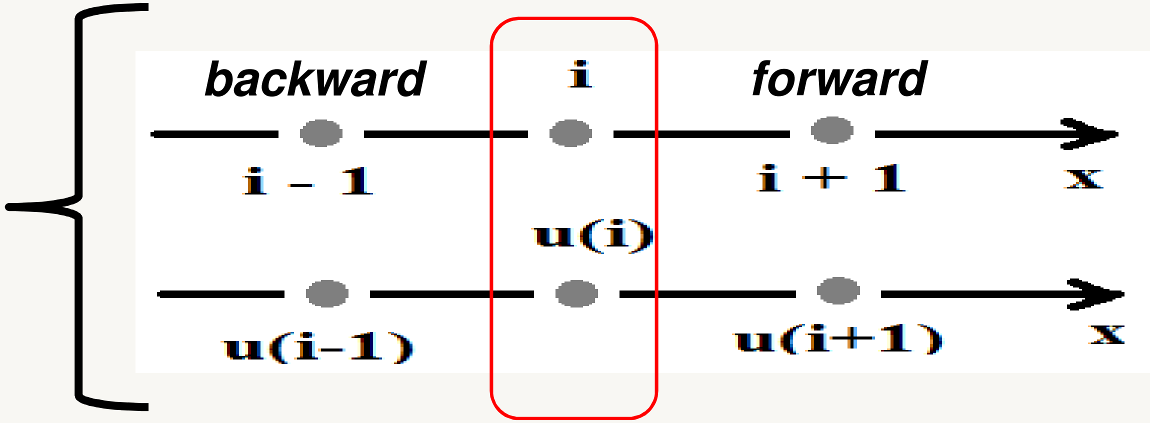
y=y(x) **representada através de pontos discretos**

Pontos de grade

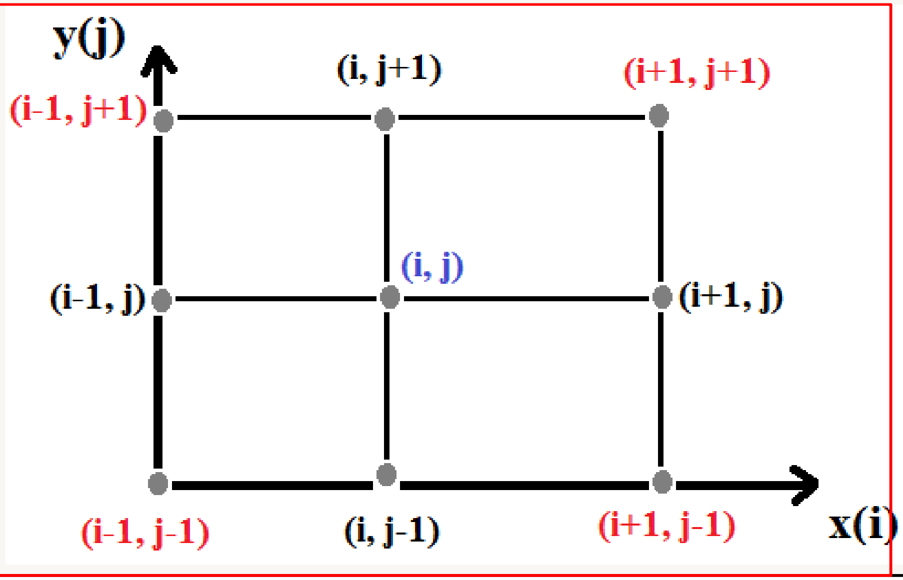
Em que situação a representação discreta representa melhor a curva y = y(x) ?

