Topological Models

2025-06-06

Topological models

Topological Models

Today I will be giving an introduction to topological models in the sense of categories of Heyting valued sets. Some weeks ago prof. Simpson presented a tutorial on sheaf semantics, in much greater generality than what I will present today, and there you can just say “topological models are categories of sheaves over a topological space” and be done. However in this case the objects involved are quite complicated. Conceptually, sheaves are simple, but any particular sheaf is going to be unwieldy. Take for example the sheaf of natural numbers. It is the sheaf of locally constant maps from open subsets to the naturals. But in the world of Heyting valued sets, you can just say the natural numbers object is the set $\mathbb{N}$.

Topological Models

2025-06-06

Topological models

Topological Models

So my primary sources for this is Michael Fourman and Dana Scott's paper from the 70s, Sheaves and Logic, which introduced the concept and the 3rd volume of Francis Borceux's Handbook of Categorical Algebra, which has quite a few useful lemmas. A big difference to those though is that I develop as much of the theory in the internal language, which I believe works quite well.

I hope to end up finishing the construction of the equivalence between Heying valued sets and sheaves and the construction of the real numbers object in a topos.

But to start small, we wish to construct a topos, whose internal logic has as its truth values the open sets of our topological space.

Step 1: The logic of open sets

Step 1: The logic of open sets

So first we can construct a propositional logic with infinitary conjunctions and disjuncitons, and that is basically just the structure of the topology as a complete Heyting algebra. Equivalently a frame, so I will call it that from now.

2025-06-06

Topological models

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$

So first, we can interpret truth and falsity. Truth should obviously be the whole space.

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$
$\varphi \wedge \psi$	$[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
$\varphi \vee \psi$	$[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$

2025-06-06

Topological models

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$
$\varphi \wedge \psi$	$[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
$\varphi \vee \psi$	$[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$

Topological models

2025-06-06

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$
$\varphi \wedge \psi$	$[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
$\varphi \vee \psi$	$[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$
$\varphi \Rightarrow \psi$	$\mathrm{Int}([\![\psi]\!] \cup [\![\varphi]\!]^c)$

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$
$\varphi \wedge \psi$	$[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
$\varphi \vee \psi$	$[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$
$\varphi \Rightarrow \psi$	$\mathrm{Int}([\![\psi]\!] \cup [\![\varphi]\!]^c)$

Topological models

2025-06-06

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$
$\varphi \wedge \psi$	$[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
$\varphi \vee \psi$	$[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$
$\varphi \Rightarrow \psi$	$\mathrm{Int}([\![\psi]\!] \cup [\![\varphi]\!]^c)$
$\forall a : \underline{A}\ .\ \varphi(a)$	$\mathrm{Int}(\bigcap_{a \in A} [\![\varphi(a)]\!])$
$\exists a : \underline{A}\ .\ \varphi(a)$	$\bigcup_{a \in A} [\![\varphi(a)]\!]$

Theorem: $\mathcal{X}$ validates LEM iff $\mathcal{X}$ is discrete.

Proof.

If $\mathcal{X}$ is discrete then $\mathcal{O}\mathcal{X}$ is Boolean.

If $\mathcal{X} \models \mathrm{LEM}$ then $\forall U \overset{op}{\subseteq} \mathcal{X}.\ U \vee \neg U$

$$\neg U = U \Rightarrow \bot = \mathrm{Int}(\emptyset \cup U^c) = \mathrm{Int}(U^c).$$

Then if $\mathcal{X} = U \cup \mathrm{Int}(U^c)$ we must have

$$U^c = \mathrm{Int}(U^c),$$

so U is closed. $\square$

Step 2:

Heyting valued sets

Step 2:
Heyting valued sets

The idea is to define a set of generators for $\mathcal{F}$.

Let $\mathcal{F}$ be a sheaf.

Define $F := \sum_{U \overset{op}{\subseteq} X} \mathcal{F}(U)$ and $\|a\| = pr_1 a$.

Let $F' \subseteq F$. Then F' generates $\mathcal{F}$ when

(a) $\mathcal{F}$ is the least subsheaf containing F

(b) $\forall f \in \mathcal{F}(U).\ \exists f_i \in F',\ U_i \overset{op}{\subseteq} U,\ f_i|_{U_j} = f_j|_{U_i}$

$$f = f_1|_{U_1} \cup \dots \cup f_n|_{U_n}$$

Definition: An $\mathcal{L}$-set is a set A with

$[\![- = -]\!] : A \times A \longrightarrow \mathcal{L}$ s.t.

