Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет имени В. И. Ленина "ЛЭТИ"

билеты

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Студент: Придчин В.Е.
Группа: 2308
Лектор: Зяблицева Л.

LaTeX

Санкт-Петербург
2024

1 Основные определения теории графов. Смежность и инцидентность вершин и ребер графа. Степени вершин в графе и орграфе. Теоремы о сумме степеней вершин в графе и орграфе. Матрицы смежности и инцидентности. Найти матрицы смежности и инцидентности указанного графа.

V – множество вершин.
E – множество пар вида $(u, v) : u, v \in V$ (множество ребер).

Опр: Графом – называют совокупность 2-ух множеств непустого множества E

$$E = \{(u, v) : u, v \in V\},\ G(V, E) - \textit{обозначение графа}$$

Опр: Петля – пара вида (v, v) в множестве E.

Опр: Кратные ребра – одинаковые пары в множестве E. Количество кратных ребер - кратность ребра.

Существуют следующие виды графов:

1. Псевдограф – в графе могут быть и *кратные ребра*, и *петли*.
2. Мультиграф – в графе есть *кратные ребра*, но нет *петель*.
3. Простой граф – отсутствуют и *кратные ребра* и *петли*.

Опр: Ориентированный граф (орграф) – граф с ориентированными ребрами.

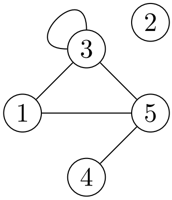
Опр: Если $e = (u, v)$ – ребро неориентированного графа, то u, v - концы ребра.

Опр: Если $e = (u, v)$ – ребро (дуга) ориентированного графа, то u - начало ребра, v - конец ребра.

Опр: a, b *смежные* $\Leftrightarrow e = (a, b)$.

Опр: u, v *инцидентны ребру* $e \Leftrightarrow e = (u, v)$.

Опр: Степенью вершины v неориентированного графа называется количество ребер инцидентных данной вершине, $\delta(v)$ (петлю считают два раза).



$$\begin{array}{ll} \delta(1)=2 & \delta(4)=1 \\ \delta(2)=0 & \delta(5)=3 \\ \delta(3)=4 & \Rightarrow sum=10 \end{array}$$

Теорема: Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу ребер

$$\sum_{u \in V} \delta(v) = 2r, \ \textit{где } r \textit{ - число ребер}$$

Док-во: Теорема справедлива, так как вклад каждого ребра равен двум. □

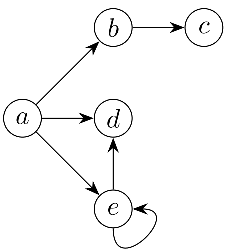
Опр: Если степень вершины равна нулю, то вершина *изолированная*, $\delta(v) = 0$.

Опр: Если степень вершины равна единице, то вершина *висячая*, $\delta(v) = 1$

Опр: Полустепенью исхода(захода) вершина v ориентированного графа называют количество ребер исходящих(заходящих) в данную вершину.
$\delta^-(v)$ – полустепень исхода
$\delta^+(v)$ – полустепень захода

Теорема: Для орграфа справедливо равенство

$$\sum_{u \in V} \delta^-(v) = \sum_{u \in V} \delta^+(v) = r, \ \textit{где } r \textit{ – число ребер}$$



$$\begin{array}{ll} \delta^-(a)=3 & \delta^+(a)=0 \\ \delta^-(b)=1 & \delta^+(b)=1 \\ \delta^-(c)=0 & \delta^+(c)=1 \\ \delta^-(d)=0 & \delta^+(d)=2 \\ \delta^-(e)=2 & \delta^+(e)=2 \\ \sum \delta^-(v)=6; & \sum \delta^+(v)=6 \end{array}$$

Опр: Матрицей смежности графа(орграфа) называют квадратную матрицу размерностью n, где $n = |v|$ (мощность множества вершин), в котором $a_{ij} = k$, где k - число ребер (v_i, v_j)

Опр: Пусть $G(V, E)$ – неориентированный граф. Матрицей инцидентности неориентированного графа называется матрица B размером $n * r$, $|v| = n, |E| = r$, где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ инцидентно ребру } e_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

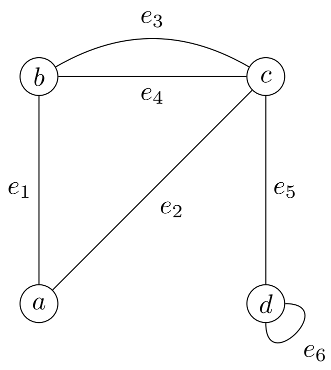
Такая матрица будет симметричной.

Опр: Пусть $G(V, E)$ – ориентированный граф. Матрицей инцидентности ориентированного графа называется матрица B размером $n * r$, $|v| = n, |E| = r$, где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из } v_i \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит из } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если есть петля, то на соответствующее место ставят любое число.

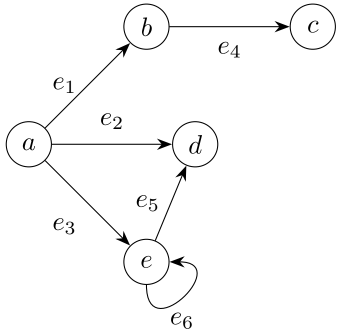
Поиск матрицы смежности A и инцидентности B для неориентированного графа:



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Поиск матрицы смежности A и инцидентности B для ориентированного графа:

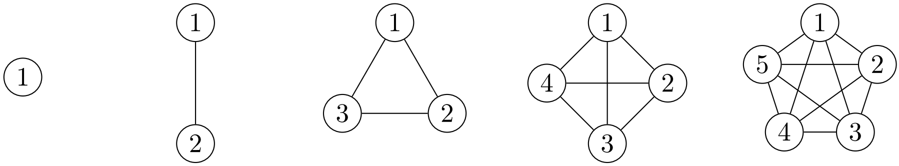


$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Полные и двудольные графы. Число ребер в полном графе с n вершинами и в полном двудольном графе (вывод формул).

Опр: *Полный граф* – простой неориентированный граф у которого любые две вершины смежны.



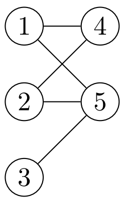
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Количество полных ребер в графе $K_n = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Опр: *Двудольный граф* – граф, если его множество вершин V можно разделить на подмножество V_1 и V_2 такое что: $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

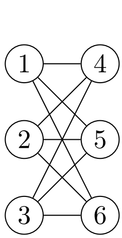
$V_1 \cup V_2 = V$

Смежными *обязаны* быть только вершины из разных долей графа.



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$V_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$V_2 = \{4, 5\}$$

Опр: *Полный двудольный граф* – каждая вершина одной доли соединяется с другой. K_{t_1,t_2}, где t_1, t_2 – количество вершин в долях графа.



$K_{3,3}$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$V_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$V_2 = \{4, 5, 6\}$$

В полном двудольном графе содержится $t_1 \cdot t_2$ ребер.

3 Изоморфизм и гомеоморфизм графов. Примеры изоморфных и гомеоморфных графов. Способы проверки изоморфизма графов. Инварианты графа. Дополнение графа, проверка изоморфизма графов с помощью дополнений. Выяснить, являются ли графы G1 и G2 изоморфными, гомеоморфными.

Опр: *Изоморфизм графов* – биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, такое что:

$$(\forall u, v \in V)((u, v) \in E_1) \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$$

Изоморфные графы обозначаются: $G_1 \cong G_2$

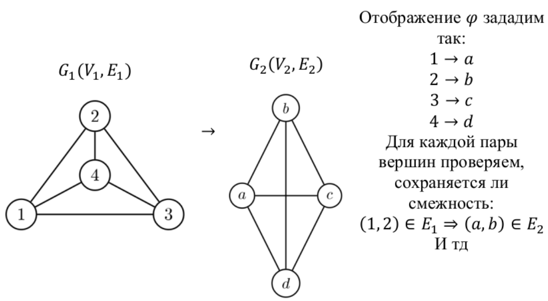
Изоморфные объекты *не различимы* с точки зрения математики. Это экземпляры одного и того же математического объекта. Изоморфные объекты имеют одинаковое число элементов и свойств.

Изоморфизм графов можно определить:

1. По определению (найдя биективное отображение множества вершин, сохраняющее смежность)
2. Перерисовав один из графов так, чтобы изображение совпало с другим графом
3. Сравнив матрицы смежности графов

Теорема: Графы изоморфны тогда и только тогда, когда матрицу смежности одного из них можно получить из матрицы смежности другого путём одновременной перестановки местами i-ой и j-ой строк и столбцов.

Пример изоморфных графов:



Опр: *Инвариантом изоморфизма графов* называется некоторое (обычно числовое) значение или упорядоченный набор значений, характеризующий структуру графа и не зависящий от способа его задания.

Инвариантами графа являются:

1. Количество вершин
2. Количество ребер
3. Набор степеней вершин (упорядоченный)
4. Определитель матрицы смежности
5. Количество компонент связности
6. Хроматическое число и т.д.

Пусть $G(V, E)$ – простой неориентированный граф.

Опр: Дополнением графа G называется граф $\overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$, у которого $\overline{V} = V$, в множестве $\overline{E}$ содержатся ребра полного графа, которых нет в множестве E.

Теорема: Простые графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения.

$$G \cong H \Leftrightarrow \overline{G} \cong \overline{H}$$

Опр: Граф является самодополнительным, если он изоморфен своему дополнению.

Понятие изоморфизма можно дать и для произвольных графов.

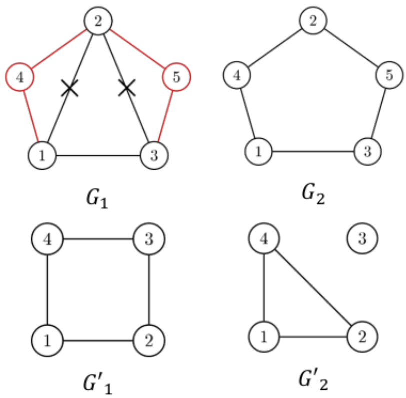
Опр: Граф $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ *изоморфны*, если $\exists$ биективные отображения $\varphi : V_1 \to V_2$ и $h : E_1 \to E_2$ такие, что:

$$e = (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow h(e) = (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$$

Гомеоморфизм графов

Опр: *Операция подразбиения ребра* (u, v) состоит в удалении этого ребра, добавлении вершины ω и рёбер (u, ω) и (ω, v).

Опр: Граф G_2 называется *подразбиением* графа G_1, если его можно получить из графа G_1 путём последовательного применения операции подразбиения рёбер (сам граф тоже является своим подразбиением).



Графы G_1 и G_2 на рисунке гомеоморфны, потому что их подразбиения изоморфны.

Покажем, что графы $G_1{}'$ и $G_2{}'$ не гомеоморфны.

При любой операции подразбиения ребер появляются вершины степени 2, у остальных вершин степень не меняется. В графе $G_2{}'$ есть вершина степени 0, она останется такой при любом количестве операций подразбиения ребер. В графе $G_1{}'$ все вершины имеют степень 2. При любом количестве операций подразбиения ребер появятся вершины степени 2, у имеющихся вершин степень не изменится. Это значит, что любые подразбиения графов не являются изоморфными, поэтому графы $G_1{}'$ и $G_2{}'$ на рисунке не гомеоморфны.

4 Маршруты, цепи, циклы в графе. Метрические характеристики графа. Найти эксцентриситет вершины указанного графа, радиус, диаметр графа, центральные и периферийные вершины указанного графа.

Опр: *Маршрут* (путь) в графе – это конечная чередующаяся последовательность смежных вершин и ребер, соединяющих эти вершины.

Маршрут – последовательность $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{s-1} v_s e_s v_{s+1} \dots v_k$, в которой чередуются все вершины и ребра. $e_s = (v_s, v_{s+1})$.

Опр: *Длина маршрута* – количество ребер в маршруте.

Опр: *Нуль-маршрут* – последовательность из одной вершины v.

Опр: *Замкнутый маршрут (циклический)* – последовательность, в которой совпадает начальная вершина с конечной. Иначе – *незамкнутый (открытый).*

Опр: *Цепь* – незамкнутый маршрут, где все *ребра* попарно различны.

Опр: *Простая цепь* – цепь, где все *вершины* попарно различны.

Опр: *Цикл* – циклический маршрут, где все *ребра* попарно различны.

Опр: *Простой цикл* – цикл, где все *вершины, кроме первой и последней* попарно различны.

Теорема: Из любого цикла можно выделить простой цикл с той же начальной вершиной.

Док-во: Пусть $\exists$ цикл $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_s e_s \dots v_j e_j \dots v_n e_n v_1$. Если все вершины, кроме первой и последней, различны, то этот цикл простой.
Допустим в цикле есть совпадающие вершины (не первая и не последняя) $v_s = v_j$. Тогда удаляем часть маршрута между этими вершинами.

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_s e_s \dots v_j e_j \dots v_n e_n v_1 \Rightarrow v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_s e_j \dots v_n e_n v_1$$

Так как $v_s = v_j$, то полученная последовательность является маршрутом. Продолжая получим простой цикл. $\square$

Теорема: Из любой цепи можно выделить простую цепь с теми же начальными и конечными вершинами (док-во аналогично).

