Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет имени В. И. Ленина "ЛЭТИ"

билеты

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Студент: Придчин В.Е.
Группа: 2308
Лектор: Зяблицева Л.

LaTeX

Санкт-Петербург
2024

1 Основные определения теории графов. Смежность и инцидентность вершин и ребер графа. Степени вершин в графе и орграфе. Теоремы о сумме степеней вершин в графе и орграфе. Матрицы смежности и инцидентности. Найти матрицы смежности и инцидентности указанного графа.

V – множество вершин.
E – множество пар вида $(u, v) : u, v \in V$ (множество ребер).

Опр: Графом – называют совокупность 2-ух множеств непустого множества E

$$E = \{(u, v) : u, v \in V\},\ G(V, E) - \textit{обозначение графа}$$

Опр: Петля – пара вида (v, v) в множестве E.

Опр: Кратные ребра – одинаковые пары в множестве E. Количество кратных ребер - кратность ребра.

Существуют следующие виды графов:

1. Псевдограф – в графе могут быть и *кратные ребра*, и *петли.*
2. Мультиграф – в графе есть *кратные ребра*, но нет *петель.*
3. Простой граф – отсутствуют и *кратные ребра* и *петли.*

Опр: Ориентированный граф (орграф) – граф с ориентированными ребрами.

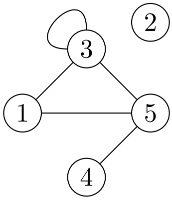
Опр: Если $e = (u, v)$ – ребро неориентированного графа, то u, v - концы ребра.

Опр: Если $e = (u, v)$ – ребро (дуга) ориентированного графа, то u - начало ребра, v - конец ребра.

Опр: a, b *смежные* $\Leftrightarrow e = (u, v)$.

Опр: u, v *инцидентны ребру* $e \Leftrightarrow e = (u, v)$.

Опр: Степенью вершины v неориентированного графа называется количество ребер инцидентных данной вершине, $\delta(v)$ (петлю считают два раза).



$$\begin{array}{ll} \delta(1)=2 & \delta(4)=1 \\ \delta(2)=0 & \delta(5)=3 \\ \delta(3)=4 & \Rightarrow sum=10 \end{array}$$

Теорема: Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу ребер

$$\sum_{u\in V}\delta(v)=2r,\ \textit{где } r \textit{ - число ребер}$$

Док-во: Теорема справедлива, так как вклад каждого ребра равен двум.

$\square$

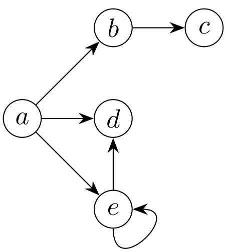
Опр: Если степень вершины равна нулю, то вершина *изолированная*, $\delta(v)=0$.

Опр: Если степень вершины равна единице, то вершина *висячая*, $\delta(v)=1$

Опр: Полустепенью исхода(захода) вершина v ориентированного графа называют количество ребер исходящих(заходящих) в данную вершину.
$\delta^-(v)$ – полустепень исхода
$\delta^+(v)$ – полустепень захода

Теорема: Для орграфа справедливо равенство

$$\sum_{u\in V}\delta^-(v)=\sum_{u\in V}\delta^+(v)=r,\ \textit{где } r \textit{ – число ребер}$$



$$\begin{array}{ll} \delta^-(a)=3 & \delta^+(a)=0 \\ \delta^-(b)=1 & \delta^+(b)=1 \\ \delta^-(c)=0 & \delta^+(c)=1 \\ \delta^-(d)=0 & \delta^+(d)=2 \\ \delta^-(e)=2 & \delta^+(e)=2 \\ \sum\delta^-(v)=6; & \sum\delta^+(v)=6 \end{array}$$

Опр: Матрицей смежности графа(орграфа) называют квадратную матрицу размерностью n, где $n = |v|$ (мощность множества вершин), в котором $a_{ij} = k$, где k - число ребер (v_i, v_j)

Опр: Пусть $G(V, E)$ – неориентированный граф. Матрицей инцидентности неориентированного графа называется матрица B размером $n * r$, $|v| = n, |E| = r$, где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ инцидентно ребру } e_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

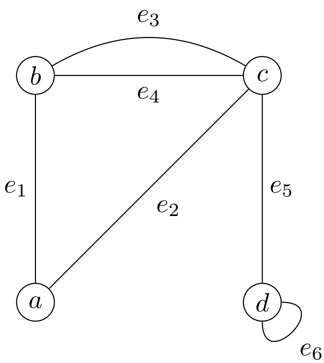
Такая матрица будет симметричной.