1. $[\![a = b]\!] \leq [\![b = a]\!]$

2. $[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] \leq [\![a = c]\!]$

Definition. An $\mathcal{L}$-morphism is a map

$$[\![- = f(-)]\!] : B \times A \longrightarrow \mathcal{L} \quad \text{s.t.}$$

1. $[\![b = f(a)]\!] \leq \|b\| \wedge \|a\|$

2. $[\![b' = b]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \wedge [\![a = a']\!] \leq [\![b' = f(a')]\!]$

3. $[\![b = f(a)]\!] \wedge [\![b' = f(a)]\!] \leq [\![b = b']\!]$

4. $\|a\| \leq \bigvee_{b \in B} [\![b = f(a)]\!]$

Definition. An $\mathcal{L}$-morphism is a map $[\![- = f(-)]\!] : B \times A \longrightarrow \mathcal{L}$ s.t.
1. $[\![b = f(a)]\!] \leq \|b\| \wedge \|a\|$
2. $[\![b' = b]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \wedge [\![a = a']\!] \leq [\![b' = f(a')]\!]$
3. $[\![b = f(a)]\!] \wedge [\![b' = f(a)]\!] \leq [\![b = b']\!]$
4. $\|a\| \leq \bigvee_{b \in B} [\![b = f(a)]\!]$

Step 3:

Internal language

Step 3:
Internal language

Topological models

2025-06-06

Logika	Topologija
$\top$	$\mathcal{X}$
$\bot$	$\emptyset$
$\varphi \wedge \psi$	$[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
$\varphi \vee \psi$	$[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$
$\varphi \Rightarrow \psi$	$\mathrm{Int}([\![\psi]\!] \cup [\![\varphi]\!]^c)$
$\forall a{:}A \,.\, \varphi(a)$	$\mathrm{Int}(\bigcap_{a \in A} [\![\lVert a \rVert \Rightarrow \varphi(a)]\!])$
$\exists a{:}A \,.\, \varphi(a)$	$\bigcup_{a \in A} [\![\lVert a \rVert \wedge \varphi(a)]\!]$
$a = b$	$[\![a = b]\!]$

Definition: An $\mathcal{L}$-set is a set A with

$[\![- = -]\!] : A \times A \longrightarrow \mathcal{L}$ s.t.

1. $\vdash a = b \Rightarrow b = a$

2. $\vdash a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Definition: An $\mathcal{L}$-set is a set A with
$[\![- = -]\!] : A \times A \longrightarrow \mathcal{L}$ s.t.
1. $\vdash a = b \Rightarrow b = a$
2. $\vdash a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Definition. An $\mathcal{L}$-morphism is a map

$$[\![- = f(-)]\!] : B \times A \longrightarrow \mathcal{L} \quad \text{s.t.}$$

1. $\vdash b = f(a) \Rightarrow \|b\| \wedge \|a\|$
2. $\vdash b' = b \wedge b = f(a) \wedge a = a' \Rightarrow b' = f(a')$
3. $\vdash b = f(a) \wedge b' = f(a) \Rightarrow b = b'$
4. $\vdash \forall a{:}A.\ \exists b{:}B.\ b = f(a)$

Definition. An $\mathcal{L}$-morphism is a map $[\![- = f(-)]\!] : B \times A \longrightarrow \mathcal{L}$ s.t.
1. $\vdash b = f(a) \Rightarrow \|b\| \wedge \|a\|$
2. $\vdash b' = b \wedge b = f(a) \wedge a = a' \Rightarrow b' = f(a')$
3. $\vdash b = f(a) \wedge b' = f(a) \Rightarrow b = b'$
4. $\vdash \forall a{:}A.\ \exists b{:}B.\ b = f(a)$

2025-06-06

Topological models

Facts:

- $[\![- =_A -]\!]$ is id_A.
- $c = g \circ f(a)$ is $\exists b{:}B.\ c = g(b) \wedge b = f(a)$.
- $R(f(a))$ is $\exists b{:}B.\ b = f(a) \wedge R(b)$.
  - ↪ $f(a) = g(a)$ is $\exists b{:}B.\ b = f(a) \wedge b = g(a)$

Ex. $\mathbb{1} := \{*\}$, $\|*\| = \top$

Ex. $\underline{A} = A$, $[\![a = a']\!] = \bigvee\{\top \mid a = a'\}$.

