Úloha č. 1

Uvažme jazyk $S' = \{\langle M_1, M_2\rangle | L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$. Zjevně $S' \subseteq \bar{S}$. Ze cvičení víme, že $L_{\mathcal{U}} \preceq_m S'$. Jelikož $L_{\mathcal{U}}$ není rozhodnutelný, není ani S' rozhodnutelný, tudíž nemůže být rozhodnutelný ani $\bar{S}$ jakožto nadmnožina S'. Z uzavřenosti rozhodnutelných jazyků na doplněk potom nemůže být rozhodnutelný ani S.

Ukážeme částečnou rozhodnutelnost $\bar{S}$. Nejprve si uvědomme, že $\bar{S} \setminus S'$ obsahuje právě řetězce, které nejsou validním kódem pro dvojici Turingových strojů, protože každá dvojice TS patří buď do S, nebo do S'. Jelikož ověření, zda řetězec kóduje dvojici TS, je rozhodnutelná podmínka, dostáváme $\bar{S} \preceq_m S'$. Dále tedy budeme předpokládat pouze validní kódy dvojic TS a ukážeme, že $S' \preceq_m NE$, kde $NE = \{\langle M\rangle | L(M) \neq \emptyset\}$.

Pro danou dvojici $\langle M_1, M_2\rangle$ sestrojíme Turingův stroj M'. Stroj M' pro vstup y spustí nejprve M_1 a poté M_2 se vstupem y (potažmo oba paralelně). Pokud oba skončí a přijmou, M' přijme. V opačném případě M' odmítne (případně se zacyklí, pokud se zacyklí alespoň jeden z dvojice). Vidíme, že M' přijme právě ty vstupy, které přijímá jak M_1, tak M_2, čili $L(M') = L(M_1) \cap L(M_2)$. Jazyk $L(M')$ je tedy speciálně neprázdný právě tehdy, když je neprázdný průnik $L(M_1) \cap L(M_2)$, neboli $\langle M_1, M_2\rangle \in S' \Leftrightarrow L(M') \in NE$.

Převodní funkce z S' do NE tedy bude mít tvar

$$f(\langle M_1, M_2\rangle) = \langle M'\rangle,$$

což je algoritmicky vyčíslitelná funkce definovaná na všech řetězcích kódujících dvojice TS. Provedli jsme tedy převod S' na NE a z tranzitivity m-převoditelnosti tak ukázali, že $\bar{S} \preceq_m NE$. Protože z přednášky víme, že NE je částečně rozhodnutelný, je i $\bar{S}$ částečně rozhodnutelný.

Jelikož $\bar{S}$ je částečně rozhodnutelný, S nemůže být částečně rozhodnutelný, protože potom by z Postovy věty byl i rozhodnutelný, což by byl spor s předchozím důkazem.

Úloha č. 2

a) $L_{\mathcal{U}} \preceq_m S$

Mějme dvojici $\langle M, x\rangle$. Vytvoříme pro ni Turingův stroj M', který bude pro vstup y pracovat následujícím způsobem

1. Pokud $y = 10$, přijmi.
2. Jinak simuluj $M(x)$.
3. Pokud $M(x)$ přijme, přijmi.
4. Jinak odmítni.

Vidíme, že pokud M přijímá x, $L(M') = \Sigma^*$, což je jazyk uzavřený na otočení. Pokud naopak M nepřijímá x (tedy M odmítá x nebo se na něm zacyklí), $L(M') = \{10\}$, což není jazyk uzavřený na otočení. Dostáváme tak

$$\langle M, x\rangle \in L_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow M(x) \text{ přijme} \Leftrightarrow L(M') \text{ je uzavřený na otočení} \Leftrightarrow \langle M'\rangle \in S,$$

čímž jsme dokončili převod $L_{\mathcal{U}}$ na S (algoritmicky vyčíslitelnou funkcí $f(\langle M, x\rangle) = \langle M'\rangle$).

b) $L_{\mathcal{U}} \preceq_m \bar{S}$

Mějme dvojici $\langle M, x\rangle$. Vytvoříme pro ni Turingův stroj M'', který bude pro vstup y pracovat následujícím způsobem

1. Simuluj $M(x)$.
2. Pokud $M(x)$ přijme *a zároveň* $y = 10$, přijmi.
3. Jinak odmítni.

Vidíme, že pokud M přijímá x, $L(M'') = \{10\}$. Pokud $M(x)$ odmítne nebo se zacyklí, $L(M'') = \emptyset$. Prázdný jazyk splňuje podmínku S, tedy pro nepřijímající $M(x)$ platí $\langle M''\rangle \in S$. Naopak jazyk $\{10\}$ podmínku S nesplňuje, tudíž pro přijímající $M(x)$ platí $\langle M''\rangle \notin S$. Dostáváme tedy

$$\langle M, x\rangle \in L_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow M(x)\,\text{přijme} \Leftrightarrow L(M'')\,\text{nesplňuje podmínku}\,S \Leftrightarrow \langle M''\rangle \notin S \Leftrightarrow \langle M''\rangle \in \bar{S},$$

čímž jsme dokončili převod z $L_{\mathcal{U}}$ na $\bar{S}$.