Опр: Пусть $G(V, E)$ – ориентированный граф. Матрицей инцидентности ориентированного графа называется матрица B размером $n * r$, $|v| = n, |E| = r$, где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из } v_i \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит из } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если есть петля, то на соответствующее место ставят любое число.

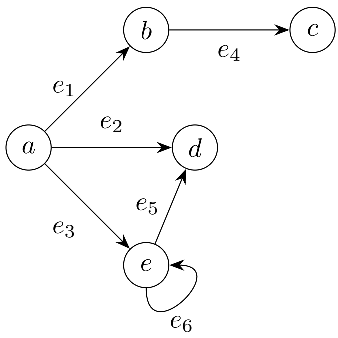
Поиск матрицы смежности A и инцидентности B для неориентированного графа:



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Поиск матрицы смежности A и инцидентности B для ориентированного графа:

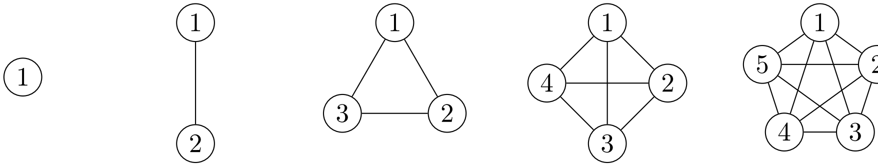


$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Полные и двудольные графы. Число ребер в полном графе с n вершинами и в полном двудольном графе (вывод формул).

Опр: *Полный граф* – простой неориентированный граф у которого любые две вершины смежны.



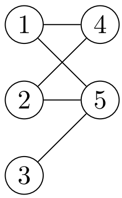
K_1 $\quad$ K_2 $\quad$ K_3 $\quad$ K_4 $\quad$ K_5

Количество полных ребер в графе $K_n = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Опр: *Двудольный граф* – граф, если его множество вершин V можно разделить на подмножество V_1 и V_2 такое что: $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

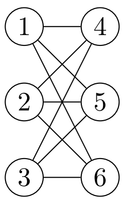
$V_1 \cup V_2 = V$

Смежными могут быть только вершины из разных долей графа.



$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$V_1 = \{1,2,3\}$$
$$V_2 = \{4,5\}$$

Опр: *Полный двудольный граф* – каждая вершина одной доли соединяется с другой. K_{t_1,k_2}, где t_1, k_2 – количество вершин в долях графа.



$K_{3,3}$
$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$V_1 = \{1,2,3\}$$
$$V_2 = \{4,5,6\}$$

В полном двудольном графе содержится $t_1 \cdot t_2$ ребер.

3 Изоморфизм и гомеоморфизм графов. Примеры изоморфных и гомеоморфных графов. Способы проверки изоморфизма графов. Инварианты графа. Дополнение графа, проверка изоморфизма графов с помощью дополнений. Выяснить, являются ли графы G1 и G2 изоморфными, гомеоморфными.

Опр: *Изоморфизм графов* – биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, такое что:

$$(\forall u, v \in V)((u, v) \in E_1) \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$$

Изоморфные графы обозначаются: $G_1 \cong G_2$

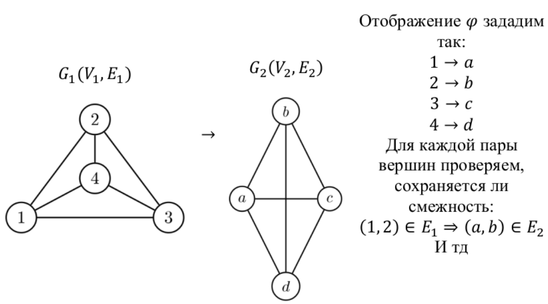
Изоморфные объекты *не различимы* с точки зрения математики. Это экземпляры одного и того же математического объекта. Изоморфные объекты имеют одинаковое число элементов и свойств.

Изоморфизм графов можно определить:

1. По определению (найдя биективное отображение множества вершин, сохраняющее смежность)
2. Перерисовав один из графов так, чтобы изображение совпало с другим графом
3. Сравнив матрицы смежности графов

Теорема: Графы изоморфны тогда и только тогда, когда матрицу смежности одного из них можно получить из матрицы смежности другого путём одновременной перестановки местами i-ой и j-ой строк и столбцов.