Опр: *Связанные вершины в графе* – $\exists$ маршрут с началом в первой вершине и концом на второй.

Опр: *Связный граф* – две любые вершины являются *связанными.*

Пусть $G(V, E)$ – связный неориентированный граф $(v_i, v_j \in V)$.

Опр: *Расстояние между вершинами, $d(v_i, v_j)$* – длина *кратчайшего* маршрута между этими вершинами.

Опр: *Эксцентриситет вершины графа* – число, максимальное из расстояний между этой вершиной и всеми остальными вершинами.

$$\varepsilon(v_i) = \max d(v_i, v_j), v_j \in V, i \neq j$$

Опр: *Диаметр графа, $D(G)$* – максимальный из всех эксцентриситетов вершин данного графа.

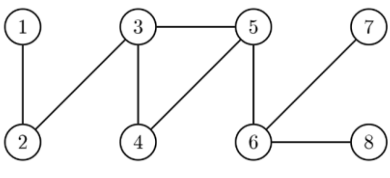
Опр: *Радиус графа, $R(G)$* – минимальный из всех эксцентриситетов вершин данного графа.

Опр: *Периферическая вершина* – ее эксцентриситет равен диаметру.

Опр: *Центральная вершина* – ее эксцентриситет равен радиусу.

Опр: *Центр графа* – множество всех центральных вершин.

Пример: Найти эксцентриситеты вершин, диаметр и радиус графа, периферийные и центральные вершины.



$\varepsilon(1) = 5, \varepsilon(2) = 4, \varepsilon(3) = 3, \varepsilon(4) = 3,$
$\varepsilon(5) = 3, \varepsilon(6) = 4, \varepsilon(7) = 5, \varepsilon(8) = 5.$
$D(G) = 5, R(G) = 3.$

Периферийные: 1, 7, 8
Центральные: 3, 4, 5

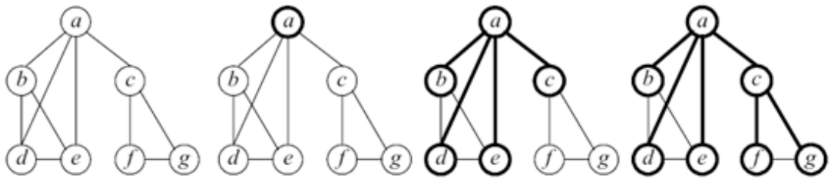
5 Алгоритмы обхода графа в глубину и ширину.

Опр: Обход графа (поиск на графе) — это процесс систематического просмотра всех ребер или вершин графа с целью отыскания ребер или вершин, удовлетворяющих некоторому условию.

Опр: Поиск в ширину (BFS) нужен для нахождения расстояний между вершин в связном графе. Алгоритм по принципу напоминает "пожар".

Алгоритм поиска в ширину:

1. Все вершины окрашиваются в белый цвет.
2. Выбирается первая вершина, раскрашивается в черный цвет и заносится в очередь.
3. Посещается первая вершина из очереди. Все смежные с ней белые вершины раскрашиваются в черный цвет и заносятся в очередь. После этого эта вершина удаляется из очереди.
4. Повторяется шаг 3 до тех пор пока очередь не пуста.



Сложность поиска в ширину при нематричном представлении графа равна $O(n+m)$, так как рассматриваются все n вершин и m ребер. Использование матрицы смежности приводит к оценке $O(n^2)$.

Если граф не является связным, то нужно добавить шаг 5, в котором написать, что нужно повторять 2 шаг до тех пор, пока в графе не останется белых вершин.

Если сначала присвоить первой вершине значение 0, потом смежным с ней вершинам 0+1 =1, и так далее, то в итоге для каждой вершины будет найдено расстояние от первой вершины.

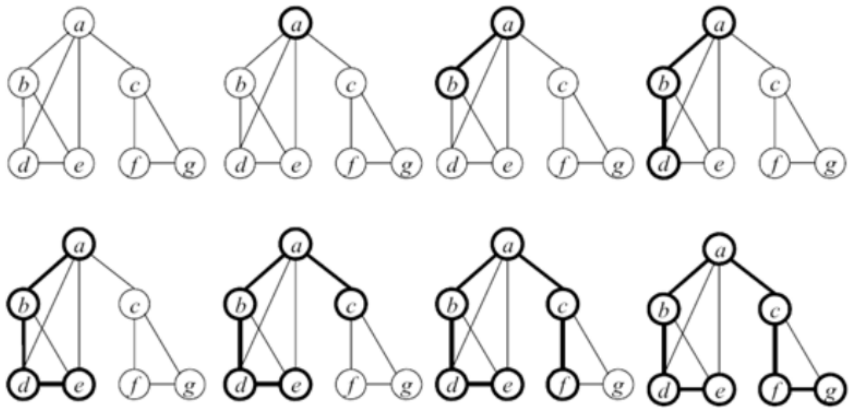
Опр: Поиск в глубину (DFS) исследует конкретную ветку в графе и только потом переходит к другой (если они останутся нерассмотренными).

Вершины графа могут быть раскрашены в три цвета: белый цвет означает, что в вершине еще не были, серый – что в вершине были, но еще вернемся, черный – что были и больше не рассматриваем.

Алгоритм поиска в глубину:

1. Всем вершинам графа присваиваем белый цвет.
2. Выбираем первую вершину и раскрашиваем в серый цвет.
3. Для последней раскрашенной в серый цвет вершины выбираем белую смежную ей вершину (если такая вершина есть), раскрашиваем ее в серый цвет и переходим к шагу 3.
4. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока все вершины не будут раскрашены в черный цвет.

Если для рассматриваемой вершины белых смежных с ней вершин нет, то рассматриваемую вершину раскрашиваем в черный цвет и переходим к шагу 3.



Временная сложность алгоритма зависит от представления графа. Если применена матрица смежности, то временная сложность равна $O(n^2)$, а если нематричное представление – $O(n+m)$: рассматриваются все вершины и все ребра.

6 Прямое произведение множеств, мощность прямого произведения конечных множеств. Бинарные отношения между множествами A и B. Граф бинарного отношения Матрица бинарного отношения, область определения и значений бинарного отношения. Отношение, обратное к данному отношению. Найти отношение, изобразить его граф, найти матрицу.

Пусть A и B – не пустые множества.

Опр: *Прямым (декартовым) произведением множеств A и B* называют множество всевозможных упорядоченных пар $(a, b), a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A, b \in B \,\}$$

Пример:

$$\begin{gathered} A = \{\, 1, 2 \,\}, B = \{\, a, b, c \,\} \\ A \times B = \{\, (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \,\} \\ |A| = n, |B| = m, |A \times B| = n \cdot m \end{gathered}$$

Если $A = B$, то пишут $A \times A = A^2$.

Опр: *Кортеж длины s* – упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, где $a \in A_i$.

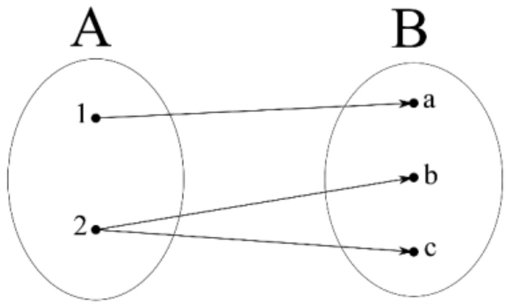
$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_s), a_i \in A_i, i \in \overline{1, s} \,\} \\ |A_i| = t_i \\ \text{Тогда: } |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s| = t_1 \cdot t_2 \cdot \cdots \cdot t_s \\ \text{Если: } A_1 = A_2 = \cdots = A_s = A, \text{ то пишут } A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s = A^s \end{aligned}$$

Опр: *Бинарным отношение между множествами A и B* называется любое подмножество их прямого произведения. Бинарные отношение принято записывать большими буквами или малыми буквами:

$$\begin{gathered} A = \{\, 1, 2 \,\}, B = \{\, a, b, c \,\} \\ R = \{\, (1, a), (2, b), (2, c) \,\} \\ f = \{\, (1, b), (2, a) \,\} \end{gathered}$$

Если $(a, b) \in R$, то говорят, что элементы a и b связаные отношение R или находятся в отношении R. Обозначают: aRb.

Сам граф бинарного отношения будет иметь вид:



Пусть бинарное отношение $R \subset A \times B, |A| = n, |B| = m$.

Опр: *Матрицой бинарного отношения* R называется матрица $C(R) \in M_{n\times m}$, элементы которой находятся по правилу:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R b_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Пример:

$$A = \{\,1, 2\,\}, B = \{\,a, b, c\,\}$$
$$R = \{\,(1, a), (2, b), (2, c)\,\}$$
$$C(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Опр: *Областью определения бинарного отношения* R называется множество первых элементов пар бинарного отношения.

$$D(R) = \{\, x \in A \mid (\exists y \in B)(xRy)\,\}$$

Опр: *Областью значений бинарного отношения* R называется множество вторых элементов пар бинарного отношения.

$$E(R) = \{\, y \in B \mid (\exists x \in A)(xRy)\,\}$$

Пример:

$$A = \{\, 1, 2 \,\}\,,\ B = \{\, a, b, c \,\}$$
$$R = \{\, (1, b), (2, c), (2, a), (2, b) \,\}$$
$$D(R) = \{\, 1, 2 \,\}\,,\ E(R) = \{\, a, b, c \,\}$$

Опр: *Обратное бинарное отношение к R (R^{-1})* называется им, если:

$$R^{-1} = \{\, (y, x) \mid (x, y) \in R \,\}$$

Пример:

$$R = \{\, (1, b), (2, c), (2, a), (2, b) \,\}$$
$$C(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R^{-1} = \{\, (b, 1), (c, 2), (a, 2), (b, 2) \,\}$$
$$C(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица $C(R^{-1})$ является транспонированной матрицей $C(R)$.

7 Свойства бинарных отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, асимметричность, транзитивность. Свойства матриц и графов таких отношений, число таких отношений, заданных на n-элементном множестве.

Будем рассматривать бинарные отношения на множестве A^2 в этом случае говорят что бинарное отношение задано на множестве A.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *рефлексивным*, если для любого $a \in A$ верно aRa.

$$R - \textit{рефлексивно} \iff (\forall a \in A)\ aRa$$

Если R рефлексивное отношение, то квадратная матрица размера n на главной диагонали состоит только из 1. В графе рефлексивное бинарное отношение в каждой вершине имеет *петлю*.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *антирефлексивным*, если для любого $a \in A$ неверно aRa.

$$R - \textit{антирефлексивно} \iff (\forall a \in A)\ \overline{aRa}$$

Если R антирефлексивное отношение, то квадратная матрица размера n на главной диагонали состоит только из 0. В графе антирефлексивное бинарное отношение в каждой вершине не имеет *петель* вообще.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *симметричным* если для любого $a, b \in A$ верно $aRb \Rightarrow bRa$.

$$\begin{aligned} R - \textit{симметрично} \iff & (\forall a, b \in A)\ aRb \Rightarrow bRa \\ & a \textit{ может быть} = b \end{aligned}$$

Матрица симметричного бинарного отношения симметрична относительна главной диагонали. Граф симметричного бинарного отношения *как правило* неориентированный.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *асимметричным*, если для любого $a, b \in A$ верно aRb, то неверно bRa ($b\overline{R}a$).

$$R - \textit{асимметрично} \iff (\forall a, b \in A)\ aRb \Rightarrow \overline{bRa}$$

В матрице бинарного отношения элементы симметричные главной диагонали *различны.* В графе если есть ребро ab, то нет ребра ba.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *антисимметричным*, если для любого $a, b \in A$, $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

$$R - \textit{антисимметрично} \iff (\forall a, b \in A)\ (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$$

Элементы матрицы антисимметричного бинарного отношения относительно главной диагонали *различны.* На главной диагонали могут быть 1. В графе при антисимметричном бинарном отношении могут быть *петли*

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется *транзитивным*, если для любого $a, b, c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$.

$$R - \textit{транзитивно} \iff (\forall a, b, c \in A)\ (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$$

Если отношение обладает каким-нибудь свойством, нужно доказать это, если не обладает, то нужно привести контрпример.

Упражнение 1. Найти число рефлексивных отношений n-элементного множества
Упражнение 2. Найти число антирефлексивных отношений n-элементного множества
Упражнение 3. Найти число симметричных отношений n-элементного множества
Упражнение 4. Найти число антисимметричных отношений n-элементного множества
Упражнение 5. Найти число асимметричных отношений n-элементного множества

8 Отношение эквивалентности: определение, примеры. Классы эквивалентности, полная система представителей. Фактор-множество множества по отношению эквивалентности. Алгоритм выделения классов эквивалентности по графу отношения. Проверить, является ли указанное отношение отношением эквивалентности.

Опр: Бинарное отношение R, заданное на множестве A, называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример:

$$\begin{aligned}A &- \text{множество граждан России}\\ A &= \{\, x \mid x - \text{Гражданин РФ} \,\}\\ R &= \{\, (x,y) \mid x,y \in A; x,y - \text{родились в одном месяце} \,\}\\ R &- \text{рефлексивно, симметрично, транзитивно} \Rightarrow\\ &\Rightarrow R - \text{отношение эквивалентности}\end{aligned}$$

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и элемент $a \in A$.