Ex. $A/_U := A$, $[\![a = a']\!] = [\![a = a']\!] \wedge U$.

Ex. $\Omega = \mathcal{L}$, $[\![p = q]\!] = p \Leftrightarrow q$.

Ex. $B^A = A \looparrowright B$, $[\![f = g]\!] = [\![\forall a{:}A.\ f(a) = g(a)]\!]$

Ex. $A/_\sim = A$, $[\![a = a']\!] = a \sim a'$.

Ex. $\mathbb{1} = \{*\}$, $\|*\| = \top$
Ex. $\underline{A} = A$, $[\![a = a']\!] = \bigvee\{\top \mid a = a'\}$
Ex. $A/_U = A$, $[\![a = a']\!] = [\![a = a']\!] \wedge U$.
Ex. $\Omega = \mathcal{L}$, $[\![p = q]\!] = p \Leftrightarrow q$
Ex. $B^A = A \looparrowright B$, $[\![f = g]\!] = [\![\forall a{:}A.\ f(a) = g(a)]\!]$
Ex. $A/_\sim = A$, $[\![a = a']\!] = a \sim a'$

Lemma (funext). $f = g$ iff $\vdash f =_{B^A} g$.

Proof. Assume $\vdash f = g$.

Let $a : A$, $b : B$ s.t. $b = f(a)$.

By ass, $\exists b' : B.\ b' = f(a) \wedge b' = g(a)$

Then $b = f(a) = b'$ so $b = b' = g(a)$. $\square$

Lemma (funext). $f = g$ iff $\vdash f =_{B^A} g$.
Proof. Assume $\vdash f = g$
Let $a : A$, $b : B$ st $b = f(a)$
By ass, $\exists b' : B.\ b' = f(a) \wedge b' = g(a)$
Then $b = f(a) = b'$ so $b = b' = g(a)$. $\square$

Theorem. $f : A \hookrightarrow B$ is mono iff
$\forall x,y : A.\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$.

Proof. ($\Leftarrow$) Let $g,h : C \hookrightarrow A$, $f \circ g = f \circ h$.
Then $f(g(c)) = f(h(c))$, so $g = h$.

($\Rightarrow$) Let $x,y : B$ s.t. $f(x) = f(y)$.
Define $\hat{x}, \hat{y} : \mathbb{1} \hookrightarrow B$, $\hat{x}(*) := x$, $\hat{y}(*) := y$
Then $f \circ \hat{x} = f \circ \hat{y}$, so $\hat{x} = \hat{y}$. $\square$

Theorem. $f : A \hookrightarrow B$ is mono iff
$\forall x,y : A.\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
Proof. ($\Leftarrow$) Let $g,h : C \hookrightarrow A$, $f \circ g = f \circ h$
Then $f(g(c)) = f(h(c))$, so $g = h$
($\Rightarrow$) Let $x,y : B$ s.t. $f(x) = f(y)$
Define $\hat{x}, \hat{y} : \mathbb{1} \hookrightarrow B$, $\hat{x}(*) := x$, $\hat{y}(*) := y$
Then $f \circ \hat{x} = f \circ \hat{y}$, so $\hat{x} = \hat{y}$ $\square$

2025-06-06

Topological models

Theorem $f : A \rightarrowtail B$ is epi iff

$$\forall b : B\ \exists a : A.\ b = f(a).$$

Proof. ($\Leftarrow$) let $g, h : B \rightarrowtail C$, $g \circ f = h \circ f$.

Let $b : B$. Then $\exists a : A.\ b = f(a)$

Then $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$.

($\Rightarrow$) Let $b : B$ and $i_1, i_2 : B \rightarrowtail \operatorname{coker} f$.

