Principi odločitve in izbire v topoloških modelih

Luna Strah

19. 5. 2025

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Principi odločitve in izbire v topoloških modelih

2025-05-22

Principi odločitve in izbire v topoloških modelih

Luna Strah
19. 5. 2025
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Dober dan, ime mi je Luna, dans vam bom predstavljala mojo magistrsko nalogo, ki ma zaenkrat naslov “Nekonstruktivni principi v topoloških modelih”, ampak mi ni čist všeč, tko da.

Zdej, kaj je zgodba tuki, mal mi boste mogl na besedo verjet, ampak glavno je, da za vsak topološki prostor lahko skonstruiramo matematični svet (tem se potem reče topološki modeli), kjer so resničnostne vrednosti natanko odprte množice prostora. To je recimo praktično, če želimo gledati recimo pozitivnost realne funkcije. Namesto, da se vprašamo, če je funkcija pozitivna, se vprašamo kje je funkcija pozitivna, kar je mogoče zanimivo, oziroma js trdim, da je.

Principi odločitve in izbire v topoloških modelih

Luna Strah

19. 5. 2025

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

2025-05-22

Principi odločitve in izbire v topoloških modelih

Principi odločitve in izbire v topoloških modelih

Luna Strah

19. 5. 2025

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Zdej mamo pa na eni strani prostore, na drugi pa topološke modele. In nekak za prostore kot celota mamo neke lastnosti, recimo T_1, T_2, T_6, lokalna povezanost, kompaktnost, svašta. Na drugi strani mamo pa modele logike, ki se izkaže, da ponavadi ni klasična. To pomeni, da recimo izključena tretja možnost ali pa aksiom izbire ne nujno držjo. Ampak tako kot za prostore, eni bojo mel, drugi pa ne. In zdaj se lahko vprašamo, a se katere topološke lastnosti da smiselno izražat z nekonstruktivnimi principi v konstruktivni logiki, preko te konstrukcije topoloških modelov.

Logika odprtih množic

$\top$	X
$\bot$	$\varnothing$
$U \wedge V$	$U \cap V$
$U \vee V$	$U \cup V$
$\neg U$	$\mathrm{Int}(U^c)$
$U \Rightarrow V$	$\mathrm{Int}(V \cup U^c) = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \cap U \subseteq V\}$
$U \Leftrightarrow V$	$\mathrm{Int}((V \cap U) \cup (V \cup U)^c)$

Logika odprtih množic
$\top$ X
$\bot$ $\varnothing$
$U \wedge V$ $U \cap V$
$U \vee V$ $U \cup V$
$\neg U$ $\mathrm{Int}(U^c)$
$U \Rightarrow V$ $\mathrm{Int}(V \cup U^c) = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \cap U \subseteq V\}$
$U \Leftrightarrow V$ $\mathrm{Int}((V \cap U) \cup (V \cup U)^c)$

Zdej, prvo vprašanje je, kako zgledajo odprte množice kot resničnostne vrednosti. Očitno če je neki res povsod je res, tako da resnica bo cel prostor. Obratno, neresnica bo prazna množica, torej da nikjer ni res.
Naprej, recimo, da imamo dve funkciji, ena je pozitivna na U, druga je pozitivna na V, pol sta obe pozitivni na preseku $U \cap V$. Tako da konjunkcija bo presek. Podobno je disjunkcija unija.
Negacija je prva neočitna, ker ne mormo vzet samo komplementa, ampak lahko pa vzamemo notranjost komplementa, oziroma zunanjost množice.

Logika odprtih množic

$\top$	X
$\bot$	$\varnothing$
$U \wedge V$	$U \cap V$
$U \vee V$	$U \cup V$
$\neg U$	$\mathrm{Int}(U^c)$
$U \Rightarrow V$	$\mathrm{Int}(V \cup U^c) = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \cap U \subseteq V\}$
$U \Leftrightarrow V$	$\mathrm{Int}((V \cap U) \cup (V \cup U)^c)$

Logika odprtih množic

Izključeno tretjo možnost in DeMorganov zakon se da povedati zgolj z neko formulo o resničnostnih vrednostih, zato smo lahko naredili to karakterizacijo, ampak temu ni nujno vedno res. Obstajajo nekonstruktivni principi, ki govorijo recimo o neskončnih zaporedjih, ali pa realnih številih. Prav tako poznamo topološke lastnosti, ki govorijo o več kot le odprtih množicah, na primer T_6 lastnost, ki pravi, da je vsaka zaprta množica natanko ničelna množica neke realne funkcije, in še druge.

