Вычислительный практикум, 9-й семестр
Лабораторная работа №2
«Разностные методы решения уравнений газодинамики»

Постановка задачи

Написать программу, реализующую численное решение уравнений одномерной идеальной газодинамики (ГД) одним из предложенных методов:

1) Метод Лакса-Фридрихса;
2) Метод Хартена-Лакса-ван Лира (HLL);
3) Метод Лакса-Вендроффа.

Промоделировать с помощью разработанной программы распад произвольного ГД-разрыва в идеальном газе с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. Рассмотреть пространственную область $x = [-0.5, 0.5]$, полагая, что изначально разрыв находится в точке $x = 0$. Протестировать программу для следующих вариантов начальных условий:

1) Плотность, скорость, давление газа слева от разрыва: $\{\rho, v, p\}_L = \{1, 0, 3\}$, справа от разрыва: $\{\rho, v, p\}_L = \{1, 0, 1\}$;
2) Характеристики газа слева от разрыва: $\{\rho, v, p\}_L = \{1, 1, 3\}$, справа от разрыва: $\{\rho, v, p\}_L = \{1, -1, 1\}$;
3) Характеристики газа слева от разрыва: $\{\rho, v, p\}_L = \{1, -0.1, 1\}$, справа от разрыва: $\{\rho, v, p\}_L = \{1, 0.2, 1\}$.

На границах расчетной области использовать граничные условия типа Дирихле в предположении о постоянстве всех ГД-величин.

Выполнить следующие серии расчетов:

A. Расчеты для различных значений числа ячеек сетки $N = [40, 80, 160, 320]$ на примере варианта 1. Проанализировать сходимость метода.
B. Расчеты для различных значений числа Куранта $C = [0.3, 0.6, 0.9]$ на примере варианта 1. Проанализировать диффузионные и дисперсионные свойства схемы.
C. Промоделировать распад разрыва для вариантов 1, 2 и 3 с помощью оптимальных значений N и C, выбранных на основе расчетов A и B.

Указания к выполнению работы

1) Результаты необходимо представлять в виде графиков профилей $\rho(x)$, $v(x)$, $p(x)$ в момент времени $t = 0.1$. В каждом случае численные профили ГД-величин должны сравниваться с соответствующими точными решениями, полученными в рамках лабораторной работы № 1.

2) При реализации выбранной схемы необходимо уделить особое внимание исследованию устойчивости схемы. Явные схемы для уравнений гиперболического типа, в том числе схемы годуновского типа, являются устойчивыми при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\Delta t < \Delta x / v_{max}$$

где Δt – шаг по времени, Δx – размер ячейки сетки, v_{max} – максимальная скорость распространения возмущений на сетке. В случае уравнений идеальной ГД в качестве максимальной скорости рекомендуется выбрать следующую величину:

$$v_{max} = max\{|v_j| + c_{s,j}\}$$

где v_j – скорость газа в данной ячейке, $c_{s,j}$ – соответствующая адиабатическая скорость звука, а максимум берется по всем ячейкам сетки. Величину шага по времени удобно выражать с помощью безразмерного числа Куранта

$$\Delta t = C \cdot \Delta x / v_{max},$$

где $0 < C < 1$, в соответствии с условием устойчивости. Большие значения C соответствуют большему шагу по времени. Конкретное значение подбирается исходя из анализа дисперсионных и диффузионных свойств схемы. Заметим, что при фиксированном C шаг по времени, вообще говоря, может меняться в процессе расчета – в соответствии с изменением скорости движения газа и скорости звука. Эту особенность необходимо учитывать в процессе разработки программной реализации разностной схемы.

Требования к программе

Программа должна быть написана на языке программирования C, C++ или Фортран с использованием принципов процедурного, модульного и/или объектно-ориентированного программирования.

Для сдачи работы необходимо продемонстрировать корректность работы программы, а также презентацию с описанием постановки задачи, рисунков с результатами расчетов, кратким обсуждением полученных результатов. Задание выполняется группами по два человека. Крайний срок сдачи работы: 12-я неделя обучения в семестре.

Составитель:
старший научный сотрудник СПбГУ,
канд. физ.-мат. наук, доцент С.А. Хайбрахманов