Úloha č. 1

Mějme formuli φ v KNF. Nechť a je libovolná proměnná vyskytující se v zápisu φ. Nejprve z φ vytvoříme formuli ψ předpokladem, že a je ohodnoceno 1 (tj. odstraníme z φ všechny klauzule obsahující term a a ze zbývajících klauzulí odebereme všechny výskyty termu $\neg a$). Obdobně vytvoříme formuli ρ předpokladem, že a je ohodnoceno 0.

Následně zjistíme hodnotu `sat(`ψ`)`. Pokud je ψ splnitelná, existuje ohodnocení φ, ve kterém je a ohodnoceno 1. V opačném případě zjistíme hodnotu `sat(`ρ`)`. Pokud je ρ splnitelná, existuje ohodnocení φ, ve kterém je a ohodnoceno 0. Pokud ψ ani ρ nejsou splnitelné, φ nemá žádné splňující ohodnocení.

Pokud je alespoň jedna z dvojice (ρ, ψ) splnitelná, použijeme ji jako výchozí formuli a proces opakujeme. V následujících iteracích už přitom víme, že jedna z dvojice nových formulí bude vždy splnitelná, protože opak by znamenal nesplnitelnost výchozí formule, ovšem v takovém případě by algoritmus skončil již v předchozí iteraci.

Postupným iterováním se tak musíme dostat do stavu, kdy výchozí formulí je prázdná konjunkce (každá iterace ostře snižuje počet proměnných). V takovém případě jsme schopni určit splňující ohodnocení φ induktivně podle toho, kterou z dvojice upravených formulí jsme v každé iteraci algoritmu zvolili. Proměnné ve φ, přes které jsme při dosažení prázdné konjunkce dosud neiterovali, přitom mohou být ohodnoceny libovolně.

Protože počet iterací je menší nebo roven počtu proměnných ve φ (který je polynomiální) a každá iterace trvá lineární čas vzhledem k velikosti formule (která je také polynomiální), operuje tento algoritmus v polynomiálním čase.

Úloha č. 2

Převodní algoritmus

Nejprve převedeme danou instanci 3-SAT na instanci φ problému NAE-SAT pomocí postupu ze cvičení. Pro instanci Dělení množiny zvolíme množinu $S = L \cup \{x, \neg x, y\}$, kde L je množina všech literálů vyskytujících se ve φ a x, y jsou libovolné proměnné nevyskytující se ve φ. Jako kolekci podmnožin S zvolíme $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{x, \neg x, y\}$, přičemž

$$\mathcal{C}_1 = \{\{a, b, c\} \mid (a \vee b \vee c) \text{ je klauzule ve } \varphi\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{\{a, \neg a, x\}, \{a, \neg a, \neg x\}, \{a, \neg a, y\} \mid a \in L \wedge \neg a \in L\}.$$

Důkaz správnosti

Nejprve si uvědomme, že takto vytvořená instance problému Dělení množiny je korektně definovaná. S je dobře definovaná množina, protože φ obsahuje pouze konečné množství literálů. Z definic $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ vidíme, že jsou to soubory podmnožin S, tudíž je souborem podmnožin S i $\mathcal{C}$. Zbývá nám tedy dokázat ekvisplnitelnost obou instancí.

Budeme-li předpokládat, že existuje splňující NAE ohodnocení φ, nalezneme dělení S tak, že S_1 budou tvořit x a y spolu s pravdivě ohodnocenými literály a S_2 budou tvořit nepravdivé literály a $\neg x$. Že S_1 a S_2 tvoří disjunktní rozklad S je zřejmé. Neprázdný průnik s množinami z $\mathcal{C}_1$ je dán tím, že se jedná o NAE ohodnocení, a neprázdný průnik s množinami z $\mathcal{C}_2$ plyne z faktu, že a a $\neg a$ musí být ohodnoceny různě. Každá množina z $\mathcal{C}$ tak má neprázdný průnik s těmito S_1 i S_2, tudíž instance Dělení množiny má řešení.

