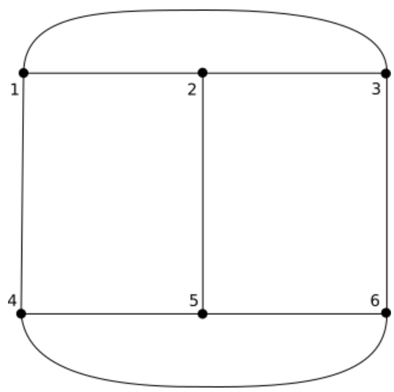
1

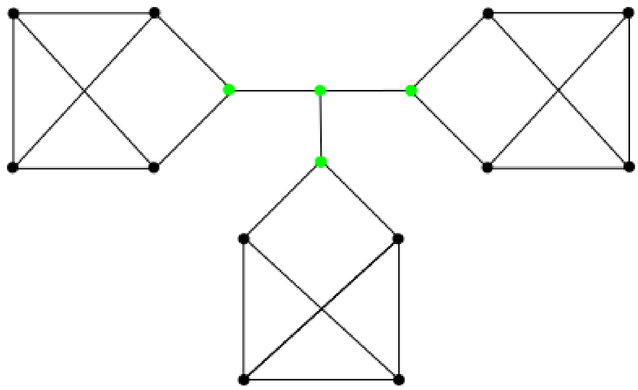
Uvažme následující graf:



Tento graf je třísouvislý a nemá mosty. Dále uvažme hrany $(1, 2)$ a $(5, 6)$. Bude-li nějaké párování obsahovat obě tyto hrany, vrcholy 3 a 4 nelze nijak spárovat, tudíž žádné párování obsahující obě tyto hrany nemůže být perfektní.

2

Mějme následující graf:



Tento graf je 3-regulární, ovšem pouze 1-souvislý (mezi zelenými vrcholy jsou mosty). Budeme hledat perfektní párování tohoto grafu. Kdybychom v jednom domečku spárovali černý vrchol se zeleným, zbydou v tomto domečku jen tři černé vrcholy, které již nelze všechny spárovat. V perfektním párování tedy musí být spárovány všechny černé vrcholy mezi sebou.

Tím nám ovšem zbydou čtyři zelené vrcholy, které nelze žádným způsobem všechny spárovat. Tento graf tedy nemá perfektní párování.

3

Párování grafu $K_{n,n}$ je ekvivalentní permutaci n prvků (mezi u_i a w_j vede hrana právě tehdy, když $\pi(i) = j$). Počet těchto párování je tedy roven $n!$. Když z tohoto grafu odebereme jednu hranu, znemožníme právě párování používající tuto hranu. Tato párování jsou ekvivalentní permutacím s jedním konkrétním pevným bodem a je jich tedy $(n-1)!$ Počet párování výsledného grafu tedy vychází na $n! - (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-1)$.

4

Dokážeme indukcí.

- Strom s jedním vrcholem nemá žádné perfektní párování. Strom se dvěma vrcholy má právě jedno.
- Mějme strom T o n vrcholech ($n > 2$). Tento strom má nejméně dva listy. Vezmeme libovolný list stromu. Aby párování bylo perfektní, z tohoto listu musí vést párovací hrana. Vytvoříme strom T' tak, že odebereme oba vrcholy této hrany z T. Tato operace nám nemůže porušit párování T, neboť oba odebrané vrcholy již byly spárovány. Zároveň je T' les, jehož komponenty mají méně než n vrcholů. Z indukčního předpokladu tedy existuje nejvýše jedno perfektní párování T' (respektive všech jeho komponent). Zpětným přidáním vrcholů pak získáme nejvýše jedno perfektní párování T.

5

Graf $G_{n,a,b}$ je bipartitní graf. První partitu tvoří množina $M = \{X : |X| = a\}$. Druhá partita je pak tvořena množinou $N = \{X : |X| = b\}$. Toto dokážeme snadno z faktu, že množina nemůže být podmnožinou množiny stejné velikosti.

Zároveň z definice vrcholů máme $|M| = \binom{n}{a}$ a $|N| = \binom{n}{b}$. Protože se jedná o bipartitní graf, velikost největšího párování může být rovna nejvýše velikosti menší z partit.

Z každého vrcholu N vede $\binom{b}{a}$ hran do vrcholů M. Tyto hrany totiž odpovídají všem podmnožinám velikosti a z množiny velikosti b. Pokud $|N| \leq |M|$, vrcholy v M mají stupně stejné nebo menší než $\binom{b}{a}$. Z libovolné množiny $J \subseteq N$ pak vede $|J| \cdot \binom{b}{a}$ hran. Z nižších stupňů vrcholů v M ovšem dostáváme $|N(J)| \geq \frac{\binom{b}{a} \cdot |J|}{\binom{b}{a}}$, tudíž je splněna Hallova podmínka a $G_{n,a,b}$ má SRR. Pro $|N| \geq |M|$ je argument stejný, pouze vyměníme partity.

$G_{n,a,b}$ tedy má SRR a velikost jeho největšího párování je rovna $\min\{\binom{n}{b}, \binom{n}{a}\}$

6

Mějme dvě maximální párování, X a Y. Jelikož X je párování, musí platit, že každá hrana z $Y \setminus X$ sousedí nejvýše se dvěma hranami z $X \setminus Y$. V opačném případě bychom měli dvě hrany X končící ve stejném bodě.

Zároveň víme, že každá hrana z $X \setminus Y$ sousedí s alespoň jednou hranou z $Y \setminus X$. Kdyby to pro nějakou hranu neplatilo, dala by se přidat do Y, což je spor s jeho maximalitou.

Z předchozích dvou pozorování tedy dostáváme, že $|X \setminus Y| \leq 2 \cdot |Y \setminus X|$. Dále pak úpravami:

$$|X| = |X \cap Y| + |X \setminus Y| \leq |X \cap Y| + 2 \cdot |Y \setminus X| \leq 2 \cdot |Y \cap X| + 2 \cdot |Y \setminus X| = 2 \cdot |Y|$$

Z čehož nám vyplývá, že $|X| \leq 2 \cdot |Y|$ pro libovolná dvě maximální párování. Pokud za X dosadíme nějaké největší párování grafu G, pak pro libovolné Y maximální párování tohoto grafu dostáváme $\frac{\mu(G)}{2} \leq |Y|$.