Representação em pontos de grade: definição de "malhas" (ou grades)

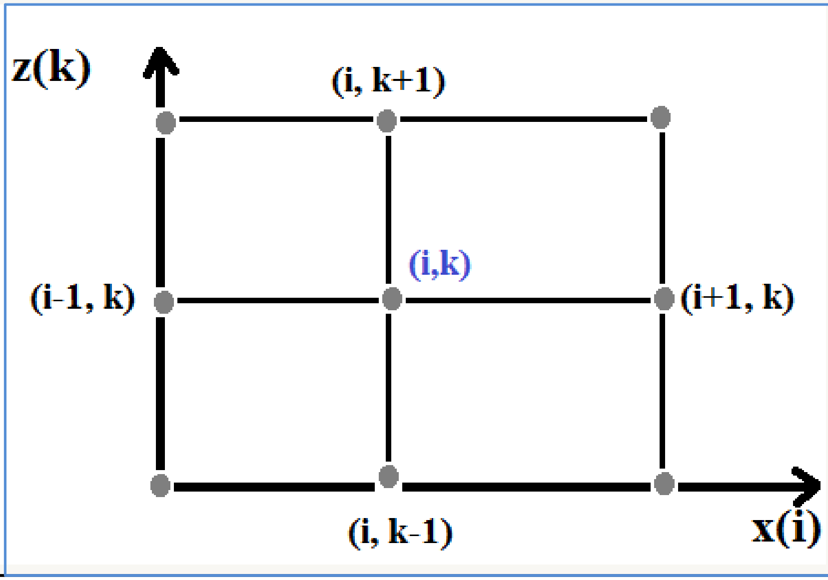
Unidimensional



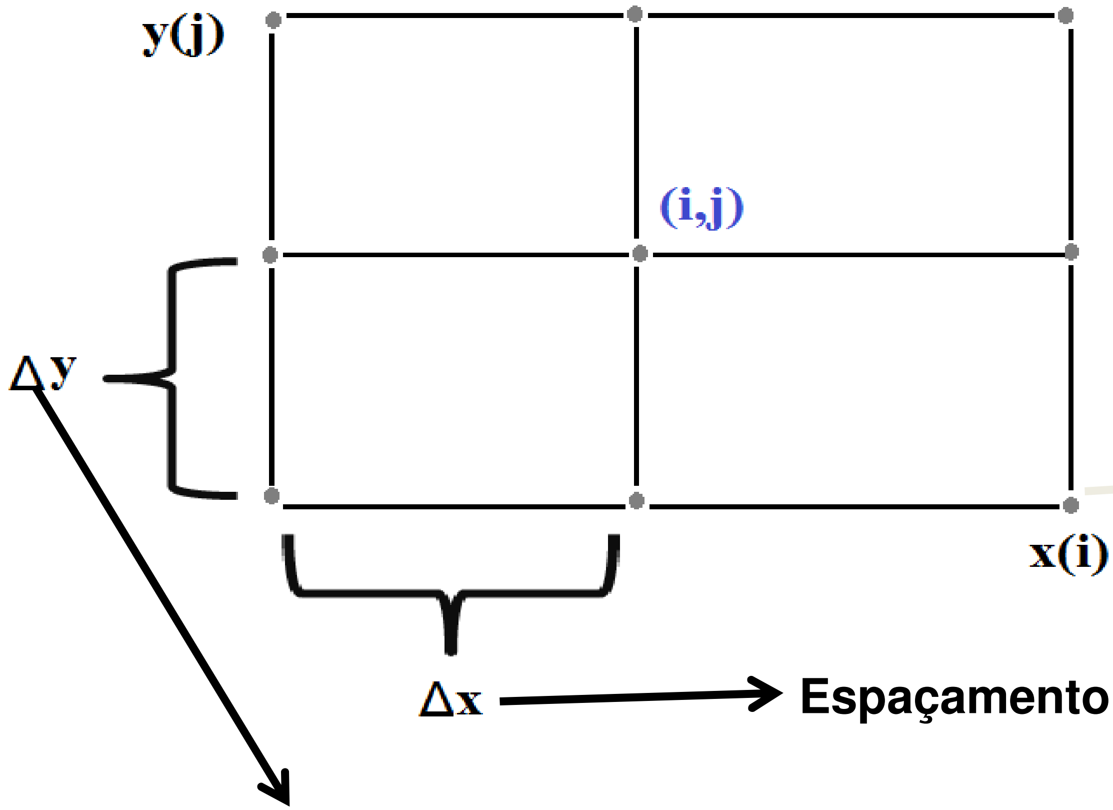
Bidimensional (x,y)



