Neterminály gramatik jsou označeny velkými písmeny, terminály jsou malá písmena v daném jazyce.

1 $L_1 = \{a^i b^i c^i, i \in N\}$

Mějme kontextovou gramatiku se startovním neterminálem N a odvozovacími pravidly

$$\begin{aligned} N &\rightarrow aTBc|abc|\lambda \\ T &\rightarrow aTBC|abC \\ CB &\rightarrow CX \\ CX &\rightarrow YX \\ YX &\rightarrow YC \\ YC &\rightarrow BC \\ Cc &\rightarrow cc \\ bB &\rightarrow bb \end{aligned}$$

Dokážeme, že L_1 je jazyk generovaný touto gramatikou.

1.1 Každé slovo L_1 dokážeme vytvořit

Pokud je $i \geq 2$ (jinak zřejmě), použijeme nejprve pravido $N \rightarrow aTBc$. Poté opakujeme následující. Nejprve použijeme pravidlo $T \rightarrow aTBC$ a poté čtveřici pravidel prohazující C a B, dokud se nedostaneme na konec, kde použijeme $Cc \rightarrow cc$. Po $i-2$ iteracích tohoto nám vznikne řetězec

$$a^{i-1}TB^{i-1}c^{i-1}.$$

Nyní použitím pravidla $T \rightarrow abC$ vytvoříme řetězec $a^i bCB^{i-1}c^{i-1}$, který opětovným použitím čtveřice prohazovacích pravidel přeměníme na $a^i bB^{i-1}Cc^{i-1}$. Poté už jednou substitucí $Cc \rightarrow cc$ a $i-1$ použitími pravidla $bB \rightarrow bb$ dostaneme požadované slovo.

1.2 Každé generované slovo náleží L_1

(Níže neuvažujeme slova abc a λ, pro která tvrzení platí triviálně) Pro zjednodušení nejprve dokažme několik pomocných pozorování.

a) dvojice CB se vždy musí změnit na BC Když se tato dvojice v řetězci objeví, musí se na ni použít přepisovací pravidlo $CB \rightarrow CX$, jelikož C nemá žádné pravidlo bez pravého kontextu a B nemá pravidlo bez levého kontextu. Nově vytvořená dvojice CX se ze stejného důvodu musí transformovat na YX, tato dvojice pak z téhož důvodu na YC.

Pokud by se za touto dvojicí nacházelo další B, mohli bychom začít používat výše uvedená pravidla na takto nově vytvořenou dvojici, ovšem tímto nám vznikne dvojice

YB (resp. YY, ze které ale může vzniknout opět jen YB), na kterou už se nedá použít žádné pravidlo a nemůže nám tedy vzniknout sentence. Abychom vytvořili slovo složené z terminálů, musíme tedy i v tomto případě použít pravidlo $YC \to BC$, čímž je výměna znaků dokončena (ve všech ostatních případech také, ze stejných důvodů jako dříve).

b) všechny znaky a tvoří prefix vytvořeného slova, všechny znaky c jeho suffix Pro a vidíme snadno, neboť se přidávají pouze před všechny ostatní znaky. Pro c platí taktéž, protože c začíná jako poslední znak a další mohou přibýt pouze jako přímý předchůdce prvního c.

c) B nebo C obklopené neterminály nemůže být převedeno na terminál Vidíme snadno z pravidel, která přepisují tyto znaky na terminály.

d) všechna C musí skončit před všemi B Mějme C před B. Jelikož všechny znaky X a Y můžeme z pozorování **a)** zanedbat (musí nutně dokončit výměnu C a B) a z **c)** nemohou být mezi B a C terminály, máme podřetězec obsahující jen C a B, tedy musíme v tomto podřetězci najít dvojici CB. Tuto dvojici musíme z **a)** prohodit, čímž se zmenší počet C před posledním B. Toto opakujeme, dokud se před poslední B nedostanou všechna C.

Z **b)** a **d)** a faktu, že B se mění z terminálů pouze na b a C pouze na c, tedy zjistíme, že písmena skončí ve správném pořadí. Jelikož pro každé a generujeme jedno B (resp. b) a jedno C (resp. c), budou písmena ve správném poměru. Každé generované slovo tedy musí náležet L. Tímto jsme dokázali druhou implikaci a tudíž i tvrzení, že naše gramatika generuje právě jazyk L.