Then $i_1 \circ f = i_2 \circ f \rightsquigarrow i_1 = i_2 \rightsquigarrow \exists a : A.\ b = f(a)$. $\square$

$$
\begin{aligned}
[\![c = g(b)]\!] &= [\![c = g(b)]\!] \wedge [\![b = b]\!] \\
&= \bigvee_{a \in A} [\![c = g(b)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&\leq \bigvee_{a \in A, b' \in B} [\![c = g(b')]\!] \wedge [\![b' = f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&= \bigvee_{a \in A} [\![c = g \circ f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&= \bigvee_{a \in A} [\![c = h \circ f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&\leq \bigvee_{a \in A, b' \in B} [\![c = h(b')]\!] \wedge [\![b' = f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&\leq \bigvee_{b' \in B} [\![c = h(b')]\!] \wedge [\![b' = b]\!] \\
&= [\![c = h \circ 1_B(b')]\!] \\
&= [\![c = h(b')]\!]
\end{aligned}
$$

2025-06-06

Topological models

$$
\begin{aligned}
[\![c = g(b)]\!] &= [\![c = g(b)]\!] \wedge [\![b = b]\!] \\
&= \bigvee_{a \in A} [\![c = g(b)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&\leq \bigvee_{a \in A, b' \in B} [\![c = g(b')]\!] \wedge [\![b' = f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&= \bigvee_{a \in A} [\![c = g \circ f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&= \bigvee_{a \in A} [\![c = h \circ f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&\leq \bigvee_{a \in A, b' \in B} [\![c = h(b')]\!] \wedge [\![b' = f(a)]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] \\
&\leq \bigvee_{b' \in B} [\![c = h(b')]\!] \wedge [\![b' = b]\!] \\
&= [\![c = h \circ 1_B(b')]\!] \\
&= [\![c = h(b')]\!]
\end{aligned}
$$

Topological models

2025-06-06

Corrolary. Isomorphisms are bijections.

Corrolary. Isomorphisms are bijections.

2025-06-06

Topological models

Logika odprtih množic

$\top$	X
$\bot$	$\varnothing$

Logika odprtih množic
$\top$ X
$\bot$ $\varnothing$

Zdej, prvo vprašanje je, kako zgledajo odprte množice kot resničnostne vrednosti. Očitno če je neki res povsod je res, tako da resnica bo cel prostor. Obratno, neresnica bo prazna množica, torej da nikjer ni res.

Naprej, recimo, da imamo dve funkciji, ena je pozitivna na U, druga je pozitivna na V, pol sta obe pozitivni na preseku $U \cap V$. Tako da konjunkcija bo presek. Podobno je disjunkcija unija.

Negacija je prva neočitna, ker ne mormo vzet samo komplementa, ampak lahko pa vzamemo notranjost komplementa, oziroma zunanjost množice.

Logika odprtih množic

$\top$	X
$\bot$	$\varnothing$
$U \wedge V$	$U \cap V$
$U \vee V$	$U \cup V$

Logika odprtih množic
$\top$ X
$\bot$ $\varnothing$
$U \wedge V$ $U \cap V$
$U \vee V$ $U \cup V$

Zdej, prvo vprašanje je, kako zgledajo odprte množice kot resničnostne vrednosti. Očitno če je neki res povsod je res, tako da resnica bo cel prostor. Obratno, neresnica bo prazna množica, torej da nikjer ni res. Naprej, recimo, da imamo dve funkciji, ena je pozitivna na U, druga je pozitivna na V, pol sta obe pozitivni na preseku $U \cap V$. Tako da konjunkcija bo presek. Podobno je disjunkcija unija.
Negacija je prva neočitna, ker ne mormo vzet samo komplementa, ampak lahko pa vzamemo notranjost komplementa, oziroma zunanjost množice.

Logika odprtih množic

$$
\begin{array}{ll}
\top & X \\
\bot & \varnothing \\
U \wedge V & U \cap V \\
U \vee V & U \cup V \\
\neg U & \mathrm{Int}(U^c)
\end{array}
$$

Logika odprtih množic

$$
\begin{array}{ll}
\top & X \\
\bot & \varnothing \\
U \wedge V & U \cap V \\
U \vee V & U \cup V \\
\neg U & \mathrm{Int}(U^c)
\end{array}
$$

Zdej, prvo vprašanje je, kako zgledajo odprte množice kot resničnostne vrednosti. Očitno če je neki res povsod je res, tako da resnica bo cel prostor. Obratno, neresnica bo prazna množica, torej da nikjer ni res.
Naprej, recimo, da imamo dve funkciji, ena je pozitivna na U, druga je pozitivna na V, pol sta obe pozitivni na preseku $U \cap V$. Tako da konjunkcija bo presek. Podobno je disjunkcija unija.
Negacija je prva neočitna, ker ne mormo vzet samo komplementa, ampak lahko pa vzamemo notranjost komplementa, oziroma zunanjost množice.

