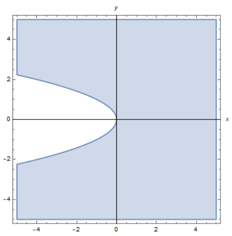
Příklad 1

(a) Definiční obor funkce f je $\{(x, y) \in R^2 | x + y^2 > 0\}$. Tato množina se dá vyjádřit jako $x > -y^2$, což nám dá následující náčrt definičního oboru (okraj do množiny nepatří):



(b) Nejprve spočteme parciální derivace funkce.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}$$

Tyto parciální derivace existují na celém D a jsou všude spojité. Dosazením pak získáme gradient pro bod $[0, 1]$

$$\nabla f(0, 1) = (1, 2)$$

(c) Funkce má na celém definičním oboru spojité parciální derivace, tedy je všude diferencovatelná.

$$Df_{(1,1)}(x, y) = \frac{1}{1 + 1^y}(x - 1) + \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2}(y - 1) = \frac{x - 1}{2} + (y - 1)$$

(d)

$$Df_{(0,1)}(x, y) = x + 2(y - 1)$$
$$Df_{(0,1)}(0.04, 0.99) = 0.02$$
$$f(0.04, 0.99) \approx f(0, 1) + Df_{(0,1)}(0.04, 0.99) = 0 + 0.02 = 0.02$$

(e)

$$\tau : z = x + 2(y - 1) + 0 \Rightarrow x + 2y - z - 2 = 0$$

Příklad 2

$$L = \sqrt{3}x - y + 2 - \lambda(x^2 + 2x + y^2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{3} - 2\lambda x - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -1 - 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

Tato soustava nám dává dvě řešení: $a = (-1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ a $b = (-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Zbývá nám prozkoumat body, ve kterých je nulový gradient f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

Jelikož f má vždy nenulový gradient a M je kompaktní, musí body ze soustavy být extrémy. Po dosazení získáváme, že b je maximum a a minimum.