Опр: Классом эквивалентности отношения эквивалентности R, порождённым элементом a (обозначается $\overline{a}$), называется множество всех элементов множества A, которые находятся в отношении R с элементом a.

$$\overline{a} = \{\, x \in A \mid xRa \,\}$$

Опр: Любой элемент класса эквивалентности называется *представителем этого класса.*

Опр: *Полной системой представителей классов эквивалентности* называется множество представителей всех классов, взятых по одному и только по одному из каждого класса эквивалентности.

Опр: Пусть A – непустое множество. Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности R называется множество всех классов эквивалентности.

$$A/R = \{\, \overline{\overline{a}} \mid a \in A \,\}.$$

Алгоритм выделения классов эквивалентности по графу отношения:

1. Всем вершинам графа приписываем значение 0: color(v):=0
2. k:=0 (количество классов эквивалентности)
3. Рассматриваем вершины графа

Если есть вершина, у которой color(v)=0, то k:=k+1, этой вершине и всем, смежным с ней, присваиваем значение k: color(v):=k, выводим эти вершины с их цветом.
Если вершин, у которых color(v)=0, нет, то выводим значение k – число классов эквивалентности и stop.
Результатом работы алгоритма является число k – количество классов эквивалентности; каждой вершите графа присвоен номер класса эквивалентности.

Временная сложность алгоритма зависит от представления графа. Если применена матрица смежности, то временная сложность равна $O(n^2)$, а если нематричное представление — $O(n+n) = O(2^n)$: рассматриваются все вершины и часть ребер.

9 Разбиение множества. Доказать теорему о связи фактор-множества множества по отношению эквивалентности и разбиением множества.

Опр: *Разбиением множества* A называется такое семейство его непустых подмножеств, что их объединение совпадает с множеством A, а пересечение двух различных подмножеств является пустым множеством.

Пример:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Множество подмножеств множества A
$\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ не является разбиением множества A, так как элементы 2,3 принадлежат одновременно двум подмножествам. Множество подмножеств множества A $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ является разбиением множества A по определению.

Теорема: Пусть R - отношение эквивалентности на множестве A. Фактор множество множества A по R задает разбиение этого множества. (подмножествами разбиения являются классы эквивалентности).

$$A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}$$

Док-во: Докажем, что классы эквивалентности по отношению R являются подмножествами разбиения множества.

1. Докажем, что каждый класс эквивалентности не является пустым:

$$\overline{a} = \{x \in A \mid xRa\}$$
$$R - \text{рефлексивно} \Rightarrow aRa \Rightarrow a \in \overline{a}$$

2. Докажем: если элемент $c \in \overline{a}$ и $c \in \overline{b}$, то эти классы совпадают: $\overline{a} = \overline{b}$.
   Это означает, что различные классы не пересекаются
   $c \in \overline{a} \Rightarrow cRa = aRc$
   $c \in \overline{b} \Rightarrow cRb = bRc$
   $aRb \Rightarrow bRa$
   Это означает, что если какой-то элемент принадлежит двум классам эквивалентности, то элементы, порождающие эти классы, находятся в этом отношении.

Докажем теперь, что $\overline{a} = \overline{b}$. Для этого докажем два включения.

1. $\overline{a} \subset \overline{b}$
   Докажем: $(\forall x)(x \in \overline{a} \Rightarrow x \in \overline{b})$
$$x \in \overline{a} \Rightarrow xRa \wedge aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow x \in \overline{b}$$

2. $\overline{b} \subset \overline{a}$
   Докажем: $(\forall x)(x \in \overline{b} \Rightarrow x \in \overline{a})$
$$x \in \overline{b} \Rightarrow xRb \wedge bRa \Rightarrow xRa \Rightarrow x \in \overline{a}$$

Докажем, что $\cup\overline{a} = A$. Так как $(\forall a \in A)a \in \overline{a}$, то $A \subset \cup\overline{a}$,
любой класс эквивалентности по определению является подмножеством множества A, поэтому и объединение классов является подмножеством A. По определению получили, что фактор множество является разбиением множества a. $\square$

Из этой теоремы следует следующее:

1. $(\forall a \in A)a \in \overline{a}$
2. $(\forall a, b \in A)(a \in \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b})$
3. $(\forall a, b \in A)(a \notin \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing)$
4. $(\forall a \in A) \cup \overline{a} = A$.

10 Отношение нестрогого и строгого, линейного порядка: определение, важнейшие примеры. Определить, является ли отношение отношением порядка.

Пусть A – множество, R – отношение на множестве A, т.е. $R \subseteq A^2$.

Опр: Отношение R называется отношением *нестрогого частичного порядка* на множестве A, если R: рефлексивное, антисимметричное, транзитивное. (Отношение $a \leq b$)

Опр: Если R – порядок на множестве A и $a, b \in R$ или aRb, то элементы a и b называются *сравнимыми.*

Порядок называют частичным порядком, так как не обязательно все элементы являются сравнимыми.

Опр: Отношение R называется отношением *строгого частичного порядка* на множестве A, если оно является антирефлексивным, асимметричным и транзитивным.

В *строгом частичном порядке* можно ограничиться двумя свойствами: антирефлексивность, транзитивность. (доказывается через предположение отсутствия асимметрии, а это противоречит антирефлексивности).

Опр: Порядок R называется линейным порядком, если выполняются условия:

$$(\forall a, b \in A)(a = b \vee aRb \vee bRa).$$

Другими словами, все различные элементы в линейном порядке обязательно сравнимы. Поэтому в случае, когда порядок линейный, слово частичный опускается.

На множестве Z отношение “меньше или равно” является нестрогим линейным порядком.

11 Частично упорядоченные множества. Минимальные элементы, линейно упорядоченные множества. Диаграмма Хассе. Построить диаграмму Хассе указанного множества.

Опр: Множество M с заданным на нем отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным.* (для записи частично упоряденных множеств часто употребляют $\leq$)

Пусть в множестве M задана частичная упорядоченность. Элементы a и b называются *сравнимыми*, если $a \leq b$ или $b \leq a$. Далеко не всегда два элемента из M обязаны быть сравнимыми – именно по этой причине говорят о "частичной упорядоченности".

Опр: *Минимальным элементом частично упорядоченного множества* называется элемент, для которого не существует элемента, меньшего его. Минимальных элементов может быть несколько.

Опр: Частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы, называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью.*

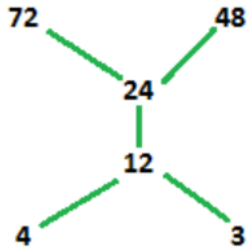
Опр: *Диаграмма Хассе* – граф частично упорядоченного множества. Не совпадает с графом отношения (нет некоторых ребер).

Однако не любой ориентированный граф является представлением частично упорядоченного множества.

Чтобы ориентированный граф представлял частично упорядоченное множество, необходимо и достаточно чтобы в нем не было циклов. В математической литературе частично упорядоченные множества часто изображаются в виде неориентированных графов, при этом подразумевается, что предшествующие элементы расположены ниже последующих. Поэтому, если в этих схемах правильно заменить ребра на ориентированные, то все они окажутся направленными снизу вверх (иногда наоборот сверху вниз).

Пример диаграммы Хассе для множества $R = \{\, 3, 4, 12, 24, 48, 72 \mid \vdots \,\}$

Отношение состоит из следующих пар. R=(3,12), (3,24), (3,48), (3,72), (4,12), (4,24), (4,48), (4,72), (12,24), (12,48), (12,72), (24,48), (24,72), (3,3), (4,4), (12,12), (24,24), (48,48), (72,72)
Диаграмма Хассе будет иметь вид:



На приведенной выше диаграмме элементы 3 и 4 находятся на одном уровне, поскольку они не связаны друг с другом и меньше других элементов в наборе. Следующий последующий элемент для 3 и 4 — это 12, т. е. 12 делится и на 3, и на 4. Тогда 24 делится на 3, 4 и 12. Следовательно, оно помещается выше 12. 24 делит и 48, и 72, но 48 — не делит 72. Следовательно, 48 и 72 не соединяются.

На нашей диаграмме мы можем видеть транзитивность по мере увеличения уровня.

12 Алгоритм топологической сортировки. Применить алгоритм топологической сортировки.

Если для двух вершин v и u есть маршрут из v в u, но нет маршрута из u в v, то говорят, что v предшествует u, а u - последующее для v.

Алгоритм располагает вершины в последовательность таким образом, чтобы если в построенной последовательности вершина v находится правее вершины u, то u - последующее для v в исходном графе или же v и u не сравнимы в исходном бинарном отношении.

При работе алгоритма могут получитлься различнык последовательности.

Алгоритм работает на графах, в которых нет циклов, содержащих более одного ребра. (то есть в графе могут быть циклы вида vev, это значит, что вершина может иметь петлю).

Алгоритмы, которые рассмотрены ниже, работают на ациклических графах. Если же в графах есть петли, а при удалении петель они становятся ациклическими, то предварительно перед применением алгоритма их нужно удалить.

Алгоритм топологической сортировки:

1. $i = 1$
2. В графе находим вершину, в которую не заходит ни одно ребро. Присваиваем ей номер i. Удаляем эту вершину и инцидентные ей рёбра.
3. $i = i + 1$
4. Переходим к шагу 2 до тех пор, пока не пронумеруем все вершины.

Выше графический способ

Алгоритм Кана (формализация графического метода)

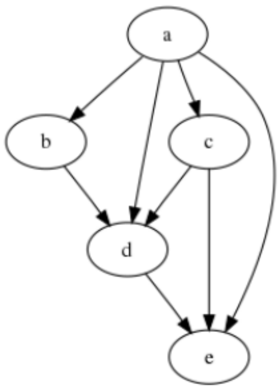
Пусть дан ациклический ориентированный простой граф . Для каждой вершины графа v находим $A(v)$ - множество таких вершин u графа, что в графе есть ребро (u, v). То есть $A(v)$ — множество всех вершин, из которых есть ребро в вершину v.

1. Для всех вершин находим $A(v)$
2. $i = 1$
3. В графе находим вершину, для которой $A(v) = \varnothing$. Присваиваем этой вершине номер i. Удаляем эту вершину из всех множеств $A(v)$.
4. $i = i + 1$
5. Переходим к шагу 3 до тех пор, пока не пронумеруем все вершины.

Опишем матричный способ:

1. Рассмотрим матрицу смежности A графа. Найдём в этой матрице нулевые столбцы. Вершины, соответствующие этим столбцам, нумеруем. Вычёркиваем столбцы и строки, соответствующие этим вершинам.
2. Переходим к шагу 1 до тех пор, пока не пронумеруем все вершины.

Пример:

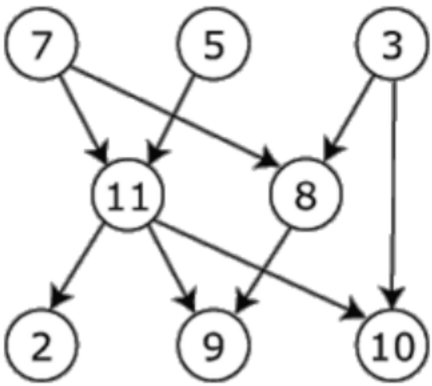


Применим алгоритм Кана к графу:

iter	i	$A(a)$	$A(b)$	$A(c)$	$A(d)$	$A(e)$	set
0		$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, c, d\}$	$\varnothing$
1	1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{b, c\}$	$\{c, d\}$	a
2	2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{d\}$	a, b
3	3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	a, b, c
4	4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	a, b, c, d
5	5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	a, b, c, d, e

Результат работы алгоритма: a, b, c, d, e.

Пример:



Для графа существует несколько согласованных последовательностей его вершин, которые могут быть получены при помощи топологической сортировки, например: $7, 5, 3, 11, 8, 2, 9, 10$; $3, 7, 5, 8, 11, 10, 9, 2$.

Видно, что в последовательности могут быть переставлены любые две стоящие рядом вершины, которые не входят в отношение частичного порядка (несравнимы)

13 Связность в неориентированном графе. Теорема о разложении графа в объединение связных подграфов. Компоненты связности графа. Алгоритм нахождения связных компонент графа. Найти компоненты связности указанного графа.

Опр: Две вершины в графе называются *связанными*, если существует маршрут с началом в первой вершине и концом во второй.

Опр: Граф называется *связным*, если любые две его вершины являются связанными.

Теорема: В неориентированном графе отношение связанности на множестве вершин является отношением эквивалентности.

$$V, \rho = \{\, (v_1, v_2), v_1, v_2 \in V, v_1 \text{ и } v_2 - \textit{связанные} \,\}$$

1. Рефлексивность – $\exists$ нуль-маршрут $(\forall v \in V,\ v\rho v)$
2. Симметричность – $\exists$ маршрут $ue_1 \dots e_s v$ $(u\rho v)$ + $\exists$ маршрут $ve_s \dots e_1 u$ $(v\rho u)$
3. Транзитивность – $\forall u, v, w \in V\ u\rho v \wedge v\rho w \Rightarrow u\rho w$. $\exists$ маршрут $u \dots v$ и $v \dots w \Rightarrow \exists$ маршрут $u \dots w$

Опр: Пусть $G(V, E)$ – граф, то граф $G(V_1, E_1)$ – подграф графа G, если $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset V$.

