Úloha č. 1

a)

Z cvičení víme, že permutace konjugovaná s π bude mít stejnou strukturu cyklů. Je 5! způsobů, jak umístit čísla do těchto dvou cyklů. Jelikož je počáteční prvek cyklu libovolný, máme 3 způsoby pro zápis libovolného tříprvkového cyklu a 2 pro zápis dvouprvkového.

Celkový počet permutací s touto strukturou je tedy $\frac{5!}{3\cdot 2} = 20$.

b)

reflexivita $\pi = \pi \cdot \pi \cdot \pi^{-1}$

symetrie $\tau = \rho \cdot \pi \cdot \rho^{-1} \implies \pi = \rho^{-1} \cdot \tau \cdot \rho$

tranzitivita $\tau = \rho \cdot \pi \cdot \rho^{-1} \wedge \pi = \gamma \cdot \varphi \cdot \gamma^{-1} \implies \tau = \rho \cdot \gamma \cdot \varphi \cdot \gamma^{-1} \cdot \rho^{-1} = (\rho \cdot \gamma) \cdot \varphi \cdot (\rho \cdot \gamma)^{-1}$

c)

Asociativita

Operace skládání zobrazení je asociativní.

Neutrální prvek

Nechť e je neutrální prvek G. Pro všechna $g, h \in G$ platí

$$
\begin{aligned}
(Con_e \circ Con_g)[h] &= Con_e(g \cdot h \cdot g^{-1}) & (Con_g \circ Con_e)[h] &= Con_g(e \cdot h \cdot e^{-1}) \\
(Con_e \circ Con_g)[h] &= e \cdot g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot e & (Con_g \circ Con_e)[h] &= g \cdot e \cdot h \cdot e^{-1} \cdot g^{-1} \\
(Con_e \circ Con_g)[h] &= g \cdot h \cdot g^{-1} & (Con_g \circ Con_e)[h] &= g \cdot h \cdot g^{-1} \\
(Con_e \circ Con_g) &= Con_g & (Con_g \circ Con_e) &= Con_g,
\end{aligned}
$$

tudíž Con_e je neutrální prvek $Con(G)$. Jeho jednoznačnost vychází z jednoznačnosti e.

Inverzní prvek

Pro všechna $Con_g \in Con(G), h \in G$:

$$
\begin{aligned}
(Con_g \circ Con_{g^{-1}})[h] &= Con_g(g^{-1} \cdot h \cdot g) & (Con_{g^{-1}} \circ Con_g)[h] &= Con_{g^{-1}}(g \cdot h \cdot g^{-1}) \\
(Con_g \circ Con_{g^{-1}})[h] &= g \cdot g^{-1} \cdot h \cdot g \cdot g^{-1} & (Con_{g^{-1}} \circ Con_g)[h] &= g^{-1} \cdot g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot g \\
(Con_g \circ Con_{g^{-1}})[h] &= e \cdot h \cdot e & (Con_{g^{-1}} \circ Con_g)[h] &= e \cdot h \cdot e \\
(Con_g \circ Con_{g^{-1}}) &= Con_e & (Con_{g^{-1}} \circ Con_g) &= Con_e,
\end{aligned}
$$

tudíž $Con_{g^{-1}}$ je inverzním prvkem k Con_g. Jelikož je g^{-1} pro každé g jednoznačné, je i $Con_{g^{-1}}$ jednoznačný inverz.

d)

Vezměme M množinu všech permutací se stejnou strukturou cyklů, např. permutace s jedním tříprvkovým a jedním dvouprvkovým cyklem. Jelikož konjugace nemění strukturu cyklů, pro $m \in M, g \in \mathbb{S}_5$ bude mít $Con_g(m)$ stejnou strukturu jako m, tudíž bude také náležet M. Z toho vyplývá $Con(\mathbb{S}_5)[M] \subseteq M$.

Úloha č. 2

$$\varphi = (1 \quad 2 \quad 3)(4)(5 \quad 6)$$

Je zřejmě vidět, že pro libovolné n je $\varphi^n(4) = 4$. Snadno můžeme ukázat, že ve φ^4 je první cyklus stejný jako ve φ. Pro první cyklus tedy stačí počítat mocniny mod 3. Jelikož 2019 mod 3 = 0, Z prvního cyklu se stane (1)(2)(3). Stejně tak pro třetí cyklus, 2019 mod 2 = 1, tudíž zůstane stejný. Výsledkem pak je $\varphi^{2019} = (1)(2)(3)(4)(5 \quad 6)$.