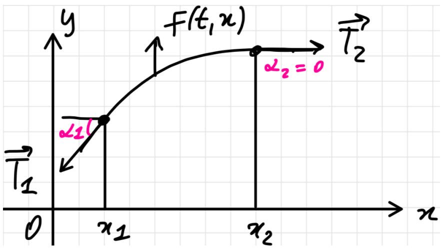
Лекция 1. Вывод уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.

Курс уравнений математической физики, являющийся продолжением читавшегося в прошлом семестре курса уравнений с частными производными, будет состоять из двух частей. Первая часть посвящена изучению уже известного нам волнового уравнения: $u_{tt}(t,x) = a^2\Delta u(t,x) + f(t,x)$, где $t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа. Во второй части будут приведены некоторые сведения из теории обобщенных функций и рассмотрены обобщенные решения уравнений с частными производными.

1. Вывод уравнения колебаний струны.

В одномерном случае волновое уравнение принимает вид: $u_{tt}(t,x) = a^2u_{xx}(t,x) + f(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$, и называется **уравнением колебаний струны**. Начнем изучение волновых уравнений с вывода уравнения колебаний струны.



Рассмотрим идеальную струну. Ширину и высоту этой струны считаем бесконечно малыми по сравнению с её длиной, материал струны однородным. Предполагается, что струна не оказывает никакого сопротивления изменению её формы, а работает только на растяжение. Выделим участок струны между точками x_1 и x_2. Будем считать, что к концам выделенного участка приложены силы натяжения $\vec{T_1}, \vec{T_2}$ (см. рис.). Также будем считать, что все точки струны движутся в одной плоскости, перпендикулярно оси OX, и что эти колебания малы.

Так как струна колеблется в одной плоскости, то закон её колебаний задаётся функцией $u = u(t,x)$, где u – отклонение от оси OX точки с абсциссой x в момент времени t. Условие малости колебаний предполагает, что можно отбрасывать слагаемые порядка $O(\alpha^2)$, где α – острый угол между касательной к профилю струны и осью OX. Из условия малости заключаем, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Действительно, $\sin\alpha = \alpha + O(\alpha^3) = \alpha(1 + O(\alpha^2)) \approx \alpha$, аналогично для $\operatorname{tg}\alpha$.

При проектировании на ось OX в силу отсутствия продольных колебаний струны получаем (см. рис.): $-T_1\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0$. Поскольку $\cos\alpha = 1 + O(\alpha^2) \approx 1$, то $\cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1 \Rightarrow T_1 \approx T_2 \approx T$, т.е. сила натяжения в любой точке струны одинакова и равна T.

Проекция на ось OY действующей на выделенный отрезок струны результирующей силы равна $-T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 + \int_{x_1}^{x_2} f(t,x)dx = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) + f(t,\xi)\Delta x$, где $\Delta x = x_2 - x_1,\ \xi \in (x_1,x_2)$. Далее, по формуле Лагранжа $\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 = \sin(\alpha(x_2)) - \sin(\alpha(x_1)) = \cos(\alpha(\xi_1))\alpha'(\xi_1)\Delta x \approx \cos(\alpha(\xi_1))u''_{xx}(\xi_1)\Delta x \approx u''_{xx}(\xi_1)\Delta x,\ \xi_1 \in (x_1,x_2)$. Здесь мы воспользовались тем, что $\cos\alpha \approx 1$ и $u'_x = \operatorname{tg}\alpha$, а потому $u''_{xx} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\alpha' \approx \alpha'$.

Возьмем отрезок $[x_1,x_2]$ настолько малым, что ускорения всех его точек можно считать одинаковыми (ниже длину Δx этого отрезка мы устремляем к нулю).

Тогда по второму закону Ньютона $mu_{tt} = Tu_{xx}(t,\xi_1)\Delta x + f(t,\xi)\Delta x$, где m – масса выделенного отрезка. В случае идеальной струны постоянной плотности ρ $m = \int_l \rho ds = \int_{x_1}^{x_2} \rho\sqrt{1+u_x^2}ds \approx \rho\Delta x$, поскольку $u_x^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \approx \alpha^2$. В результате приходим к уравнению $\rho u_{tt}\Delta x = Tu_{xx}(t,\xi_1)\Delta x + f(t,\xi)\Delta x$, из которого, стягивая отрезок $[x_1,x_2]$ в точку, получаем: $u_{tt}(t,x) = \dfrac{T}{\rho}u_{xx}(t,x) + \dfrac{1}{\rho}f(t,x)$, или $u_{tt}(t,x) = a^2u_{xx}(t,x) + \tilde{f}(t,x)$, где $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, $\tilde{f} = \dfrac{f}{\rho}$.

Пусть $u = u(x,t)$ – закон колебаний струны. Если фиксировать значение $t = t_0$, то получим функцию $u(t_0,x)$ переменной x, называемую **профилем струны в момент времени** t_0. Если, наоборот, фиксировать значение переменной $x = x_0$, получим функцию $u(t,x_0)$ переменной t – **закон движения точки** x_0.

Из физических соображений следует, что для однозначного определения закона колебаний струны $u(x,t)$ необходимо задать профиль струны в начальный момент времени $u|_{t=0} = \varphi(x)$ и поле скоростей точек струны в начальный момент времени $u_t|_{t=0} = \psi(x)$. Если же струна ограничена, то должны быть также заданы условия на ее концах – краевые условия. Подробнее о постановке краевых условий будем говорить в следующей лекции.

2. Формула Даламбера. Существование решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.

Найдём общее решение однородного уравнения колебаний струны, используя известный нам из курса уравнений с частными производными метод характеристик:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} \Rightarrow (dx)^2 = a^2(dt)^2 \Rightarrow dx = \pm a dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + at = c_1 \\ x - at = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \text{ – канонический вид.}$$

Интегрируя последовательно по ξ и по η, получаем общее решение уравнения: $u = F(\xi)+G(\eta) = F(x+at)+G(x-at)$, где F и G – произвольные функции одной переменной класса C^2.

Решим теперь задачу Коши с начальными условиями

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Используя принцип суперпозиции, будем искать решение в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где u_1 и u_2 – соответственно решения задач Коши

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2u_{1xx}, \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_{1t}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u_{2tt} = a^2u_{2xx}, \\ u_2|_{t=0} = 0, \\ u_{2t}|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Найдем функцию u_1. Имеем:

$$\begin{cases} u_1 = F(x+at) + G(x-at), \\ u_1\big|_{t=0} = F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ u_{1t}\big|_{t=0} = aF^{'}(x+at) - aG^{'}(x-at)\big|_{t=0} = a(F^{'}(x) - G^{'}(x)) = 0. \end{cases}$$

Из последнего равенства

$$F^{'}(x) = G^{'}(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c.$$

Подставляя в предыдущее равенство, получаем:

$$2G(x) + c = \varphi(x) \Rightarrow G(x) = \frac{\varphi(x) - c}{2}, F(x) = \frac{\varphi(x) + c}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}$$

– первое слагаемое в формуле Даламбера.

Теперь найдем второе слагаемое – u_2. Имеем:

$$\begin{cases} u_2 = F(x+at) + G(x-at), \\ u_2\big|_{t=0} = F(x) + G(x) = 0 \Rightarrow F(x) = -G(x), \\ u_{2t}\big|_{t=0} = a(F^{'}(x) - G^{'}(x)) = \psi(x) \Rightarrow 2aF^{'}(x) = \psi(x) \Rightarrow F^{'}(x) = \frac{1}{2a}\psi(x). \end{cases}$$

Отсюда

$$u_2 = F(x+at) - F(x-at) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F'(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi,$$

и мы получили формулу Даламбера решения задачи Коши для однородного уравнения:

$$u = u_1 + u_2 = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi.$$

Отметим, что из полученных выше формул, связывающих начальные условия и функции F и G, следует $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ в силу принадлежности F и G классу $C^2(\mathbb{R})$.

Приведем, пока что без доказательства, формулу Даламбера решения задачи Коши для неоднородного уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x)$:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi.$$

Эта формула выводится из формулы Даламбера для однородного уравнения с помощью принципа Дюамеля, о котором мы будем говорить ниже в связи с рассмотрением задачи Коши для волнового уравнения в пространстве произвольной размерности. Теперь же сформулируем теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ и $f(t,x) \in C^1((0,+\infty)\times\mathbb{R})$. Тогда задача Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

имеет единственное решение класса $C^2((0,+\infty)\times\mathbb{R})$. Это решение задается приведенной выше формулой Даламбера.

Доказательство. Единственность фактически уже доказана, поскольку было установлено, что решение рассматриваемого класса задается формулой Даламбера. Доказательство существования состоит в проверке того, что задаваемая формулой Даламбера функция удовлетворяет уравнению и начальным условиям. Эту проверку, представляющую собой несложное упражнение на дифференцирование интегралов, зависящих от параметра, предлагается выполнить самостоятельно.

Лекция 2. Постановка краевых задач для волнового уравнения. Энергетическое равенство. Единственность решений первой и второй краевых задач.

3. Решение краевых задач для полуограниченной струны с помощью формулы Даламбера.

