

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет имени В. И. Ленина "ЛЭТИ"

билеты

# КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Студент:

Группа:

Лектор:

Придчин В.Е.

2308

Зяблицева Л.

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Санкт-Петербург

2024

**1 Основные определения теории графов. Смежность и инцидентность вершин и ребер графа. Степени вершин в графе и орграфе. Теоремы о сумме степеней вершин в графе и орграфе. Матрицы смежности и инцидентности. Найти матрицы смежности и инцидентности указанного графа.**

$V$  – множество вершин.

$E$  – множество пар вида  $(u, v) : u, v \in V$  (множество ребер).

**Опр:** Графом – называют совокупность 2-ух множеств непустого множества  $E$

$$E = \{(u, v) : u, v \in V\}, \quad G(V, E) - \text{обозначение графа}$$

**Опр:** Петля – пара вида  $(v, v)$  в множестве  $E$ .

**Опр:** Кратные ребра – одинаковые пары в множестве  $E$ . Количество кратных ребер - кратность ребра.

Существуют следующие виды графов:

1. Псевдограф – в графе могут быть и *кратные ребра*, и *петли*.
2. Мультиграф – в графе есть *кратные ребра*, но нет *петель*.
3. Простой граф – отсутствуют и *кратные ребра* и *петли*.

**Опр:** Ориентированный граф (орграф) – граф с ориентированными ребрами.

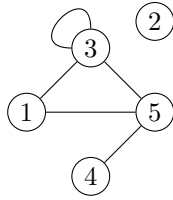
**Опр:** Если  $e = (u, v)$  – ребро неориентированного графа, то  $u, v$  - концы ребра.

**Опр:** Если  $e = (u, v)$  – ребро (дуга) ориентированного графа, то  $u$  - начало ребра,  $v$  - конец ребра.

**Опр:**  $a, b$  смежные  $\Leftrightarrow e = (u, v)$ .

**Опр:**  $u, v$  инцидентны ребру  $e \Leftrightarrow e = (u, v)$ .

**Опр:** Степенью вершины  $v$  неориентированного графа называется количество ребер инцидентных данной вершине,  $\delta(v)$  (петлю считают два раза).



$$\begin{aligned} \delta(1) &= 2 & \delta(4) &= 1 \\ \delta(2) &= 0 & \delta(5) &= 3 \\ \delta(3) &= 4 & \Rightarrow \text{sum} &= 10 \end{aligned}$$

**Теорема:** Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу ребер

$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2r, \text{ где } r - \text{число ребер}$$

**Док-во:** Теорема справедлива, так как вклад каждого ребра равен двум.  $\square$

**Опр:** Если степень вершины равна нулю, то вершина *изолированная*,  $\delta(v) = 0$ .

**Опр:** Если степень вершины равна единице, то вершина *висячая*,  $\delta(v) = 1$

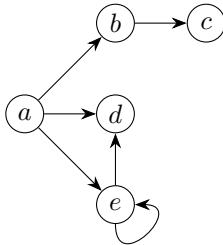
**Опр:** Полустепенью исхода(захода) вершина  $v$  ориентированного графа называют количество ребер исходящих(заходящих) в данную вершину.

$\delta^-(v)$  – полустепень исхода

$\delta^+(v)$  – полустепень захода

**Теорема:** Для орграфа справедливо равенство

$$\sum_{u \in V} \delta^-(u) = \sum_{u \in V} \delta^+(u) = r, \text{ где } r - \text{число ребер}$$



$$\begin{aligned} \delta^-(a) &= 3 & \delta^+(a) &= 0 \\ \delta^-(b) &= 1 & \delta^+(b) &= 1 \\ \delta^-(c) &= 0 & \delta^+(c) &= 1 \\ \delta^-(d) &= 0 & \delta^+(d) &= 2 \\ \delta^-(e) &= 2 & \delta^+(e) &= 2 \end{aligned}$$

$$\sum \delta^-(v) = 6; \quad \sum \delta^+(v) = 6$$

**Опр:** Матрицей смежности графа(орграфа) называют квадратную матрицу размерностью  $n$ , где  $n = |v|$  (мощность множества вершин), в котором  $a_{ij} = k$ , где  $k$  - число ребер  $(v_i, v_j)$

**Опр:** Пусть  $G(V, E)$  – неориентированный граф. Матрицей инцидентности неориентированного графа называется матрица  $B$  размером  $n * r$ ,  $|v| = n, |E| = r$ , где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ инцидентно ребру } e_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

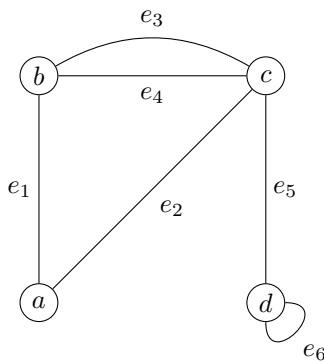
Такая матрица будет симметричной.

**Опр:** Пусть  $G(V, E)$  – ориентированный граф. Матрицей инцидентности ориентированного графа называется матрица  $B$  размером  $n * r$ ,  $|v| = n, |E| = r$ , где каждый элемент матрицы:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из } v_i \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит в } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если есть петля, то на соответствующее место ставят любое число.

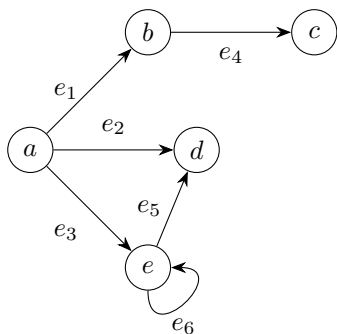
Поиск матрицы смежности  $A$  и инцидентности  $B$  для неориентированного графа:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Поиск матрицы смежности  $A$  и инцидентности  $B$  для ориентированного графа:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**2 Полные и двудольные графы. Число ребер в полном графе с  $n$  вершинами и в полном двудольном графе (вывод формул).**

**3** Изоморфизм и гомеоморфизм графов. Примеры изоморфных и гомеоморфных графов. Способы проверки изоморфизма графов. Инварианты графа. Дополнение графа, проверка изоморфизма графов с помощью дополнений. Выяснить, являются ли графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфными, гомеоморфными.

4 Маршруты, цепи, циклы в графе. Метрические характеристики графа. Найти эксцентриситет вершины указанного графа, радиус, диаметр графа, центральные и периферийные вершины указанного графа.



## **5 Алгоритмы обхода графа в глубину и ширину.**