1 Popis řešení

Nejprve si permutaci rozdělíme na cykly. Snadno si všimneme, že když hodnota x_i existuje v nějakém cyklu, existuje v něm také hodnota ležící na i-tém vodiči (dokonce hned jako následující prvek cyklu). Není tedy třeba přidávat komparátory mimo cyklus.

Hodnoty v každém cyklu si pak rozdělíme na poloviny podle velikosti na velké a malé. V cyklu najdeme souvislý úsek velkých hodnot a označíme poslední hodnotu tohoto úseku jako x_v. Takovémuto úseku bude následovat souvislý úsek malých hodnot. Poslední hodotu tohoto úseku označíme x_m.

Umístíme komparátor mezi x_v-tý a x_m-tý vodič. Takto umístíme komparátory pro všechny úseky velkých čísel ve všech cyklech. Na nově vytvořené permutaci pak postup v další vrstvě opakujeme, dokud posloupnost není setřízená.

2 Důkaz správnosti

Již jsme si rozmysleli, že si vystačíme pouze s komparátory mezi prvky téhož cyklu. Také můžeme pozorovat, že x_m a x_v jsou korektně definovány, jelikož v cyklu následuje za úsekem velkých hodnot vždy malá hodnota a naopak.

Dále je vidět, že námi zavedené komparátory vždy prohodí své vstupy. Z definice je totiž x_v velká hodnota, ale na x_v-tém vodiči leží hodnota malá (protože za x_v následuje malé číslo). Obdobně je x_m malá hodnota, ovšem na x_m-tém vodiči leží velká hodnota. Vodiče jsou seřazeny v opačném pořadí než jejich hodnoty, tedy musí při komparaci dojít k prohození.

Podívejme se, co nám porovnání udělá s cykly. Představme si cyklus permutace jako orientovaný graf, kde hrana vede vždy z hodnoty x_i na hodnotu na x_i-tém vodiči. Když si vrcholy přeznačíme pomocí toho, zda jsou malé, nebo velké, dostaneme cyklus ve tvaru

$$v_1 \to v_2 \to ... \to v_k \to m_1 \to m_2 \to ... \to m_k \to v_{k+1} \to ... \to v_1$$

.

Komparátor vymění vodiče v_k a m_k, tedy hodnoty m_1 a v_{k+1} Z hrany $v_k \to m_1$ se stane hrana $v_k \to v_{k+1}$ a hrana $m_k \to v_{k+1}$ se změní na hranu $m_k \to m_1$. Z hodnot $m_1 ... m_k$ se tedy stane nový cyklus, zatímco hodnoty $v_1 ... v_k$ se napojí na následující úsek veklých čísel.

Po provedení téhož pro všechny úseky velkých čísel v cyklu se tedy každý úsek malých čísel stane vlastním cyklem, zatímco všechna velká čísla skončí v jednom společném cyklu. (*Pozn.: Pokud bychom začínali úseky malých čísel a k nim hledali následující úseky velkých čísel, byl by výsledek opačný. Postupy jsou ekvivalentní.*)

V každé vrstvě se tedy zvyšuje počet cyklů permutace. Jelikož setřízená permutace je ekvivalentní té s právě n cykly, síť má konečnou hloubku a vydá správné řešení.

3 Složitost

Pokud jsme v jednom cyklu použili k komparátorů, z jednoho cyklu se stalo $k+1$ cyklů, tedy každý komparátor přidává jeden cyklus. Síť musí vyrobit n cyklů, tedy počet komparátorů sítě je $O(n)$.

Podívejme se na délku největšího cyklu v každé vrstvě. Po rozpadnutí jednoho cyklu ve vrstvě se nejdelší cyklus může buď ze všech velkých prvků cyklu, nebo z některých malých prvků cyklu. Jak velké, tak malé prvky ovšem tvoří nejvýše polovinu cyklu. Má-li tedy největší cyklus v i-té vrstvě l prvků, ve vrstvě $i+1$ bude mít délku nejvýše $l/2$. (*Z cyklu $s < l$ prvky nemůže vzejít větší cyklus, jelikož alespoň na polovinu jsou zmenšeny všechny cykly.*)

Původní permutace má cyklus velikosti nejvýše n a výsledná velikosti 1. Počet vrstev sítě je tedy $O(\log n)$