Objekti

Objekti

Objekte v topoloških modelih se da konstruirat na veliko načinov, lahko so snopi, étale prostori, ali pa Heytingovo vrednotene množice. Jaz v delu uporabljam slednjo od teh, je pa bolj praktično rečt snopi. So pa te konstrukcije v vsakem primeru precej komplicirane, tako da se mi zdi da nima smisla, da katerokoli točno razpišem, tako da mi boste morali malo verjeti na besedo.

Sicer je pa naša zgodba itak, da se stvari spreminjajo vzdolž topološkega prostora, tako da bi tudi želeli da se elementi spreminjajo vzdolž prostora. Tako da kar rečemo, da na vsaki točki prostora definiramo vrednost elementa, to je pa ubistvu kar funkcija iz prostora nekam (še ne vemo točno kam). Edino kar moramo paziti je, da je ta funkcija dovolj lepa (beri zvezna). In to dejansko večinoma dela, je pa kar dosti dela to dejansko preveriti, tko da ja, mi morte verjet :)

Objekti

A množica, T topološki prostor

$$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

$$\mathbb{R}_X := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{O}(X)\} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathcal{C}(U)$$

Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realno število.

$$\underline{A} := \{f : U \to A \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

$$\underline{\mathbb{N}} := \{f : U \to \mathbb{N} \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

Objekti
A množica, T topološki prostor
$$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$
$$\mathbb{R}_X := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{O}(X)\} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathcal{C}(U)$$
Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realno število.
$$\underline{A} := \{f : U \to A \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$
$$\underline{\mathbb{N}} := \{f : U \to \mathbb{N} \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

Če malo fiksiramo oznake, naj bo ...
Najprej vložimo prostor T, ker je še najbolj očitno kako se to naredi. Lahko bi vzeli kar zvezne funkcije iz X v T. To bi delalo, ampak spomnimo se, da so naše resničnostne vrednosti odprte podmnožice X. In obstoj elementa ima resničnostno vrednost, tako da je smiselno, da dovoljujemo tako imenovane delne elemente, torej elemente, ki niso definirani na celem X. To pa pomeni, da je množica...
Realna števila so potem kar realne funkcije, in recimo če je $X = \mathbb{R}$ je identiteta neko realno število (reče se mu generični element).

Za splošne množice pa vzamemo kar isto stvar. Ampak zdaj je vprašanje, kakšne funkcije vzamemo. Izkaže se da kar zvezne, kjer A opremimo z diskretno topologijo.

Kvantifikatorji

$$
\begin{aligned}
U \leq \forall y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigwedge_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in Y.\ \operatorname{dom} y \leq U \Rightarrow \operatorname{dom} y \leq P(y) \\
U \leq \exists y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigvee_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \nabla V \leq U.\, \exists y \in Y.\ \operatorname{dom} y = V \wedge \operatorname{dom} y \leq P(y)
\end{aligned}
$$

Kvantifikatorji

$$
\begin{aligned}
U \leq \forall y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigwedge_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in Y.\ \operatorname{dom} y \leq U \Rightarrow \operatorname{dom} y \leq P(y) \\
U \leq \exists y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigvee_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \nabla V \leq U.\, \exists y \in Y.\ \operatorname{dom} y = V \wedge \operatorname{dom} y \leq P(y)
\end{aligned}
$$

Realna števila

Trditev

Nad X drži ALPO *natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.*

Trditev

Če je X (lokalno) T_6, nad njem drži AKS.

Trditev

Če je prostor lokalno povezan in nad njem velja $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_c$, velja tudi ALPO.

Realna števila

Trditev
Nad X drži ALPO natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.

Trditev
Če je X (lokalno) T_6, nad njem drži AKS.

Trditev
Če je prostor lokalno povezan in nad njem velja $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_c$, velja tudi ALPO.

$$\text{ALPO} := \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \lor x \leq 0 = \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \lor x = 0 \lor x < 0$$

$$\text{AKS} := \forall U : \mathcal{O}(X).\ \exists x : \mathbb{R}.\ U \Leftrightarrow x > 0$$

Ne

Verjetno $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dela.

Ne

Verjetno $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dela.

Tam sem se prepričala, a ne dokazala, da ALPO in $CC^{\vee}$ ne držita, pa vseeno $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_c$.

Izbira?

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko velja $\mathrm{AC}(\mathbb{N}, 2)$.

Trditev (Hendtlass, Lubarsky 2016)

Če je prostor ultraparakompakten, nad njem velja odvisna izbira.

Izbira?

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko velja $\mathrm{AC}(\mathbb{N}, 2)$.

Trditev (Hendtlass, Lubarsky 2016)

Če je prostor ultraparakompakten, nad njem velja odvisna izbira.

Tu števnost ni važna.

Vprašanja?

Vprašanja?