Nyní předpokládejme, že existuje splňující rozklad S na S_1 a S_2. Ukážeme, že když literály obsažené v S_1 ohodnotíme jako pravdivé a literály obsažené v S_2 jako nepravdivé, dostaneme splňující NAE ohodnocení φ. To vyplývá přímo z toho, že S_1 i S_2 mají neprázdný průnik se všemi množinami z $\mathcal{C}_1$, tudíž každá klauzule φ obsahuje kladně i záporně ohodnocený literál. Potřebujeme ještě ověřit, že se jedná o dobře definované ohodnocení.

Aby takto vytvořené ohodnocení nebylo dobře definované, musely by se pro nějakou proměnnou a z φ v jedné z množin rozkladu nacházet jak a, tak $\neg a$. To však není možné. Budeme-li bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\{a, \neg a\} \subseteq S_1$, musí platit $\{x, \neg x, y\} \subseteq S_2$, aby množiny z $\mathcal{C}_2$ měly s S_2 neprázdný průnik. Toto je však spor s $\{x, \neg x, y\} \cap S_1 \neq \emptyset$, tudíž $\{S_1, S_2\}$ není splňujícím rozkladem S.

Důkaz NP-úplnosti

Máme-li rozklad množiny S na S_1 a S_2 a kolekci jejích podmnožin, dokážeme postupným projitím této kolekce snadno polynomiálně zjistit, zda mají tyto podmnožiny neprázdný průnik s S_1 i S_2. Problém Dělení množiny tedy náleží NP.

Zároveň jsme provedli převod z 3-SAT na Dělení množiny. Protože je počet literálů ve φ a tudíž i počet klauzulí ve φ polynomiální, jsme schopni tento převod vykonat v polynomiálním čase. Protože 3-SAT je NP-těžký, je i Dělení množiny NP-těžké, a z předchozího tedy i NP-úplné.

Úloha č. 3

Je snadno vidět, že Poloviční klika $\in$ NP. Dostaneme-li ke grafu množinu vrcholů, dokážeme v kvadratickém čase ověřit, že tyto vrcholy tvoří kliku (a triviálně ověříme, zda velikost množiny je alespoň $n/2$), což nám stačí jako polynomiální verifikátor problému.

NP-úplnost ukážeme převodem Klika $\rightarrow$ Poloviční klika. Pro instanci problému Klika $(G = (V, E), k)$ uvažme $n = \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$. Můžeme rozlišit tři případy.

Pokud $k = n$, oba problémy jsou ekvivalentní a graf není potřeba modifikovat. Jako důkaz si stačí uvědomit, že graf G obsahuje kliku velikosti alespoň $\frac{|V|}{2}$ právě tehdy, když obsahuje kliku velikosti alespoň n.

Pokud $k > n$, přidáme do grafu $2(k - n)$ izolovaných vrcholů. Izolované vrcholy nemohou změnit velikost maximální kliky a jejich přidáním jsme problém převedli na předchozí případ. Takto upravený graf totiž obsahuje $|V| + 2(k - n)$ vrcholů, tudíž instance bude hledat kliku velikosti alespoň $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil + k - n = n + k - n = k$.

Pokud $k < n$, vytvoříme graf $G' = (V', E')$ tak, že přidáme do G kliku K velikosti $2(n - k)$ a všechny vrcholy této kliky propojíme se všemi vrcholy původního grafu. Velikost V' je rovna $|V| + 2(n - k)$. Instance problému Poloviční klika nad G' tedy bude hledat kliku velikosti alespoň $\frac{|V|}{2} + n - k$, což je z předchozího ekvivalentní hledání kliky velikosti alespoň $n' = n + n - k = 2n - k$.

Každá maximální klika v G' musí obsahovat všechny vrcholy z K. Kdyby existovala maximální klika, která by některý z těchto vrcholů neobsahovala, mohli bychom ji o tento vrchol rozšířit (vrcholy K jsou propojeny s celým grafem), což by byl spor s její maximalitou.

V G' tedy existuje maximální klika M' velikosti $m \geq n'$ právě tehdy, když v G existuje maximální klika M velikosti $m - 2(n-k) \geq n' - 2(n-k) = 2n - k - 2(n-k) = k$, kde převod mezi M a M' zajistíme přidáním, respektive odebráním vrcholů K.