Topološke lastnosti so logični principi v topoloških modelih

Luna Strah

19. 5. 2025

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Topološke lastnosti so logični principi v topoloških modelih

Luna Strah

19. 5. 2025

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Heytingovo vrednotene množice

Definicija

Heytingovo vrednotena množica ali *tip* A je množica A skupaj s preslikavo $[\![- =_A -]\!] : A \times A \to \mathcal{O}X$, tako da za vse a, b, in $c \in A$ velja

$$[\![a =_A b]\!] \subseteq [\![b =_A a]\!] \text{ in}$$
$$[\![a =_A b]\!] \cap [\![b =_A c]\!] \subseteq [\![a =_A c]\!].$$

Razpon $\|a\|$ je $[\![a = a]\!]$.

Relacije in operacije

Definicija

Naj bodo $A_1, \dots, A_n, B$ tipi.

Relacija R na $A_1 \times \cdots \times A_n$ je preslikava $A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathcal{O}X$, ki za vse $a_i \in A_i$ zadošča pogojema

$$[\![a_1 = a_1']\!] \cap \cdots \cap [\![a_n = a_n']\!] \cap R(a_1, \dots, a_n) \subseteq R(a_1', \dots, a_n') \text{ in}$$

$$R(a_1, \dots, a_n) \subseteq \|a_1\| \cap \cdots \cap \|a_n\| .$$

Relacije in operacije

Definicija

Naj bodo $A_1, \dots, A_n, B$ tipi.

Operacija $f : A_1 \times \cdots \times A_n \rightsquigarrow B$ je preslikava $A_1 \times \cdots \times A_n \to B$, ki za vse $a_i \in A_i$ zadošča pogojema

$$[\![a_1 = a_1']\!] \cap \cdots \cap [\![a_n = a_n']\!] \subseteq [\![f(a_1, \dots, a_n) = f(a_1', \dots, a_n')]\!] \text{ in}$$
$$f(a_1, \dots, a_n) \subseteq \|a_1\| \cap \cdots \cap \|a_n\| .$$

Dve operaciji $f, g : A_1 \times \cdots \times A_n \rightsquigarrow B$ sta enaki, ko za vse $a_i \in A_i$ velja

$$[\![f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)]\!] = \|a_1\| \cap \cdots \cap \|a_n\| .$$

Morfizmi

Definicija

Morfizem $f : A \nrightarrow B$ med tipoma A in B je relacija med A in B, za katero za vse $a \in A$ in b, $b' \in B$ velja

$$f(a,b) \cap f(a,b') \subseteq [\![b =_B b']\!]$$
$$\|a\| \subseteq \bigcup_{b \in B} f(a,b)$$

Logika odprtih množic

$$
\begin{aligned}
&[\![\top]\!] := X \\
&[\![\bot]\!] := \varnothing \\
&[\![\varphi \land \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!] \\
&[\![\varphi \lor \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!] \\
&[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!] := \operatorname{int}\big([\![\varphi]\!] \cup [\![\varphi]\!]^c\big) \\
&[\![\forall x : A.\, \varphi(x)]\!] := \operatorname{int} \bigcap_{a \in A} [\![\|a\| \Rightarrow \varphi(a)]\!] \\
&[\![\exists x : A.\, \varphi(x)]\!] := \bigcup_{a \in A} [\![\|a\| \land \varphi(a)]\!] \\
&[\![\tau = \sigma]\!] := \Big[\!\!\Big[[\![\tau]\!]_A = [\![\sigma]\!]_A \Big]\!\!\Big] \\
&[\![R(\tau)]\!] := R\Big([\![\tau]\!]_A\Big), \text{ za relacijo } R \text{ na } A \text{ in } \tau : A
\end{aligned}
$$

Objekti

A množica, T topološki prostor

$$T_X := \{f : \mathcal{C}(U, T) \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dedekindovo realno število.

