Die Normalverteilung

Eine Präsentation von Luis

→

Definition

Eine **stetige Zufallsvariable** $\boldsymbol{X}$ ist normalverteilt mit dem ***Erwartungswert*** $\boldsymbol{\mu}$ und der ***Varianz*** $\boldsymbol{\sigma^2}$, wenn X die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte hat:

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mu \in \mathbb{R}$$

$$\sigma^2 \in \mathbb{R} \wedge \sigma^2 > 0$$

Kennzeichnung, dass X normalverteilt ist: $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$

Aufgabe 1

Gib jeweils jeweils begründet an, ob es sich um eine **valide** Normalverteilung handelt. Wenn dies zutreffen sollte, gib zusätzlich Erwartungswert, Standardabweichung und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ an.

- $X \sim \mathcal{N}(0, 4)$
- $Y \sim \mathcal{N}(-4, 16)$
- $Z \sim \mathcal{N}(16, -4)$
- $O \sim \mathcal{N}(2, 0)$

Lösung:

- X ist normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 2$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$
- Y ist normalverteilt mit $\mu = -4$ und $\sigma = 4$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+4}{4}\right)^2}$
- Z ist nicht normalverteilt, da für eine Normalverteilung $\sigma^2 > 0$ gelten muss
- O ist nicht normalverteilt, da für eine Normalverteilung $\sigma^2 > 0$ gelten muss