Пример изоморфных графов:



Опр: *Инвариантом изоморфизма графов* называется некоторое (обычно числовое) значение или упорядоченный набор значений, характеризующий структуру графа и не зависящий от способа его задания.

Инвариантами графа являются:

1. Количество вершин
2. Количество ребер
3. Набор степеней вершин (упорядоченный)
4. Определитель матрицы смежности
5. Количество компонент связности
6. Хроматическое число и т.д.

Пусть $G(V, E)$ – простой неориентированный граф.

Опр: Дополнением графа G называется граф $\overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$, у которого $\overline{V} = V$, в множестве $\overline{E}$ содержатся ребра полного графа, которых нет в множестве E.

Теорема: Простые графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения.

$$G \cong H \Leftrightarrow \overline{G} \cong \overline{H}$$

Опр: Граф является самодополнительным, если он изоморфен своему дополнению.

Понятие изоморфизма можно дать и для произвольных графов.

Опр: Граф $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ *изоморфны*, если $\exists$ биективные отображения $\varphi : V_1 \to V_2$ и $h : E_1 \to E_2$ такие, что:

$$e = (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow h(e) = (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$$

4 Маршруты, цепи, циклы в графе. Метрические характеристики графа. Найти эксцентриситет вершины указанного графа, радиус, диаметр графа, центральные и периферийные вершины указанного графа.

Опр: *Маршрут* (путь) в графе – это конечная чередующаяся последовательность смежных вершин и ребер, соединяющих эти вершины.

Маршрут – последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{s-1}v_se_sv_{s+1}\dots v_k$, в которой чередуются все вершины и ребра. $e_s = (v_s, v_{s+1})$.

Опр: *Длина маршрута* – количество ребер в маршруте.

Опр: *Нуль-маршрут* – последовательность из одной вершины v.

Опр: *Замкнутый маршрут (циклический)* – последовательность, в которой совпадает начальная вершина с конечной. Иначе – *незамкнутый (открытый)*.

Опр: *Цепь* – незамкнутый маршрут, где все *ребра* попарно различны.

Опр: *Простая цепь* – цепь, где все *вершины* попарно различны.

Опр: *Цикл* – циклический маршрут, где все *ребра* попарно различны.

Опр: *Простой цикл* – цикл, где все *вершины, кроме первой и последней* попарно различны.

Теорема: Из любого цикла можно выделить простой цикл с той же начальной вершиной.

Док-во: Пусть $\exists$ цикл $v_1e_1v_2e_2\dots v_se_s\dots v_je_j\dots v_ne_nv_1$. Если все вершины, кроме первой и последней, различны, то этот цикл простой.
Допустим в цикле есть совпадающие вершины (не первая и не последняя) $v_s = v_j$. Тогда удаляем часть маршрута между этими вершинами.

$$v_1e_1v_2e_2\dots v_se_s\dots v_je_j\dots v_ne_nv_1 \Rightarrow v_1e_1v_2e_2\dots v_se_j\dots v_ne_nv_1$$

Так как $v_s = v_j$, то полученная последовательность является маршрутом.
Продолжая получим простой цикл. $\square$

Теорема: Из любой цепи можно выделить простую цепь с теми же начальными и конечными вершинами (док-во аналогично).

Опр: *Связанные вершины в графе* – $\exists$ маршрут с началом в первой вершине и концом на второй.

Опр: *Связный граф* – две любые вершины являются *связанными.*

Пусть $G(V, E)$ – связный неориентированный граф $(v_i, v_j \in V)$.

Опр: *Расстояние между вершинами,* $d(v_i, v_j)$ – длина *кратчайшего* маршрута между этими вершинами.

Опр: *Эксцентриситет вершины графа* – число, максимальное из расстояний между этой вершиной и всеми остальными вершинами.

$$\varepsilon(v_i) = \max d(v_i, v_j), v_j \in V, i \neq j$$

Опр: *Диаметр графа,* $D(G)$ – максимальный из всех эксцентриситетов вершин данного графа.

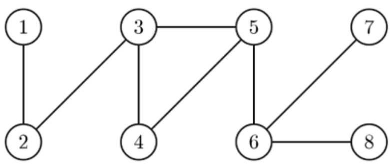
Опр: *Радиус графа,* $R(G)$ – минимальный из всех эксцентриситетов вершин данного графа.

Опр: *Периферическая вершина* – ее эксцентриситет равен диаметру.

Опр: *Центральная вершина* – ее эксцентриситет равен радиусу.

Опр: *Центр графа* – множество всех центральных вершин.