Bidimensional (x,z)



Termos usados em meteorologia



forward

$$\Delta x = \boxed{x_{i+1} - x_i} = \boxed{x_i - x_{i-1}}$$

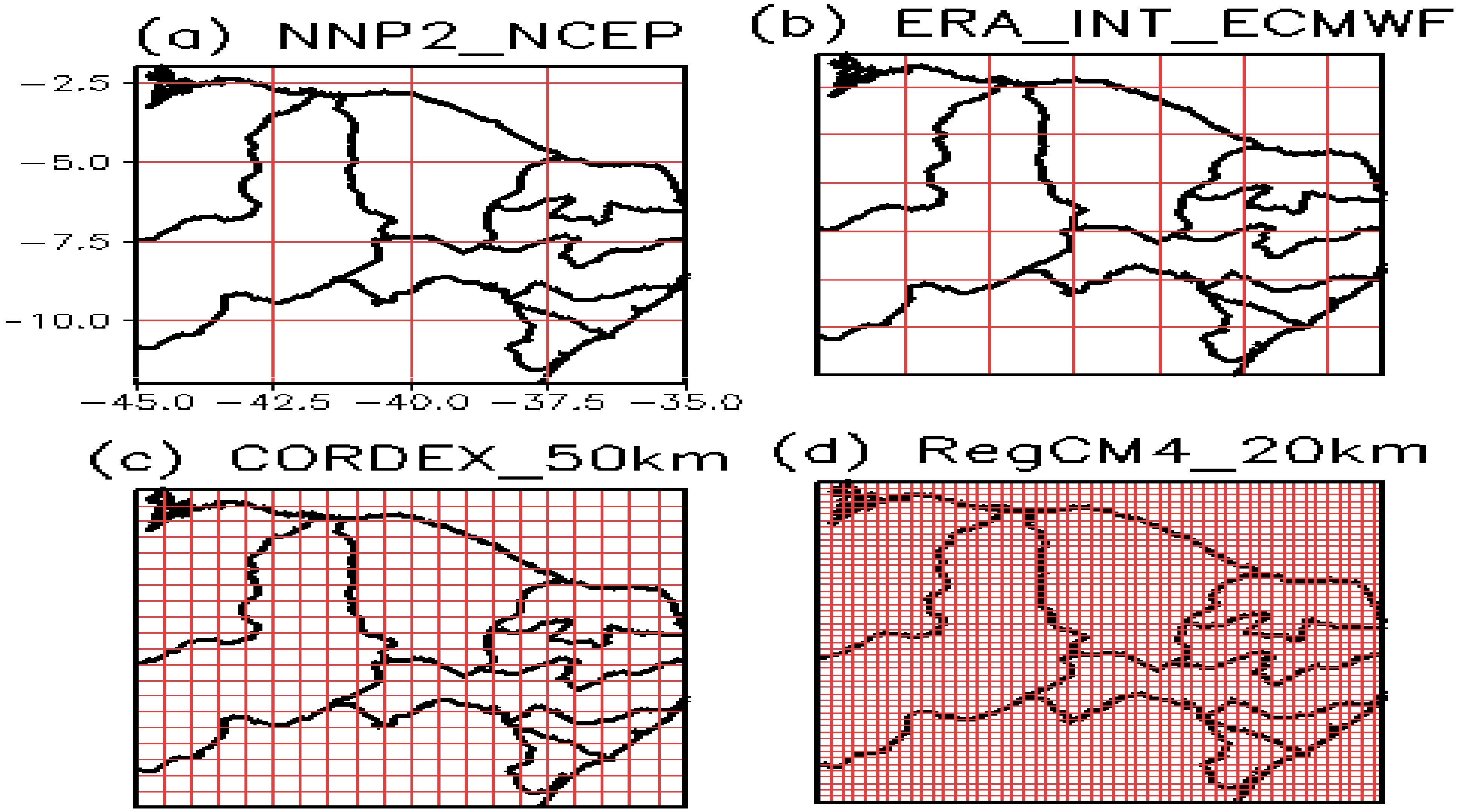
$$\Delta y = \boxed{y_{j+1} - y_j} = \boxed{y_j - y_{j-1}}$$

backward

Sendo: nx – número de pontos na direção zonal
ny – número de pontos na direção meridional