Закон движения $u = u(t,x)$ полуограниченной струны с одним закреплённым концом (левый конец струны зафиксирован в нуле, правый уходит на бесконечность в положительном направлении оси OX) определяется решением первой краевой задачи

$$(*)\ \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ t>0,\ x>0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Эту задачу можно решить, используя формулу Даламбера. Продолжим функции $f(t,x), \varphi(x)$ и $\psi(x)$ на левую полуось нечетным образом (разумеется, эти продолжения должны удовлетворять требованиям гладкости, при которых формула Даламбера была получена):

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \geq 0, \\ -\varphi(-x), x<0, \end{cases} \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), x \geq 0, \\ -\psi(-x), x<0, \end{cases} \quad \tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x), x \geq 0, \\ -f(t,-x), x<0. \end{cases}$$

Утверждение. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(t,x), \\ u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \\ u_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \end{cases}$$

ограниченное на положительную полуось $t>0$, удовлетворяет краевой задаче $(*)$.

Доказательство. В проверке нуждается только выполнение краевого условия $u|_{x=0} = 0$.

Из формулы Даламбера получаем:

$$u_1(t,0) = \frac{\tilde{\varphi}(at) + \tilde{\varphi}(-at)}{2} = \frac{\varphi(at) - \varphi(at)}{2} = 0.$$

Далее,

$$u_2(t,0) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = 0,$$

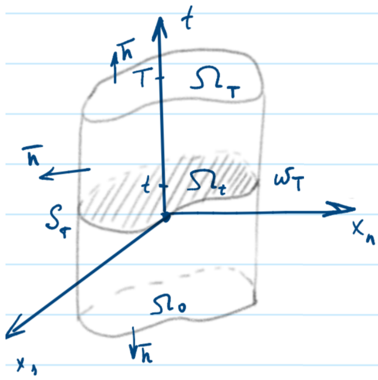
как интеграл от нечетной функции. По той же причине равно нулю при $x=0$ и третье слагаемое в формуле Даламбера $u_3(t,x) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau,\xi) d\xi$.

Таким образом, $u(t,0)=0$.

Действуя аналогично, можно найти закон движения полуограниченной струны со свободным левым концом. Колебания такой струны описываются второй краевой задачей, получаемой из $(*)$ заменой условия Дирихле на условие Неймана: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$. Чтобы решить такую задачу, необходимо продолжить f,φ и ψ *чётным* образом на левую полуось, убрать краевое условие и решить полученную задачу Коши, применяя формулу Даламбера.

4. Постановка краевых задач для волнового уравнения.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\omega_T=\Omega\times(0,T)$ – цилиндр высоты T. Обозначим через Ω_{t_0} сечение цилиндра плоскостью $t=t_0$ (соответственно, Ω_0 и Ω_T будут обозначать нижнее и верхнее основания цилиндра), через S_T боковую поверхность цилиндра, $\vec{\nu}=(\nu_t,\nu_{x_1},\dots,\nu_{x_n})$ – вектор нормали к поверхности цилиндра (см. рисунок).



Определим первую, вторую и третью краевые задачи для волнового уравнения в цилиндре ω_T.
Первая краевая задача, или задача Дирихле:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u+f(t,x),\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ u|_{x\in\partial\Omega}=\chi(t,x),\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

Вторая краевая задача, или задача Неймана:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u+f(t,x),\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right|_{x\in\partial\Omega}=\chi(t,x),\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

Третья краевая задача:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u+f(t,x),\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}+\alpha(t,x)u\right|_{x\in\partial\Omega}=\chi(t,x),\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

Как видим, краевые условия ставятся так же, как это делалось ранее для уравнения теплопроводности.

5. Энергетическое равенство. Единственность решений первой и второй краевых задач.

Теорема (об энергетическом равенстве). Пусть $u\in C^2(\overline{\omega_T})$ (черта сверху, как обычно, обозначает замыкание множества), $u_{tt}=a^2\Delta u$ в ω_T и либо $u|_{x\in\partial\Omega}=0$, либо $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right|_{x\in\partial\Omega}=0$. Тогда справедливо энергетическое равенство

$$E(t)=E(0)\ \ \forall t,$$

где $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t^2(t,x) + a^2 |\nabla u(t,x)|^2)dx$ – интеграл энергии, $\nabla u = \nabla_x u = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$, $|\nabla u|^2 = u_{x_1}^2 + ... + u_{x_n}^2$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\omega_\tau} (u_{tt} - a^2 \Delta u)u_t dxdt, \ \ 0 < \tau < T.$$

Поскольку функция u удовлетворяет однородному волновому уравнению, этот интеграл равен нулю. Получаем:

$$0 = \int_{\omega_\tau} (u_{tt} - a^2 \Delta u)u_t dxdt = \int_{\omega_\tau} \left(u_{tt}u_t - a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} u_t \right) dxdt$$
$$= \int_{\omega_\tau} \left(u_{tt}u_t + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_{t,x_i} \right) dxdt - \int_{\Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau} a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_t \nu_{x_i} d\sigma.$$

Здесь мы воспользовались формулой интегрирования по частям

$$\int_D u_{x_i} v dx = -\int_D u v_{x_i} dx + \int_{\partial D} u v \nu_{x_i} d\sigma,$$

где ν_{x_i} – i-я компонента вектора нормали к границе области, в интеграле $\int_{\omega_\tau} u_{x_i x_i} u_t dxdt, \ i = 1, ..., n$.

Заметим, что интегралы по Ω_0 и Ω_τ в полученном нами равенстве равны нулю, т.к. для них $\vec{\nu} = (\nu_t, 0, ..., 0)$. Интеграл по S_τ также равен нулю. Действительно, в случае выполнения условия $u|_{S_\tau} = 0$ также и производная $u_t|_{S_\tau} = 0$. Если же $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{S_\tau} = 0$, то $\sum_{i=1}^n u_{x_i} u_t \nu_{x_i} = u_t \sum_{i=1}^n u_{x_i} \nu_{x_i} = u_t \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$. Таким образом, второй интеграл в правой части последнего равенства равен нулю.

Преобразуем теперь подынтегральное выражение в первом интеграле:

$$0 = \int_{\omega_\tau} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2 + \frac{a^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}(u_{x_i})^2 \right) dxdt = \frac{1}{2} \int_{\omega_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) dxdt.$$

Ещё раз интегрируя по частям, теперь по переменной t, получим:

$$0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau} \left(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \nu_t d\sigma.$$

На поверхности Ω_0 значение $\nu_t = -1$, на Ω_τ $\nu_t = 1$ и на S_τ $\nu_t = 0$. Отсюда

$$0 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left(u_t^2 + a^2 |\nabla_x u|^2 \right) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \left(u_t^2 + a^2 |\nabla_x u|^2 \right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_t^2(\tau, x) + a^2 |\nabla_x u(\tau, x)|^2 \right) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_t^2(0, x) + a^2 |\nabla_x u(0, x)|^2 \right) dx.$$

Получили $E(\tau) = E(0) \ \ \forall \tau$, что и требовалось доказать.

Следствие. Решение первой (второй) краевой задачи для волнового уравнения единственно в классе $C^2(\overline{\omega_T})$.

Доказательство. Пусть имеются два решения u_1 и u_2 первой (второй) краевой задачи. Тогда их разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородной задаче

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \Delta w, \\ w\big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \\ w\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

или, соответственно,

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \Delta w, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \\ w\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

И в том и в другом случае по теореме об энергетическом равенстве $E(t) = E(0) = 0$, из чего следует

$$\int_\Omega \left(w_t^2(t,x) + a^2 \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(t,x) \right) dx = 0 \Rightarrow \text{(в силу неотрицательности}$$

$$\text{подынтегрального выражения)} \;\; w_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2 = 0 \;\; \forall x, t \Rightarrow$$

$$w_t = w_{x_1} = \dots = w_{x_n} = 0 \Rightarrow w = \text{const в } \omega_T.$$

Отсюда $w \equiv 0$, поскольку $w(0,x) = 0$.

Лекция 3. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши. Формула Кирхгофа для однородного волнового уравнения.

6. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Теорема единственности решения задачи Коши.

Рассмотрим теперь задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t,x), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

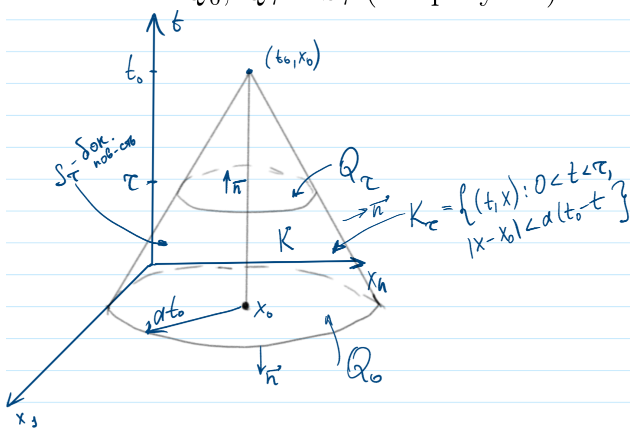
Пусть $t_0 > 0, \ x_0 \in \mathbb{R}^n$. Определим область $K = K(t_0, x_0)$ в пространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, называемую **характеристическим конусом**:

$$K = \{(t,x): \ 0 < t < t_0, \ |x - x_0| < a(t_0 - t)\}.$$

Далее, для $0 < \tau < t_0$ обозначим через K_τ усеченный конус

$$K_\tau = \{(t,x): \ 0 < t < \tau, \ |x - x_0| < a(t_0 - t)\},$$

нижнее и верхнее основания и боковую поверхность которого будем обозначать соответственно $Q_0, \ Q_\tau$ и S_τ (см. рисунок).



