Cvičení č. 1

a)

Nechť je M spočetná množina. Pokud je M konečná a $|M| = n$, mějme bijekci $h : \mathbb{Z}_n \to M$, jinak mějme bijekci $h : \mathbb{Z} \to M$. Operaci $\oplus$ zadefinujeme tak, že

$$\forall a, b \in M : h(a) \oplus h(b) = h(a + b).$$

Snadno ověříme, že $(M, \oplus, h(0))$ je monoid:

- $(h(a) \oplus h(b)) \oplus h(c) = h(a + b + c) = h(a) \oplus (h(b) \oplus h(c))$
- $h(a) + h(0) = h(a + 0) = h(a) = h(0) + h(a)$,

kde využíváme toho, že $(\mathbb{Z}, +, 0)$ a $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$ jsou monoidy a h je bijekce. *(Stejný argument se dá použít i pro množiny s kardinalitou rovnou $\mathbb{R}$.)*

b)

Podgrupa je normální, pokud přežije konjugaci s prvky grupy. Konjugace permutace nezmění její strukturu, pouze přejmenuje prvky. Množina $\{id, (123), (132)\}$ je tedy příklad netriviální normální podgrupy $\mathbb{S}_3$.

c)

Z Lagrangeovy věty pro $H < G$ platí $p = |G| = [G : H] \cdot |H|$. Když je p prvočíslo, musí platit $|H| = 1$ nebo $|H| = p$. Jediné podgrupy jsou tedy ty triviální.

d)

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \qquad\qquad 2035 = 5 \cdot 11 \cdot 37$$
$$\varphi(2015) = 4 \cdot 12 \cdot 30 = 1440 \qquad\qquad \varphi(2035) = 4 \cdot 10 \cdot 36 = 1440$$

Protože víme, že Eulerova funkce odpovídá počtu generátorů cyklické grupy, vidíme, že cyklická grupa řádu 2035 má $\varphi(2015)$ generátorů.

e)

Uvažujme h isomorfismus $(|\,\mathbb{Z}_6\,| = |\mathbb{S}_3|)$. Nechť $h(m) = (12)$ a $h(n) = (13)$.

$$h(m + m) = (12)(12) = id \implies m + m = 0 \implies m = 3$$
$$h(n + n) = (13)(13) = id \implies n + n = 0 \implies n = 3,$$

čímž dostáváme spor s tím, že h je zobrazení.

f)

Z přednášky víme, že velikost tělesa musí být mocninou prvočísla. $10 = 2 \cdot 5$. Spor.

Cvičení č. 2

Nechť je c počet použitých barev a X množina všech obarvení odznáčku. $|X| = c^{12}$. Grupa G všech pootočení odznáčku má 12 prvků. Uvažujme přirozenou akci G na X. Pro každý $g \in G$ určíme počet jím nezměněných prvků X.

0 Všech c^{12} obarvení je nezměněno.

1,5,7,11 Nezměněné prvky jsou ty obarvené celé jednou barvou. Těch je c.

2,10 Sudé a liché prvky musí být každé stejnou barvou. Takových obarvení je c^2.

3,9 Obdobně jako v předchozím případě je nezměněných c^3 obarvení.

4,8 Stejně jako výše je nezměněných c^4 obarvení.

6 Protější díly musí mít stejnou barvu. Najdeme c^6 nezměněných obarvení.

Počet rozlišitelných obarvení je roven $|X/G| = 1/|G| \cdot \sum_{g \in G} |X^g|$, kde X^g je množina prvků z x nezměněných akcí g.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{12}(c^{12} + c^6 + 2c^4 + 2c^3 + 2c^2 + 4c) \geq 506$$

$$c \geq 3$$

Anička bude potřebovat alespoň 3 barvy.

Cvičení č. 3

a)

Z cvičení víme, že obrazem homomorfismu je podgrupa, jejíž řád je dělitelný NSD(p, q). Pokud $p \neq q$, existuje tedy jediný homomorfismus zobrazující celé $\mathbb{Z}_p$ na nulu.

Pokud $p = q$, existuje navíc ještě $p - 1$ dalších homomorfismů určených obrazem 1 (každý nenulový prvek $\mathbb{Z}_p$ je generátor a homomorfismus je určen zobrazením 1 na generátor).

b)

Grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ je cyklická řádu 6 a generovaná $(1, 1)$. Opět víme, že obrazem bude podgrupa řádu dělícím NSD(42,6), tedy 1, 2, 3 nebo 6. Homomorfismus je jednoznačně určen obrazem $(1, 1)$. Jelikož $(1, 1)$ se musí zobrazit na generátor podgrupy, dostáváme následující homomorfismy:

řád 1: $(1,1) \to 0$

řád 2: $(1,1) \to 21$

řád 3: $(1,1) \to 14$, $(1,1) \to 28$

řád 6: $(1,1) \to 7$, $(1,1) \to 35$

Cvičení č. 4

Obraz homomorfismu z $\mathbb{S}_3$ musí mít velikost 1, 2, 3, nebo 6. Triviálně může být obrazem homomorfismu $\{0\}$ a $\mathbb{S}_3$.

Jediná grupa velikosti 2 je $\mathbb{Z}_2$. Na $\mathbb{Z}_2$ se můžeme zobrazit například jako

$$h((12)) = h((13)) = h((23)) = h(id) = 0 \qquad h((123)) = h((132)) = 1$$

.

Jediná grupa velikosti 3 je $\mathbb{Z}_3$. Na $\mathbb{Z}_3$ homomorfismus nemůže existovat, protože všechny prvky řádu 2 by musely být zobrazeny na nulu, čímž bychom ovšem dostali spor např.

$$0 = h((12)) \circ h((13)) = h((132)) \neq 0,$$

kde poslední nerovnost musí platit, aby obraz byl řádu 3.

Grupy velikosti 6 jsou $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{S}_3$. Neexistenci isomorfismu mezi $\mathbb{S}_3$ a $\mathbb{Z}_6$ jsme ukázali v první úloze. Množiny, které můžou být obrazem $\mathbb{S}_3$, jsou tedy $\{0\}$, $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{S}_3$.