Domínio zonal : nx*Δx
Domínio meridional : ny*Δy

Exemplo: diferentes espaçamentos e número de pontos de grade para representar um mesmo domínio



Quanto maior o detalhamento, maior a necessidade de cálculos

Brevíssima fundamentação matemática

❖ Seja *f* uma função infinitamente diferençiável em um ponto x_o então é possível escrever uma série que é uma soma infinita de polinômios em torno do ponto x_o na forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

Em que $f^{(n)}$ é a n-ésima derivada da função *f*

Teorema: seja *f* indefinidamente diferenciável numa vizinhança de um ponto x_o. Se existirem um número real, M, e uma vizinhança $V(x_o)$ tais que, para cada x ε $V(x_o)$ e para cada inteiro positivo *n* se tenha $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$

Então *f* é igual à série de Taylor em torno de *a* para todo o x ε $V(x_o)$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

Ou seja, é possível reescrever uma função através de uma soma infinita de polinômios em torno de um ponto conhecido

❖ Fórmula de Taylor: para os casos em que não há “infinitas” derivadas, mas apenas *n* derivadas no ponto x_o, então é possível reescrever a série de Taylor através da fórmula

$$\boxed{f(x) = f(x_o) + (x - x_o)f'(x_0) + \frac{(x - x_o)^2}{2!}f''(x_o) + \ldots + \frac{(x - x_o)^n}{n!}f^{(n)}(x_o) + r_n(x)}$$

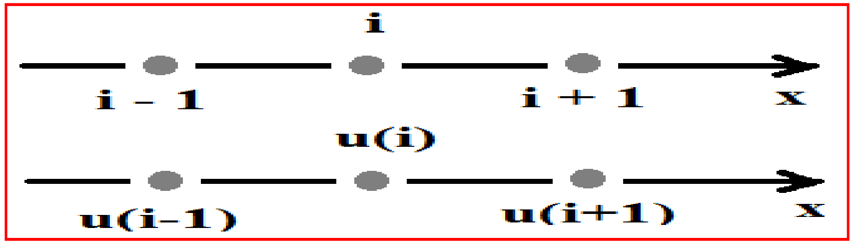
$$f(x) = \underbrace{\boxed{f(x_o)}}_{\text{Valor inicial}} + (x - x_o)\underbrace{\boxed{f'(x_0)}}_{\text{Primeira derivada}} + \underbrace{\boxed{\frac{(x - x_o)^2}{2!}f''(x_o) + \ldots + \frac{(x - x_o)^n}{n!}f^{(n)}(x_o) + r_n(x)}}_{\text{Termos de ordem “superior”}}$$

Desprezado os termos de ordem “superior”

$$x = x_o + \Delta x$$

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_o)}{(x - x_o)} = f'(x_0) = \frac{\partial f(x_o)}{\partial x}}$$

❖ Aplicação: caso unidimensional



$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$ ❖ Adiantado

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}$$ ❖ Atrasado

$$2\Delta x = x_{i+1} - x_{i-1}$$ ❖ Centrado (centralizado)

❖ **Diferenças**

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}$$ ❖ Adiantado

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$ ❖ Atrasado

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x}$$ ❖ Centrado (centralizado)

❖ **Derivadas**

❖ **Aplicação: caso tridimensional, equação da continuidade para fluidos ideais**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