$\square$

2 $L_2 = \{a^{2^i}, i \in N\}$

Mějme gramatiku se startovním neterminálem N a odvozovacími pravidly

$$\begin{array}{rlrl}
N & \to a|aa|XFL & & \\
XF & \to XK & LY & \to DY \\
XK & \to FK & DY & \to DL \\
FK & \to FAX & DL & \to YAL \\
XA & \to XJ & AY & \to EY \\
XJ & \to AJ & EY & \to EA \\
AJ & \to AAX & EA & \to YAA \\
XL & \to XM & FY & \to CY \\
XM & \to ALM & CY & \to CF \\
LM & \to LY & CF & \to XFA \\
XF & \to aa & LY & \to aa \\
aA & \to aaa & Ba & \to aaa \\
aL & \to aaa & Fa & \to aaa
\end{array}$$

Dokážeme, že tato gramatika generuje L_2.

Invariant V řetězci se vyskytuje vždy nejvýše jeden znak X nebo Y. Toto snadno nahlédneme z odvozovacích pravidel, kde Y vzniká pouze přepsáním X a naopak (vyjma dočasných neterminálů - viz níže).

Pozorování a) Stejně jako v předchozí gramatice neterminály J, K, M, C, D, E slouží pouze k prohození ostatních neterminálů. V tomto případě lze toto s pomocí invariantu nahlédnout ještě snáz, neboť po vzniku takovéto dočasné proměnné nezbývá než okamžitě použít zbylá dvě prohazovací pravidla.

Pozorování b) X musí přejít ze začátku řetězce až na konec, než se může změnit na Y. Totéž v opačném směru platí pro Y. Toto dostáváme snadno z **a)** a toho, že X (resp. Y) se za svůj protějšek mění až za L (resp. před F), které je vždy za všemi (resp. před všemi) ostatními neterminály. Navíc je na ně všude jinde aplikovatelné právě jedno prohazovací pravidlo, což vidíme z invariantu společně s tím, že každé pravidlo (mimo dočasných neterminálů) obsahuje X/Y jako kontext.

Pozorování c) Každý průchod X/Y zdvojnásobí počet ostatních neterminálů. Důkaz tohoto tvrzení vyplývá zřejmě z faktu, že při každém prohození X/Y přidáme na druhou stranu jeden neterminál navíc.

2.1 Každý řetězec z L_2 dokážeme vygenerovat

Nechť $i \geq 2$. Začneme pravidlem $N \to XFL$. Poté $i - 2$ průchody X/Y tam a zpět vytvoříme podle **c)** 2^{i-1} ostatních neterminálů. Následně aplikujeme jedno pravidlo $XF \to aa$, potažmo (podle sudosti i) $LY \to aa$, načež nám zbudou pouze pravidla vytvářející z neterminálu dvojici terminálů, čímž se dostaneme na kýžených 2^i znaků a.

2.2 Každý generovaný řetězec náleží L_2

Nechť jsme začali pravidlem $N \to XFL$, jinak triviálně. Z pozorování **a)** a **b)** vidíme, že jakmile je neterminál X/Y jinde než na kraji řetězce, je volba pravidla jednoznačná - nezbývá než se „probublat“ na kraj řetězce. Toto se může libovolněkrát opakovat a pokaždé tím zdvojnásobíme počet ostatních neterminálů - viz. **c)**. Jelikož jsme začali se dvěma ostatními neterminály, bude tento počet mocninou 2. Jakmile se vybere pravidlo obsahující a, které je ekvivalentní smazání X/Y a převedení F/L na dvojici terminálů, opět deterministicky nezbývá než převést na a všechny ostatní neterminály. Tento převod vždy změní jeden neterminál na dvě a, tedy délka výsledného slova bude opět mocninou 2.

□

Poznámka: obě tyto gramatiky jsou kontextové. Tyto jazyky nemohou být sestrojeny bezkontextovými gramatikami, jelikož nesplňují pumping lemma .