Logika odprtih množic

$\top$	X
$\bot$	$\varnothing$
$U \wedge V$	$U \cap V$
$U \vee V$	$U \cup V$
$\neg U$	$\mathrm{Int}(U^c)$
$U \Rightarrow V$	$\mathrm{Int}(V \cup U^c) = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \cap U \subseteq V\}$
$U \Leftrightarrow V$	$\mathrm{Int}((V \cap U) \cup (V \cup U)^c)$

Logika odprtih množic

Zdej, prvo vprašanje je, kako zgledajo odprte množice kot resničnostne vrednosti. Očitno če je neki res povsod je res, tako da resnica bo cel prostor. Obratno, neresnica bo prazna množica, torej da nikjer ni res.
Naprej, recimo, da imamo dve funkciji, ena je pozitivna na U, druga je pozitivna na V, pol sta obe pozitivni na preseku $U \cap V$. Tako da konjunkcija bo presek. Podobno je disjunkcija unija.
Negacija je prva neočitna, ker ne mormo vzet samo komplementa, ampak lahko pa vzamemo notranjost komplementa, oziroma zunanjost množice.

Logika odprtih množic

$\top$	X
$\bot$	$\varnothing$
$U \wedge V$	$U \cap V$
$U \vee V$	$U \cup V$
$\neg U$	$\mathrm{Int}(U^c)$
$U \Rightarrow V$	$\mathrm{Int}(V \cup U^c) = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \cap U \subseteq V\}$
$U \Leftrightarrow V$	$\mathrm{Int}((V \cap U) \cup (V \cup U)^c)$

Logika odprtih množic
$\top$ X
$\bot$ $\varnothing$
$U \wedge V$ $U \cap V$
$U \vee V$ $U \cup V$
$\neg U$ $\mathrm{Int}(U^c)$
$U \Rightarrow V$ $\mathrm{Int}(V \cup U^c) = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \cap U \subseteq V\}$
$U \Leftrightarrow V$ $\mathrm{Int}((V \cap U) \cup (V \cup U)^c)$

Izključeno tretjo možnost in DeMorganov zakon se da povedati zgolj z neko formulo o resničnostnih vrednostih, zato smo lahko naredili to karakterizacijo, ampak temu ni nujno vedno res. Obstajajo nekonstruktivni principi, ki govorijo recimo o neskončnih zaporedjih, ali pa realnih številih. Prav tako poznamo topološke lastnosti, ki govorijo o več kot le odprtih množicah, na primer T_6 lastnost, ki pravi, da je vsaka zaprta množica natanko ničelna množica neke realne funkcije, in še druge.

Objekti

Objekte v topoloških modelih se da konstruirat na veliko načinov, lahko so snopi, étale prostori, ali pa Heytingovo vrednotene množice. Jaz v delu uporabljam slednjo od teh, je pa bolj praktično rečt snopi. So pa te konstrukcije v vsakem primeru precej komplicirane, tako da se mi zdi da nima smisla, da katerokoli točno razpišem, tako da mi boste morali malo verjeti na besedo.

Sicer je pa naša zgodba itak, da se stvari spreminjajo vzdolž topološkega prostora, tako da bi tudi želeli da se elementi spreminjajo vzdolž prostora. Tako da kar rečemo, da na vsaki točki prostora definiramo vrednost elementa, to je pa ubistvu kar funkcija iz prostora nekam (še ne vemo točno kam). Edino kar moramo paziti je, da je ta funkcija dovolj lepa (beri zvezna). In to dejansko večinoma dela, je pa kar dosti dela to dejansko preveriti, tko da ja, mi morte verjet :)

Objekti

A množica, T topološki prostor

Objekti
A množica, T topološki prostor

Če malo fiksiramo oznake, naj bo ...
Najprej vložimo prostor T, ker je še najbolj očitno kako se to naredi. Lahko bi vzeli kar zvezne funkcije iz X v T. To bi delalo, ampak spomnimo se, da so naše resničnostne vrednosti odprte podmnožice X. In obstoj elementa ima resničnostno vrednost, tako da je smiselno, da dovoljujemo tako imenovane delne elemente, torej elemente, ki niso definirani na celem X. To pa pomeni, da je množica...
Realna števila so potem kar realne funkcije, in recimo če je $X = \mathbb{R}$ je identiteta neko realno število (reče se mu generični element).

