

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет»  
Кафедра астрофизики

# Годуновские методы решения систем уравнений гиперболического типа

Хайбрахманов Сергей Александрович

кандидат физико-математических наук, доцент,  
старший научный сотрудник СПбГУ

Email: [s.khaybrakhmanov@spbu.ru](mailto:s.khaybrakhmanov@spbu.ru)

# Содержание

- 1) Системы уравнений гиперболического типа (СУГТ)
- 2) Разрывы в газодинамике
- 3) Бегущие волны в газодинамике
- 4) Задача Римана
- 5) Решение задачи Римана для уравнений одномерной идеальной газодинамики (ГД)
- 6) Метод Годунова
- 7) Схемы, основанные на приближенном решении задачи Римана

## §6.1 Системы уравнений гиперболического типа

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

где  $\vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ .

Введем несколько определений.

- Если  $\hat{A} = const$ , то система уравнений (6.1) называется **линейной**. Если  $\hat{A} = \hat{A}(\vec{u}, x, t)$ , то система (6.1) – **нелинейная**.

- Если систему уравнений (6.1) можно записать в форме

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0, \quad (6.2)$$

то она называется **консервативной**. Величина  $\vec{F}$  называется **вектором потоков**. Консервативные системы уравнений в физике выражают законы сохранения. Для линейных систем  $\vec{F} = \hat{A} \cdot \vec{u}$ .

- Консервативную систему уравнений (6.2) можно записать в **квазилинейной форме** (6.1) при

$$\hat{A} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}} \quad (6.3)$$

- **Собственные значения матрицы  $\hat{A}$**  – набор чисел  $\lambda_\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ , удовлетворяющий системе уравнений
 
$$\hat{A} \cdot \vec{u} = \lambda_\alpha \vec{u} \quad \text{или} \quad (\hat{A} - \hat{I} \lambda_\alpha) \cdot \vec{u} = 0 \quad (6.4)$$

- **Характеристика** – интегральная кривая уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_\alpha, \quad (6.5)$$

то есть прямая вида  $(x - \lambda_\alpha t) = \text{const.}$

- Система уравнений (6.1) называется **гиперболической**, если
  - а) Все собственные значения матрицы  $\hat{A}$  вещественны
  - б) Матрица  $\hat{A}$  является диагонализируемой

В этом случае матрица  $\hat{A}$  называется **матрицей гиперболичности**.

- Система (6.1) называется **строго гиперболической** (гиперболической в узком смысле), если все  $\lambda_\alpha$  попарно различны.

## Примеры

- 1) Простейшее уравнение гиперболического типа – **уравнение переноса**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.6)$$

где  $a = \text{const}$  – скорость переноса.

- 2) **Уравнение Хопфа (Бюргерса)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.7)$$

описывающее течения с ударными волнами в газодинамике.

### 3) Система уравнений идеальной газодинамики. для изэнтропических процессов

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) s = 0 \\ p = p(s, \rho) \end{array} \right.$$

– уравнение непрерывности, уравнение Эйлера, уравнение сохранения энтропии, уравнение состояния соответственно. Здесь  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $p$  и  $s$  – плотность, вектор скорости, давление и удельная энтропия газа.



Для одномерного течения вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right. \quad (6.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Эти уравнения могут быть записаны в консервативной форме (6.2), если ввести вектор консервативных переменных и вектор потоков:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho s \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v s \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Матрица гиперболичности:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s & v & \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = v \pm c_s, \quad \lambda_3 = v \quad (6.13)$$

где

$$c_s = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

– адиабатическая скорость звука.

Характеристики 1 и 2 являются звуковыми, характеристика 3 – энтропийной.

## §6.2 Разрывы в газодинамике

В газодинамике выделяются два типа разрывов

- 1) **Слабые разрывы**, на которых ГД-величины  $\vec{u}$  непрерывны, а их производные испытывают скачки. Например, *фронт волны разрежения*. Решения на слабых разрывах всегда можно представить в виде

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \delta\vec{u},$$

где малые возмущения  $\delta\vec{u}$  распространяются со скоростями  $\lambda_\alpha$ .

- 2) **Сильные разрывы**, на которых сами величины  $\vec{u}$  разрывны. Например, *ударные волны*.

Слабый разрыв:

Сильный разрыв:

Решения на разрывах удовлетворяют **условиям Гюгонио**

$$D[\vec{u}] = [\vec{F}], \quad (6.14)$$

где

$$D = \frac{dx}{dt} \quad (6.15)$$

– **скорость разрыва,**

$$[\vec{u}] = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \quad (6.16)$$

– **скачок** величины  $\vec{u}$  при переходе через разрыв.