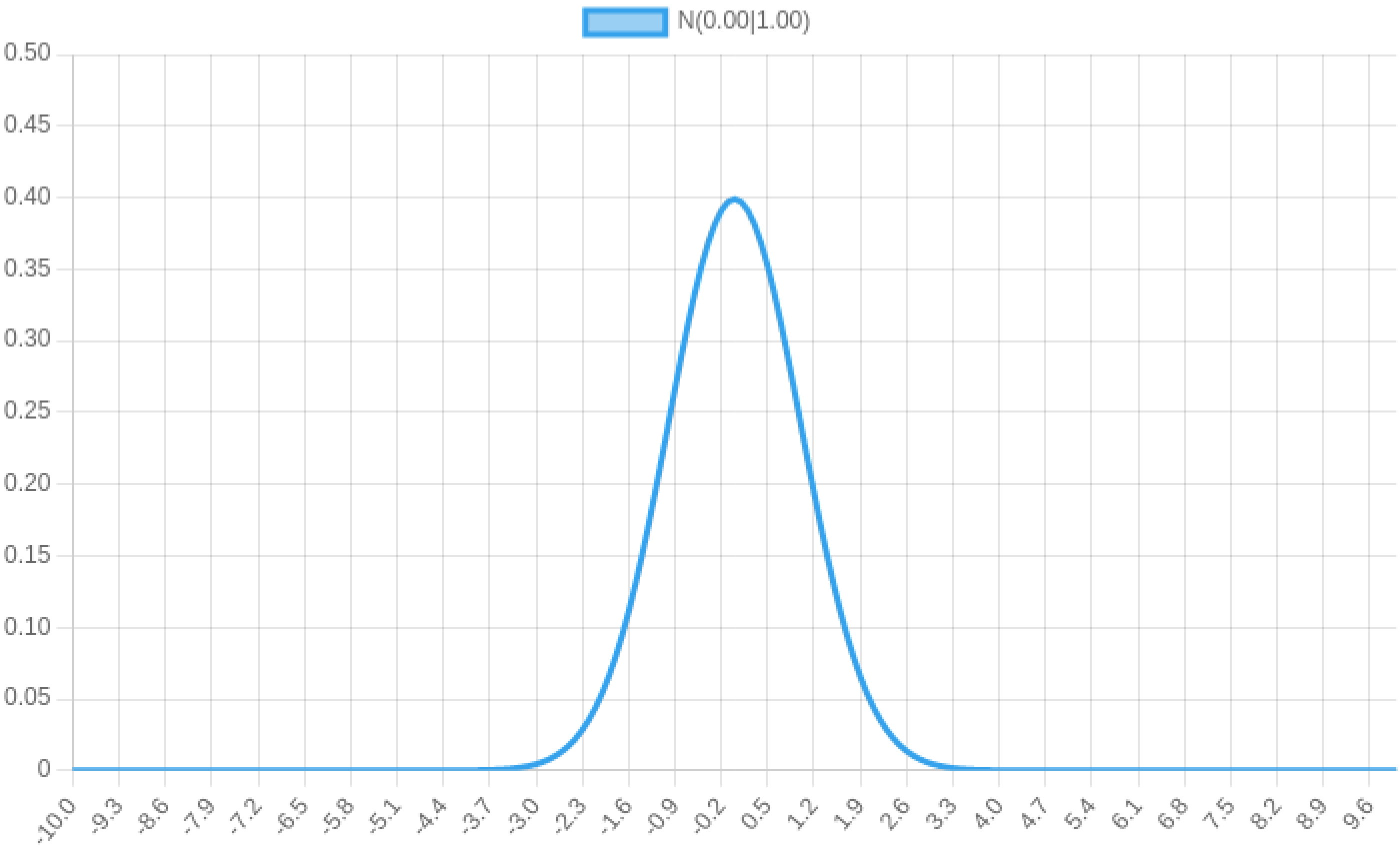
Standardnormalverteilung

$$\mu = 0 \quad \wedge \quad \sigma = 1$$