Za splošne množice pa vzamemo kar isto stvar. Ampak zdaj je vprašanje, kakšne funkcije vzamemo. Izkaže se da kar zvezne, kjer A opremimo z diskretno topologijo.

Objekti

A množica, T topološki prostor

$$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

Objekti

A množica, T topološki prostor

$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$

Če malo fiksiramo oznake, naj bo …

Najprej vložimo prostor T, ker je še najbolj očitno kako se to naredi. Lahko bi vzeli kar zvezne funkcije iz X v T. To bi delalo, ampak spomnimo se, da so naše resničnostne vrednosti odprte podmnožice X. In obstoj elementa ima resničnostno vrednost, tako da je smiselno, da dovoljujemo tako imenovane delne elemente, torej elemente, ki niso definirani na celem X. To pa pomeni, da je množica…

Realna števila so potem kar realne funkcije, in recimo če je $X = \mathbb{R}$ je identiteta neko realno število (reče se mu generični element).

Za splošne množice pa vzamemo kar isto stvar. Ampak zdaj je vprašanje, kakšne funkcije vzamemo. Izkaže se da kar zvezne, kjer A opremimo z diskretno topologijo.

Objekti

A množica, T topološki prostor

$$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

$$\mathbb{R}_X := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{O}(X)\} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathcal{C}(U)$$

Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realno število.

Objekti
A množica, T topološki prostor
$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$
$\mathbb{R}_X := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{O}(X)\} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathcal{C}(U)$
Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realno število.

Če malo fiksiramo oznake, naj bo …
Najprej vložimo prostor T, ker je še najbolj očitno kako se to naredi. Lahko bi vzeli kar zvezne funkcije iz X v T. To bi delalo, ampak spomnimo se, da so naše resničnostne vrednosti odprte podmnožice X. In obstoj elementa ima resničnostno vrednost, tako da je smiselno, da dovoljujemo tako imenovane delne elemente, torej elemente, ki niso definirani na celem X. To pa pomeni, da je množica…
Realna števila so potem kar realne funkcije, in recimo če je $X = \mathbb{R}$ je identiteta neko realno število (reče se mu generični element).

Za splošne množice pa vzamemo kar isto stvar. Ampak zdaj je vprašanje, kakšne funkcije vzamemo. Izkaže se da kar zvezne, kjer A opremimo z diskretno topologijo.

Objekti

A množica, T topološki prostor

$$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

$$\mathbb{R}_X := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{O}(X)\} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathcal{C}(U)$$

Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realno število.

$$\underline{A} := \{f : U \to A \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

$$\underline{\mathbb{N}} := \{f : U \to \mathbb{N} \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$$

Objekti
A množica, T topološki prostor
$T_X := \{f : U \to T \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$
$\mathbb{R}_X := \{f : U \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{O}(X)\} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathcal{C}(U)$
Nad realnimi števili je torej $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realno število.
$\underline{A} := \{f : U \to A \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$
$\underline{\mathbb{N}} := \{f : U \to \mathbb{N} \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$

Če malo fiksiramo oznake, naj bo …
Najprej vložimo prostor T, ker je še najbolj očitno kako se to naredi. Lahko bi vzeli kar zvezne funkcije iz X v T. To bi delalo, ampak spomnimo se, da so naše resničnostne vrednosti odprte podmnožice X. In obstoj elementa ima resničnostno vrednost, tako da je smiselno, da dovoljujemo tako imenovane delne elemente, torej elemente, ki niso definirani na celem X. To pa pomeni, da je množica...
Realna števila so potem kar realne funkcije, in recimo če je $X = \mathbb{R}$ je identiteta neko realno število (reče se mu generični element).

Za splošne množice pa vzamemo kar isto stvar. Ampak zdaj je vprašanje, kakšne funkcije vzamemo. Izkaže se da kar zvezne, kjer A opremimo z diskretno topologijo.