Теорема (об энергетическом неравенстве). Пусть $u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ и $u_{tt} = a^2 \Delta u$. Тогда для любого (t_0, x_0) и любого $\tau \in (0, t_0)$ справедливо энергетическое неравенство:

$$E(\tau) \leq E(0), \quad \text{где} \ \ E(\tau) = \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \left(u_t^2(\tau, x) + a^2 \left| \nabla u(\tau, x) \right|^2 \right) dx.$$

Доказательство. Действуя аналогично доказательству теоремы об энергетическом равенстве, получим (ниже $\vec{\nu}_x = (\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_n})$ – проекция вектора нормали

$\vec{\nu} = (\nu_t, \nu_{x_1}, ..., \nu_{x_n})$ к границе конуса на пространство $\mathbb{R}^n_x$):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{K_\tau} \left(u_{tt} - a^2 \Delta u\right) u_t dx dt \\
&= \int_{K_\tau} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) dx dt - a^2 \int_{Q_0 \cup Q_\tau \cup S_\tau} \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_t \nu_{x_i} d\sigma \\
&= \int_{Q_0 \cup Q_\tau \cup S_\tau} \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) \nu_t d\sigma - a^2 \int_{S_\tau} u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) dx - \frac{1}{2} \int_{Q_0} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) dx \\
&+ \int_{S_\tau} \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) \nu_t - a^2 u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x) \right] d\sigma \\
&\qquad = E(\tau) - E(0) + \int_{S_\tau} \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) \nu_t - a^2 u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x) \right] d\sigma.
\end{aligned}$$

Докажем неотрицательность подынтегрального выражения в последнем интеграле. Используя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$|a^2 u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x)| \leq a^2 |u_t| |\nabla u| |\vec{\nu}_x| = a |\vec{\nu}_x| \cdot |u_t| \cdot a |\nabla u| \leq a |\vec{\nu}_x| \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2)$$

Покажем, что $a|\vec{\nu}_x| = \nu_t$. Действительно, нормаль (не единичная) к боковой поверхности конуса, имеющей уравнение $|x - x_0| = a(t_0 - t)$, или $a(t - t_0) + |x - x_0| = 0$, равна

$$\vec{n} = \left(a, \frac{x_1 - x_{01}}{|x - x_0|}, ..., \frac{x_n - x_{0n}}{|x - x_0|} \right).$$

Поскольку $n_t = a$, а $|\vec{n}_x| = 1$, то $n_t = a|\vec{n}_x|$. Очевидно, то же соотношение верно и для единичной нормали $\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Итак,

$$|a^2 u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x)| \leq \nu_t \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2).$$

Отсюда

$$\int_{S_\tau} \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) \nu_t - a^2 u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x) \right] d\sigma \geq 0$$

и, следовательно,

$$E(\tau) = E(0) - \int_{S_\tau} \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2) \nu_t - a^2 u_t (\nabla u, \vec{\nu}_x) \right] d\sigma \leq E(0).$$

Теорема доказана.

Следствие. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

единственно в классе $C^2((0;+\infty)\times\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два решения рассматриваемой задачи. Тогда их разность $v=u_1-u_2$ удовлетворяет однородной задаче

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2\Delta v,\\ v\big|_{t=0}=v_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

Покажем, что $v(t,x)=0\ \ \forall t>0,\ x\in\mathbb{R}^n$. Возьмём характеристический конус K с вершиной (t_0,x), где $t_0>t$. Тогда

$$0\le E(t)=\frac{1}{2}\int_{Q_t}\left(v_t^2(t,x)+a^2|\nabla v(t,x)|^2\right)dx \\ \le E(0)=\frac{1}{2}\int_{Q_0}\left(v_t^2(0,x)+a^2|\nabla v(0,x)|^2\right)dx=0,$$

откуда $E(t)=0$. Повторяя далее те же рассуждения, что и в доказательстве единственности решений краевых задач, получим $v\equiv 0$ в K, а значит и в $(0;+\infty)\times\mathbb{R}^n$ в силу произвольности t и x.

7. Формула Кирхгофа для однородного волнового уравнения.

Пусть $a>0$, $g(x)\in C^2(\mathbb{R}^3)$. Определим функцию $M_g(t,x)=\dfrac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}g(\xi)d\sigma_\xi,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^3$.

Лемма. Для функции $M_g(t,x)$ выполняются следующие тождества:

1. $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}M_g=a^2\Delta M_g,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^3$,

2. $M_g\big|_{t=0}=0,\ x\in\mathbb{R}^3$,

3. $\dfrac{\partial M_g}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g(x),\ x\in\mathbb{R}^3$.

(Иными словами, $M_g(t,x)$ является решением задачи Коши 1) – 3)).

Доказательство. Начнем с доказательства пункта 2. Выполним (для фиксированных t и x) замену $\xi=x+at\eta,\ \eta\in\mathbb{R}^3$. Тогда

$$M_g(t,x)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\eta|=1}g(x+at\eta)(at)^2d\sigma_\eta,$$

где $(at)^2$ – якобиан сделанной замены переменных. Отсюда

$$M_g(t,x)=\frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1}g(x+at\eta)d\sigma_\eta\Rightarrow M_g\big|_{t=0}=0.$$

Докажем пункт 3. Имеем:

$$\frac{\partial M_g}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}g(x+at\eta)d\sigma_\eta+\frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g(x+at\eta)}{\partial x_i}a\eta_i d\sigma_\eta \\ =\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}g(x+at\eta)d\sigma_\eta+\frac{at}{4\pi}\int_{|\eta|=1}(\nabla g(x+at\eta),\eta)d\sigma_\eta.$$

Отсюда $\left.\dfrac{\partial M_g}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1} g(x)d\sigma_\eta = \dfrac{g(x)}{4\pi}\int_{|\eta|=1} d\sigma_\eta = \dfrac{g(x)}{4\pi}\cdot 4\pi = g(x)$, поскольку интеграл $\int_{|\eta|=1} d\sigma_\eta$ равен площади единичной сферы, по которой он берется, т.е. 4π.

Покажем, наконец, что $M_g(t,x)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (пункт 1). Дифференцируя $\dfrac{\partial M_g}{\partial t}$ еще раз по t, получим:

$$\frac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = \frac{a}{4\pi}\int_{|\eta|=1} (\nabla g(x+at\eta),\eta)\,d\sigma_\eta + \frac{a}{4\pi}\int_{|\eta|=1} (\nabla g(x+at\eta),\eta)d\sigma_\eta$$
$$+\frac{at}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\eta|=1}(\nabla g(x+at\eta),\eta)d\sigma_\eta = \frac{a}{2\pi}\cdot\frac{1}{(at)^2}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi$$
$$+\frac{at}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(at)^2}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi\right)$$

(сделали обратную замену переменных $\eta = \dfrac{\xi-x}{at}$).

Заметим, что $\dfrac{\xi-x}{at}$ – единичная нормаль к сфере $|\xi-x|=at$, а потому согласно формуле Гаусса-Остроградского

$$\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi = \int_{|\xi-x|\le at}\Delta g(\xi)d\xi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int_{|\xi-x|\le at}\Delta g(\xi)d\xi$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}dr\int_{|\xi-x|=r}\Delta g(\xi)d\sigma_\xi = a\int_{|\xi-x|=at}\Delta g(\xi)d\sigma_\xi.$$

Вернемся к вычислению производной $\dfrac{\partial^2 M_g}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi a t^2}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi$$
$$+\frac{at}{4\pi}\left(\frac{-2}{a^2t^3}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi + \frac{1}{(at)^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi a t^2}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi - \frac{1}{2\pi a t^2}\int_{|\xi-x|=at}\left(\nabla g(\xi),\frac{\xi-x}{at}\right)d\sigma_\xi$$
$$+\frac{1}{4\pi a t}\cdot a\int_{|\xi-x|=at}\Delta g(\xi)d\sigma_\xi = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=at}\Delta g(\xi)d\sigma_\xi.$$

Теперь применим к функции M_g оператор Лапласа. Дифференцируя под знаком интеграла (проверьте законность такого дифференцирования!), получим:

$$\Delta M_g = \Delta\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1} g(x+at\eta)d\sigma_\eta\right) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\Delta g(x+at\eta)d\sigma_\eta$$
$$= \frac{t}{4\pi}\cdot\frac{1}{(at)^2}\int_{|\xi-x|=at}\Delta g(\xi)d\sigma_\xi = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}\Delta g(\xi)d\sigma_\xi.$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = a^2\Delta M_g$, что и требовалось доказать.

Лекция 4. Формула Кирхгофа для однородного волнового уравнения (окончание). Метод спуска. Формула Пуассона. Принцип Дюамеля.

Теорема (формула Кирхгофа). Пусть $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда $u(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (*) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Доказательство. Согласно доказанной на прошлой лекции лемме $M_\psi(t,x)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Покажем, что функция $\dfrac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (**) \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Действительно, во-первых, согласно лемме $\left.\dfrac{\partial M_\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$.