❖ **Adiantado**

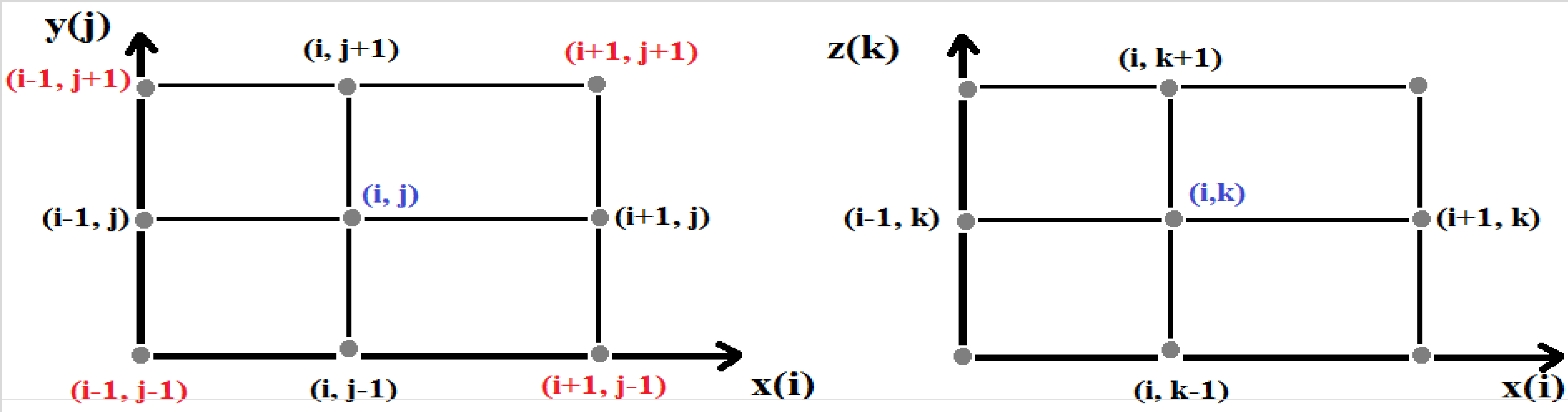
$$\left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta z}\right) = 0$$

❖ **Centrado**

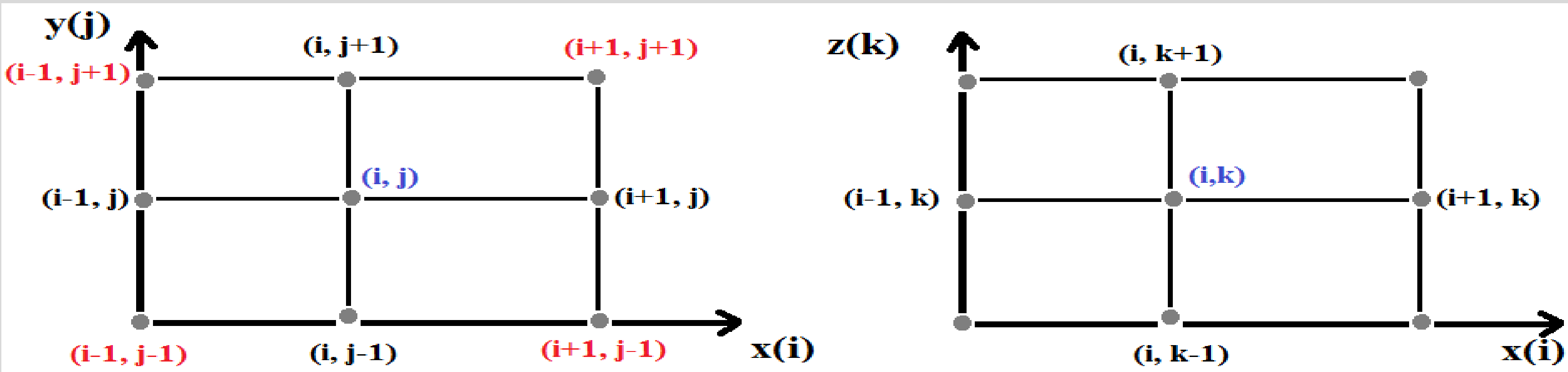
$$\left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) = 0$$

