Příklad 1

Vyjdeme z obecného tvaru elipsy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Odtud dostáváme $y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$. Uvážíme pouze tu část elipsy, pro kterou $x,y\geq 0$, přičemž výsledný obsah bude čtyřnásobkem obsahu tohoto útvaru. Můžeme pak vyjádřit $y=\frac{\sqrt{a^2b^2-b^2x^2}}{a}$ a spočíst obsah jako

$$\int_0^a \frac{\sqrt{a^2b^2-b^2x^2}}{a}dx=\int_0^a \frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$$

Použijeme substituci $x=a\cos t$, $dx=-a\sin tdt$ a přepočítáme integrační meze.

$$\frac{b}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}(-a\sin t)dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-cos^2t}\cdot\sin tdt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2 tdt$$

Vypočteme primitivní funkci $\sin^2 t$ za použití per partes.

$$\int\sin^2 tdt=-\sin t\cos t+\int\cos^2 tdt=-\sin t\cos t+\int(1-\sin^2 t)dt=-\sin t\cos t+t-\int\sin^2 tdt$$

Odtud dostáváme $\int\sin^2 tdt=\frac{t-\sin t\cos t}{2}+c$ a můžeme dosadit do výpočtu

$$-ab\left[\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^0=-ab\left(\frac{0-0}{2}-\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\right)=ab\frac{\pi}{4}$$

Výsledný obsah elipsy je tedy roven $ab\pi$

Příklad 2

Nejprve spočteme derivaci y.

$$y'=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

Odtud

$$(y')^2=\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}\right)^2}{4}=\frac{e^{\frac{2x}{a}}-2e^{\frac{x}{a}}e^{\frac{-x}{a}}+e^{\frac{-2x}{a}}}{4}=\frac{e^{\frac{2x}{a}}+e^{\frac{-2x}{a}}-2}{4}$$

Dosadíme do vzorce na výpočet délky křivky.

$$l=\int_0^\gamma\sqrt{1+\frac{e^{\frac{2x}{a}}+e^{\frac{-2x}{a}}-2}{4}}dx=\int_0^\gamma\sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{a}}+e^{\frac{-2x}{a}}+2}{4}}dx=\int_0^\gamma\frac{\sqrt{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right)^2}}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\gamma e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}dx=\frac{1}{2}\left[ae^{\frac{x}{a}}-ae^{\frac{-x}{a}}\right]_0^\gamma=\frac{a}{2}(e^{\frac{\gamma}{2}}-e^{\frac{-\gamma}{2}}-e^0+e^{-0})=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\gamma}{2}}-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)$$

Příklad 3

Kružnice, jejíž rotací vznikne anuloid, má tvar $x^2 + (y - R)^2 = r^2$. Horní část této kružnice se dá vyjádřit jako $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ a spodní část jako $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. Objem anuloidu můžeme spočíst jako rozdíl mezi objemem tělesa vzniklého rotací horní půlkružnice a objemem tělesa vzniklého rotací spodní půlkružnice. Po dosazení do vzorce dostáváme tvar

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

Díky symetrii podle osy y můžeme zjednodušit na

$$2\pi \int_{0}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 dx = 2\pi \int_{0}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx =$$

$$= 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Použijeme substituci $x = r\cos t$, $dx = -r\sin t dt$ a přepočítáme integrační meze.

$$8\pi R \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t} \cdot (-r\sin t) dt = -8\pi r^2 R \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt$$

Použijeme výpočet primitivní funkce $\sin^2 t$ z příkladu 1 a dosadíme.

$$-4\pi r^2 R[t - \sin t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -4\pi r^2 R(0 - 0 - \frac{\pi}{2} + 0) = 2\pi^2 r^2 R$$