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M_\varphi}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial t^2}\right|_{t=0} = a^2 \left(\Delta M_\varphi\right)|_{t=0} = a^2 \Delta \left(M_\varphi|_{t=0}\right) = a^2 \Delta(0) = 0.$$

Проверим, наконец, что $\dfrac{\partial M_\varphi}{\partial t}$ удовлетворяет волновому уравнению. Поскольку $\varphi \in C^3$, то $M_\varphi \in C^3$ и, следовательно, $\dfrac{\partial M_\varphi}{\partial t} \in C^2$. Дважды продифференцируем $\dfrac{\partial M_\varphi}{\partial t}$ по t:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial M_\varphi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(a^2 \Delta M_\varphi) = a^2 \Delta \left(\frac{\partial M_\varphi}{\partial t}\right).$$

Итак, $\dfrac{\partial M_\varphi}{\partial t}$ является решением задачи Коши $(**)$. Используя принцип суперпозиции, заключаем, что функция $u(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x)$ удовлетворяет задаче Коши $(*)$.

Вспоминая определение функции M_g, получаем **формулу Кирхгофа**:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi - x| = at} \varphi(\xi) d\sigma_\xi\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi - x| = at} \psi(\xi) d\sigma_\xi.$$

8. Метод спуска. Формула Пуассона для однородного волнового уравнения.

Рассмотрим теперь задачу Коши для однородного волнового уравнения в двумерном пространстве:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u = a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ u=u(t,x,y),\ t>0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ u|_{t=0} = \varphi(x,y),\\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y). \end{cases}$$

Мы получим решение нашей двумерной задачи, используя выведенную выше формулу Кирхгофа, дающую решение соответствующей задачи в трехмерном пространстве. Такой подход носит название **метода спуска**.

Заметим, что если $u(t,x,y)$ – решение задачи в двумерном пространстве, то одновременно u является решением трехмерной задачи с теми же начальными условиями. Действительно, u удовлетворяет уравнению $u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$, поскольку $u_{zz}=0$ благодаря независимости u от z. Поэтому u задается формулой Кирхгофа:

$$u(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at}\varphi(\vec{\xi'})d\sigma_{\vec{\xi}}\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at}\psi(\vec{\xi'})d\sigma_{\vec{\xi}},$$

где использованы обозначения $\vec{x}=(x,y,z),\ \vec{\xi}=(\xi,\eta,\zeta),\ \vec{\xi'}=(\xi,\eta)$.

Заменим интегралы по сфере интегралами по проекции ее на плоскость (ξ,η):

$$\int_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at}\varphi(\vec{\xi'})d\sigma_{\vec{\xi}} = \int_{\{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at,\ \zeta>0\}}\varphi(\vec{\xi'})d\sigma_{\vec{\xi}} + \int_{\{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at,\ \zeta<0\}}\varphi(\vec{\xi'})d\sigma_{\vec{\xi}}$$
$$= 2\int_{|\vec{\xi'}-\vec{x'}|\le at}\varphi(\xi,\eta)\frac{at\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}},$$

где $\vec{x'}=(x,y)$, аналогично для интеграла от функции ψ. Интегралы по полусферам $\{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at,\ \zeta>0\}$ и $\{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at,\ \zeta<0\}$, однозначно проектирующимся на плоскость (ξ,η), равны друг другу благодаря независимости подынтегральной функции от переменной ζ и совпадению элементов площади поверхности

$$d\sigma_{\vec{\xi}} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\,d\xi d\eta = \frac{at\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}},$$

где $\zeta = z\pm\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}$ из уравнения сферы.

Вернёмся к функции u:

$$u(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 2\int_{|\vec{\xi'}-\vec{x'}|\le at}\varphi(\xi,\eta)\frac{at\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 2\int_{|\vec{\xi'}-\vec{x'}|\le at}\psi(\xi,\eta)\frac{at\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$
$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le(at)^2}\varphi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le(at)^2}\psi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

Полученная формула называется **формулой Пуассона**.

Замечание. Аналогично тому, как была получена формула Пуассона из формулы Кирхгофа, из формулы Пуассона методом спуска может быть выведена формула для решения одномерного волнового уравнения – уже известная нам формула Даламбера. Мы здесь не будем останавливаться на этом выводе, поскольку формула Даламбера была получена другим способом еще в начале курса. Предлагается получить формулу Даламбера методом спуска самостоятельно в качестве несложного упражнения на интегрирование.

9. Принцип Дюамеля.

Теорема (принцип Дюамеля). Пусть при каждом фиксированном $\tau \geq 0$ функция $U(t,\tau,x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 \Delta U, \\ U\big|_{t=\tau} = 0, \\ U_t\big|_{t=\tau} = f(\tau, x). \end{cases}$$

Тогда функция $u(t,x) = \int_0^t U(t,\tau,x)d\tau$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t,x), \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Из определения функции $u(t,x)$ сразу следует, что $u(0,x) = 0$. Далее, из начальных условий для функции $U(t,\tau,x)$ следует, что $U(t,t,x) = 0$ и $U_t(t,t,x) = f(t,x)$. Отсюда, во-первых,

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t U(t,\tau,x)d\tau\right) = U(t,t,x) + \int_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = \int_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau,$$

и значит $u_t\big|_{t=0} = 0$. Во-вторых,

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau\right) = U_t(t,t,x) + \int_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau = f(t,x) \\ + a^2 \int_0^t \Delta U(t,\tau,x)d\tau = f(t,x) + a^2 \Delta \int_0^t U(t,\tau,x)d\tau = f(t,x) + a^2 \Delta u.$$

Теорема доказана.

Лекция 5. Формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера для неоднородного уравнения. Распространение волн в пространствах различной размерности. Уравнение Гельмгольца.

10. Формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера для неоднородного волнового уравнения.

Теорема. Справедливы следующие формулы для решения задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,x), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) : \end{cases}$$

1. $n = 3$ — формула Кирхгофа:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}\varphi(\xi)d\sigma_\xi\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}\psi(\xi)d\sigma_\xi + \int_0^t d\tau \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int_{|\xi-x|=a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\sigma_\xi;$$

2. $n = 2$ — формула Пуассона:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|\xi-x|\le at}\varphi(\xi)d\xi\right) + \frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|\le at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\int_{|\xi-x|\le a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi;$$

3. $n = 1$ — формула Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi.$$

Доказательство. Первые два слагаемых в каждой из выписанных формул дают решение задачи Коши для однородного уравнения с нужными нам начальными условиями. Покажем, что третье слагаемое удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,x), \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в силу автономности однородного волнового уравнения решения задач Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u,\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

и

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \;\; v|_{t=\tau} = \varphi(x), \;\; v_t|_{t=\tau} = \psi(x)$$

связаны соотношением $v(t,x) = u(t-\tau, x)$. Отсюда (например, в трехмерном случае) по формуле Кирхгофа для однородного уравнения функция $U(t,\tau,x)$, о которой идет речь в принципе Дюамеля (см. предыдущую лекцию), задается формулой

$$U(t,\tau,x) = \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{|\xi - x| = a(t-\tau)} f(\tau,\xi) d\sigma_\xi,$$

и остается сослаться на принцип Дюамеля.

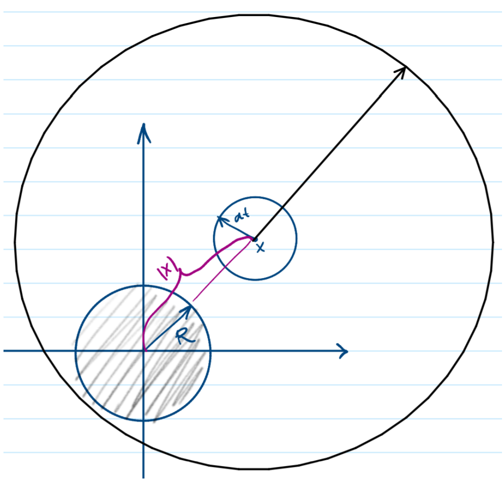
11. Распространение волн в пространствах различной размерности. Качественные различия.

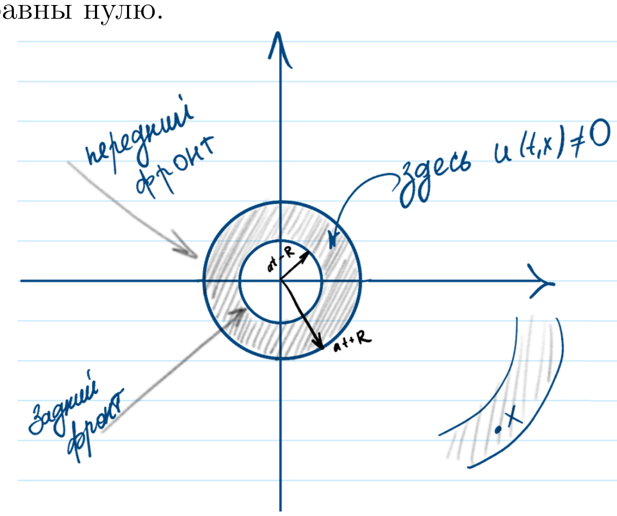
Рассмотрим решение $u(t,x)$ задачи Коши для однородного волнового уравнения с финитными начальными условиями, отличными от нуля лишь в некоторой ограниченной области: $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ при $|x| > R$. Такие решения принято называть *волнами*.