Пример: Найти эксцентриситеты вершин, диаметр и радиус графа, периферийные и центральные вершины.



$\varepsilon(1) = 5, \varepsilon(2) = 4, \varepsilon(3) = 3, \varepsilon(4) = 3,$
$\varepsilon(5) = 3, \varepsilon(6) = 4, \varepsilon(7) = 5, \varepsilon(8) = 5.$
$D(G) = 5, R(G) = 3.$

Периферийные: 1, 7, 8
Центральные: 3, 4, 5

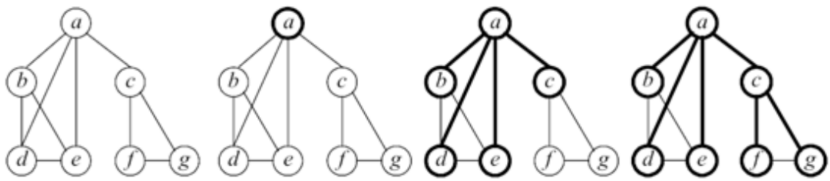
5 Алгоритмы обхода графа в глубину и ширину.

Опр: Обход графа (поиск на графе) — это процесс систематического просмотра всех ребер или вершин графа с целью отыскания ребер или вершин, удовлетворяющих некоторому условию.

Опр: Поиск в ширину (BFS) нужен для нахождения расстояний между вершин в связном графе. Алгоритм по принципу напоминает "пожар".

Алгоритм поиска в ширину:

1. Все вершины окрашиваются в белый цвет.
2. Выбирается первая вершина, раскрашивается в черный цвет и заносится в очередь.
3. Посещается первая вершина из очереди. Все смежные с ней белые вершины раскрашиваются в черный цвет и заносятся в очередь. После этого эта вершина удаляется из очереди.
4. Повторяется шаг 3 до тех пор пока очередь не пуста.



Сложность поиска в ширину при нематричном представлении графа равна $O(n+m)$, так как рассматриваются все n вершин и m ребер. Использование матрицы смежности приводит к оценке $O(n^2)$.

Если граф не является связным, то нужно добавить шаг 5, в котором написать, что нужно повторять 2 шаг до тех пор, пока в графе не останется белых вершин.

Если сначала присвоить первой вершине значение 0, потом смежным с ней вершинам 0+1 =1, и так далее, то в итоге для каждой вершины будет найдено расстояние от первой вершины.

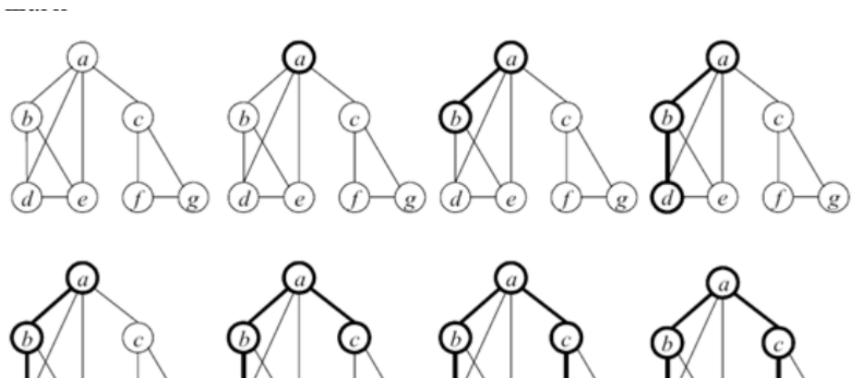
Опр: Поиск в глубину (DFS) исследует конкретную ветку в графе и только потом переходит к другой (если они останутся нерассмотренными).

Вершины графа могут быть раскрашены в три цвета: белый цвет означает, что в вершине еще не были, серый – что в вершине были, но еще вернемся, черный – что были и больше не рассматриваем.

Алгоритм поиска в глубину:

1. Всем вершинам графа присваиваем белый цвет.
2. Выбираем первую вершину и раскрашиваем в серый цвет.
3. Для последней раскрашенной в серый цвет вершины выбираем белую смежную ей вершину (если такая вершина есть), раскрашиваем ее в серый цвет и переходим к шагу 3.
4. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока все вершины не будут раскрашены в черный цвет.

Если для рассматриваемой вершины белых смежных с ней вершин нет, то рассматриваемую вершину раскрашиваем в черный цвет и переходим к шагу 3.



