

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет имени В. И. Ленина "ЛЭТИ"

билеты

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Студент:
Группа:
Лектор:

Придчин В.Е.
2308
Зяблицева Л.

L^AT_EX

Санкт-Петербург
2024

1 Основные определения теории графов. Смежность и инцидентность вершин и ребер графа. Степени вершин в графе и орграфе. Теоремы о сумме степеней вершин в графе и орграфе. Матрицы смежности и инцидентности. Найти матрицы смежности и инцидентности указанного графа.

V – множество вершин.

E – множество пар вида $(u, v) : u, v \in V$ (множество ребер).

Опр: Графом – называют совокупность 2-ух множеств непустого множества E

$$E = \{(u, v) : u, v \in V\}, \quad G(V, E) - \text{обозначение графа}$$

Опр: Петля – пара вида (v, v) в множестве E .

Опр: Кратные ребра – одинаковые пары в множестве E . Количество кратных ребер - кратность ребра.

Существуют следующие виды графов:

1. Псевдограф – в графе могут быть и *кратные ребра*, и *петли*.
2. Мультиграф – в графе есть *кратные ребра*, но нет *петель*.
3. Простой граф – отсутствуют и *кратные ребра* и *петли*.

Опр: Ориентированный граф (орграф) – граф с ориентированными ребрами.

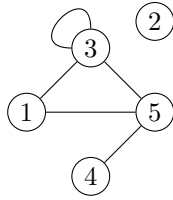
Опр: Если $e = (u, v)$ – ребро неориентированного графа, то u, v - концы ребра.

Опр: Если $e = (u, v)$ – ребро (дуга) ориентированного графа, то u - начало ребра, v - конец ребра.

Опр: a, b смежные $\Leftrightarrow e = (u, v)$.

Опр: u, v инцидентны ребру $e \Leftrightarrow e = (u, v)$.

Опр: Степенью вершины v неориентированного графа называется количество ребер инцидентных данной вершине, $\delta(v)$ (петлю считают два раза).



$$\begin{aligned} \delta(1) &= 2 & \delta(4) &= 1 \\ \delta(2) &= 0 & \delta(5) &= 3 \\ \delta(3) &= 4 & \Rightarrow \text{sum} &= 10 \end{aligned}$$

Теорема: Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу ребер

$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2r, \text{ где } r - \text{число ребер}$$

Док-во: Теорема справедлива, так как вклад каждого ребра равен двум. \square

Опр: Если степень вершины равна нулю, то вершина *изолированная*, $\delta(v) = 0$.

Опр: Если степень вершины равна единице, то вершина *висячая*, $\delta(v) = 1$

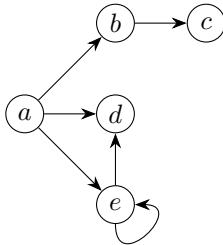
Опр: Полустепенью исхода(захода) вершина v ориентированного графа называют количество ребер исходящих(заходящих) в данную вершину.

$\delta^-(v)$ – полустепень исхода

$\delta^+(v)$ – полустепень захода

Теорема: Для орграфа справедливо равенство

$$\sum_{u \in V} \delta^-(u) = \sum_{u \in V} \delta^+(u) = r, \text{ где } r - \text{число ребер}$$



$$\begin{aligned} \delta^-(a) &= 3 & \delta^+(a) &= 0 \\ \delta^-(b) &= 1 & \delta^+(b) &= 1 \\ \delta^-(c) &= 0 & \delta^+(c) &= 1 \\ \delta^-(d) &= 0 & \delta^+(d) &= 2 \\ \delta^-(e) &= 2 & \delta^+(e) &= 2 \end{aligned}$$

$$\sum \delta^-(v) = 6; \quad \sum \delta^+(v) = 6$$

Опр: Матрицей смежности графа(орграфа) называют квадратную матрицу размерностью n , где $n = |v|$ (мощность множества вершин), в котором $a_{ij} = k$, где k - число ребер (v_i, v_j)

Опр: Пусть $G(V, E)$ – неориентированный граф. Матрицей инцидентности неориентированного графа называется матрица B размером $n * r$, $|v| = n, |E| = r$, где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ инцидентно ребру } e_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

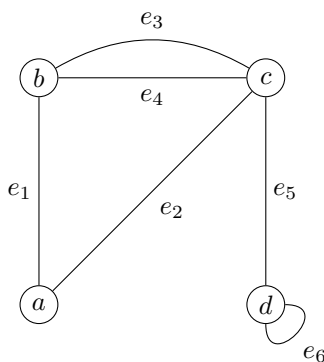
Такая матрица будет симметричной.

Опр: Пусть $G(V, E)$ – ориентированный граф. Матрицей инцидентности ориентированного графа называется матрица B размером $n * r$, $|v| = n, |E| = r$, где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из } v_i \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит в } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если есть петля, то на соответствующее место ставят любое число.

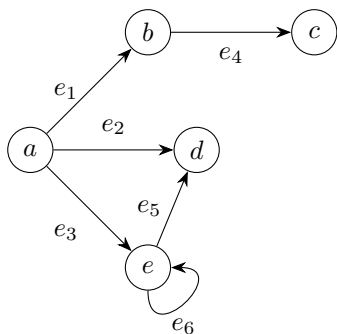
Поиск матрицы смежности A и инцидентности B для неориентированного графа:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Поиск матрицы смежности A и инцидентности B для ориентированного графа:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2 Полные и двудольные графы. Число ребер в полном графе с n вершинами и в полном двудольном графе (вывод формул).

3 Изоморфизм и гомеоморфизм графов. Примеры изоморфных и гомеоморфных графов. Способы проверки изоморфизма графов. Инварианты графа. Дополнение графа, проверка изоморфизма графов с помощью дополнений. Выяснить, являются ли графы G_1 и G_2 изоморфными, гомеоморфными.

4 Маршруты, цепи, циклы в графе. Метрические характеристики графа. Найти эксцентриситет вершины указанного графа, радиус, диаметр графа, центральные и периферийные вершины указанного графа.

5 Алгоритмы обхода графа в глубину и ширину.