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Graph



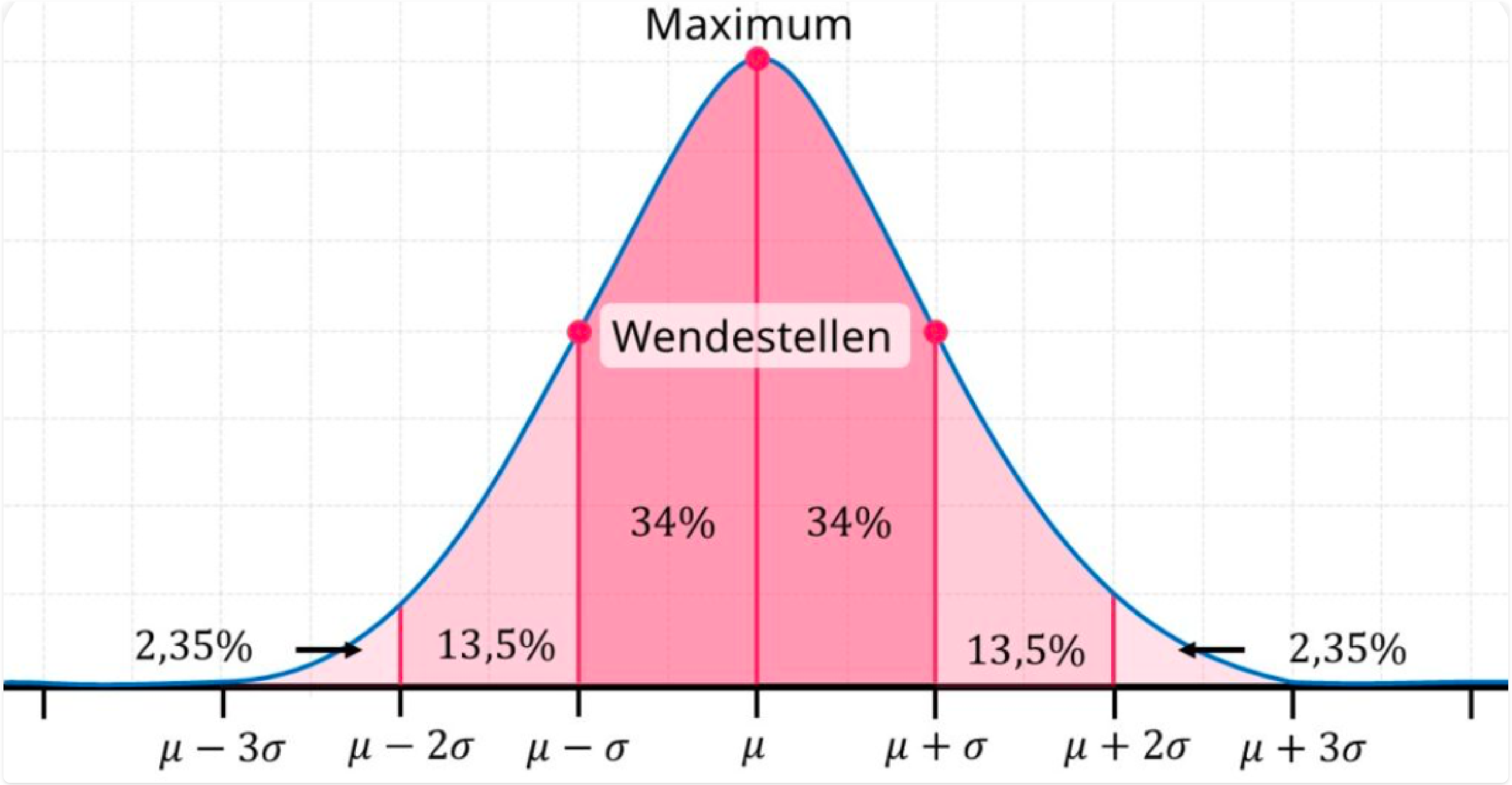
Wert für Mu:

0

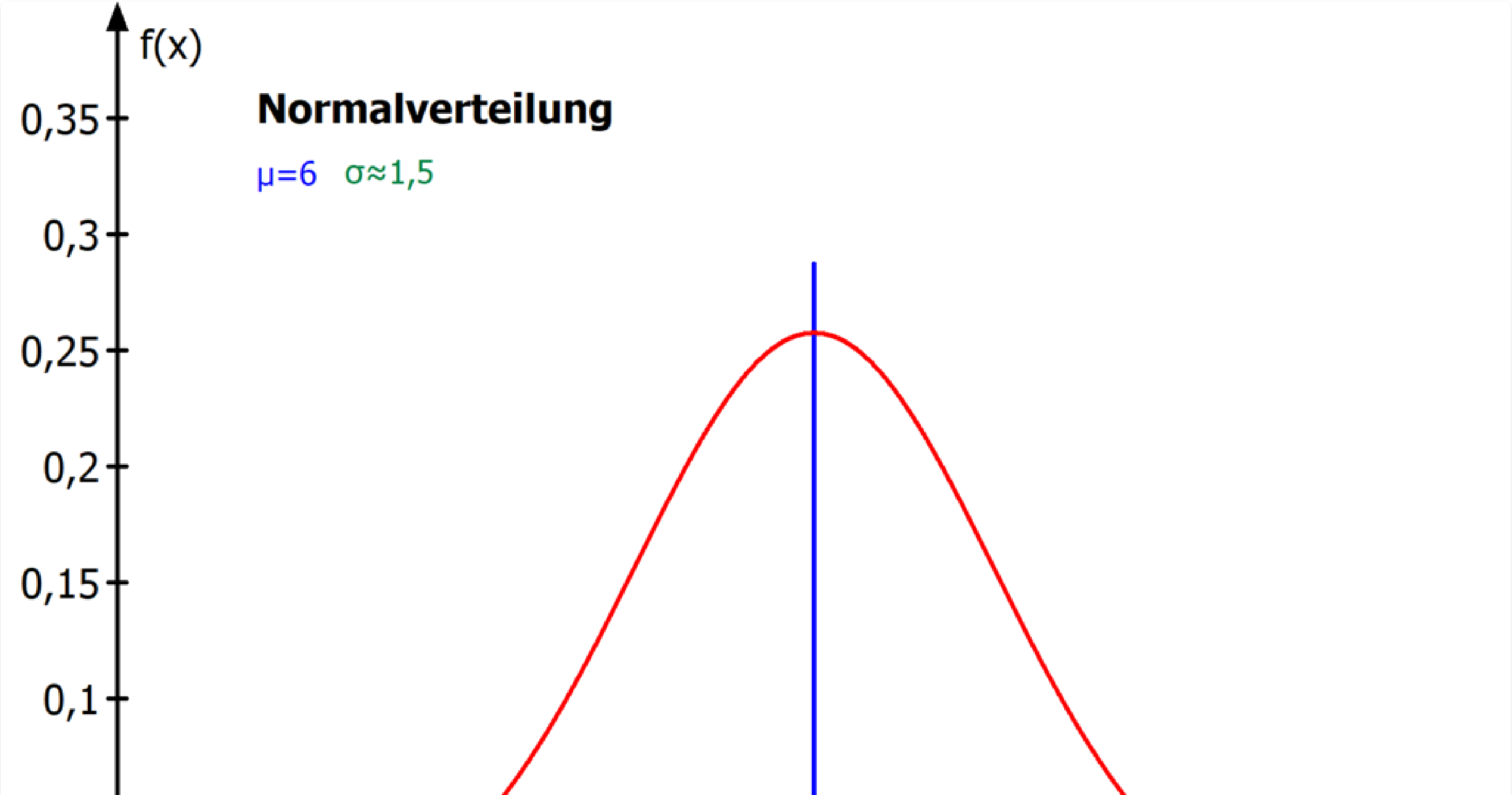
Wert für Sigma:

1

Graph - Eigenschaften



Wahrscheinlichkeit



Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion beschreibt die Fläche, die die Dichtefunktion mit der x-Achse einschließt. Sie wird daher mit einem Integral beschrieben:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$$

$$F(z_0) = P(X \leq z_0)$$

$$P(z_1 \leq X \leq z_2) = F(z_2) - F(z_1)$$

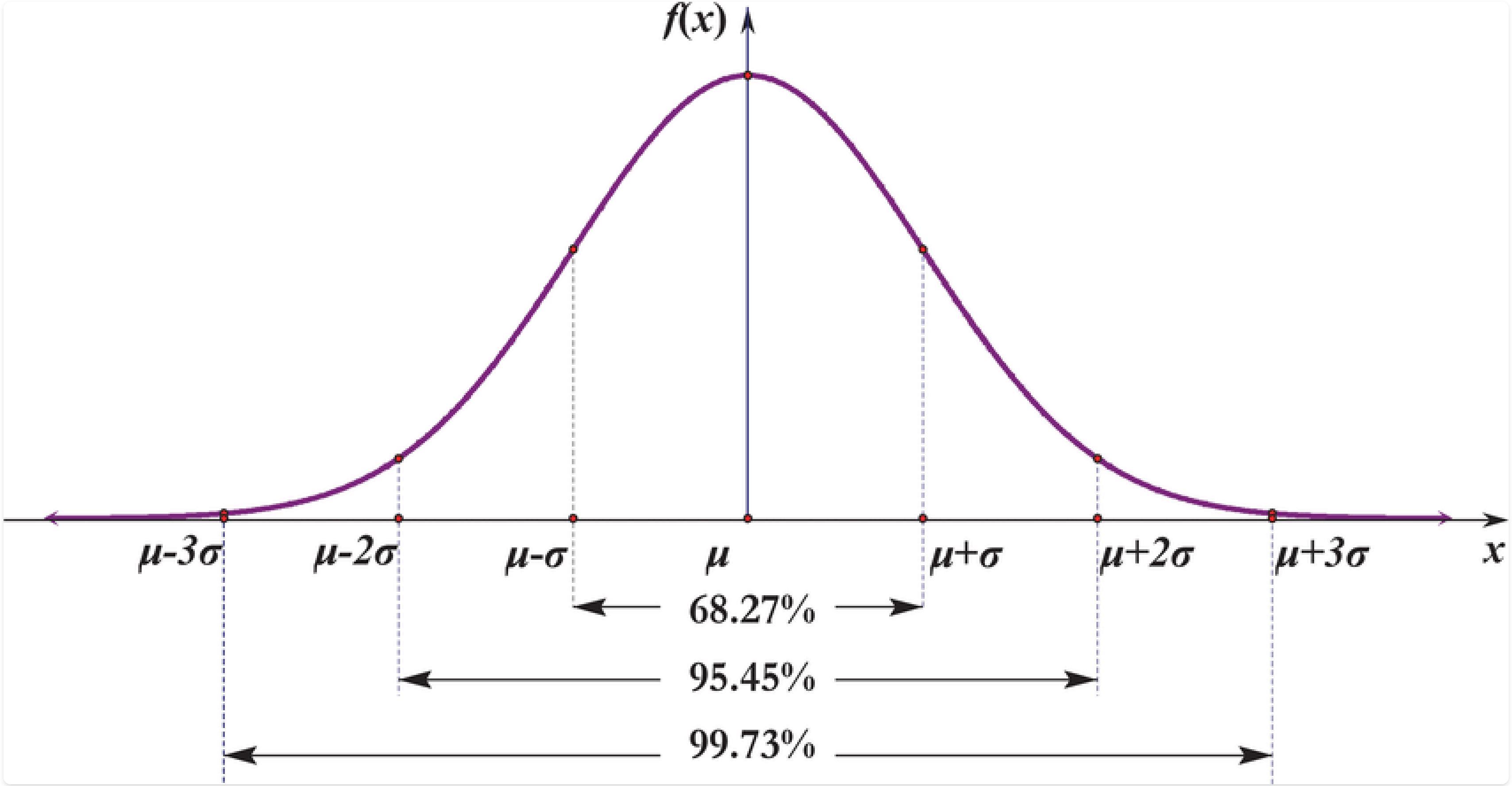
Inverse Normalverteilung

- $P(X \leq a) = P_0$ gegeben
- a gesucht
- Berechnung:

$$\begin{aligned} F(a) &= P_0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t &= P_0 \\ a &= \text{... (nach a auflösen)} \\ \text{ODER} & \\ a &= \text{invNorm}(P_0, \mu, \sigma) \text{ (mit GTR)} \end{aligned}$$

$$(P_0 \in [0,1]; \mu, \sigma \in \mathbb{R})$$

Sigma-Intervalle



Wichtige Formeln

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Normal-Approximation

- Die Werte einer diskreten Zufallsgröße können mithilfe von den entsprechenen Werten einer stetigen Normalverteilung approximiert werden
- Voraussetzungen:
  - $\sigma^2 > 9 \; (\sigma > 3)$
  - hohes n
- Stetigkeitskorrektur notwendig: $P_B(z_1 \leq X \leq z_2) = P_N(z_1 - 0.5 \leq X \leq z_2 + 0.5)$

Aufgabe 2

Das Gewicht von neugeborenen Kindern in Deutschland ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 3300$ g und $\sigma = 575$ g.

A. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes

- mehr als 3000 g wiegt,
- weniger als 2500 g wiegt,
- zwischen 4000 g und 5000 g wiegt.

B. Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es

- zu den 15% schwersten,
- zu den 25% leichtesten gehört?

C. In welchem um μ symmetrischen Bereich liegen die Gewichte von 90% aller Neugeborenen?

Lösung

A. $P(x > 3000) = 0,699$; $P(x < 2500) = 0,082$; $P(4000 \leq X \leq 5000) = 0,110$

B. 3896 g; 2912 g

C. 2354 g; 4246 g

Aufgabe 3

Ein fairer Würfel wird 1000 Mal geworfen. Man ist nun an der Wahrscheinlichkeit interessiert, dass zwischen 100 und 150 Mal die Sechs gewürfelt wird.

A. Begründe, wieso man hier trotz des 6-seitigen Würfels von einem Bernoulli-Experiment sprechen kann.

B. Begründe, wieso es sich hier um eine Binomialverteilung handelt und nicht um eine Normalverteilung.

C. Berechne die exakte Wahrscheinlichkeit.

D. Erkläre, ob hier die Bedingungen für die Normal-Approximation gegeben sind.

E. Berechne die approximierte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Normalverteilung.

Lösung

A. Erfüllte Voraussetzungen für Bernoulli-Experiment:

- Pro Würfeln zwei mögliche Ereignisse ("eine Sechs", "keine Sechs")
- Die Wahrscheinlichkeiten für das Würfeln von Sechsen sind unabhängig voneinander

B. Die Zufallsgröße ist hier diskret und nicht stetig.

C. $P_B(100 \leq S_n \leq 150) = \sum_{i=100}^{150} \binom{1000}{i} p^i (1-p)^{1000-i} = \mathrm{binomcdf}(1000, 1/6, 100, 150) \approx$ 0,0837

D. ja, denn $\sigma^2 \approx 138,889 > 9$ und ist groß ($n = 1000$)

E. $P_N(100 \leq S_n \leq 150) = \mathrm{normcdf}(100 - 0,5; 150 + 0,5; \frac{1000}{6}, \sqrt{138,9}) \approx 0{,}0851$