Příklad 1

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx$$

Tento předpis je definován na $\bigcup_{k\in Z}(k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2})$, neboť na těchto intervalech je jmenovatel nenulový.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos^2 x)} dx = \int \frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{1}{1+\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2} dx =$$

[substituce (1): $t = \tan x, dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$]

$$= \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+2} dt = \int \left(\frac{At+B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+2} \right) dt =$$

[$A = 0,\ B = 0.5,\ C = 0,\ D = -0.5$]

$$= \int \frac{1}{2t^2} dt - \int \frac{1}{2(t^2+2)} dt = -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{2}})^2 + 1} dt =$$

[substituce (1): $s = \frac{t}{\sqrt{2}},\ ds = \frac{1}{\sqrt{2}} dt$]

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{s^2+1} ds = -\frac{1}{2t} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan s + c = -\frac{1}{2t} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c =$$

$$= -\frac{1}{2\tan x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c, c \in R$$

Výsledný výraz platí na celém definičním oboru původního výrazu (úpravami nevznikly žádné podmínky navíc).

Příklad 2

$$\int |\sin x + \cos x| dx$$

Definiční obor tohoto výrazu je R. Tento výraz si rozdělíme na dva intervaly:

(a) $(\sin x + \cos x)$ na $\bigcup_{k\in Z}(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$

(b) $-(\sin x + \cos x)$ na $\bigcup_{k\in Z}(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$

(a)

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = -\cos x + \sin x + c_1$$

(b)

$$\int -(\sin x + \cos x)\, dx = \cos x - \sin x + c_2$$

Abychom zajistili spojitost primitivní funkce, musíme zvolit vhodné aditivní konstanty. Obě funkce jsou na daných intervalech rostoucí a nabývají hodnot (při zanedbání konstanty) od $-\sqrt{2}$ do $\sqrt{2}$. Aby se tedy v krajních bodech rovnaly hodnoty obou funkcí, musí být např. v bodě $x = \frac{3\pi}{4}$ funkce (b) posunutá o $2\sqrt{2}$ vůči funkci (a). V bodě $x = \frac{7\pi}{4}$ pak musí funkce (a) být posunuta o $2\sqrt{2}$ vůči funkci (b), tedy o $4\sqrt{2}$ vůči (a) na předchozím intervalu, atd.

Obecně pro $k \in Z$ má primitivní funkce $|\sin x + \cos x|$ výsledný tvar

$$F = \begin{cases} -\cos x + \sin x + k \cdot 4\sqrt{2} + c, & x \in \bigcup_{k \in Z}(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi] \\ \cos x - \sin x + (k+1) \cdot 4\sqrt{2} + c, & x \in \bigcup_{k \in Z}(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi] \end{cases}, c \in R$$

Tato funkce je tedy spojitá a definovaná na R.

Příklad 3

$$\int \frac{8 + 6x - 2x^2}{x^4 - 4x + 3} dx$$

Výraz je definován na $R \backslash \{1\}$

$$\int \frac{8 + 6x - 2x^2}{x^4 - 4x + 3} \mathrm{d}x = \int \frac{8 + 6x - 2x^2}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} \right) dx =$$

$$[A = -1,\, B = 2,\, C = 1,\, D = -1]$$

$$= \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3} dx = -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3} dx =$$

$$= -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 4}{x^2 + 2x + 3} dx =$$

$$[\text{substituce (1): } t = x^2 + 2x + 3,\, dt = 2x + 2]$$

$$= -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{4}{x^2 + 2x + 3} dx \right) =$$

$$= -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 3) - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx =$$

$$= -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 3) - 2 \arctan(x+1) + c, c \in R$$

Primitivní funkce je definovaná na celém definičním oboru původní funkce.