Случай $n = 3$. Решение задается формулой Кирхгофа:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi - x| = at} \varphi(\xi) d\xi\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi - x| = at} \psi(\xi) d\xi.$$

Заметим, что оба интеграла в этой формуле заведомо равны нулю, когда область интегрирования – сфера $S_{at}(x) = \{|\xi - x| = at\}$ – не пересекается с шаром $Q_R(0) = \{|x| \leqslant R\}$, вне которого функции φ и ψ равны нулю.





Последнее имеет место быть в двух случаях (изображение слева):

1. $|x| > R + at$ (шар вне сферы)

или

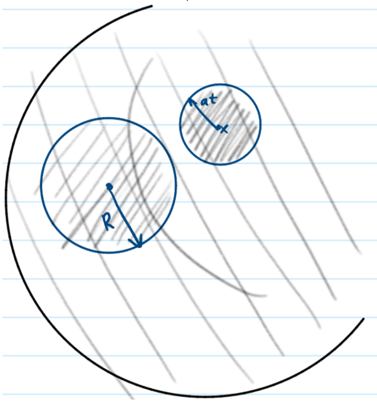
2. $|x| < at - R$ (шар внутри сферы).

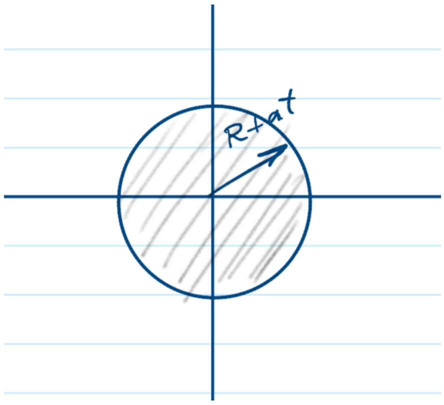
Таким образом, решение $u(t,x)$ может быть отличным от нуля только в шаровом слое $\{x: \; at - R \leqslant |x| \leqslant at + R\}$ (при условии $t \geqslant R/a$). Заметим, что при увеличении t обе границы слоя удаляются от начала координат, при том что толщина слоя остается постоянной – волна "бежит". Дальнюю от начала координат границу $|x| = at + R$ называют передним фронтом волны, ближнюю $|x| = at - R$ – задним фронтом (рисунок справа). Выражая t из задающих шаровой слой неравенств, получим $\dfrac{|x|-R}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{|x|+R}{a}$ – промежуток времени, в течение которого фиксированная точка x, $|x| \geqslant R$, испытывает действие волны.

Случай $n = 2$. Решение задается формулой Пуассона

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le(at)^2} \varphi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \\ + \frac{1}{2\pi a}\int_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le(at)^2} \psi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

В отличие от трехмерного случая здесь областью интегрирования является не сфера, а шар (двумерный, т.е. круг), а потому условие равенства решения нулю лишь одно: $Q_R(0) \cap Q_{at}(x) = \varnothing \Leftrightarrow |x| > R + at$ (рисунок слева). Соответственно, областью, в которой в момент времени t решение отлично от нуля, является круг радиуса $R + at$, увеличивающегося с ростом t. Таким образом, у волны есть только передний фронт (рисунок справа).





Следует, однако, отметить, что обычно говорят, что задний фронт волны в двумерном случае не отсутствует, а размыт. Это связано с тем, что через некоторое время после прохождения переднего фронта через точку x значение решения в ней становится не равным, как в трехмерном случае, но достаточно близким к нулю. Действительно, если $t > \dfrac{|x|+R}{a}$, то шар $Q_R(0)$ полностью лежит в области интегрирования $Q_{at}(x)$, а потому

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{Q_R(0)} \varphi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \\ + \frac{1}{2\pi a}\int_{Q_R(0)} \psi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \\ = -\frac{a}{2\pi}\int_{Q_R(0)} \varphi(\xi,\eta)\frac{t d\xi d\eta}{\left(\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\right)^3} \\ + \frac{1}{2\pi a}\int_{Q_R(0)} \psi(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

Как видим, подынтегральные функции в обоих интегралах достаточно быстро убывают при увеличении t, что при неизменности области интегрирования приводит к столь же быстрому убыванию и самих интегралов.

Рассмотрим, наконец, **случай $n = 1$**. Решение задается формулой Даламбера

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что первое слагаемое в этой формуле обращается в нуль при $|x| > R + at$ и $|x| < at - R$, как решение в трехмерном случае, в то время как второе слагаемое (интеграл) – только при $|x| > R + at$, как в двумерном случае. Таким образом, решения в одномерном случае обладают описанными выше свойствами распространения волн как в двумерном, так и в трехмерном пространстве. Эту двойственность хорошо иллюстрируют два возможных способа извлечения звука из гитарной струны. Если по струне ударить ($\varphi = 0,\ \psi \neq 0$), звучание будет существенно более длительным, чем если ее оттянуть и отпустить ($\varphi \neq 0,\ \psi = 0$).

12. Уравнение Гельмгольца.

Рассмотрим периодическое по времени решение волнового уравнения вида $u(t,x) = X(x)T(t)$, где функция $T(t)$, обусловливающая зависимость от времени, имеет вид $\sin kx,\ \cos kx$ или, в комплексной форме, e^{ikx} или e^{-ikx}. Такая структура характерна, например, для электромагнитных волн, при этом функция $X(x)$ называется амплитудой, а число k – частотой волны.

Подставляя функцию $u(t,x) = X(x)T(t)$ в однородное волновое уравнение, получим:

$$T''X = T\Delta X, \quad \text{или} \quad -k^2TX = T\Delta X,$$

откуда, после сокращения на T,

$$\Delta X + k^2X = 0.$$

Как видим, амплитуда $X(x)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению, отличающемуся от известного нам уравнения Лапласа всего одним дополнительным слагаемым k^2X. Это уравнение называется **уравнением Гельмгольца**. Неудивительно, что оно обладает сходными с уравнением Лапласа свойствами. Более подробно уравнение Гельмгольца будет изучаться на практических занятиях.

Лекция 6. Пространства основных и обобщенных функций. Действия над обобщёнными функциями.

13. Пространства основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. δ-функция.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi(x)$ – определенная на Ω функция. Назовем **носителем** функции φ замыкание множества всех точек, где она не равна нулю: $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \ \varphi(x) \neq 0\}}$. Функцию $\varphi(x)$ назовем **финитной** в Ω, если она имеет компактный носитель, лежащий в Ω. Финитные в Ω функции класса C^∞ будем называть **основными** или **пробными**. Пространство основных функций в Ω обычно обозначают $D(\Omega)$ или $C_0^\infty(\Omega)$.

Определим сходимость в пространстве $D(\Omega)$.

Определение. Будем говорить, что последовательность основных функций $\varphi_n(x)$ сходится при $n \to \infty$ к функции $\varphi(x) \in D(\Omega)$, если:

1. $D^\alpha \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} D^\alpha \varphi$ равномерно на Ω $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и

2. $\exists\, K$ – компакт в Ω: $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ $\forall n$.

В частности, если $\Omega = \mathbb{R}$, то $\varphi_n \xrightarrow[D(\mathbb{R})]{} \varphi \Leftrightarrow \left\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\right\|_{C(\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall k = 0, 1, ...$ и $\exists\, K$ – компакт в $\mathbb{R}$: $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ $\forall n$.

Введем теперь понятие обобщенной функции.

Определение. Непрерывные линейные функционалы на пространстве $D(\Omega)$ называются **обобщёнными функциями** в области Ω. Пространство обобщённых функций в области Ω будем обозначать $D^{'}(\Omega)$.

Дадим развернутое определение: $f \in D^{'}(\Omega)$, если

1. $f : D(\Omega) \to \mathbb{R}$;

2. $f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi) \forall\ \varphi, \psi \in D(\Omega),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

3. $\varphi_n \to \varphi$ в $D(\Omega) \Rightarrow f(\varphi_n) \to f(\varphi)$ $(n \to \infty)$.

Действие обобщенной функции f на пробную функцию φ принято обозначать символом $f(\varphi) = < f, \varphi >$.

Приведем примеры обобщенных функций.

Пример 1. Пусть $f(x)$ – заданная на Ω локально интегрируемая функция: $f \in L_1^{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \forall K$ – компакта в Ω $\exists \int_K |f(x)|dx$. Функция $f(x)$ задает функционал на $D(\Omega)$, действующий на пробную функцию φ по правилу $< f, \varphi > = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ (функционал обозначаем той же буквой, что и порождающую его функцию). Заметим, что интеграл $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ существует благодаря локальной интегрируемости функции f и финитности функции φ.

Покажем, что определенный нами функционал представляет собой обобщеннную функцию. Линейность функционала очевидна, докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в $D(\Omega)$. Из сходимости этой, в частности, следует, что $\varphi_n \to \varphi$ равномерно в Ω

и что $\varphi_n(x) = 0$ (а значит и $\varphi(x) = 0$) вне некоторого компакта K. Отсюда

$$|< f, \varphi_n > - < f, \varphi >| = \left| \int_\Omega f(\varphi_n - \varphi)dx \right|$$
$$= \left| \int_K f(\varphi_n - \varphi)dx \right| \leqslant \max_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_K |f(x)|dx \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обобщенные функции, порождаемые обычными локально интегрируемыми функциями, как описано выше, называются **регулярными**. В дальнейшем мы будем отождествлять регулярную обобщённую функцию и порождающую ее обычную функцию, тем самым рассматривая множество локально интегрируемых функций как подмножество пространства обобщенных функций.