Теорема: Любой неориентированный граф распадается в объединение своих связных подграфов.

Док-во: Доказано, что в неориентированном графе отношение связанности на множестве вершин является отношением эквивалентности.
Известно, что отношение эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся подмножества - классы эквивалентности, поэтому всё множество вершин разбивается на попарно непересекающиеся подмножества $V_1, V_2, \dots, V_s, V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s$.
В каждом таком подмножестве V_i вершины являются связанными. Вершины из разных подмножеств не являются связанными. Это, в частности, означает, что в графе нет ребер, инцидентных вершинам из разных компонент связности. Это и доказывает справедливость утверждения. □

Связные подграфы также называются *связными компонентами графа.*

Задача 1. Доказать, что любой конечный граф имеет чётное количество число вершин нечётной степени.
Задача 2. Доказать, что если в графе только две вершины имеют нечётную степень, то они связанные.

Док-во: Докажем, что две вершины, которые имеют нечетную степень, принадлежат одной компоненте связности. Предположим противное. Пусть эти вершины принадлежат разным компонентам связности. Тогда в подграфах, содержащих эти вершины, содержится только одна вершина нечётной степени, что противоречит задаче 1.
Поэтому эти вершины принадлежат одной компоненте связности, тогда они являются связанными. □

Для нахождения количество связных компонент графа существует алгоритм: Применяем алгоритм обхода графа в ширину.

1. Всем вершинам графа приписываем значение 0: color(v):=0
2. k:=0 (количество компонент связности)
3. Рассматриваем вершины графа. Если есть вершина, у которых color(v)=0, то k:=k+1, присваиваем этой вершине color(v):=k, заносим вершину в очередь.
4. Посещается первая вершина из очереди. Всем смежным с ней вершинам, у которых color(v)=0, присваиваем color(v):=k и заносим в очередь. После этого первая вершина в очереди удаляется из очереди.
5. Переходим к шагу 4 до тех пор, пока очередь не пуста.
6. Переходим к шагу 3 до тех пор, пока есть вершины, у которых color(v)=0.
7. Если вершин, у которых color(v)=0, нет, то выводим значение k – число компонент связности и stop.

Результатом работы алгоритма является число k – количество компонент связности; каждой вершине графа присвоен номер компоненты связности

Иначе говоря: количество запусков алгоритмов в ширину для обхода всего графа = количеству компонент связности.

14 Реберная и вершинная двусвязность графа. Блоки графа, граф блоков – точек сочленения. Найти компоненты реберной и вершинной двусвязности, граф блоков – точек сочленения графа.

Часто при решении прикладных задач теории графов важно, чтобы граф был "как можно более связным", то есть при удалении какого-то числа ребер или вершин он также бы оставался связным. Поэтому кроме понятий связности существуют также понятия двусвязности, k-связности.

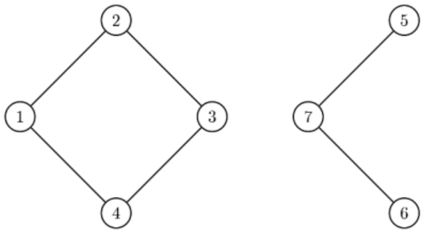
Опр: Две вершины в графе называются реберно двусвязными, если существует два маршрута с началом в первой вершине и концом во второй, в которых нет общих ребер (общие вершины могут быть).

Опр: Граф называется реберно двусвязным, если любые две вершины являются реберно двусвязными.

Теорема: В неориентированном графе отношение реберной двусвязности на множестве вершин является отношением эквивалентности.

Опр: Компонентами реберной двусвязности называют его подграфы, множества вершин которых – классы эквивалентности реберной двусвязности, а множества ребер – множества ребер, соединяющих вершины соответствующих классов эквивалентности.

У графа две компоненты связности: $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $V_2 = \{5, 6, 7\}$:



Все вершины первой компоненты реберно двусвязны, поэтому эта компонента связности является и компонентой реберной двусвязности.

Во второй компоненте никакие две вершины не являются реберно двусвязными, поэтому каждая из них является отдельной компонентой реберной двусвязности.

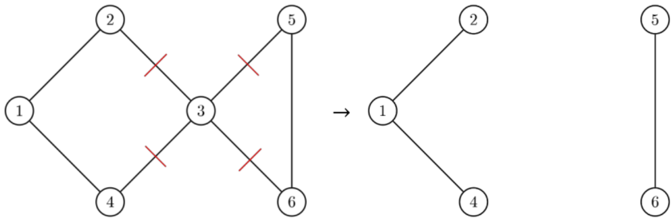
Объединение компонент реберной двусвязности не совпадает с графом в случае, когда в графе есть мосты.

Теорема: Компоненты реберной двусвязности графа $G(V, E)$ – это компоненты связности в графе $G(V, E')$, где E' получено из E удалением всех мостов.

То есть для того, чтобы найти компоненты реберной двусвязности в графе нужно найти все мосты, удалить их из множества ребер графа и в полученном графе найти все компоненты связности.

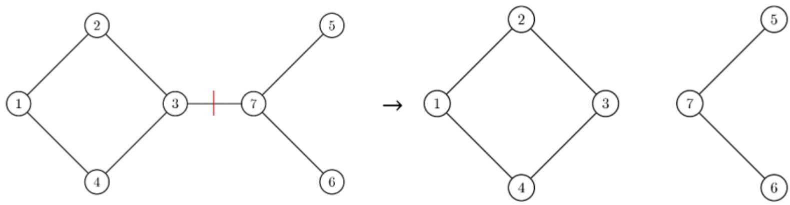
15 Шарниры и мосты в графе. Алгоритм нахождения мостов в графе. Применить его для графа.

Опр: Вершина в графе называется *разделяющей вершиной* (или *точкой сочленения*, или *шарниром*), если её удаление вместе с рёбрами, инцидентными ей, приводит к увеличению числа компонент связности.



В данном графе вершина 3 является *шарниром.*

Опр: *Мостом* в графе называется ребро, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности.

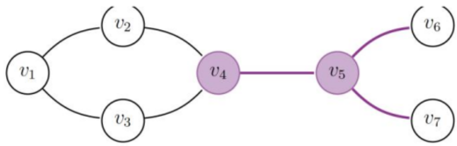


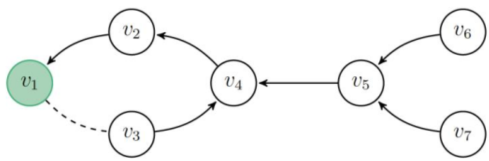
Ребро $(3, 7)$ является *мостом.*

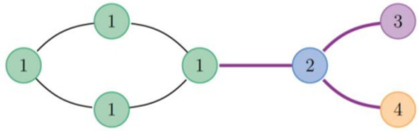
Алгоритм нахождения мостов графа:

1. Проводим поиск в графе в глубину. При появлении новой вершины записываем ее в последовательность L. При прохождении ребра (u, v) делаем ребро ориентированным, а именно, запрещаем прохождение при втором поиске в глубину по этому ребру в направлении от вершины u к вершине v.
2. Проводим второй поиск в глубину с учетом ориентированности ребер. (если по ребру не проходили, то можно по нему идти в любую сторону). Вершины, из которых начинаем обход, берем в порядке из последовательности L, полученной в шаге 1. Вершинам из одной компоненты приписываем один цвет.
3. Ищем ребра графа, вершины которого раскрашены в разный цвет. Это и будут мосты.

Пример алгоритма на графе:







Находим ребра, вершины которых раскрашены в разный цвет – это и будут мосты: $(4, 5), (5, 6), (5, 7)$.

16 Связность в орграфе: различные виды связности, примеры. Компоненты сильной связности. Алгоритм Косарайю нахождения компонент сильной связности. Граф конденсации Применить алгоритм к орграфу, найти граф конденсации.

Опр: Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух вершин v, u графа есть маршрут из v в u и наоборот.

Опр: Ориентированный граф G называется *односторонне связным*, если для любых двух вершин v, u существует хотя бы один из маршрутов из одной вершины в другую.

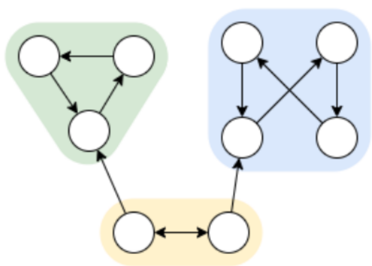
Опр: Ориентированный граф называется *слабо связным*, если соответствующий ему неориентированный граф, в котором нет ориентации рёбер, является связным.

Если задать каждому из этих трех определений бинарное отношение, то только один из заданных отношений на множестве вершин ориентированного графа является отношением эквивалентности.

Теорема: Отношение сильной связности на множестве вершин ориентированного графа является отношением эквивалентности.

Поэтому все вершины распадаются на компоненты сильной связности – такие подмножества, что внутри одной компоненты все вершины сильно связаны, а между вершинами разных компонент сильной связности нет.

Пример графа с тремя компонентами сильной связности.



Самый простой пример сильно-связной компоненты – это цикл. Но это может быть и полный граф, или сложное пересечение нескольких циклов.

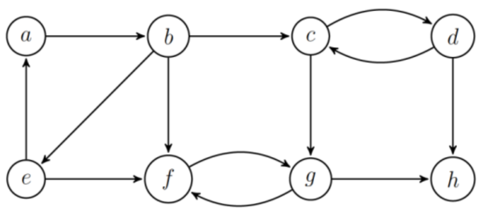
Опр: *Транспонирование (инвертирование) графа* – смена направлений всех ребер в графе на противоположные.

Заметим, что инвертирование в графе не меняет компонент сильной связности графа.

Алгоритм Косарайю для нахождения компонент сильной связности

1. Запускаем алгоритм DFS (обхода графа в глубину). Фиксируем время для вершины, когда она становилась черной(тупиковой). Обозначаем это время T_{out} Получаем последовательность вершин в том порядке, в котором они становились черными.
2. Записываем последовательность вершин, в порядке убывания времени T_{out}.
3. Инвертируем граф.
4. Запускаем DFS к инвертированному графу для последовательности вершин в порядке, полученном в шаге 2. Всем достижимым из текущей вершины вершинам присваиваем ее номер (это будут компоненты сильной связности)

Пример алгоритма:

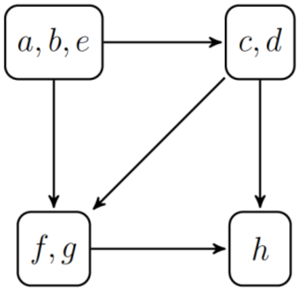


Имеем следующие компоненты сильной связности:
$\{a, e, b\}, \{f, g\}, \{c, d\}, \{h\}$

Часто рассматривают граф, составленный из самих компонент сильной связности, а не индивидуальных вершин. Очевидно, такой граф уже будет ациклическим, и с ним проще работать. Задачу о сжатии каждой компоненты сильной связности в одну вершину называют *конденсацией графа*.

Графом конденсации или графом Герца или конденсацией ориентированного графа G называют такой ориентированный граф G' вершинами которого служат компоненты сильной связности G, а дуга в G' между двумя вершинами проводится только если в графе G существует хотя бы одна дуга между вершинами, входящими в соответствующие компоненты связности.

Для графа предыдущего примера графом конденсации является следующий граф:



17 Теорема о числе маршрутов длины k из одной вершины в другую. Формулировка, доказательство. Применить теорему к графу.

Пусть у графа $G(V, E)$, $|V| = n$, A – матрица смежности. Рассмотрим матрицы $A^2, \ldots, A^n$, обозначим символом $a_{ij}^{(k)}$ – элементы матрицы A^k.

Теорема: Количество маршрутов из v_i в v_j длины k равно числу $a_{ij}^{(k)}$.

Док-во: С помощью методы математической индукции:

1. $k = 1, A = A^1$
   $a_{ij}^{(1)} = s$, где s – количество ребер, соединяющих вершины v_i, v_j. Поэтому количество маршрутов из v_i в v_j длины 1 равно s.

2. Пусть утвеждение верно для A^k и число маршрутов длины k равно из v_i в v_j равно $a_{ij}^{(k)}$. Докажем справедливость для числа маршрутов длины $k+1$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj} = a_{i1}^{(k)} a_{1j} + a_{i2}^{(k)} a_{2j} + \cdots + a_{in}^{(k)} a_{nj}$$

   $a_{i1}^{(k)}$ – количество маршрутов длины k из v_i в v_1, a_{1j} – количество маршрутов из v_1 в v_j длины 1 $\Rightarrow$ $a_{i1}^{(k)} a_{1j}$ – количество маршрутов длины $k+1$ из v_i в v_j, где последнее ребро (v_1, v_j).

   Поскольку последнее ребро может быть либо (v_1, v_j), либо (v_2, v_j), либо (v_n, v_j), то по правилу суммы в комбинаторике, получаем справедливость утверждения для $k+1$.

3. По методу математической индукции заключаем, что теорема верна для любого $n \in \mathbb{N}$.

