1 Popis řešení

Pro zadaný graf a k si vytvoříme proměnné

- $x_{i,j}$ pro $i = 1..n, j = 1..k$

a konstanty

- $e_{i,j} = 1$ právě tehdy, když mezi i-tým a j-tým vrcholem vede hrana

S těmito proměnnými pak sestavíme tyto klauzule:

1. $(x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee ... \vee x_{i,k})$ $\forall i = 1..n$
2. $(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,m})$ $\forall i = 1..n$ $\forall j, m = 1..k$
3. $(\neg e_{i,j} \vee \neg x_{i,m} \vee \neg x_{j,m})$ $\forall i, j = 1..n$ $\forall m = 1..k$

Výsledná formule pak bude konjunkcí všech těchto klauzulí. Takováto formule je splnitelná právě tehdy, když bude původní graf obarvitelný pomocí k barev, čímž je převod na k-SAT kompletní.

2 Důkaz správnosti

Aby byl graf obarvitelný pomocí k barev, musí existovat takové obarvení, ve kterém je každý vrchol obarven právě jednou barvou a žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny barvou stejnou. Ukážeme ekvivalenci mezi existencí k-obarvení a splnitelností vytvořené formule.

Pakliže existuje uspokojující obarvení grafu, nastavíme $x_{i,j} = 1$ právě pokud i-tý vrchol je obarvený j-tou barvou. Klauzule 1. jsou splněny triviálně, protože každý vrchol nějakou barvu má. Klauzule 2. jsou taktéž splněné, protože i-tý vrchol obarvený j-tou barvou nemůže být obarvený m-tou barvou. Splněné jsou i klauzule 3., protože dvojice vrcholů buď nesdílí hranu (tedy $\neg e_{i,j}$), nebo alespoň jeden z nich nemá m-tou barvu. Z existence obarvení tedy plyne splnitelnost formule.

Naopak pokud nalezneme splňující ohodnocení formule, obarvíme i-tý vrchol j-tou barvou, pokud $x_{i,j} = 1$. Klauzule 1. nám zaručují, že každý vrchol je obarvený nějakou barvou. Z klauzulí 2. pak vyplývá, že žádný vrchol nemůže být obarvem více barvami (protože pokud $x_{i,j} = 1$, ze splnitelnosti musí platit $x_{i,m} = 0$). Z klauzulí 3. dostáváme, že každá dvojice vrcholů buď nemá společnou hranu, nebo není obarvena stejnou barvou.

Ukázali jsme tedy, že se jedná o korektní obarvení a tím pádem i evivalenci mezi splnitelností formule a obarvitelností grafu. Každá klauzule má navíc délku nejvýše k. Jedná se tedy o korektní převod na k-SAT.

3 Složitost

Odhadněme nyní časovou složitost převodní funkce. Považujme k za konstantu a označme n počet vrcholů grafu Ohodnocení konstant $e_{i,j}$ zabere čas $O(n^2)$. Klauzule 1. vytvoříme v $O(n)$, klauzule 2. v $O(n \cdot k^2) = O(n)$ a klauzule 3. v $O(n^2 \cdot k) = O(n^2)$. Celý převod tedy zabere $O(n^2)$. Problém k-barevnosti grafů je tedy takto převoditelný na k-SAT.