Kvantifikatorji

$$\forall y : Y.\ P(y) := \bigwedge_{y \in Y} P(y)$$

$$\exists y : Y.\ P(y) := \bigvee_{y \in Y} P(y)$$

Kvantifikatorji

$$\forall y : Y.\ P(y) := \bigwedge_{y \in Y} P(y)$$

$$\exists y : Y.\ P(y) := \bigvee_{y \in Y} P(y)$$

Kvantifikatorji

$$
\begin{aligned}
U \leq \forall y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigwedge_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in Y.\; \operatorname{dom} y \leq U \Rightarrow \operatorname{dom} y \leq P(y) \\
U \leq \exists y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigvee_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \nabla V \leq U.\, \exists y \in Y.\; \operatorname{dom} y = V \wedge \operatorname{dom} y \leq P(y)
\end{aligned}
$$

Kvantifikatorji

$$
\begin{aligned}
U \leq \forall y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigwedge_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in Y.\; \operatorname{dom} y \leq U \Rightarrow \operatorname{dom} y \leq P(y) \\
U \leq \exists y : Y.\, P(y) &:= U \leq \bigvee_{y \in Y} P(y) \\
&\Leftrightarrow \nabla V \leq U.\, \exists y \in Y.\; \operatorname{dom} y = V \wedge \operatorname{dom} y \leq P(y)
\end{aligned}
$$

Trditev

Nad X drži ALPO natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.

Realna števila
Trditev
Nad X drži ALPO natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.

$$\text{ALPO} := \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \vee x \leq 0 = \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$$

$$\text{AKS} := \forall U : \mathcal{O}(X).\ \exists x : \mathbb{R}.\ U \Leftrightarrow x > 0$$

Realna števila

Trditev

Nad X drži ALPO *natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.*

Trditev

Če je X (lokalno) T_6, nad njem drži AKS.

Realna števila
Trditev
Nad X drži ALPO natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.
Trditev
Če je X (lokalno) T_6, nad njem drži AKS.

$$\text{ALPO} := \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \lor x \leq 0 = \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \lor x = 0 \lor x < 0$$

$$\text{AKS} := \forall U : \mathcal{O}(X).\ \exists x : \mathbb{R}.\ U \Leftrightarrow x > 0$$

Realna števila

Trditev

Nad X drži ALPO natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.

Trditev

Če je X (lokalno) T_6, nad njem drži AKS.

Trditev

Če je prostor lokalno povezan in nad njem velja $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_c$, velja tudi ALPO.

Realna števila
Trditev
Nad X drži ALPO natanko tedaj, ko so ničelne množice funkcij $U \to \mathbb{R}$ odprte.
Trditev
Če je X (lokalno) T_6, nad njem drži AKS.
Trditev
Če je prostor lokalno povezan in nad njem velja $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_c$, velja tudi ALPO.

$$\text{ALPO} := \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \vee x \leq 0 = \forall x : \mathbb{R}.\ x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$$

$$\text{AKS} := \forall U : \mathcal{O}(X).\ \exists x : \mathbb{R}.\ U \Leftrightarrow x > 0$$

Ne

Verjetno $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dela.

Ne
Verjetno $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dela.

Tam sem se prepričala, a ne dokazala, da ALPO in $\mathrm{CC}^{\vee}$ ne držita, pa vseeno $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_c$.

Izbira?

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.

Izbira?
Izrek
Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.

Tu števnost ni važna.

Izbira?

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko velja $\mathrm{AC}(\mathbb{N}, 2)$.

Izbira?
Izrek
Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.
Izrek
Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko velja $\mathrm{AC}(\mathbb{N}, 2)$.

Tu števnost ni važna.

Izbira?

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.

Izrek

Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko velja $\mathrm{AC}(\mathbb{N}, 2)$.

Trditev (Hendtlass, Lubarsky 2016)

Če je prostor ultraparakompakten, nad njem velja odvisna izbira.

Izbira?
Izrek
Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko je topologija zaprta za števne preseke.
Izrek
Nad T_1 prostori velja števna izbira natanko tedaj, ko velja $\mathrm{AC}(\mathbb{N}, 2)$.
Trditev (Hendtlass, Lubarsky 2016)
Če je prostor ultraparakompakten, nad njem velja odvisna izbira.

Tu števnost ni važna.

Vprašanja?

2025-06-06

Topological models

Vprašanja?