Обобщённые функции, не являющиеся регулярными, называются **сингулярными**. Приведем пример сингулярной функции.

Пример 2. Пусть точка $x_0 \in \Omega$. Зададим функционал $\delta(x - x_0)$ действием его на основные функции по правилу: $< \delta(x - x_0), \varphi > = \varphi(x_0)\ \ \forall \varphi(x) \in D(\Omega)$. Определенный выше функционал называется δ–функцией в точке x_0 (при $x_0 = 0$ вместо $\delta(x - 0)$ пишем просто $\delta(x)$). Линейность и непрерывность δ-функции очевидны. Можно показать, что $\nexists f \in L_1^{loc}(\Omega) :\ \varphi(x_0) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$, т.е. δ-функция является сингулярной. Как будет видно из дальнейшего, δ-функция играет важную роль в теории обобщенных функций.

14. Действия над обобщёнными функциями. $\boldsymbol{\delta}$-функция как производная функции Хевисайда.

Определим некоторые (далеко не все возможные) действия над обобщёнными функциями.

1. **Сложение и умножение на числа**. Пусть $f, g \in D^{'}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Зададим функционал $\alpha f + \beta g$ на $D(\Omega)$: $< \alpha f + \beta g, \varphi > = \alpha < f, \varphi > + \beta < g, \varphi >$, $\varphi \in D(\Omega)$. Очевидно, $\alpha f + \beta g \in D^{'}(\Omega)$ (т.е. является линейным и непрерывным функционалом – проверьте!)

2. **Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию**. Пусть $f \in D^{'}(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Зададим на $D(\Omega)$ функционал ψf : $< \psi f, \varphi > = < f, \psi\varphi >$, $\varphi \in D(\Omega)$. Заметим, что данное определение корректно, поскольку благодаря финитности φ произведение $\psi\varphi$ также является финитной функцией. Проверьте, что $\psi f \in D^{'}(\Omega)$.

3. **Дифференцирование обобщённых функций**. Пусть $f \in D^{'}(\Omega)$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс. Определим функционал $D^\alpha f$ на $D(\Omega)$: $< D^\alpha f, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha \varphi >$, $\varphi \in D(\Omega)$. Определение корректно, поскольку любая производная основной функции снова является основной функцией. Покажем, что $D^\alpha f \in D^{'}(\Omega)$.

   1) Линейность: $< D^\alpha f, \gamma\varphi + \beta\psi > = (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha(\gamma\varphi + \beta\psi) > = (-1)^{|\alpha|} < f, \gamma D^\alpha\varphi + \beta D^\alpha\psi > = (-1)^{|\alpha|} (\gamma < f, D^\alpha\varphi > + \beta < f, D^\alpha\psi >) = \gamma(-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha\varphi > + \beta(-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha\psi > = \gamma < D^\alpha f, \varphi > + \beta < D^\alpha f, \psi >$.

2) Непрерывность: $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $D(\Omega) \Rightarrow D^\alpha\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} D^\alpha\varphi$ в $D(\Omega) \Rightarrow$
$< D^\alpha f, \varphi_n > = (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha\varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha\varphi > = < D^\alpha f, \varphi >$.

Определенные выше производные будем называть **производными в смысле теории обобщенных функций**. Как видим, любая функция из $D^{'}(\Omega)$ является бесконечно дифференцируемой в смысле теории обобщенных функций.

Для производной в смысле теории обобщенных функций справедливы некоторые известные нам свойства обычной производной. Именно: 1) производная суммы функций есть сумма производных и 2) константу можно выносить из-под знака производной. Проверим это.

Пусть $f, g \in D^{'}(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$ и α – мультииндекс. Мы хотим убедиться в справедливости равенства $D^\alpha(af(x) + bg(x)) = aD^\alpha f(x) + bD^\alpha g(x)$. Поскольку обобщенные функции суть функционалы на пространстве $D(\Omega)$, последнее равносильно равенству $< D^\alpha(af(x) + bg(x)), \varphi(x) > = < aD^\alpha f(x) + bD^\alpha g(x), \varphi(x) > \ \forall\varphi(x) \in D(\Omega)$. Вспоминая определения производной обобщенной функции и линейной комбинации обобщенных функций, получим:

$$\begin{aligned}
&< D^\alpha(af(x) + bg(x)), \varphi(x) > = (-1)^{|\alpha|} < af(x) + bg(x), D^\alpha\varphi(x) > \\
&= a(-1)^{|\alpha|} < f(x), D^\alpha\varphi(x) > + b(-1)^{|\alpha|} < g(x), D^\alpha\varphi(x) > \\
&\quad = a < D^\alpha f(x), \varphi(x) > + b < D^\alpha g(x), \varphi(x) > = < aD^\alpha f(x) + bD^\alpha g(x), \varphi(x) > .
\end{aligned}$$

Заметим, что остальные свойства производной, вообще говоря, не выполняются хотя бы потому, что в общем случае не определены соответствующие действия над обобщенными функциями: умножение, деление и суперпозиция.

Установим связь между обычными производными, которые далее будем называть классическими, и производными в смысле теории обобщенных функций. Чтобы различать их обозначения, классические производные будем заключать в фигурные скобки: $D^\alpha f$ – производная в смысле теории обобщенных функций, а $\{D^\alpha f\}$ – классическая производная.

Утверждение. Если регулярная обобщённая функция $f(x)$ имеет в Ω непрерывную классическую производную $\{D^\alpha f\}$, то $D^\alpha f = \{D^\alpha f\}$ (равенство понимается как совпадение функционалов на пространстве $D(\Omega)$).

Доказательство. Поскольку $\{D^\alpha f\}$ является регулярной функцией, то для $\varphi \in D(\Omega) \quad < \{D^\alpha f\}, \varphi > = \int_\Omega \{D^\alpha f\}(x)\varphi(x)dx$. Заметим, что благодаря финитности как сама функция φ, так и все ее производные на границе области Ω равны нулю. Поэтому, интегрируя нужное число раз по частям, получим: $\int_\Omega \{D^\alpha f\}(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha\varphi > = < D^\alpha f, \varphi >$. Последнее равенство в выписанной цепочке суть определение производной в смысле теории обобщенных функций. Таким образом, результаты действия функционалов $\{D^\alpha f\}$ и $D^\alpha f$ на произвольную пробную функцию φ совпадают, откуда $\{D^\alpha f\} = D^\alpha f$.

Приведем пример вычисления производной в смысле теории обобщенных функций в случае невыполнения условий доказанного выше утверждения.

Утверждение. Производной в смысле теории обобщенных функций от функции

Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x \leqslant 0, \end{cases}$$

является δ-функция.

Доказательство. Заметим, что функция Хевисайда не имеет классической производной в начале координат, поэтому для нее неприменим результат предыдущего утверждения. Поступим следующим образом.

Для произвольной функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ справедлива цепочка равенств:

$$< \Theta', \varphi > = - < \Theta, \varphi' > = - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx$$
$$= - \int_0^b \varphi'(x)dx = \varphi(0) - \varphi(b) = \varphi(0),$$

где b таково, что $\varphi(x) = 0$ при $x \geqslant b$. Действительно, первое равенство суть определение производной в смысле теории обобщенных функций, второе – определение действия регулярной обобщенной функции (коей является функция Хевисайда) на пробную функцию φ', далее понятно. Отсюда, вспоминая определение δ–функции, заключаем, что $\Theta' = \delta(x)$.

Лекция 7. Фундаментальное решение дифференциального уравнения.

15. Фундаментальное решение дифференциального уравнения. Фундаментальные решения уравнений Лапласа и теплопроводности.

Пусть $L = \sum_{\alpha:|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ – дифференциальный оператор порядка m, где $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ (α – мультииндекс).

Определение. **Фундаментальным решением** уравнения $Lu = 0$ в области Ω называется функция $\mathcal{E}(x, x_0)$, $x, x_0 \in \Omega$, такая, что для каждой фиксированной точки $x_0 \in \Omega$: 1) $\mathcal{E}(x, x_0) \in D'(\Omega)$ и 2) $L(\mathcal{E}(x, x_0)) = \delta(x - x_0)$.

Напомним, что понятие фундаментального решения уже вводилось при изучении уравнений Пуассона и теплопроводности, и определялось оно просто как некоторая конкретная функция. Сейчас мы покажем, что введенные тогда функции являются фундаментальными решениями указанных уравнений в смысле данного выше общего определения.

Утверждение. Функция

$$E(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x - x_0|, n = 2 \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n|x - x_0|^{n-2}}, n > 2 \end{cases}$$

является фундаментальным решением уравнения Лапласа в смысле данного выше определения, т.е. для каждой фиксированной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$

1. $E(x, x_0) \in D'(\mathbb{R}^n)$ и

2. $\Delta_x E(x, x_0) = \delta(x - x_0)$.

Доказательство.