Временная сложность алгоритма зависит от представления графа. Если применена матрица смежности, то временная сложность равна $O(n^2)$, а если нематричное представление – $O(n + m)$: рассматриваются все вершины и все ребра.

6 Прямое произведение множеств, мощность прямого произведения конечных множеств. Бинарные отношения между множествами А и В. Граф бинарного отношения Матрица бинарного отношения, область определения и значений бинарного отношения. Отношение, обратное к данному отношению. Найти отношение, изобразить его граф, найти матрицу.

Пусть A и B – не пустые множества.

Опр: *Прямым (декартовым) произведением множеств A и B* называют множество всевозможных упорядоченных пар $(a, b), a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A, b \in B \,\}$$

Пример:

$$A = \{\, 1, 2 \,\}, B = \{\, a, b, c \,\}$$
$$A \times B = \{\, (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \,\}$$
$$|A| = n, |B| = m, |A \times B| = n \cdot m$$

Если $A = B$, то пишут $A \times A = A^2$.

Опр: *Кортеж длины s* – упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, где $a \in A_i$.

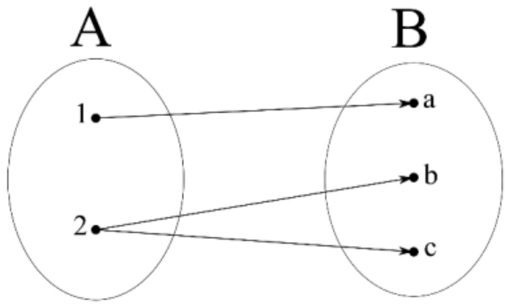
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_s), a_i \in A_i, i \in \overline{1, s} \,\}$$
$$|A_i| = t_i$$
$$\text{Тогда: } |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s| = t_1 \cdot t_2 \cdot \cdots \cdot t_s$$
$$\text{Если: } A_1 = A_2 = \cdots = A_s = A, \text{ то пишут } A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s = A^s$$

Опр: *Бинарным отношение между множествами A и B* называется любое подмножество их прямого произведения. Бинарные отношение принято записывать большими буквами или малыми буквами:

$$A = \{\, 1, 2 \,\}, B = \{\, a, b, c \,\}$$
$$R = \{\, (1, a), (2, b), (2, c) \,\}$$
$$f = \{\, (1, b), (2, a) \,\}$$

Если $(a, b) \in R$, то говорят, что элементы a и b связаные отношение R или находятся в отношении R. Обозначают: aRb.

Сам граф бинарного отношения будет иметь вид:



Пусть бинарное отношение $R \subset A \times B, |A| = n, |B| = m$.

Опр: *Матрицой бинарного отношения* R называется матрица $C(R) \in M_{n\times m}$, элементы которой находятся по правилу:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R b_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Пример:

$$A = \{\,1, 2\,\}\,, B = \{\,a, b, c\,\}$$
$$R = \{\,(1, a), (2, b), (2, c)\,\}$$
$$C(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Опр: *Областью определения бинарного отношения* R называется множество первых элементов пар бинарного отношения.

$$D(R) = \{\,x \in A \mid (\exists y \in B)(xRy)\,\}$$

Опр: *Областью значений бинарного отношения* R называется множество вторых элементов пар бинарного отношения.

$$E(R) = \{\,y \in B \mid (\exists x \in A)(xRy)\,\}$$

Пример:

$$
\begin{aligned}
A &= \{\, 1, 2 \,\}\,,\ B = \{\, a, b, c \,\} \\
R &= \{\, (1, b), (2, c), (2, a), (2, b) \,\} \\
D(R) &= \{\, 1, 2 \,\}\,,\ E(R) = \{\, a, b, c \,\}
\end{aligned}
$$

Опр: *Обратное бинарное отношение к R (R^{-1})* называется им, если:

$$R^{-1} = \{\, (y, x) \mid (x, y) \in R \,\}$$

Пример:

$$
\begin{aligned}
R &= \{\, (1, b), (2, c), (2, a), (2, b) \,\} \\
C(R) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
R^{-1} &= \{\, (b, 1), (c, 2), (a, 2), (b, 2) \,\} \\
C(R) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Заметим, что матрица $C(R^{-1})$ является транспонированной матрицей $C(R)$.

7 Свойства бинарных отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, асимметричность, транзитивность. Свойства матриц и графов таких отношений, число таких отношений, заданных на n-элементном множестве.

