Příklad 10b

1 Popis řešení

Na nalezení kostry s minimálním součinem použijeme stejný algoritmus jako na nalezení běžné minimální kostry, například Kruskalův algoritmus.

2 Pseudokód

Identický jako v úkolu Internet.

3 Důkaz správnosti

Vytvořme nový graf, který bude stejný jako graf původní s rozdílem, že váhy hran nového grafu budou logaritmy vah z hran původních. Máme ostře kladné hrany, tedy logaritmus je vždy definován. Na takovémto grafu spustíme algoritmus pro hledání minimální kostry. Dostaneme kostru s ohodnocením $\sum_{i \in E(T)} \log i = \log \left(\prod_{i \in E(T)} i \right)$.

Logaritmus je rostoucí funkce, tedy minimalizovat logaritmus součinu nutně znamená minimalizovat součin. Odtud nám už vyplývá rovnost minimálních koster v obou grafech.

Jelikož jsme schopni takto dokázat, že se rovná minimální kostra v novém grafu a minimální kostra grafu původního (resp. množiny min. koster pro neunikátní ohodnocení), není třeba nový graf vytvářet a lze známý algoritmus spustit rovnou na původním grafu.

4 Časová složitost

Uvedený Kruskalův algoritmus má časovou složitost $O(m \log m)$.

5 Prostorová složitost

Prostorová složitost Kruskalova algoritmu je $O(n + m)$.