❖ Variação no tempo

Tempo 1 = n



Tempo 2 = n + 1



❖ Aplicação: incluindo a variação no tempo, equação da advecção unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

❖ Equação do movimento na direção zonal

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} \cancel{- v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}$$

❖ Desprezando esses termos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

❖ A aceleração é devida unicamente ao transporte horizontal de "momento" com velocidade constante, *c*.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c_i^n\left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right)$$

❖ Em diferenças finitas adiantada no tempo e no espaço

❖ n é o tempo

❖ Aplicação: incluindo a variação no tempo, equação da advecção unidimensional

Valor inicial

Diferença no espaço

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \boxed{\frac{c_i^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)}$$

Tendência devido à advecção

Previsão

Critério de instabilidade computacional: número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

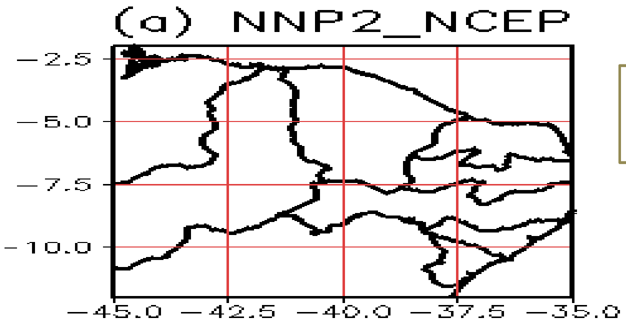
❖ Pontos importantes sobre o CFL

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c_i^n \Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

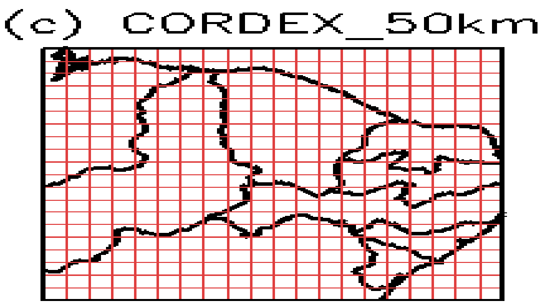
❖ o CFL serve para evitar que o termo de tendência supere em ordem de grandeza o valor inicial;

❖ tipicamente não pode ultrapassar o valor de 1; logo: $\frac{c_i^n \Delta t}{\Delta x} \leq 1$

❖ implicações quanto ao tempo de processamento;