Будем рассматривать бинарные отношения на множестве A^2 в этом случае говорят что бинарное отношение задано на множестве A.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *рефлексивным*, если для любого $a \in A$ верно aRa.

$$R - \textit{рефлексивно} \iff (\forall a \in A)\ aRa$$

Если R рефлексивное отношение, то квадратная матрица размера n на главной диагонали состоит только из 1. В графе рефлексивное бинарное отношение в каждой вершине имеет *петлю*.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *антирефлексивным*, если для любого $a \in A$ неверно aRa.

$$R - \textit{антирефлексивно} \iff (\forall a \in A)\ \overline{aRa}$$

Если R антирефлексивное отношение, то квадратная матрица размера n на главной диагонали состоит только из 0. В графе антирефлексивное бинарное отношение в каждой вершине не имеет *петель* вообще.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *симметричным* если для любого $a, b \in A$ верно $aRb \Rightarrow bRa$.

$$\begin{aligned} R - \textit{симметрично} \iff & (\forall a, b \in A)\ aRb \Rightarrow bRa \\ & a \textit{ может быть} = b \end{aligned}$$

Матрица симметричного бинарного отношения симметрична относительна главной диагонали. Граф симметричного бинарного отношения *как правило* неориентированный.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *асимметричным*, если для любого $a, b \in A$ верно aRb, то неверно bRa ($b\overline{R}a$).

$$R - \textit{асимметрично} \iff (\forall a, b \in A)\ aRb \Rightarrow \overline{bRa}$$

В матрице бинарного отношения элементы симметричные главной диагонали *различны.* В графе если есть ребро ab, то нет ребра ba.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *антисимметричным*, если для любого $a, b \in A$, $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

$$R - \textit{антисимметрично} \iff (\forall a, b \in A)\ (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$$

Элементы матрицы антисимметричного бинарного отношения относительно главной диагонали *различны.* На главной диагонали могут быть 1. В графе при антисимметричном бинарном отношении могут быть *петли*

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *транзитивным*, если для любого $a, b, c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$.

$$R - \textit{транзитивно} \iff (\forall a, b, c \in A)\ (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$$

Если отношение обладает каким-нибудь свойством, нужно доказать это, если не обладает, то нужно привести контрпример.

Упражнение 1. Найти число рефлексивных отношений n-элементного множества
Упражнение 2. Найти число антирефлексивных отношений n-элементного множества
Упражнение 3. Найти число симметричных отношений n-элементного множества
Упражнение 4. Найти число антисимметричных отношений n-элементного множества
Упражнение 5. Найти число асимметричных отношений n-элементного множества

8 Отношение эквивалентности: определение, примеры. Классы эквивалентности, полная система представителей. Фактор-множество множества по отношению эквивалентности. Алгоритм выделения классов эквивалентности по графу отношения. Проверить, является ли указанное отношение отношением эквивалентности.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A, называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример:

$$\begin{aligned} A &- \text{множество граждан России} \\ A &= \{\, x \mid x - \text{Гражданин РФ} \,\} \\ R &= \{\, (x, y) \mid x, y \in A; x, y - \text{родились в одном месяце} \,\} \\ R &- \text{рефлексивно, симметрично, транзитивно} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R - \text{отношение эквивалентности} \end{aligned}$$

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и элемент $a \in A$.

Опр: Классом эквивалентности отношения эквивалентности R, порождённым элементом a (обозначается $\overline{a}$), называется множество всех элементов множества A, которые находятся в отношении R с элементом a.

$$\overline{a} = \{\, x \in A \mid xRa \,\}$$

Опр: Любой элемент класса эквивалентности называется *представителем этого класса.*

Опр: *Полной системой представителей классов эквивалентности* называется множество представителей всех классов, взятых по одному и только по одному из каждого класса эквивалентности.

Опр: Пусть A – непустое множество. Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности R называется множество всех классов эквивалентности.

$$A/R = \{\, \overline{\overline{a}} \mid a \in A \,\}.$$

Алгоритм выделения классов эквивалентности по графу отношения:

1. Всем вершинам графа приписываем значение 0: color(v):=0
2. k:=0 (количество классов эквивалентности)
3. Рассматриваем вершины графа

Если есть вершина, у которой color(v)=0, то k:=k+1, этой вершине и всем, смежным с ней, присваиваем значение k: color(v):=k, выводим эти вершины с их цветом.
Если вершин, у которых color(v)=0, нет, то выводим значение k – число классов эквивалентности и stop.
Результатом работы алгоритма является число k – количество классов эквивалентности; каждой вершите графа присвоен номер класса эквивалентности.