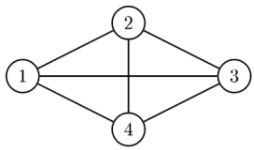
$\square$

В любом графе с n вершинами расстояние от любой вершины до любой другой не более $n-1$. Простой цикл в таком графе имеет длину не больше n. Поэтому справедливы утверждения.

В графе (орграфе) G с n вершинами существует незамкнутый маршрут из вершины v_i в вершину v_j $(v_i \neq v_j)$ тогда и только тогда, когда элемент b_{ij} матрицы $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ не равен 0.

В графе (орграфе) G с n вершинами тогда и только тогда существует цикл, проходящий через вершину v_i, когда элемент b_{ij} матрицы $A + A^2 + \cdots + A^n$ не равен нулю.

Пример теоремы к графу:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Так как $a_{11}^{(2)} = 3$, то существует ровно три маршрута из вершины 1 в 1 длиной 2.

18 Матрицы связности и достижимости в графе. Найти матрицу достижимости для указанного орграфа, с ее помощью выделить компоненты сильной связности графа.

Пусть A – матрица смежности G, $|V| = n$. Найдем $B = E + A + A^2 + \cdots + A^n$.

Определим матрицу D размерности $n \times n$, $d_{ij} = sign(b_{ij})$.

Эта матрица показывает, есть ли путь из вершины v_i в вершину v_j (в этом случае $d_{ij} = 1$).

Опр: В случае если граф G – неориентированный, матрица D называется матрицей связности. В случае, если граф G – ориентированный, матрица D называется матрицей достижимости.

Если G – неориентированный граф, $v_i \in V$, то в одну компоненту связности с вершиной v_i входят такие вершины v_j, для которых $d_{ij} = 1$.

Можно также ввести матрицу, по которой можно найти компоненты сильной связности ориентированного графа.

Пусть D – матрица достижимости орграфа $G, L = D^T$,

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть маршрут из } v_j \text{ в } v_i, \\ 0, & \text{если нет.} \end{cases}$$

$$F = D \times L, f_{ij} = d_{ij} * l_{ij}.$$

Если $f_{ij} = 1$, то вершины v_i и v_j принадлежат одной компоненте сильной связности.

Пример. Рассмотрим ориентированный граф $G(V, E)$

V = {1,2,3}, E = {(1,2), (2,1), (1,3)}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = D * L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому у графа 2 компоненты сильной связности $\{1, 2\}$ и $\{3\}$. Это один из способов нахождения компонент сильной связности. Временная сложность $O(n^4)$.

19 Транзитивное замыкание графа. Алгоритм Уоршелла. Применить алгоритм к заданному бинарному отношению.

Опр: Транзитивным замыканием бинарного отношения R на множестве M называется наименьшее по числу элементов транзитивное отношение на множестве M, включающее R.

Если изобразить граф бинарного отношения, то транзитивность отношения означает, что если есть ребра $(u, v), (v, w)$, то есть и ребро (u, w).

На этом может быть основан алгоритм нахождения транзитивного замыкания бинарного отношения. Для графа можно найти матрицу $T = A + A^2 + \cdots + A^n$, здесь элементы матриц складываем дизьюнктивно:

$$0 + 0 = 0 \vee 0 = 0;\ 0 + 1 = 0 \vee 1 = 1;\ 1 + 0 = 1 \vee 0 = 1; 1 + 1 = 1 \vee 1 = 1.$$

Если элемент этой матрицы $t_{ij} = 1$, то это означает, что существует маршрут от вершины v_i до v_j. Отсюда следует, что для транзитивности отношения эти вершины в графе должны соединяться ребром.

Поэтому соответствующее этой матрице бинарное отношение и является его транзитивным замыканием.

Минус этого метода в его временной сложности: временная сложность нахождения произведения матриц размерности n равна $O(n^3)$, матрицу смежности нужно умножать на себя n раз, поэтому временная сложность этого алгоритма $O(n^4)$.

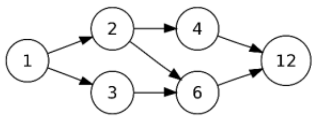
Есть алгоритмы, сложность которых меньше. Опишем один из таких алгоритмов.

Алгоритм нахождения транзитивного замыкания Уоршелла.

```
T := A (матрица отношения)
for k = 1 to n do
(Внешний цикл идет по промежуточным вершинам.)
    for i =1 to n do
    (Циклы по i и j перебирают всевозможные пары.)
        for j =1 to n do
            T(i; j) := max {T(i; j), T(i; k) * T(k; j)}
            (Благодаря операции max сохраняются те связи,
            которые были}
        end for
    end for
end for
```

Трудоемкость такого алгоритма будет $O(n^3)$. Цикл по k нельзя менять с другими циклами.

Пример. Рассмотрим алгоритм Уоршелла на примере бинарного отношения, которому соответствует граф на рисунке



1. Вершины расположим так: 1(1),2(2),3(3),4(4),6(5),12(6) (в скобках указан номер вершины). Найдем матрицу бинарного отношения.

В итоге видим, что нужно добавить 5 ребер: (1,4), (1,6), (1,12), (2,12), (3,12).

$$A = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

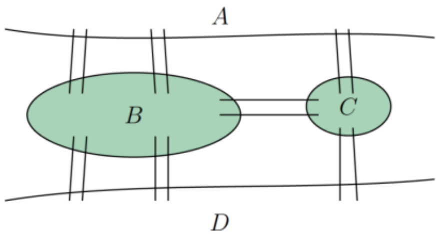
2. Сделаем пересчет по вершине 1. Если t_{ij} =1, то этот элемент пересчитывать не нужно. Если $t_{ij} = 0$, то смотрим, можно ли пройти из вершины с номером i в вершину с номером j через вершину 1. Так как в вершину 1 не заходит ни одно ребро, то нет. Поэтому матрица не меняется.
3. Сделаем пересчет по вершине 2.
   $T(1; 4) := \max\{T(1; 4), T(1; 2) \cdot T(2; 4)\} = \max\{0, 1 \cdot 1\} = 1$
   $T(1; 5) := \max\{T(1; 5), T(1; 2) \cdot T(2; 5)\} = \max\{0, 1 \cdot 1\} = 1$
   Другие элементы матрицы не изменятся.
   $$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. Сделаем пересчет по вершине 3. Матрица не меняется.
5. Сделаем пересчет по вершине 4.
   $T(1; 6) := \max\{T(1; 6), T(1; 4) \cdot T(4; 6)\} = \max\{0, 1 \cdot 1\} = 1$
   $T(2; 6) := \max\{T(2; 6), T(2; 4) \cdot T(4; 6)\} = \max\{0, 1 \cdot 1\} = 1$
   Другие элементы матрицы не изменятся.
   $$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. Сделаем пересчет по вершине 6.
   $T(3; 6) := \max\{T(3; 6), T(3; 5) \cdot T(5; 6)\} = \max\{0, 1 \cdot 1\} = 1$
   Другие элементы матрицы не изменятся.
   $$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Сделаем пересчет по вершине 12. Так как из вершины 12 не выходит ребер, то матрица не меняется.

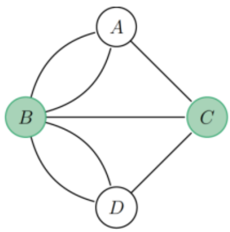
20 Эйлеровы циклы и цепи в графе. Теорема об эйлеровом цикле. Выяснить, существует ли в графе Эйлеров цикл и цепь.

Задача о Кёнигсбергских мостах послужила началом математической теории графов.

Изобразим расположение мостов. Задача: выйти из любой точки, пройти по всем мостам по одному разу и вернуться обратно.



Изобразим граф, в котором вершинами является суша, а рёбрами – мосты.



Опр: Если в графе есть цикл, проходящий по всем рёбрам графа, то такой цикл называется *эйлеровым циклом*, а граф называется *эйлеровым графом.*

Теорема: Конечный граф без изолированных вершин является эйлеровым графом если он является связным и степени всех его вершин четные числа.

$$G - \text{Эйлеров граф} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1.\ G - \text{связный граф} \\ 2. \text{для любой вершины } \delta(v) - \text{чётное число} \end{matrix}.$$

Док-во: $\Rightarrow$ G – эйлеров граф. По определению, в графе есть эйлеров граф. Значит граф связный.

Каждый раз, проходя через вершину, цикл заходит в эту вершину по одному ребру, а выходит по другому ребру. То есть при прохождении через вершину задействуется два различных ребра. Так как в эйлеров цикл входят все рёбра графа, то степень каждой вершины – четное число.

$\Leftarrow$ Пусть граф является связным и степени всех его вершин четные числа. Построим в графе G эйлеров цикл. Начнём цикл в произвольной вершине a. Из вершины a будем строить цикл, проходя всё время по разным рёбрам. Так как степень каждой вершины – чётное число, то цикл может завершиться только в вершине a.

Обозначим полученный цикл за Р. Если в P входят все рёбра графа G, то получили эйлеров цикл. Пусть в P входят не все рёбра графа G, тогда удалим из графа G все рёбра, принадлежащие циклу P. Полученный граф обозначим графом G_1. Так как в графе G степени всех вершин чётные, при прохождении по циклу P задействуется чётное число рёбер, инцидентных каждой вершине, то в графе G_1 степень каждой вершины также чётна. Так как G – связный граф, то среди вершин цикла P найдётся вершина b, инцидентная какому то рёбру графа G_1.

Из вершины b в графе G_1 снова строим цикл. Получим цикл, который завершится в точке b. Назовём его P'. Рассмотрим цикл, полученный объединением маршрутов $P(a, b), P', P(b, a)$. Получили цикл, содержащий больше рёбер, чем в первоначальном. Этот цикл возможно будет эйлеровым. Если нет, то процесс продолжим. Так как граф конечный, то этот процесс завершится на некотором шаге.

В итоге получим эйлеров цикл. $\square$

21 Алгоритм Флери нахождения эйлерова цикла. Применить к указанному графу.

Рассмотрим один из алгоритмов нахождения эйлерова цикла – *алгоритм Флёри*. Он отличается от приведенного алгоритма в доказательстве теоремы Эйлера тем, что каждый раз при добавлении нового ребра в марщрут нужно проверять, не является ли это ребро мостом.

В алгоритме нумеруются все ребра графа числами $1, 2, \ldots, |E|$, так, чтобы номер, присвоенный данному ребру, указывал, каким по счету это ребро будет в эйлеровом цикле.

1. Выбираем произвольную вершину u, присваиваем произвольному ребру (u, v) номер $k = 1$. Вычеркиваем это ребро из множества ребер графа и переходим в вершину v.
2. Пусть v – вершина, в которую мы перешли в результате выполнения предыдущего шага, k – номер, присвоенный ребру на этом шаге. Выбираем любое ребро, инцидентное вершине v. При этом мост выбираем только в случае, когда ребер, инцидентных вершине и не являющихся мостами нет. Этому ребру присваиваем номер $k + 1$, проходим по нему в следующую вершину и вычеркиваем это ребро.
3. Если в графе есть не вычеркнутые ребра, то переходим к шагу 2, иначе stop.

Опр: Граф называется *полуэйлеровым*, если в нём существует цель, проходящая по всем рёбрам графа.

Теорема: Граф без изолированных вершин называется *полуэйлеровым графом* тогда и только тогда, когда выполняется два условия:

1. Граф G является связным
2. Только две вершины в графе имеют нечетную степень.

Опр: *Полустепенью исхода вершины v* орграфа $\delta^{-}(v)$ называется количество рёбер, исходящих из данной вершины.

Опр: *Полустепенью захода вершины v* орграфа $\delta^{+}(v)$ называют количество рёбер, заходящих в данную вершину.

Критерий эйлерова и полуэйлерова графа можно дать и для ориентированного графа без изолированных вершин: для случая эйлерова графа: полустепени исхода всех вершин должны равняться ее полустепени захода, граф должен быть сильносвязным; для случая полуэйлерова графа: полустепени исхода всех вершин, кроме двух должны равняться полустепени захода, для одной из оставшихся вершин полустепень исхода на единицу больше полустепени захода, для другой вершины наоборот.

22 Графы де Брюина: определение, свойства, алгоритм построения. Применение для построения слова наименьшей длины, которое содержит все указанные подслова.

Опр: Конечное множество символов $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ называют алфавитом, символы алфавита – буквами, последовательность символов алфавита – словами. Число символов в слове называют длиной слова.

Опр: Пусть задан алфавит, состоящий из n букв. Графом де Брюина (обозначается $B(n,k)$) для алфавита A называется ориентированный граф $G(V,E)$, множеством вершин которого является множество слов длины k в алфавите A. Ребро (дуга) из вершины u в вершину v проводится, если

$$u = \{ x_1 x_2 \ldots x_k \}, v = \{ y_1 y_2 \ldots y_k \}$$
$$x_2 = y_1, x_3 = y_2, \ldots, x_k = y_k - 1.$$

Это означает, что если вершина $u = \{ x_1 x_2 \ldots x_k \}$, то вершина $v = \{ x_2 x_3 \ldots x_k y_k \}$, при этом ребру (u,v) сопоставляется последовательность из $k+1$ символа: $e = (u,v) = x_1 x_2 \ldots x_k y_k$.