**Условия эволюционности разрыва** (того, что он не распадется в следующий момент времени)

$$\lambda_{\alpha}^{(1)} \leq D \leq \lambda_{\alpha+1}^{(1)}, \quad \lambda_{\alpha-1}^{(2)} \leq D \leq \lambda_{\alpha}^{(2)}, \quad (6.17)$$

где индексы (1) и (2) нумеруют состояния по разные стороны разрыва.

## Типы сильных разрывов

**1) Тангенциальные разрывы (ТР)**, при переходе через которые поток массы остается равным нулю.

Скорость ТР равна скорости газа, давление при переходе через них непрерывно,  $[p] = 0$ , тангенциальная скорость может испытывать произвольный скачок.

Условия Гюгонию на ТР в идеальной ГД, в системе отсчета, в которой разрыв покоится:

$$\begin{cases} [\rho v_n^2 + p] &= 0, \\ \rho v_n [\vec{v}_\tau] &= 0, \\ \rho v_n \left[ \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2 + v_\tau^2}{2} \right] &= 0, \end{cases} \quad (6.18)$$

где  $v_n$  – перпендикулярная к поверхности разрыва компонента скорости газа,  $\vec{v}_\tau$  – тангенциальная компонента.

Частный случай – **контактный разрыв**, где  $[\vec{v}_\tau] = 0$ .

2) **Ударные волны**, поток массы через которые не равен нулю,  $\rho v_n \neq 0$ .

На ударных волнах  $[\vec{v}_\tau] = 0$ , и из условий Гюгонио следует

$$[\varepsilon] + \frac{p_1 + p_2}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \right] = 0 \quad (6.19)$$

– **ударная адиабата** (связь термодинамических величин за и перед ударной волной).

Например, для идеального газа с уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ :

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2/p_1 + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)p_2/p_1}} \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \text{ при } p_2 \gg p_1 \quad (6.20)$$

Здесь  $\gamma$  – показатель адиабаты.

## §6.3 Бегущие волны в газодинамике

Характеристики уравнений ГД определяют возможные типы бегущих волн:

1. *Волны разрежения* (при движении происходит уменьшение плотности газа).
2. *Ударные волны* (плотность газа увеличивается).
3. *Тангенциальный* (контактный) разрыв.

Рассмотрим решения в виде бегущих волн в одномерной идеальной ГД. Пусть волны распространяются вдоль оси  $x$ . Компоненты скорости газа:  $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ .



## 1) Решение в виде ударной волны (УВ)

УВ – сильный разрыв. На ней происходит рост энтропии газа. Аналогом уравнения состояния является ударная адиабата (6.20).

Тангенциальные компоненты скорости непрерывны:

$$v_{1y} = v_{2y}, \quad v_{1z} = v_{2z}$$

Поток массы для волн бегущих влево (+) и вправо (–) соответственно:

$$j \equiv \rho v_x = \pm \rho_1 c_1 \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \quad (6.21)$$

Соответствующие скачки скорости:

$$v_{x2} = v_{x1} \mp \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} \quad (6.22)$$

## 2) Решение в виде волны разрежения (ВР)

Передний и задний фронты ВР представляют собой слабые разрывы, распространяющиеся с локальной скоростью звука. При прохождении ВР энтропия сохраняется,  $s = \text{const}$ .

Тангенциальные компоненты скорости непрерывны:

$$v_{1y} = v_{2y}, \quad v_{1z} = v_{2z}$$

Скачки скорости для волн бегущих влево (–) и вправо (+) соответственно:

$$v_{x2} = v_{x1} \mp \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (6.23)$$

### 3) Тангенциальный (контактный) разрыв (КР)

Поток массы равен нулю. КР перемещается вместе с газом, т.е.

$$v_{x1} = v_{x2}$$

Тангенциальные компоненты скорости могут испытывать произвольный скачок. Давление непрерывно:

$$p_1 = p_2$$

## §6.4 Задача Римана

Задача состоит в поиске решения СУГТ со следующим начальным условием

$$\vec{u} = \begin{cases} \vec{u}_L, & x < 0, \\ \vec{u}_R, & x > 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

То есть, в начальный момент времени в точке  $x = 0$  имеет место **произвольный разрыв**.