Izbira

Definicija

Princip $\mathsf{AC}_\Sigma(A, B)$ pravi, da za vsako celovito relacijo $R : A \times B \to \Sigma$ obstaja funkcija izbire.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{AC}_\Sigma(A) &:= \forall B.\ \mathsf{AC}_\Sigma(A, B) \\
\mathsf{AC}_\Sigma &:= \forall A.\ \mathsf{AC}_\Sigma(A) \\
\mathsf{CC}_\Sigma &:= \forall B.\ \mathsf{AC}_\Sigma(\mathbb{N}, B) \\
\mathsf{CC}_\Sigma^\vee &:= \mathsf{AC}_\Sigma(\mathbb{N}, 2)
\end{aligned}
$$

Izrek ([Sim24])

Nad X velja AC($\underline{A}$) *in* $\forall B.\ \underline{A} \nrightarrow B \cong \underline{A \rightsquigarrow B}$ *natanko tedaj, ko ima vsaka A-indeksirana družina pokritij X skupno pofinitev.*

Definicija

Prostor je *P-prostor*, ko je števen presek odprtih množic odprt.

Trditev

Če je X P-prostor, ima vsaka števna družina pokritij X skupno pofinitev.

Posledica

Nad P-prostori velja CC.

Trditev

Nad prostorom $[0,1]$ s topologijo $\{[0,a) \mid a \in [0,1]\} \cup [0,1]$ ima vsaka družina pokritij skupno pofinitev, a ta ni P-prostor.

Trditev

Če je prostor X T_1 in ima vsaka števna družina pokritij X skupno pofinitev, je P-prostor.

Posledica

Nad lokalno povezanimi T_1 prostori je CC ekvivalentna CC$^\vee$.

Trditev

Nad prostori Aleksandova velja AC($\underline{A}$) *za vse množice* A.

Trditev

Če je X *diskreten prostor, nad njem velja* AC.

Izrek

V topoloških modelih je AC *ekvivalenten* LEM.

Dedekindova konstrukcija

Definicija (Dedekindova konstrukcija)

Par $(L, U) \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ je *Dedekindov rez*, ko velja

1. L je naseljena, dolnja, in navzgor odprta
2. U je naseljena, gornja, in navzdol odprta
3. za vsaka p, $q : \mathbb{Q}$ velja $p \in L \wedge q \in U \Rightarrow p < q$
4. za vsaka $p < q$ velja $p \in L \vee q \in U$

Principi

$$\mathsf{LPO} := \forall \alpha : 2^{\mathbb{N}}.\ \alpha = 0 \vee \alpha \# 0$$

$$\mathsf{WLPO} := \forall \alpha : 2^{\mathbb{N}}.\ \alpha = 0 \vee \alpha \neq 0$$

$$\mathsf{ALPO} := \forall x : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}.\ x = 0 \vee x \# 0$$

$$\mathsf{AWLPO} := \forall x : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}.\ x = 0 \vee x \neq 0$$

$$\mathsf{KS} := \forall p : \Omega.\ \exists \alpha : 2^{\mathbb{N}}.\ p \Leftrightarrow \alpha \# 0$$

$$\mathsf{AKS} := \forall p : \Omega.\ \exists x : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}.\ p \Leftrightarrow x \# 0$$

$$\mathsf{MP} := \forall \alpha : 2^{\mathbb{N}}.\ \neg(\alpha = 0) \Rightarrow \alpha \# 0$$

$$\mathsf{AMP} := \forall x : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}.\ \neg(x = 0) \Rightarrow x \# 0$$

Trditev

Nad X drži ALPO *natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.*

Trditev

Če je X lokalno T_6, nad njem drži AKS.

Trditev

Če nad X obstaja funkcija izbire za AKS, *je lokalno T_6.*

Definicija

Prostor je *realno nepovezan*, ko je za vsako funkcijo $f : X \to \mathbb{R}$ množica $\operatorname{cl}\{t \in X \mid f(t) > 0\}$ odprta.

Trditev

Nad X velja AWLPO *natanko tedaj, ko je vsak odprt podprostor X realno nepovezana.*

Definicija

Prostor X je *skoraj P-prostor*, ko je za vsak $f : X \to \mathbb{R}$ množica $[\![f > 0]\!]$ regularna.

Trditev

Nad X velja AMP *natanko tedaj, ko je vsaka odprta podmnožica X skoraj P-prostor.*

Izrek

Velja AMP $\wedge$ AWLPO $\Rightarrow$ ALPO.

Izrek

Ničelne množice $f : X \to \mathbb{R}$ so odprte natanko tedaj, ko je X skoraj P-prostor in realno nepovezan.

Trditev

Nad lokalno povezanim prostorom velja LPO.

Trditev (??)

Če nad 2-števnim prostorom velja LPO, *je lokalno povezan.*

Vprašanja?