Вершина u называется префиксом, а вершина v – суффиксом слова e.

Справдливы следующие теоремы.

Теорема: Граф де Брюина является эйлеровым графом.

Теорема: Граф де Брюина содержит n^k вершин и n^{k+1} ребер.

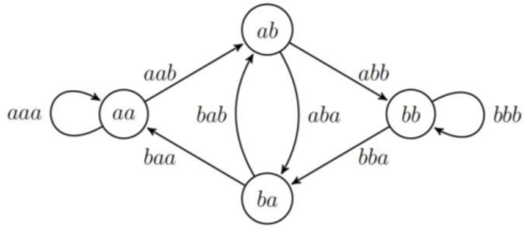
Алгоритм построения графа де Брюина

1. Генерируем в любом порядке все слова длины $k+1$ в алфавите A.
2. Для каждого слова(ребра) $\{ x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} \}$ определяем вершины (узлы): $u = x_1 x_2 \ldots x_k, v = x_2 x_3 \ldots x_k x_{k+1}$.

Пример: Пусть $A = \{ a, b \}, k = 2$. Получаем следующие ребра и вершины графа:

Слово	**Узлы**	**Слово**	**Узлы**
{aaa}	{aa} → {aa}	{baa}	{ba} → {aa}
{aab}	{aa} → {ab}	{bab}	{ba} → {ab}
{aba}	{ab} → {ba}	{bba}	{bb} → {ba}
{abb}	{ab} → {bb}	{bbb}	{bb} → {bb}

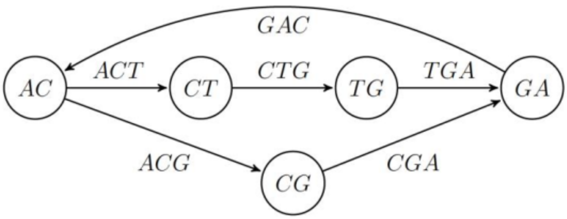
Изобразим полученный граф:



Пример: При помощи графа де Брюина найти слово наименьшей длины, которое содержит все подслова из множества
$R = \{ACT, CTG, TGA, GAC, ACG, CGA\}$.

По алгоритму:

1. $V = \{AC, CT, TG, GA, CG\}$ – вершины графа.
2. Строим граф.



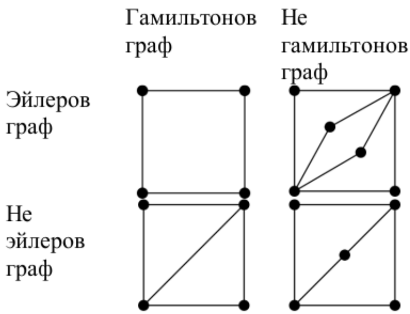
3. Строим эйлерову цепь: $AC \to CT \to TG \to GA \to AC \to CG \to GA$
   Замечание. Эйлерову цепь начинаем в вершине, из которой выходит на одно ребро больше, чем заходит в вершину.
4. Построенной эйлеровой цепи соответствует слово минимальной длины, которое содержит все подслова из R : $ACTGACGA$ (Строим по правилу: $AC + T + G + A + C + G + A$)

23 Гамильтоновы циклы и цепи в графе. Теоремы Дирака и Оре. Выяснить, существует ли в указанном графе Гамильтонов цикл.

Опр: Граф называется *гамильтоновым*, если существует простой цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Опр: Граф называется *полугамильтоновым*, если существует простая цепь, проходящая через все вершины графа.

Покажем, что понятия эйлерова и гамильтонова графа не связаны между собой, то есть у графов могут встретиться всевозможные комбинации этих понятий.



Критерия гамильтонова графа нет. Но есть достаточные условия гамильтоновости графа. Теоремы Дирака и Оре связывают понятие гамильтоновости со степенями $\delta(v)$ вершин графа.

Теорема: Дирака. Если $n \geq 3$ и $\delta(v) \geq n/2$ для любой вершины v неориентированного графа G, то G – гамильтонов граф.

Теорема: Оре. Если $n \geq 3$ и $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ для любых двух различных несмежных вершин u, v неориентированного графа G, то G – гамильтонов граф.

24 Деревья. Теорема о связи вершин и ребер в дереве.

Опр: Граф называется *деревом*, если он является связным и не содержит циклов.

Опр: Граф, все компоненты связности которого являются деревьями, называется *лесом.*

Теорема: Пусть граф G – дерево, у которого n вершин и r ребер. Тогда справедливо равенство $r = n - 1$.

Док-во: Методом математической индукции:

1. G – дерево. $n = 1$. Так как петель в дереве не может быть, то $r = 0$.
2. Пусть равенство выполняется для дерева с $n = k$ вершинами. То есть у такого дерева $r = k - 1$ ребер. Докажем, что равенство будет выполняться и для дерева G с $k + 1$ вершиной.
3. В дереве G существует ребро, поэтому есть и висячая вершина. Эта вершина не является шарниром, поэтому после ее удаления вместе с инцидентным ему ребром граф останется связным. Очевидно также, что в полученном после удаления вершины и ребра графе не будет циклов (так как их нет в G). Поэтому полученный граф является деревом с k вершинами. Известно, по предположению индукции, что у него $k - 1$ ребро. У графа G на одну вершину и на одно ребро больше, поэтому у него $k + 1$ вершина и k ребер, то есть число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. По методу математической индукции заключаем, что утверждение справедливо для любого дерева.

$\square$

Задача №1. В любом дереве, в котором есть хотя бы одно ребро, есть висячие вершины.

Задача №2. Висячая вершина не является шарниром.

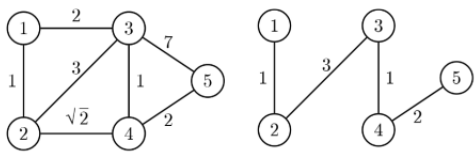
25 Остовное дерево связного графа. Минимальное остовное дерево. Алгоритмы Прима и Краскала, их применение.

Опр: *Остовным (стягивающим) деревом* связного графа называется его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

Опр: Если каждому ребру графа сопоставляется какое-то число (называют вес или длина или стоимость ребра), то такой граф называется *нагруженным (взвешенным) графом.*

Обозначение: $l(e)$ – длина ребра, $w(e)$ – вес ребра.

Пример нагруженного графа и его остовного дерева



Пусть G – нагруженный граф.

Опр: *Минимальным остовным деревом нагруженного графа* называется остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.

Опишем алгоритмы Прима и Краскала, которые позволяют находить минимальное остовное дерево нагруженного графа.

Алгоритмы Прима и Краскала называются также *жадными алгоритмами*, то есть алгоритмами, при которых на каждом шаге происходит поиск оптимального выбора.

Алгоритм Прима нахождения минимального остовного дерева. Пусть в нагруженном графе G число вершин равно n.

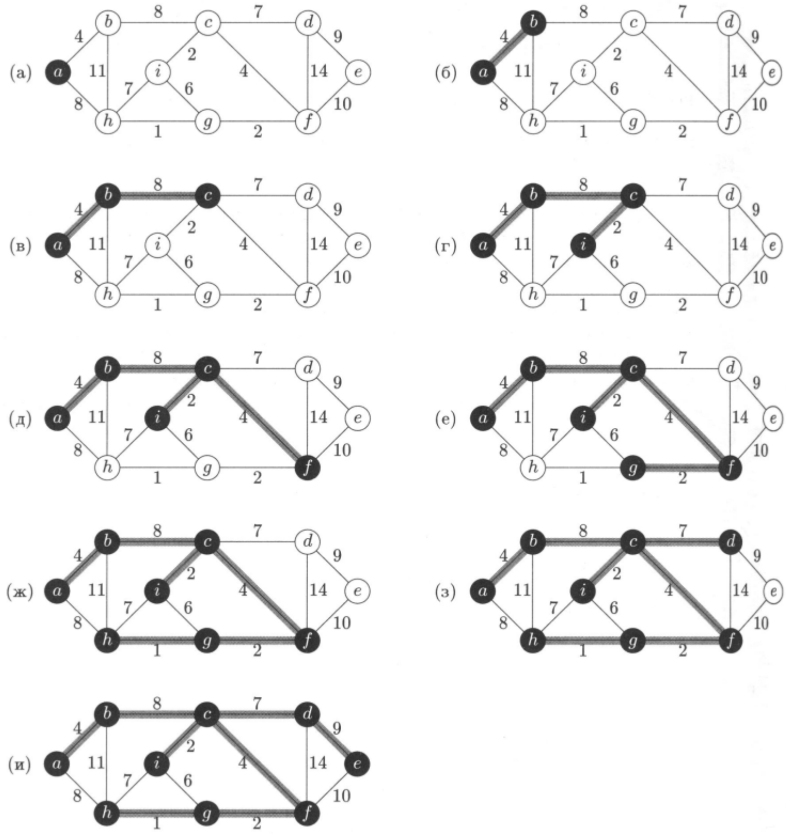
1. Берем произвольную вершину графа. Находим в графе G ребро минимальной длины, инцидентное этой вершине. Получаем подграф, состоящий из 2 вершин и ребра, соединяющего эти вершины. Обозначим этот подграф G_2, $i := 2$.

2. Если $i = n$, то останавливаемся. Если нет, то переходим к шагу 3.

3. Рассмотрим рёбра графа G, одна из вершин которых принадлежит графу G_i, а вторая не принадлежит. Из всех таких рёбер выбираем

ребро минимальной длины и добавляем его к графу G_i. Получаем граф G_{i+1}, $i := i + 1$. Переходим к шагу 2.

Пример. Найдем минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Прима:



Найдем длину(вес) полученного остовного дерева:

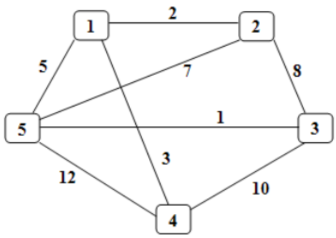
$4 + 8 + 7 + 9 + 2 + 4 + 1 + 2 = 37$

Алгоритм Краскала (Крускала) нахождения минимального остовного дерева.

Пусть в нагруженном графе G число вершин равно n.

1. Упорядочиваем все ребра графа G в порядке неубывания – от ребер минимальной длины к максимальной. Множество ребер остовного дерева пусто.
2. Первое ребро в остовном дереве - первое из упорядоченного списка (то есть ребро минимальной длины).
3. Если в множестве ребер содержится $n-1$ ребер, то останавливаемся. Если нет, то переходим к шагу 4.
4. Добавим в множество ребер остовного дерева такое ребро минимальной длины из оставшихся ребер, при добавлении которого не появятся циклы. Переходим к шагу 3.

Пример. Найдем минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Краскала:



1. Упорядочиваем ребра: $(5,3),(1,2),(1,4),(1,5),(5,2),(2,3),(3,4),(5,4)$.
2. V – множество вершин, E – множество ребер остовного дерева. $V = \varnothing, E = \varnothing$.
3. $E = \{\,(5,3)\,\}, V = \{\,5,3\,\}$
4. $E = \{\,(1,2),(5,3)\,\}, V = \{\,1,2,5,3\,\}$
5. $E = \{\,(1,2),(5,3),(1,4)\,\}, V = \{\,1,2,5,3,4\,\}$
6. $E = \{\,(1,2),(5,3),(1,4),(1,5)\,\}, V = \{\,1,2,5,3,4\,\}$
7. $n-1$ ребер, stop.

Найдем длину (вес) полученного остовного дерева: $1+2+3+5=11$.

26 Матрица Кирхгофа, ее применение для нахождения числа остовных деревьев. Корневые деревья: основные определения. Найти число остовных деревьев с помощью матрицы Кирхгофа.

Пусть G – связный неориентированный граф. $|V| = n$.

Опр: *Матрицей Кирхгофа* графа G называется квадратная матрица размерности $n \times n$, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} k, & \text{где } \delta(v_i) = k, i = j, \\ -1, & \text{если } i \neq j, v_i \text{ и } v_j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

Теорема: Число остовных деревьев в связном графе G, равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.

Пример. Изобразить граф, заданный с помощью матрицы Кирхгофа, найти число остовных деревьев графа и их изобразить.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Найдем алгебраическое дополнение элемента матрицы с индексом 44.

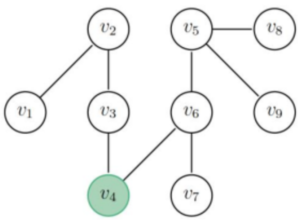
$A_{44} = 1$. Это означает, что существует лишь одно остовное дерево этого графа. Это остовное дерево является самим графом.

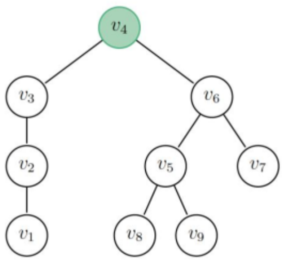
Корневые деревья

Опр: *Корневым деревом* называют дерево с выделенной вершиной – корнем.

