

Internet

1 Popis řešení

Vytvoříme graf následujícím způsobem:

- n vrcholů budou tvořit jednotlivé domy
- jeden vrchol bude reprezentovat přímé připojení k internetu
- domy A a B budou spojeny hranou ohodnocenou $c(A, B)$
- dům A bude s internetem spojený hranou ohodnocenou $\mathcal{C}(A)$

Na takto vytvořeném grafu pak spustíme algoritmus na nalezení minimální kostry, např. Kruskalův. Optickým kabelem pak propojíme ty domy, které jsou spojeny hranou v minimální kostře a k internetu připojíme ty, jež jsou s ním v minimální kostře spojeny hranou.

2 Pseudokód

```
A = null;
foreach (v in V) Make-Set(V);
foreach((u,v) in setříděné E podle vah)
    if (Set(u) != Set(v)){
        A = A + (u,v);
        Union(u,v);
    }
return A;
```

3 Důkaz správnosti

Z podstaty zadání můžeme předpokládat, že každá hrana má kladné ohodnocení. Minimální kostra tedy představuje souvislý podgraf s minimálním součtem ohodnocení. Takto vytvořený graf zároveň přesně odpovídá problému; každý dům lze spojit s internetem i se všemi ostatními domy a hledáme nejlevnější připojení všech domů.

Protože Kruskalův algoritmus nevyžaduje unikátní hrany, bude tento postup fungovat pro obě varianty zadání, přičemž pro variantu (a) budou z internetu vést hrany ohodnocené \mathcal{C} .

4 Časová složitost

Použili jsme Kruskalův algoritmus na hledání minimální kostry, tedy složitost algoritmu je $O(m \log m)$.

5 Prostorová složitost

O každém vrcholu i hraně si pamatujeme konstantní množství informací, tedy prostorová složitost algoritmu je $O(n + m)$.