Временная сложность алгоритма зависит от представления графа. Если применена матрица смежности, то временная сложность равна $O(n^2)$, а если нематричное представление — $O(n+n) = O(2^n)$: рассматриваются все вершины и часть ребер.

9 Разбиение множества. Доказать теорему о связи фактор-множества множества по отношению эквивалентности и разбиением множества.

Опр: *Разбиением множества* A называется такое семейство его непустых подмножеств, что их объединение совпадает с множеством A, а пересечение двух различных подмножеств является пустым множеством.

Пример:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Множество подмножеств множества A
$\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ не является разбиением множества A, так как элементы 2,3 принадлежат одновременно двум подмножествам. Множество подмножеств множества A $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ является разбиением множества A по определению.

Теорема: Пусть R - отношение эквивалентности на множестве A. Фактор множество множества A по R задает разбиение этого множества. (подмножествами разбиения являются классы эквивалентности).

$$A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}$$

Док-во: Докажем, что классы эквивалентности по отношению R являются подмножествами разбиения множества.

1. Докажем, что каждый класс эквивалентности не является пустым:

$$\overline{a} = \{x \in A \mid xRa\}$$
$$R - \text{рефлексивно} \Rightarrow aRa \Rightarrow a \in \overline{a}$$

2. Докажем: если элемент $c \in \overline{a}$ и $c \in \overline{b}$, то эти классы совпадают: $\overline{a} = \overline{b}$. Это означает, что различные классы не пересекаются
   $c \in \overline{a} \Rightarrow cRa = aRc$
   $c \in \overline{b} \Rightarrow cRb = bRc$
   $aRb \Rightarrow bRa$
   Это означает, что если какой-то элемент принадлежит двум классам эквивалентности, то элементы, порождающие эти классы, находятся в этом отношении.

Докажем теперь, что $\overline{a} = \overline{b}$. Для этого докажем два включения.

1. $\overline{a} \subset \overline{b}$
   Докажем: $(\forall x)(x \in \overline{a} \Rightarrow x \in \overline{b})$

$$x \in \overline{a} \Rightarrow xRa \wedge aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow x \in \overline{b}$$

2. $\overline{b} \subset \overline{a}$
   Докажем: $(\forall x)(x \in \overline{b} \Rightarrow x \in \overline{a})$

$$x \in \overline{b} \Rightarrow xRb \wedge bRa \Rightarrow xRa \Rightarrow x \in \overline{a}$$

Докажем, что $\cup\overline{a} = A$. Так как $(\forall a \in A)a \in \overline{a}$, то $A \subset \cup\overline{a}$,
любой класс эквивалентности по определению является подмножеством множества A, поэтому и объединение классов является подмножеством A. По определению получили, что фактор множество является разбиением множества a. $\square$

Из этой теоремы следует следующее:

1. $(\forall a \in A)a \in \overline{a}$
2. $(\forall a, b \in A)(a \in \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b})$
3. $(\forall a, b \in A)(a \notin \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing)$
4. $(\forall a \in A) \cup \overline{a} = A$.

10 Отношение нестрогого и строгого, линейного порядка: определение, важнейшие примеры. Определить, является ли отношение отношением порядка.

Пусть A – множество, R – отношение на множестве A, т.е. $R \subseteq A^2$.

Опр: Отношение R называется отношением *нестрогого частичного порядка* на множестве A, если R: рефлексивное, антисимметричное, транзитивное. (Отношение $a \leq b$)

Опр: Если R – порядок на множестве A и $a, b \in R$ или aRb, то элементы a и b называются *сравнимыми*.

Порядок называют частичным порядком, так как не обязательно все элементы являются сравнимыми.

Опр: Отношение R называется отношением *строгого частичного порядка* на множестве A, если оно является антирефлексивным, асимметричным и транзитивным.

В *строгом частичном порядке* можно ограничиться двумя свойствами: антирефлексивность, транзитивность. (доказывается через предположение отсутствия асимметрии, а это противоречит антирефлексивности).

Опр: Порядок R называется линейным порядком, если выполняются условия:

$$(\forall a, b \in A)(a = b \vee aRb \vee bRa).$$

Другими словами, все различные элементы в линейном порядке обязательно сравнимы. Поэтому в случае, когда порядок линейный, слово частичный опускается.

На множестве Z отношение “меньше или равно” является нестрогим линейным порядком.

11 Частично упорядоченные множества. Минимальные элементы, линейно упорядоченные множества. Диаграмма Хассе. Построить диаграмму Хассе указанного множества.