Опр: Висячую вершину корневого дерева называют *листом. Высотой корневого дерева* называют расстояние от корня до самого удаленного листа. Если в корневом дереве маршрут, соединяющий вершину u с корнем, проходит через вершину v, то говорят, что вершина u – *потомок вершины* v, вершина v – *предок вершины* u. Множество всех потомков вершины v является деревом с корнем v, оно называется *ветвью дерева* в вершине v. Если предок и потомок соединены ребром, то они называются *отцом и сыном.*

На рисунке пример дерева, в котором выделили вершину v_4 и оно стало корневым деревом. Обычно корень принято изображать сверху (как в генеалогическом древе). Иногда его изображают внизу.





У графа на рисунке высота корневого дерева равна трем.

Для вершин v_1 и v_3, вершина v_1 – *потомок* вершины v_3, вершина v_3 *предок* вершины v_1, вершина v_2 – *отец* вершины v_1.

Множество вершин $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ всех потомков вершины v_3 является деревом с корнем v_3, оно является ветвью дерева в вершине v_3.

Опр: Ориентированным деревом называют ориентированный граф без циклов, в котором в каждую вершину, кроме одной, называемой корнем, входит ровно одно ребро. В корень ориентированного дерева не входит ни одного ребра.

Иногда ориентированные деревья изображают с вершиной – корнем внизу, ребра также могут быть изображены направленными в сторону корня.

27 Теорема Кэли о числе помеченных деревьев. Код Прюфера для дерева: алгоритмы кодирования и декодирования, его применение.

Опр: Граф называется *помеченным (пронумерованным)*, если каждой вершине графа сопоставляется некая метка (если у графа n вершин, то метки – это числа от 1 до n).

При изоморфизме помеченных графов вводится дополнительное условие: пары вершин первого и второго графов с одинаковыми метками должны быть смежны одновременно.

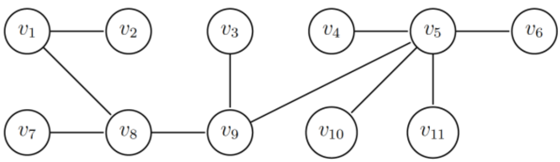
Теорема: Кэли: Число различных помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2}.

Укажем алгоритм, по которому можно для помеченных деревьев с n вершинами ($n \geq 3$) указать его код, состоящий из $n - 2$ чисел (числа могут повторяться).

Алгоритм нахождения **кода Прюфера** помеченного дерева:

1. Находим в дереве висячую вершину с минимальным номером. Удаляем эту вершину вместе с инцидентным ей ребром из графа. Номер смежной ей вершины записываем в код.
2. Если в графе осталось 1 ребро, то останавливаем алгоритм. Если нет, то переходим к шагу 1.

Найдем код Прюфера для следующего дерева:



i	Вершина	p_i	i	Вершина	p_i	i	Вершина	p_i
1	v_2	1	4	v_4	5	7	v_8	9
2	v_1	8	5	v_6	5	8	v_9	5
3	v_3	9	6	v_7	8	9	v_{10}	5

Получаем следующий код Прюфера: $P = \{\, 1, 8, 9, 5, 5, 8, 9, 5, 5 \,\}$

В код Прюфера входят только вершины, не являющиеся висячими. При этом они участвуют в коде $\delta(v) - 1$ раз.

Алгоритм восстановления дерева:

1. Записываем код дерева в первой строке. Находим количество вершин в дереве (число чисел в коде плюс 2) Во второй строке выписываем вершины, которых нет в коде (висячие вершины).
2. Берём вершину u – первую вершину в первой строке и вершину v – вершину с минимальным номером из второй строки. Записываем ребро (u, v) и вычёркиваем u и v из соответствующих строк. Если вершины u больше нет в первой строке, то записываем её во вторую строку.
3. Если вершин в первой строке не осталось, то из оставшихся двух вершин нижней строки составляем ребро и останавливаем алгоритм, иначе переходим к шагу 2.

Пример. Восстановим дерево по коду Прюфера из примера выше.

1. Записываем код в первой строке, висячие вершины во второй:
   1,8,9,5,5,8,9,5,5 (n=11)
   2,3,4,6,7,10,11
2. Записываем ребро (1,2)
   8,9,5,5,8,9,5,5
   3,4,6,7,10,11,**1**
3. Записываем ребро (8,1)
   9,5,5,8,9,5,5
   3,4,6,7,10,11
4. Записываем ребро (9,3)
   5,5,8,9,5,5
   4,6,7,10,11
5. Записываем ребро (5,4)
   5,8,9,5,5
   6,7,10,11
6. Записываем ребро (5,6)
   8,9,5,5
   7,10,11
7. Записываем ребро (8,7)
   9,5,5
   10,11,**8**
8. Записываем ребро (9,8)
   5,5
   10,11,**9**
9. Записываем ребро (5,9)
   5
   10,11
10. Записываем ребро (5,10)
    11,5
11. Записываем ребро (5,11)

Получили граф, соответствующий графу, код которого получали в предыдущем примере.

28 Цикломатическое число графа, теорема о связи цикломатического числа с количеством вершин, ребер и компонент связности.

Опр: *Цикломатическим числом графа* называется минимальное число рёбер, которое нужно удалить, чтобы в графе не было циклов.

Если граф G – связный, то нужно удалить рёбра так, чтобы получилось остовное дерево графа.

Теорема: Цикломатическое число графа, у которого n вершин, r рёбер и k компонент связности, равно $r - n + k$.

Док-во: Рассмотрим сначала случай, когда граф G – связный, у него n вершин и r рёбер, одна компонента связности. Для того, чтобы у подграфа этого графа не было циклов, нужно удалить рёбра так, чтобы получилось остовное дерево графа.

Пусть s – количество рёбер, которые нужно удалить, чтобы получить остовное дерево. Из общего числа ребер r вычитаем число ребер в остовном дереве. Известно, что их $n - 1$.

$s = r - (n - 1) = r - n + 1$– цикломатическое число связного графа.

Обозначим цикломатическое число графа $\mu(G)$.

Пусть теперь $G(V, E)$ – граф, у которого n вершин, r рёбер и k компонент связности. Тогда нам нужно получить остовной лес. Для этого в каждой компоненте связности ищем его остовное дерево. Обозначим n_i и r_i – количество вершин и ребер в компоненте связности с номером i. Тогда цикломатическое число равно:

$$\begin{aligned}\mu(G) = (r_1 - n_1 + 1) + (r_2 - n_2 + 1) + \cdots + (r_k - n_k + 1) = \\ = (r_1 + r_2 + \cdots + r_k) - (n_1 + n_2 + \cdots + n_k) + k = r - n + k.\end{aligned}$$

□

29 Главные циклы графа, Теорема о разложении цикла в сумму главных циклов. Применение для указанного графа.

Опр: Пусть $G(V, E)$ – связный граф с n вершинами и r ребрами, $T(V, E_1)$ – остовное дерево графа G. Ребра $e \in E_1$ называются *ветвями*, ребра $y \in E \setminus E_1$ называются *хордами* графа.

Если к остовному дереву добавить хорду $y = (u, v)$, то y и T образуют граф с циклом, который определяется единственным образом цепью, соединяющей вершины u и v. Этот цикл называют *главным циклом, определяемым хордой y.*

Множество всех главных циклов называют *фундаментальной системой циклов.*

Ветвей в графе $n - 1$, тогда хорд $r - (n - 1) = r - n + 1 = \mu(G)$ – цикломатическое число графа.

Опр: Введем операцию сложения по модулю 2 над множествами ребер графа M_1 и M_2:

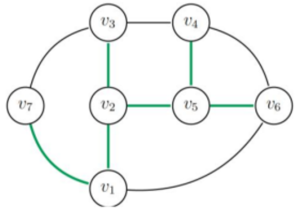
$$M_1 \oplus M_2 = \{ e \in E \mid (e \in M_1 \text{ и } e \notin M_2) \text{ или } (e \notin M_1 \text{ и } e \in M_2) \}.$$

Эту операцию можно задать и для произвольного конечного числа подмножеств ребер графа: ребро будет принадлежать сумме подмножеств ребер, если оно принадлежит нечетному числу подмножеств.

Теорема: Любой цикл Z графа является суммой его некоторых главных циклов:

$$Z = C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_k}.$$

Пример. Рассмотрим граф на рисунке. Ребра остовного дерева обозначены зеленым цветом. Построим главные циклы графа.



Рассматриваем все хорды графа. Добавляем их по очереди в остовное дерево, смотрим, какой цикл получился, записываем его.

$$C_1 - (v_3, v_4) : v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_2 \to v_3$$
$$C_2 - (v_4, v_6) : v_4 \to v_6 \to v_5 \to v_4$$
$$C_3 - (v_1, v_6) : v_1 \to v_6 \to v_5 \to v_2 \to v_1$$
$$C_4 - (v_3, v_7) : v_3 \to v_2 \to v_1 \to v_7 \to v_3$$

Получили четыре главных цикла. C_1, C_2, C_3, C_4 - фундаментальная система циклов. Через нее можно выразить любой цикл.

Рассмотрим цикл $Z = \{ v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_1 \}$. Тогда

$$Z = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3.$$

Для того, чтобы найти разложение цикла Z в сумму главных циклов, нужно взять те циклы, которым принадлежат хорды, входящие в цикл Z.

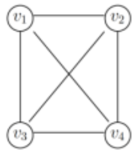
30 Укладка графа. Планарные и плоские графы. Теорема Эйлера о связи числа вершин, ребер и граней в плоском графе.

Опр: Граф называется *укладываемым на поверхности* S, если его можно изобразить на S так, что никакие два ребра не пересекутся во внутренних точках, само такое изображение графа называется *укладкой графа на поверхности* S.

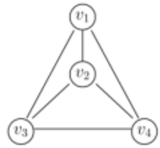
Опр: Если граф является укладываемым на плоскости, то он называется *планарным.*

Опр: Любая укладка планарного графа на плоскости называется его *плоской укладкой (плоским графом).*

Пример. Граф на рисунке а) является планарным, но не плоским. На рисунке б) граф из пункта а) изображен по другому, без пересечений во внутренних точках ребер, он является планарным и плоским.



а)



б)

Задача. Любое дерево является планарным графом.

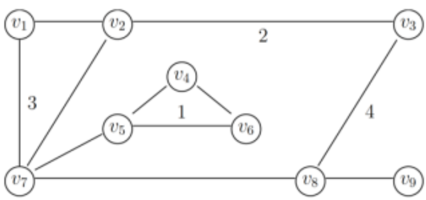
Опр: Пусть дана плоская укладка графа G. *Гранью графа* G называется множество точек плоскости, каждую пару которых можно соединить кривой, не проходящей через вершины и ребра графа.

Опр: Грань, являющееся неограниченной областью плоскости, называется *внешней гранью*, остальные грани называются *внутренними.*

Любая грань ограничена некоторым замкнутым маршрутом (не обязательно циклом, в таком маршруте могут повторяться вершины и ребра).

Пример. На рисунке ниже отмечены грани плоского графа: 1,2,3 – внутренние, 4 – внешняя.

Внешняя грань ограничена замкнутым маршрутом $v_1v_2v_3v_8v_9v_8v_7v_1$



Теорема: (Эйлера) Если связный плоский граф имеет n вершин, r ребер и q граней (включая внешнюю), то справедливо равенство

$$n - r + q = 2$$

Док-во: Рассмотрим $G(V, E)$ – граф, у которого n вершин, r рёбер, q граней.

Найдем его остовное дерево. В нем будет n вершин, $n-1$ рёбер, 1 грань (внешняя). Для полученного остовного дерева равенство выполняется:

$$n - r + q = n - (n-1) + 1 = 2$$

Будем добавлять в остовное дерево по одному ребру. Так как граф плоский, то при этом каждый раз будет добавляться один замкнутый маршрут, а значит, одна грань будет отделяться, то есть на одну грань каждый раз будет становиться больше. Так как число граней и ребер стоят в равенстве с разными знаками, то сумма меняться не будет. Так можно дополнить остовное дерево до самого графа, при этом равенство $n-r+q=2$ сохранится. $\square$

31 Следствие из теоремы Эйлера о связи числа вершин, ребер и граней в плоском графе. Доказать, что для графов - триангуляций выполняется верхняя оценка следствия.

Теорема Эйлера справедлива для любых псевдографов, следствие из нее справедливо только для простых графов.

Следствие: Если связный простой плоский граф имеет n вершин, где $n \geq 3$ и r ребер то справедливо неравенство: $3n - r \geq 6$.

Док-во: Обозначим через qk число граней, ограниченных k ребрами. Так как в графе нет петель и кратных ребер, то $q_1 = q_2 = 0$. Поэтому число всех граней равно: $q = q_3 + q_4 + \dots$.

Покажем, что справедливо равенство $2r = 3q_3 + 4q_4 + \dots$.

В нем справа найдено количество всех ребер, ограничивающих каждую грань. Так, q3 – количество граней, ограниченных 3 ребрами, поэтому $3q_3$ – количество всех ребер, ограничивающих эти грани. Каждое ребро в этой сумме учитывается дважды, так как каждое ребро принадлежит двум граням (или два раза одной грани), поэтому слева стоит множитель 2. Получаем: $2r = 3q_3 + 4q_4 + \dots \geq 3(q_3 + q_4 + \dots) = 3q$. Поэтому $2r \geq 3q$, поэтому $q \geq \frac{2}{3}r$.