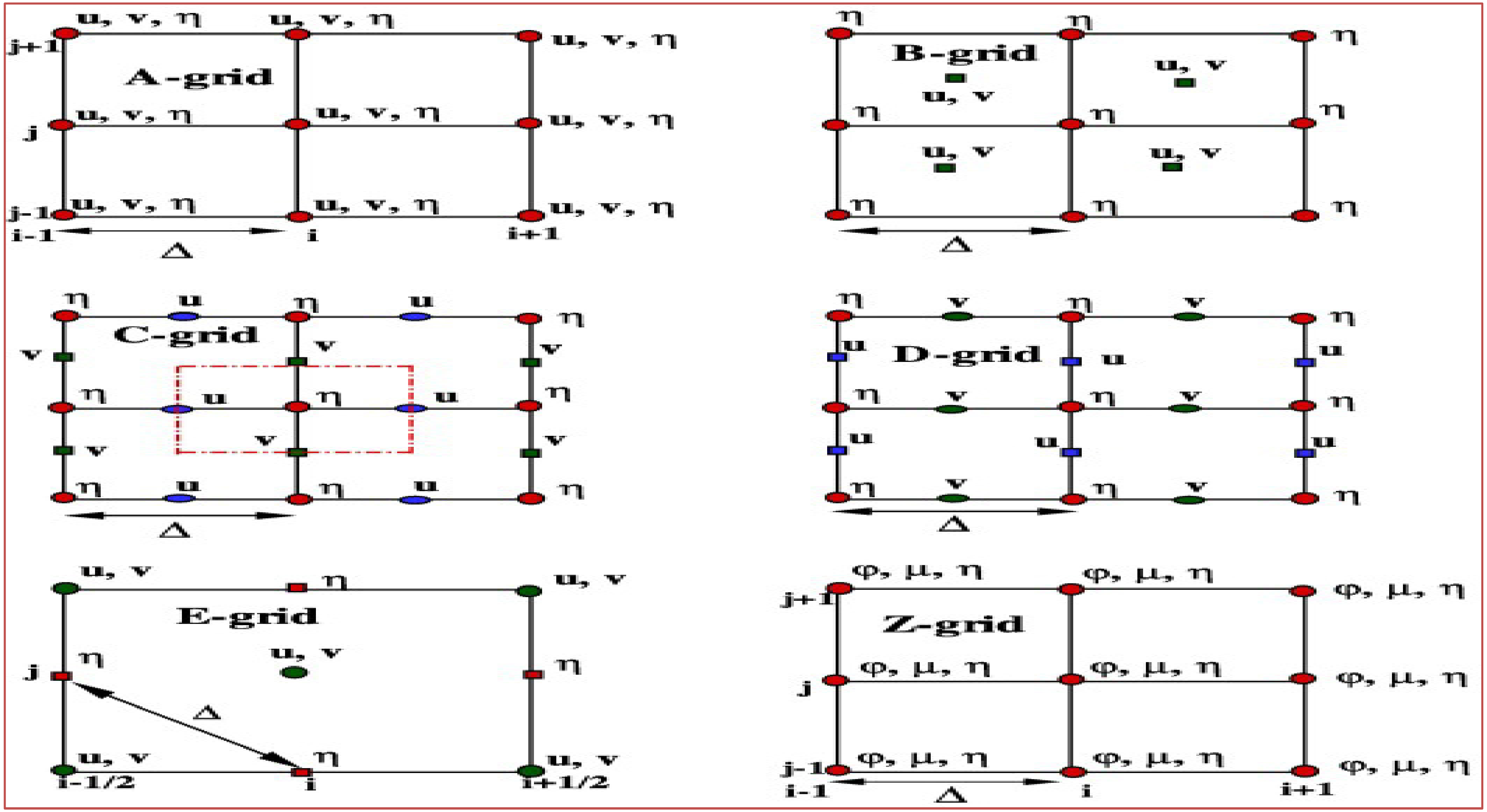
Δx = Δy = 250 km



Δx = Δy = 50 km

dx (m)	dt (s) (c = 10 m/s)	dt (s) (c = 40 m/s)
250000	25000	625
220000	22000	550
190000	19000	475
160000	16000	400
130000	13000	325
100000	10000	250
70000	7000	175
40000	4000	100
10000	1000	25

