Příklad 1

Funkce je definovaná a spojitá na celé množině. Spočteme parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$$

Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celé M. Z extrému je podezřelý bod $(3, 2)$, neboť je v něm nulový gradient, a kraje množiny. Hassova matice pro bod $(3, 2)$ je

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Subdeterminanty této matice jsou všechny kladné, tedy v bodě $(3, 2)$ je ostré lokální minimum.

K vyšetření funkce na okraji množiny ($\{(x, y)|x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0\}$) použijeme Lagrangeovy multiplikátory.

$$L = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 - \lambda(x^2 + y^2 - 4x - 5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = \quad & 2x - 6 - 2x\lambda + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \quad & 2y - 4 - 2y\lambda = 0 \\ & x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0 \end{aligned}$$

Po vyřešení této soustavy dostáváme dva extrémy na hranici množiny, $(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}})$ a $(2+\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}})$. Porovnáním funkčních hodnot v těchto bodech a v bodě $(3, 2)$ zjistíme, že globálního minima funkce nabývá v bodě $(3, 2)$ a globálního maxima v bodě $(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}})$.

Příklad 2

Funkce je definovaná a spojitá na celé množině. Jelikož $lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$ a tento výraz je vždy kladný, může x nabývat všech hodnot v R, zatímco y může nabývat hodnot na intervalu $[0, 1)$.

Protože funkce není ve směru x omezená a je to ve směru x polynom druhého stupně, víme, že globální maximum je $+\infty$.

Minimum funkce spočteme přes Lagrangeovy multiplikátory.

$$L = x^2 - y^2 - \lambda(y + e^{-x^2} - 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = \quad & 2x - \lambda e^{-x^2}(-2x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \quad & -2y - \lambda = 0 \\ & y + e^{-x^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostaneme jediné reálné řešení: bod $(0,0)$. V tomto bodě má rovnice globální minimum.

Pozn.: lze nahlédnout, že funkce je na celé množině nezáporná a nula tedy musí být globální minimum.

$$
\begin{aligned}
y + e^{-x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 &= \log(\frac{1}{1-y}) \\
h(y) = f(x,y) = \log(\frac{1}{1-y}) - y^2 &> 0 \\
\log(\frac{1}{1-y}) &> y^2 \\
\frac{1}{1-y} &> e^{y^2} \\
1 &> e^{y^2}(1-y)
\end{aligned}
$$

Jelikož y je mezi 0 a 1, oba činitelé jsou < 1, tedy i součin je vždy < 1 a nerovnost platí.

Příklad 3

Funkce je definovaná a spojitá na celém R^2. Zároveň je na celém definičním oboru nezáporná. Funkce je rovná nule pouze v bodě $(0,0)$, tudíž v tomto bodě musí být globální minimum. Pro nalezení globálního maxima nejprve spočteme parciální derivace

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot e^{-5x^2-2y^2} + x^2 \cdot e^{-5x^2-2y^2} \cdot (-10x) = xe^{-5x^2-2y^2} \cdot (2 - 10x^2)
$$
$$
\frac{\partial f}{\partial x} = 14y \cdot e^{-5x^2-2y^2} + 7y^2 \cdot e^{-5x^2-2y^2} \cdot (-4y) = 7ye^{-5x^2-2y^2} \cdot (2 - 4y^2)
$$

Body podezřelé z extrému jsou tedy: $\{(x,y)|x \in \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\}, y \in \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$ Protože hledáme globální maximum funkce, zajímají nás z této množiny pouze body s nejvyšší funkční hodnotou, což jsou body $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Po dopočítání druhých derivací dostaneme pro bod $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ Hessovu matici:

$$
\begin{pmatrix} \frac{-33}{e} & 0 \\ 0 & \frac{-28}{e} \end{pmatrix},
$$

která je negativně definitní, tedy v tomto bodě je lokální maximum. Ze sudosti funkce musí tedy být lokální maximum i v bodě $(0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Protože v nekonečnu se funkce blíží nule a toto jsou největší z možných lokálních maxim, jsou v těchto dvou bodech (neostrá) globální maxima.