По теореме Эйлера $n - r + q = 2$. Тогда $q = 2 - n + r \geq \frac{2}{3}r$.

$6 - 3n + 3r - 2r \geq 0$, поэтому получаем: $3n - r \geq 6$. □

В следствии доказывается, что если связный плоский граф имеет n вершин, где $n \geq 3$ и r рёбер, то справедливо неравенство: $3n - r \geq 6$.

В связи с этим возникает вопрос: существуют ли графы с верхней оценкой, то есть для любого ли n существует планарный граф, для которого верно $3n - r = 6$. Оказывается, существуют.

Опр: Это связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины 3. Такие графы называются *триангуляциями*.

Докажем методом математической индукции по числу вершин n, где $n \geq 3$, что для таких графов равенство $3n - r = 6$ выполняется.

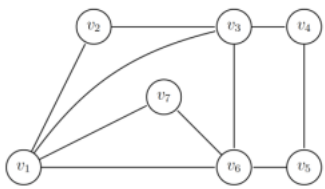
1. Если $n = 3$, то таким графом является полный граф $_3$. Для него $9 - 3 = 6$.

2. Пусть для n у такого графа равенство выполняется: $3n - r = 6$. Докажем, что для такого графа с $n + 1$ вершиной равенство также будет выполняться. К имеющемуся графу с n вершинами добавляем одну вершину. Она попадет в один из треугольников. Соединяем ее с тремя вершинами треугольника, внутрь которого она попала, при этом планарность не нарушается. Таким образом, добавляется 3 ребра, то есть у графа $(n + 1)$ вершина и $(r + 3)$ ребра.

$$3(n + 1) - (r + 3) = 3n + 3 - r - 3 = 3n - r = 6.$$

3. По методу математической индукции заключаем, что равенство справедливо для любого n.

Пример: Для графа на рисунке удостовериться, что справедлива формула Эйлера, равенство $2r = 3q_3 + 4q_4 + \ldots$ и неравенство $3n - r \geq 6$.

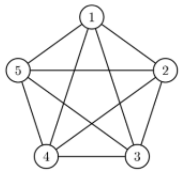


$n = 7, r = 10, q = 5.7 - 10 + 5 = 2$ (верно)
$q_3 = 2, q_4 = 2, q_6 = 1$ (внешняя грань)
$20 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 6 + 8 + 6$ (верно)
$3 \cdot 7 - 10 \geq 6$ (верно)

32 Доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$. Критерий планарности графов. Выяснить, является ли граф планарным.

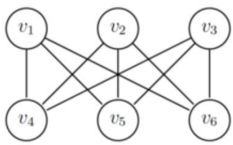
С помощью следствия из теоремы Эйлера можно доказать непланарность некоторых графов.

Рассмотрим полный граф K_5. У него $n = 5, r = 10$.



$3 \cdot 5 - 10 = 5 < 6$, поэтому этот граф не является планарным.

Рассмотрим полный двудольный граф $K_{3,3}$.



У него $n = 6, r = 9$. Если бы граф $K_{3,3}$ был планарным, то из равенства $6 - 9 + q = 2$ получаем: $q = 5$, поэтому $5 = q_3 + q_4 + \dots$

У графа K3,3 циклы минимальной длины могут иметь длину 4, циклов длины 5 нет (у двудольного графа циклы не могут иметь нечетную длину), могутеще быть циклы длины 6, поэтому $5 = q_4 + q_6$ Решениями этого уравнения являются пары: (0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0).

Имеем также равенство: $2r = 18 = 4q_4 + 6q_6$. Ни одна из пар предыдущего равенства не является решением этого уравнения.

Поэтому граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Граф $K_{3,3}$ связан с теоремой о трех соседях и трех колодцах: нужно от каждого из домов трех соседей к каждому из трех колодцев провести дорожки, которые бы не пересекались. Так как граф $K_{3,3}$ не является планарным, то это сделать невозможно.

Теорема: (Критерий Понтрягина – Куратовского плоской реализуемости графа)

Конечный граф G является планарным тогда и только тогда, когда он не имеет подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

33 Теорема об укладке графа в трехмерном пространстве.

Теорема: Любой конечный граф можно уложить в трёхмерном пространстве.

Док-во: Рассмотрим произвольный граф с n вершинами и r рёбрами. Проведем прямую, отметим на ней n различных точек. Каждой из них сопоставим вершину графа. Через прямую проведем r различных плоскостей, каждой плоскости сопоставим ребро графа. Каждому ребру (u, v) сопоставим полуокружность, соединяющую вершины u и v, и проходящую в плоскости, соответствующей данному ребру. Очевидно, что такие ребра не будут пересекаться во внутренних точках. $\square$

34 Хроматическое число и хроматический индекс графа. Теорема о хроматическом числе графа в простейших случаях. Теорема о четырех красках. Найти хроматическое число графа. Ответ обосновать.

Опр: *Раскраской графа (вершинной раскраской, правильной вершинной раскраской)* называется такое приписывание цветов вершинам графа, что смежным вершинам сопоставляются разные цвета.

Опр: Граф называется *n-раскрашиваемым*, раскраска графа, использующая n цветов.

Опр: Хроматическим числом графа $\chi(G)$ называется минимальное количество цветов в раскраске этого графа.

Теорема: Оценка хроматического числа графа в простейших случаях.

1. $\chi(G) = 1$ тогда и только тогда, когда граф не содержит ни одного ребра;
2. $\chi(G) = 2$ тогда и только тогда, когда G – двудольный граф, содержащий хотя бы одно ребро;
3. если G – дерево, содержащее хотя бы одно ребро, то $\chi(G) = 2$;
4. если K_n – полный граф, то $\chi(K_n) = n$;
5. если в графе есть полный подграф K_s, то $\chi(G) \geq s$.

Док-во: Оценка хроматического числа графа в простейших случаях.

1. Если в графе нет рёбер, то всем вершинам можно приписать один цвет.
2. Вершины из одной доли раскрашены в один цвет и не смежны по определению. Доли всего две, следовательно, $\chi(G) = 2$.
3. Дерево – двудольный граф без циклов. Аналогично 2, $\chi(G) = 2$.
4. Так как все вершины графа смежные, то им необходимо сопоставить разные цвета.
5. В полном графе на n вершинах, можно выделить полный подграф $n-1$. $\chi(G') = n-1$ для подграфа, $\chi(G) = n$ для самого графа. Тогда $n \geq n-1$.

$\square$

Одной из основных теорем математики являются теорема о **четырёх красках**. Очень долго она была гипотезой, но сейчас считается теоремой.

Пусть есть некоторая карта государств, при этом два государства называются соседними, если они имеют общую границу.

Теорема: Пусть каждое государство является односвязной областью, соседние государства имеют протяжённую границу. Тогда их можно раскрасить, используя не более 4 цветов так, чтобы соседние государства были раскрашены в разный цвет.

Рассмотрим столицы этих государств. Им сопоставим вершины графа. Если страны являются соседними, то соединим вершины, соответствующие их столицам, рёбрами. Тогда теорему можно сформулировать следующим образом:

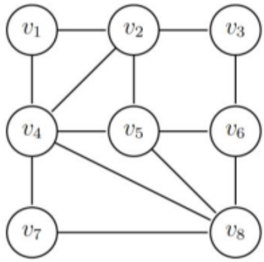
Теорема: Хроматическое число планарного графа не больше четырех.

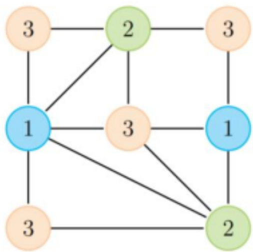
Док-во: Теорема была доказана в 1978 году с помощью ЭВМ и пока не имеет доказательства в традиционном понимании. □

Алгоритм последовательной раскраски:

1. Упорядочиваем вершины графа G в порядке невозрастания степеней – от вершин максимальной степени к минимальной. Получаем последовательность L.
2. Полагаем цвет окраски p=1.
3. Если список L пуст, то останавливаемся. Если нет, то переходим к шагу 4.
4. Окрашиваем в цвет p первую вершину из списка L и все вершины, которые не смежны с вершинами, уже окрашенными в цвет p, рассмотрение этих вершин производим в порядке, в котором они находятся в последовательности L. После того, как вершина получила цвет, удаляем ее из списка. После рассмотрения всех вершин последовательности p:=p+1. Переходим к шагу 3.

Пример раскраски на графе.





Очевидно, что раскраска оптимальна, так как в графе есть подграф K_3, и следовательно, $\chi(G) \geq 3$.

Опр: *Рёберной раскраской графа* называется приписывание рёбрам цветов так, чтобы рёбра, имеющие общую вершину, были раскрашены в разные цвета.

Опр: *Хроматическим индексом графа* называется минимальное количество цветов в реберной раскраске графа.

Теорема: Хроматический индекс графа равен δ или $\delta + 1$, где

$$\delta = \max \delta(v), v \in V.$$

35 Эвристический алгоритм нахождения хроматического числа графа. Применить для указанного графа.

36 Хроматический многочлен, его свойства и методы нахождения. Найти хроматический многочлен графа.

Опр: Пусть $G = (V, E)$ – некоторый граф и t – заданное число цветов. Число способов правильной раскраски графа G с возможностью использования t цветов называется его *хроматическим многочленом* и обозначается $P(G, t)$.

Рассмотрим хроматические многочлены для некоторых графов.

1. $P(G, t)$ графа из одной вершины без ребер равен t.
2. $P(G, t)$ графа из двух вершин без ребер равен t^2.
3. $P(G, t)$ графа из n вершин без ребер (нульграфа) равен t^n.
4. $P(G, t)$ полного n-вершинного графа K_n равен

   $t(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))$.
5. $P(G, t)$ дерева с n вершинами равен $t(t-1)^{n-1}$.
6. $P(G, t)$ графа из n вершин, который является цепью равен $t(t-1)^{n-1}$.
7. $P(G, t)$ графа из n вершин, который является циклом, равен

   $(t-1)^n + (-1)^n(t-1)$.

Теоремы Зыкова

Две теоремы, рассмотренные ниже, позволяют находить хроматический многочлен графа.

Рассмотрим три операции на графах: удаление ребра, добавление ребра и стягивание двух несмежных вершин.

В первой операции у графа из множества ребер удаляется выбранное ребро (u, v), граф в этом случае обозначается $G \setminus \{\,(u, v)\,\}$.

Во второй операции добавляется ребро (u, v), которого не было, граф в этом случае обозначается $G \cup \{\,(u, v)\,\}$.

В третьей операции две вершины u, v отождествляются, вместо них берется новая вершина, эта вершина в новом графе смежна всем вершинам, которым смежна хотя бы одна из вершин u, v, граф в этом случае обозначается $G/(uv)$.

Хроматический многочлен можно находить с помощью двух теорем.

Теорема: (Зыкова 1). Пусть (u, v) – ребро графа G, t – количество цветов, используемых при раскраске. Тогда

$$P(G, t) + P(G/(uv), t) = P(G \setminus \{ (u, v) \}, t).$$

Док-во: Выражение $P(G \setminus \{ (u, v) \}, t)$ в правой части равенства – это число возможных правильных раскрасок графа G с удаленным ребром (u, v), поэтому в нем вершины u и v могут иметь как одинаковый, так и разные цвета.

В левой части равенства слагаемое $P(G, t)$ – это число различных правильных раскрасок графа G, в которых смежные вершины u и v имеют разные цвета, в слагаемом $P(G/(uv), t)$ вершины u и v стянуты в одну, поэтому имеют один цвет. Поэтому равенство справедливо.

Если равенство записать в виде $P(G, t) = P(G \setminus \{ (u, v) \}, t) - P(G/(uv), t)$,

то его можно использовать для нахождения хроматического многочлена, каждый раз производя операции удаления ребра и стягивания

Этот алгоритм называют *редукцией по нуль-графам* или *алгоритмом Зыкова.* □

Теорема: (Зыкова 2). Пусть u, v – несмежные вершины графа G. Тогда

$$P(G, t) = P(G \cup \{ (u, v) \}, t) + P(G/(uv), t)$$

Применение этой теоремы для нахождения хроматического многочлена называется редукцией по полным графам.

Пусть хроматический многочлен графа G имеет вид:

$$P(G,t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Справедливы следующие свойства хроматического многочлена:

1. Свободный член хроматического многочлена a_0 равен нулю.
2. Старший член хроматического многочлена a_n равен 1.
3. Степень хроматического многочлена равна числу вершин в графе.
4. Пусть v – висячая вершина графа G, пусть G_1 – граф, полученный из графа G удалением этой вершины и инцидентного ей ребра. Тогда $P(G,t) = (t-1)P(G_1,t)$
5. Пусть v – вершина графа G степени два, смежная с двумя вершинами u и w, которые, в свою очередь, смежны друг с другом (то есть три эти вершины образуют граф K_3). Пусть G_1 – граф, полученный из графа G удалением этой вершины и двух инцидентных ей ребер. Тогда $P(G,t) = (t-2)P(G_1,t)$
6. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_s$ – компоненты связности графа G.

   Тогда $P(G,t) = \prod_{i=1}^{s}(G_i,t)$