1. Покажем, что при фиксированном x_0 $E(x, x_0)$ как функция x локально интегрируема в $\mathbb{R}^n$, а значит является обобщенной функцией в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $E(x, x_0)$ непрерывна всюду за исключением точки x_0, достаточно проверить интегрируемость по шару $Q_1(x_0) = \{x : |x - x_0| \leqslant 1\}$. Имеем:

$$\int_{Q_1(x_0)} E(x, x_0)dx = \int_0^1 dr \int_{S_r(x_0)} E(x, x_0)d\sigma,$$

где $S_r(x_0) = \{x : |x - x_0| = r\}$. Заметим, что при $x \in S_r(x_0)$ $E(x, x_0) = \dfrac{1}{(2-n)\omega_n r^{n-2}}$ (при $n > 2$, для $n = 2$ проведите выкладки самостоятельно), а потому

$$\int_{Q_1(x_0)} E(x, x_0)dx = \int_0^1 \frac{1}{(2-n)\omega_n r^{n-2}}dr \int_{S_r(x_0)} d\sigma$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(2-n)\omega_n r^{n-2}}\,\omega_n r^{n-1}dr = \int_0^1 \frac{rdr}{(2-n)} = \frac{1}{2(2-n)}.$$

Локальная интегрируемость доказана.

2. Нужно проверить: $\Delta_x E(x,x_0) = \delta(x-x_0) \Leftrightarrow <\Delta E(x,x_0), \varphi(x)> = <\delta(x,x_0), \varphi> = \varphi(x_0)\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Согласно определению производной в смысле теории обобщенных функций $< \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}, \varphi > = < E, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i} >$, откуда $< \Delta E, \varphi > = < E, \Delta\varphi >$. Таким образом, мы должны проверить выполнение равенства $< E(x,x_0), \Delta\varphi(x) > = \varphi(x_0)\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Возьмём Ω – произвольную область в $\mathbb{R}^n$, содержащую носитель функции φ, и применим теорему о представлении функции класса $C^2(\overline{\Omega})$ с помощью потенциалов:

$$\varphi(x_0) = \int_\Omega E(x,x_0)\Delta\varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega}\left(\varphi(x)\frac{\partial E}{\partial\vec{n}}(x,x_0) - \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\vec{n}}E(x,x_0)\right)d\sigma_x.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, $\varphi(x) = 0$ в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$ (напомним, что $\operatorname{supp}\varphi$ – замкнутое множество), а потому как сама функция φ , так и ее производная $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial\vec{n}}$ равны нулю на $\partial\Omega$. Таким образом, второй интеграл в полученной формуле равен нулю.

Далее, как было установлено в пункте 1), функция E локально интегрируема, а потому

$$\varphi(x_0) = \int_\Omega E(x,x_0)\Delta\varphi(x)dx = < E(x,x_0), \Delta\varphi(x) >,$$

что и требовалось установить.

Замечание. Аналогичным образом, используя представление функции с помощью тепловых потенциалов, можно показать, что функция $\Gamma(t,t_0,x,x_0) = \dfrac{\Theta(t-t_0)}{\left(2\sqrt{\pi(t-t_0)}\right)^n}e^{-\dfrac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}}$, введенная в курсе уравнений с частными производными как фундаментальное решение уравнения теплопроводности, является таковым и в смысле данного выше общего определения.

16. Построение фундаментального решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения.

Построим фундаментальное решение уравнения $L(u) = 0$, где L – обыкновенный дифференциальный оператор m-го порядка:

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + ... + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x),\ a_i(x) \in C(\mathbb{R}), i = 0,1,...,m-1.$$

Докажем предварительно весьма полезное вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $f(x) \in C^1(-\infty;x_0] \cap C^1[x_0;+\infty)$ (т.е. функция $f(x)$ дифференцируема всюду, за исключением точки x_0, и производная $f'(x)$ имеет конечные пределы слева и справа в этой точке). Тогда $f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0)$, где $\{f'(x)\}$ – производная функции f в обычном смысле (существует всюду, кроме точки x_0), а $[f]_{x_0} = \lim_{x\to x_0+} f(x) - \lim_{x\to x_0-} f(x)$ – скачок функции f в точке x_0.

Доказательство. Надо проверить, что $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\} \varphi(x)dx + [f]_{x_0}\varphi(x_0)$. Поскольку функция f регулярна,

$$< f, \varphi' >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f\varphi' dx + \int_{x_0}^{+\infty} f\varphi' dx.$$

Интегрируя оба последних интеграла по частям, получим:

$$\begin{aligned} < f, \varphi' > &= -\int_{-\infty}^{x_0} \{f'(x)\} \varphi(x)dx + f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{x_0} - \int_{x_0}^{+\infty} \{f'\} \varphi dx + f(x)\varphi(x)|_{x_0}^{+\infty} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\} \varphi(x)dx + \varphi(x_0) \lim_{x\to x_0-0} f(x) - \varphi(x_0) \lim_{x\to x_0+0} f(x) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\} \varphi(x)dx - [f]_{x_0}\varphi(x_0). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. Пусть $f(x) \in C^m(-\infty; x_0] \cup C^m[x_0; +\infty)$. Тогда

$$f^{(m)}(x) = \left\{f^{(m)}(x)\right\} + [f]_{x_0}\delta^{(m-1)}(x-x_0) + [f']_{x_0}\delta^{(m-2)}(x-x_0) + ... + [f^{(m-1)}]_{x_0}\delta(x-x_0).$$

Доказательство (по индукции). При $m = 1$ доказано. Предположим, что

$$f^{(m-1)}(x) = \left\{f^{(m-1)}(x)\right\} + [f]_{x_0}\delta^{(m-2)}(x-x_0) + ... + [f^{(m-2)}]_{x_0}\delta(x-x_0),$$

где $\delta^{(k)}(x-x_0)$ – k-я производная δ-функции. Тогда, учитывая, что классическая производная $\left\{f^{(m-1)}(x)\right\}$ удовлетворяет условиям леммы, получим:

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= (f^{(m-1)}(x))' = \left\{f^{(m-1)}(x)\right\}' + [f]_{x_0}\delta^{(m-1)}(x-x_0) + ... \\ &+ [f^{(m-2)}]_{x_0}\delta'(x-x_0) = \left\{f^{(m)}(x)\right\} + [f^{(m-1)}]_{x_0}\delta(x-x_0) \\ &\qquad + [f]_{x_0}\delta^{(m-1)}(x-x_0) + ... + [f^{(m-2)}]_{x_0}\delta'(x-x_0), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теорема. Фундаментальным решением уравнения

$$L(u) = \frac{d^m u}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + ... + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_0(x)u = 0$$

является функция $\mathcal{E}(x, x_0) = \Theta(x - x_0)Z(x, x_0)$, где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x \le 0, \end{cases}$$

а $Z(x, x_0)$ – решение задачи Коши

$$L(z) = 0,\ z(x_0) = ... = z^{(m-2)}(x_0) = 0,\ z^{(m-1)}(x_0) = 1.$$

Доказательство. Заметим, что определенная выше функция $\mathcal{E}(x, x_0)$ как функция x (при фиксированном x_0) удовлетворяет условиям доказанного выше следствия, причем в силу начальных условий для функции $Z(x,x_0)$ скачок как самой функции $\mathcal{E}(x,x_0)$, так и ее производных до порядка $m-2$ в точке x_0 равен нулю, а $(m-1)$-ой производной – единице. Отсюда

$$L(\mathcal{E}(x,x_0)) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x) \frac{d^k(\Theta(x-x_0)Z(x,x_0))}{dx^k} + \frac{d^m(\Theta(x-x_0)Z(x,x_0))}{dx^m}$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x) \left\{ (\Theta(x-x_0)Z(x,x_0))^{(k)} \right\} + \left\{ (\Theta(x-x_0)Z(x,x_0))^{(m)} \right\} + 1 \cdot \delta(x-x_0)$$
$$= \{L\left(\Theta(x-x_0)Z(x,x_0)\right)\} + \delta(x-x_0) = \delta(x-x_0).$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $\{L\left(\Theta(x-x_0)Z(x,x_0)\right)\} \equiv 0$. Действительно, при $x > x_0 \quad \Theta(x-x_0)Z(x,x_0) = Z(x,x_0)$, и значит $L(\Theta(x-x_0)Z(x,x_0)) = LZ(x,x_0) = 0$, ибо $Z(x,x_0)$ удовлетворяет однородному уравнению $L(z) = 0$. При $x < x_0 \quad \Theta(x-x_0) \equiv 0 \Rightarrow \{L\left(\Theta(x-x_0)Z(x,x_0)\right)\} = 0$. Теорема доказана.

Отметим в заключение, что фундаментальное решение является эффективным инструментом для изучения и решения как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными, что мы уже наблюдали при рассмотрении уравнений Пуассона и теплопроводности. К сожалению, временные рамки не позволяют нам уделить больше внимания этому понятию.

Лекция 8. Обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона.

17. Понятие обобщенной производной. Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Неравенство Фридрихса.