12 Алгоритм топологической сортировки. Применить алгоритм топологической сортировки.

13 Связность в неориентированном графе. Теорема о разложении графа в объединение связных подграфов. Компоненты связности графа. Алгоритм нахождения связных компонент графа. Найти компоненты связности указанного графа.

Опр: Две вершины в графе называются *связанными*, если существует маршрут с началом в первой вершине и концом во второй.

Опр: Граф называется *связным*, если любые две его вершины являются связанными.

Теорема: В неориентированном графе отношение связанности на множестве вершин является отношением эквивалентности.

$$V, \rho = \{\, (v_1, v_2), v_1, v_2 \in V, v_1 \text{ и } v_2 - \textit{связанные} \,\}$$

1. Рефлексивность – $\exists$ нуль-маршрут ($\forall v \in V,\ v\rho v$)
2. Симметричность – $\exists$ маршрут $ue_1 \dots e_s v$ $(u\rho v)$ + $\exists$ маршрут $ve_s \dots e_1 u$ $(v\rho u)$
3. Транзитивность – $\forall u, v, w \in V\ u\rho v \wedge v\rho w \Rightarrow u\rho w$. $\exists$ маршрут $u \dots v$ и $v \dots w \Rightarrow \exists$ маршрут $u \dots w$

Опр: Пусть $G(V, E)$ – граф, то граф $G(V_1, E_1)$ – подграф графа G, если $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset V$.

Теорема: Любой неориентированный граф распадается в объединение своих связных подграфов.

Док-во: Доказано, что в неориентированном графе отношение связанности на множестве вершин является отношением эквивалентности.
Известно, что отношение эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся подмножества - классы эквивалентности, поэтому всё множество вершин разбивается на попарно непересекающиеся подмножества $V_1, V_2, \dots, V_s, V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s$.
В каждом таком подмножестве V_i вершины являются связанными. Вершины из разных подмножеств не являются связанными. Это, в частности, означает, что в графе нет ребер, инцидентных вершинам из разных компонент связности. Это и доказывает справедливость утверждения. □

Связные подграфы также называются *связными компонентами графа.*

Задача 1. Доказать, что любой конечный граф имеет чётное количество число вершин нечётной степени.
Задача 2. Доказать, что если в графе только две вершины имеют нечётную степень, то они связанные.

Док-во: Докажем, что две вершины, которые имеют нечетную степень, принадлежат одной компоненте связности. Предположим противное. Пусть эти вершины принадлежат разным компонентам связности. Тогда в подграфах, содержащих эти вершины, содержится только одна вершина нечётной степени, что противоречит задаче 1.
Поэтому эти вершины принадлежат одной компоненте связности, тогда они являются связанными. □

Для нахождения количество связных компонент графа существует алгоритм: Применяем алгоритм обхода графа в ширину.

1. Всем вершинам графа приписываем значение 0: color(v):=0
2. k:=0 (количество компонент связности)
3. Рассматриваем вершины графа. Если есть вершина, у которых color(v)=0, то k:=k+1, присваиваем этой вершине color(v):=k, заносим вершину в очередь.
4. Посещается первая вершина из очереди. Всем смежным с ней вершинам, у которых color(v)=0, присваиваем color(v):=k и заносим в очередь. После этого первая вершина в очереди удаляется из очереди.
5. Переходим к шагу 4 до тех пор, пока очередь не пуста.
6. Переходим к шагу 3 до тех пор, пока есть вершины, у которых color(v)=0.
7. Если вершин, у которых color(v)=0, нет, то выводим значение k – число компонент связности и stop.

Результатом работы алгоритма является число k – количество компонент связности; каждой вершине графа присвоен номер компоненты связности

Иначе говоря: количество запусков алгоритмов в ширину для обхода всего графа = количеству компонент связности.

14 Реберная и вершинная двусвязность графа. Блоки графа, граф блоков – точек сочленения. Найти компоненты реберной и вершинной двусвязности, граф блоков – точек сочленения графа.

15 Шарниры и мосты в графе. Алгоритм нахождения мостов в графе. Применить его для графа.

16 Связность в орграфе: различные виды связности, примеры. Компоненты сильной связности. Алгоритм Косарайю нахождения компонент сильной связности. Граф конденсации Применить алгоритм к орграфу, найти граф конденсации.

17 Теорема о числе маршрутов длины k из одной вершины в другую. Формулировка, доказательство. Применить теорему к графу.