Úloha č. 1

Problém patří do NP

Nalézt všechny orientované cykly v grafu dokážeme v polynomiálním čase. Cyklus v orientovaném grafu uzavírají právě zpětné hrany v DFS. Každý orientovaný cyklus je přitom jednoznačně určen zpětnou hranou, která ho uzavírá. Množinu cyklů grafu tak můžeme zjistit spuštěním DFS, detekcí zpětných hran a vypsání všech vrcholů ohraničených každou zpětnou hranou.

K ověření pokrytí nám stačí postupně projít všechny nalezené cykly a ověřit, že v každém existuje alespoň jeden vrchol z nalezené množiny. Jelikož toto ověření i naše modifikované DFS dokážeme provést v polynomiálním čase, jsme schopni sestrojit polynomiální verifikátor problému pokrytí orientovaných cyklů, který tedy náleží do NP.

Převod z Vrcholového pokrytí

Mějme graf $G = (V, E)$ a $k \geq 0$ z instance problému vrcholového pokrytí. Sestrojíme z G orientovaný graf, kde každou hranu nahradíme orientovanými hranami v obou směrech. Formálně vytvoříme graf $G' = (V, E')$, kde $E' = \bigcup_{\{u,v\} \in E} \{(u, v), (v, u)\}$. Dvojice (G', k) je instancí problému pokrytí orientovaných cyklů. Tento převod jsme schopni provést polynomiálně.

Můžeme vidět, že každá hrana v G tvoří orientovaný cyklus délky 2 v G'. Pokud tedy v G' existuje množina $S \subseteq V$ velikosti nejvýš k obsahující vrchol z každého orientovaného cyklu G', musí speciálně obsahovat vrchol z každého z těchto dvojcyklů, tedy vrchol z každé hrany G. S je tedy zároveň vrcholovým pokrytím G velikosti nejvýš k.

Pokud naopak G' nemá pokrytí orientovaných cyklů velikosti nejvýš k, existuje pro každou $S \subseteq V$, $|S| \leq k$ orientovaný cyklus C v G', který neobsahuje žádný vrchol z S. Vezmeme-li si libovolnou hranu z C, tato hrana je součástí právě jednoho dvojcyklu. Z definice C nepatří žádný vrchol tohoto dvojcyklu do S. Jelikož každý dvojcyklus v G' odpovídá hraně v G, existuje hrana v G, která má prázdný průnik s S, což tím pádem nemůže být vrcholové pokrytí G. V grafu G tak neexistuje žádné vrcholové pokrytí velikosti nejvýše k.

Ukázali jsme polynomiální algoritmus, který ekvivalentně převádí instance problému vrcholového pokrytí na instance problému pokrytí orientovaných cyklů. Protože ze cvičení víme, že problém vrcholového pokrytí je NP-úplný a dokázali jsme, že problém pokrytí orientovaných cyklů náleží NP, je i tento problém NP-úplný.

Úloha č. 2

Loupežníci →Batoh

Mějme množinu A a seznam asociovaných cen s. Vytvoříme instanci problému batohu s A, kde váhy i ceny $a \in A$ jsou rovny $s(a)$ a zvolíme $B = K = \left(\sum_{a \in A} s(a)\right)/2$. Tato instance problému batohu se ptá na existenci podmnožiny $A' \subseteq A$ takové, že $\sum_{a \in A'} s(a) \leq B$ a zároveň $\sum_{a \in A'} s(a) \geq K$, což nám dohromady dává podmínku $\sum_{a \in A'} s(a) = \left(\sum_{a \in A} s(a)\right)/2$. Tato podmínka je ekvivalentní podmínce pro problém loupežníků na (A, s), čímž jsme dokončili převod. Sečtení všech cen jsme schopni v polynomiálním čase, celý převod je tedy polynomiální. Zbývá si uvědomit, že pokud je součet všech cen v A lichý, B a K nejsou přirozená čísla, ovšem v takovém případě nemůže mít problém loupežníků řešení, tudíž instanci můžeme rovnou zamítnout.

Loupežníci →Rozvrhování

Vytvoříme instanci se dvěma procesory, množinou úloh $\mathcal{U} = A$, časovací funkcí $d = s$ a omezením $D = \left(\sum_{a \in A} s(a)\right)/2$. Jelikož máme pouze dva procesory, z Dirichletova principu musí alespoň jedna podmnožina mít součet časů alespoň D. Aby tak byla instance splnitelná, musí existovat dvě podmnožiny takové, že součet časů v každé z nich je přesně roven D. Tato podmínka je ekvivalentní podmínce v problému loupežníků. Pokud D není přirozené číslo, můžeme stejně jako v předchozím případě instanci zamítnout.