Определение. Пусть $u(x) \in L_1^{loc}(\Omega)$ – локально интегрируемая в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс. Функция $v(x) \in L_1^{loc}(\Omega)$ называется **обобщенной производной** функции $u(x)$ в области Ω $(v = D^\alpha u)$, если для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx.$$

Вспоминая определения регулярной обобщенной функции и производной в смысле теории обобщенных функций, видим, что обобщенная производная есть не что иное, как производная в смысле теории обобщенных функций в ситуации, когда как сама функция, так и ее производная в смысле теории обобщенных функций являются регулярными функциями. Отсюда, принимая во внимание связь между производными классической и в смысле теории обобщенных функций, заключаем: если функция $f(x)$ имеет в Ω непрерывную классическую производную $\{D^\alpha f\}$, то она одновременно является и обобщенной производной.

Отметим, что понятие обобщенной производной исторически возникло раньше понятия обобщенной функции, хотя после появления понятия обобщенной функции в 50-х годах прошлого века стало принято излагать теорию именно в той последовательности, в которой это делается в настоящих лекциях. Понятие же обобщенной производной было введено выдающимся советским математиком С.Л. Соболевым в работах 30-х годов, и эти работы явились по сути переломным моментом в развитии теории уравнений с частными производными.

Определим теперь соболевские пространства $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Определение. Пространством Соболева $H^1(\Omega)$ называется пространство квадратично интегрируемых в области Ω функций, имеющих в Ω все обобщенные производные первого порядка, которые, в свою очередь, также интегрируемы с квадратом.

Пространство $H^1(\Omega)$ снабжается скалярным произведением

$$(u, v)_1 = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx,$$

относительно которого, как можно показать, оно является полным, тем самым обретая структуру гильбертова пространства. Порождаемая этим скалярным произведением норма будет обозначаться

$$\|u\|_1^2 = (u, u)_1 = \int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)dx.$$

Определение. Пространством Соболева $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ называется замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства $H^1(\Omega)$.

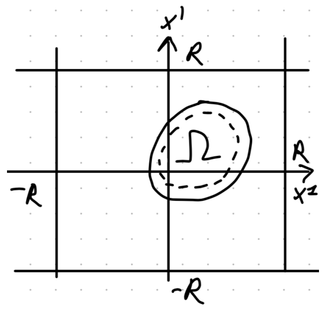
Очевидно, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $H^1(\Omega)$. Можно показать, что это подпространство собственное, т.е. $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$, а критерием принадлежности функции из $H^1(\Omega)$ подпространству $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ является равенство ее нулю на границе: $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \Leftrightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$. Последнее равенство нуждается, разумеется, в толковании, т.к. функции из пространства $H^1(\Omega)$ не являются, вообще говоря, непрерывными, и значения их на границе области нельзя понимать в обычном смысле. Мы опускаем здесь этот довольно тонкий момент.

Докажем одно важное свойство функций из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1$.

Лемма (неравенство Фридрихса). Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует константа $C = C(\Omega)$ такая, что $\forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2(x)dx \leq C(\Omega)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = C(\Omega)\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Доказательство. Пусть $\Omega \subset K_R = \{x: \ |x_j| \leq R, \ i = 1, ..., n\}$, и пусть сначала $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Продолжим $u(x)$ нулём вне Ω на весь квадрат K_R. Тогда, очевидно, $u \in C_0^\infty(K_R)$.
Поскольку на границе квадрата функция u равна нулю, для произвольной точки $x = (x_1, x') \in K_R$, где $x' = (x_2, ..., x_n)$,



$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u(t, x')}{\partial x_1} dt,$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского

$$u^2(x) = \left(\int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u(t, x')}{\partial x_1} \cdot 1\, dt\right)^2 \leq \int_{-R}^{x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dt \cdot \int_{-R}^{x_1} 1^2\, dt \leq \int_{-R}^{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dt \cdot 2R.$$

Отсюда

$$\int_\Omega u^2 dx = \int_{K_R} u^2 dx \leq 2R\int_{K_R} dx \int_{-R}^{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$$
$$= 2R\int_{-R}^{R} dx_1 \int_{-R}^{R} dx_2 ... \int_{-R}^{R} dx_n \int_{-R}^{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$$
$$= 2R\int_{-R}^{R} dx_1 \int_{K_R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx = 4R^2\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx \leq 4R^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Пусть теперь $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Возьмем последовательность функций $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ таких, что $u_k \to u$ в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ при $k \to \infty$ (напомним, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ есть замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике $H^1(\Omega)$, а потому $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$).

По доказанному выше, для функций u_k

$$\int_\Omega u_k^2 dx \le \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 dx. \quad (*)$$

Заметим, что из сходимости u_k к u в метрике $H^1(\Omega)$ следует сходимость $u_k \to u$ и $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, ..., n$, в $L_2(\Omega)$. Отсюда $\int_\Omega u_k^2 dx \to \int_\Omega u^2 dx$ и $\int_\Omega \left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 dx \to \int_\Omega \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$, и из $(*)$ предельным переходом при $k \to \infty$ получаем такое же неравенство для u. Лемма доказана.

Следствие . На пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ можно ввести норму $\|u\|_2 = \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}$, эквивалентную норме $\|u\|_1$.

Доказательство. Очевидно, $\|u\|_2 \le \|u\|_1$. С другой стороны, в силу неравенства Фридрихса $\|u\|_1^2 = \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) dx \le C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = (C(\Omega) + 1) \|u\|_2^2$. Заметим, кстати, что последнее неравенство заодно доказывает, что $\|u\|_2$ действительно является нормой, а не полунормой.

Замечание. Норма $\|u\|_2$ порождается скалярным произведением $(u, v)_2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x_i} dx$, относительно которого $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

18. Существование и единственность обобщенного решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона. Связь классического и обобщенного решений.

Определение. Функция $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ называется **обобщенным решением** задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad x \in \Omega,\ f \in L_2(\Omega), \quad (**)$$

если $(\nabla u, \nabla\varphi) \equiv \int_\Omega \sum_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f\varphi dx \equiv -(f, \varphi)\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (или, вспоминая данное выше определение скалярного произведения, $(u, \varphi)_2 = -(f, \varphi)\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$).

Утверждение (связь классического и обобщённого решений).

1. Если u – классическое решение задачи $(**)$ (т.е. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$), то u – обобщённое решение.
2. Если u – обобщённое решение и выполнены условия: $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и $f \in C(\Omega)$, то u – классическое решение.

Доказательство.

1. Пусть u – классическое решение. Умножая обе части уравнения $\Delta u = f$ на функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и интегрируя по области Ω, получим:

$$\int_\Omega \Delta u \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx,$$

откуда после интегрирования по частям

$$-\int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\varphi dx.$$

Остается заметить, что из $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ следует $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, и значит u – обобщённое решение.

2. Пусть u – обобщённое решение, причем $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и $f \in C(\Omega)$. Тогда

$$\int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f\varphi dx \Rightarrow -\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi dx = -\int_\Omega f\varphi dx$$
$$\Rightarrow \int_\Omega (\Delta u - f)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Покажем, что из последнего равенства вытекает, что $\Delta u - f = 0 \ \forall x \in \Omega$. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ $\Delta u - f \neq 0$; пусть, для определенности, $\Delta u(x_0) - f(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности функций Δu и f $\Delta u(x) - f(x) > 0$ в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0.

Возьмем в качестве функции φ "шапочку"

$$\varphi(x) = w_h(x - x_0) = \begin{cases} e^{\frac{h^2}{|x-x_0|^2 - h^2}} & \text{при } |x - x_0| < h, \\ 0 & \text{при } |x - x_0| \geqslant h, \end{cases} \qquad h = \varepsilon/2.$$

Тогда произведение $(\Delta u - f)\varphi \geqslant 0$ в Ω и $(\Delta u - f)\varphi > 0$ в $U_{\varepsilon/2}(x_0)$, а потому $\int_\Omega (\Delta u - f)\varphi dx > 0$ – противоречие.

Докажем, наконец, теорему существования и единственности обобщенного решения задачи $(**)$.

Теорема. Задача

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \qquad x \in \Omega, \ f \in L_2(\Omega)$$

имеет, и притом единственное, обобщённое решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно определению, u – обобщённое решение $\Leftrightarrow$ $(u, \varphi)_2 = -(f, \varphi) \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку $l(\varphi) = -(f, \varphi)$ – непрерывный линейный функционал в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то по теореме Рисса существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ такая, что $l(\varphi) = (u, \varphi)_2 \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а значит, в частности, и для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Теорема доказана.

Обратим внимание, что доказанная только что практически в две строчки теорема является по сути единственной теоремой существования решения краевой задачи, доказанной нами как в курсе уравнений с частными производными, так и в курсе уравнений математической физики. И это не случайно, ибо доказательство существования классического решения краевой задачи зачастую представляет собой чрезвычайно технически сложную задачу даже для областей достаточно простой конфигурации. Собственно, нерешенные проблемы для классических решений краевых задач и послужили основным мотивом для введения понятия обобщенного решения. Возникает вопрос: не происходит ли в результате подмена одного понятия другим и уход таким образом от проблем классической теории? Оказывается, нет. Обобщенные решения оказались мощным инструментом и для развития классической теории. Доказательство существования классического решения при этом происходит по следующей схеме: доказывается существование обобщенного решения, далее устанавливается, что оно обладает гладкостью классического решения при соответствующей гладкости исходных данных (здесь и содержатся основные трудности), откуда следует, что обобщенное решение является классическим (см. выше доказательство утверждения о связи этих двух решений).