

1 Popis řešení

Pro zadaný graf a k si vytvoříme proměnné

- $x_{i,j}$ pro $i = 1..n, j = 1..k$

a konstanty

- $e_{i,j} = 1$ právě tehdy, když mezi i -tým a j -tým vrcholem vede hrana

S těmito proměnnými pak sestavíme tyto klauzule:

1. $(x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \dots \vee x_{i,k}) \forall i = 1..n$
2. $(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,m}) \forall i = 1..n \forall j, m = 1..k$
3. $(\neg e_{i,j} \vee \neg x_{i,m} \vee \neg x_{j,m}) \forall i, j = 1..n \forall m = 1..k$

Výsledná formule pak bude konjunkcí všech těchto klauzulí. Takováto formule je splnitelná právě tehdy, když bude původní graf obarvitelný pomocí k barev, čímž je převod na k -SAT kompletní.

2 Důkaz správnosti

Aby byl graf obarvitelný pomocí k barev, musí existovat takové obarvení, ve kterém je každý vrchol obarven právě jednou barvou a žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny barvou stejnou. Ukážeme, že když ...

Pakliže existuje uspokojující obarvení grafu, nastavíme $x_{i,j} = 1$ právě pokud i -tý vrchol je obarvený j -tou barvou a $e_{i,j} = 1$ právě když mezi i -tým a j -tým vrcholem vede hrana.

Klauzule 1. jsou splněny triviálně, protože každý vrchol nějakou barvu má. Klauzule 2. jsou taktéž splněné, protože i -tý vrchol obarvený j -tou barvou nemůže být obarvený m -tou barvou. Splněné jsou i klauzule 3., protože dvojice vrcholů buď nesdílí hranu (tedy $\neg e_{i,j}$), nebo alespoň jeden z nich nemá m -tou barvu. Z existence obarvení tedy plyne splnitelnost formule.

Naopak pokud nalezneme splňující ohodnocení formule, obarvíme i -tý vrchol j -tou barvou, pokud $x_{i,j} = 1$. Klauzule 1. nám zaručují, že každý vrchol je obarvený nějakou barvou. Z klauzulí 2. pak vyplývá, že žádný vrchol nemůže být obarven více barvami (protože pokud $x_{i,j} = 1$, ze splnitelnosti musí platit $x_{i,m} = 0$). Z klauzulí 3. dostáváme, že každá dvojice vrcholů buď nemá společnou hranu, nebo nejsou obarveny stejnou barvou.

Ukázali jsme tedy, že se jedná o korektní obarvení a tím pádem i ekvivalenci mezi splnitelností formule a obarvitelností grafu. Každá klauzule má navíc délku nejvýše k . Jedná se tedy o korektní převod na k -SAT.

3 Složitost

Odhadněme nyní časovou složitost převodní funkce. Považujme k za konstantu a označme n počet vrcholů grafu. Ohodnocení konstant $e_{i,j}$ zabere čas $O(n^2)$. Klausule 1. vytvoříme v $O(n)$, klausule 2. v $O(n \cdot k^2) = O(n)$ a klausule 3. v $O(n^2 \cdot k) = O(n^2)$. Celý převod tedy zabere $O(n^2)$. Problém k -barevnosti grafů je tedy takto převoditelný na k -SAT.