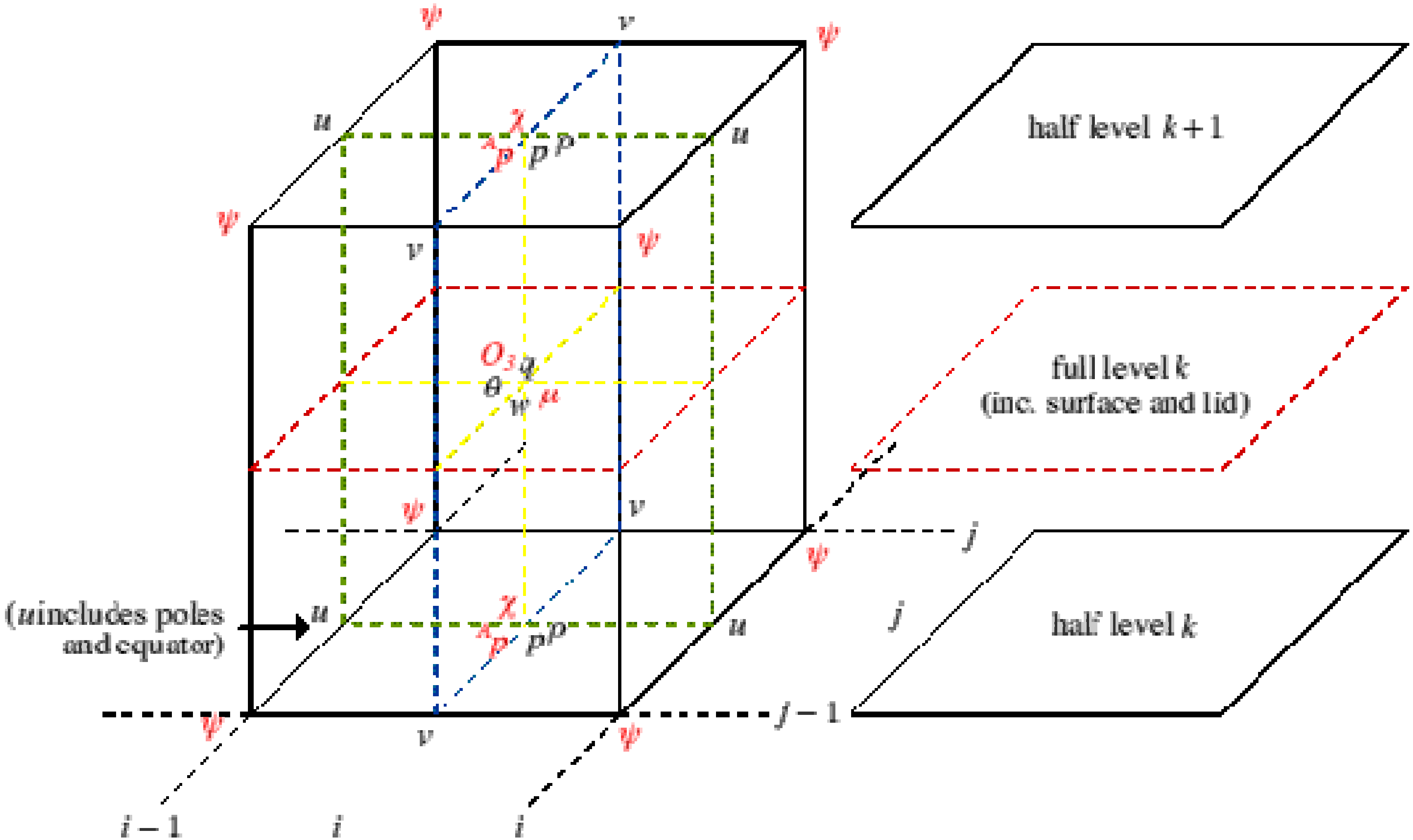
❖ Diferentes métodos de dicretização em modelos dinâmicos: as grades de Arakawa: seja u, v: vento horizontal; η: massa, temperatura, pressão



Fonte: https://trac.mcs.anl.gov/projects/parvis/wiki/Discretizations

Plano vertical: exemplo com a Grades C de Arakawa

Legendas = u, v: vento horizontal / ψ, χ, λ, θ: massa, temperatura, pressão



Fonte: http://www.met.rdg.ac.uk/~ross/DARC/Grids.html

Trabalho de pesquisa: (30% da primeira avaliação)

1 – Apresentar os diferentes esquemas de discretização usados no método de diferenças finitas.

- **Deve-se escolher uma das equações do núcleo dinâmico dos modelos de tempo e clima (Aula 2) e aplicar os esquemas de discretização.**

2 - Pesquisar e entregar um material impresso, de no mínimo 5 e no máximo 10 páginas sobre os diferentes tipos de sistemas de coordenadas verticais usadas em modelos dinâmicos de tempo e clima

- **Deve-se apresentar definições matemáticas;**
- **É importante trazer figuras e exemplos;**
- **Deve-se apontar as vantagens e as desvantagens;**
- **Falar do tipo de coordenada vertical especificamente sobre o modelo RegCM4 (que será usado nos exercícios práticos);**