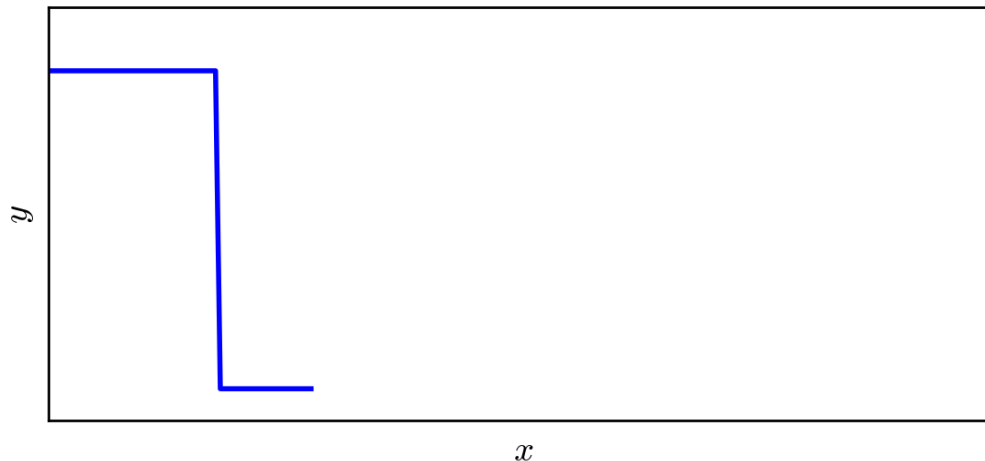
Величины  $\vec{u}_L$  и  $\vec{u}_R$  никак не связаны друг с другом, поэтому в следующий момент времени, вообще говоря, должен произойти **распад разрыва** на некоторое количество бегущих волн, которые с течением времени будут расходиться друг от друга.

## Примеры

1) Уравнение переноса (6.6) с НУ виду (6.24) имеет решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < at, \\ u_R, & x > at, \end{cases} \quad (6.25)$$

то есть, в данном случае разрыв не распадается, а просто смещается со временем со скоростью  $D = a$ .



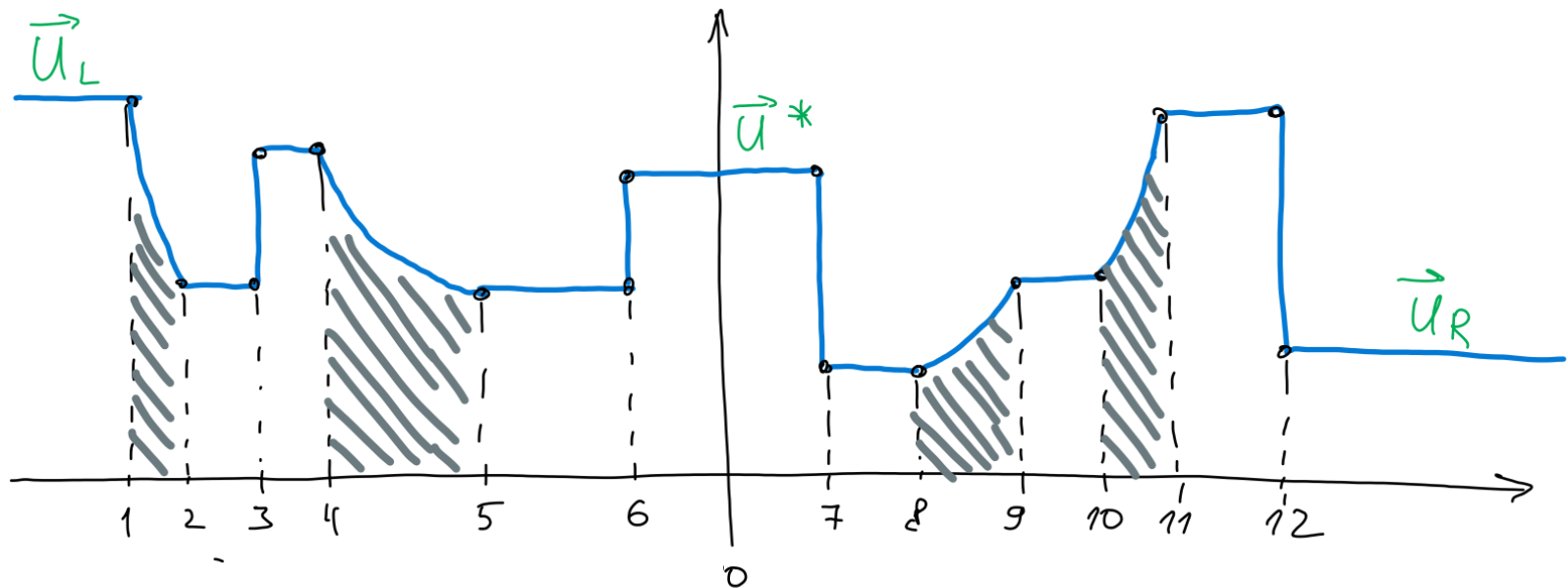
## 2) Линейная СУГТ

Разрыв распадается на серию упорядоченных сильных разрывов, движущихся со скоростями  $\lambda_\alpha$ . На каждом разрыве выполняются условия Гюгонио.

0

### 3) Система нелинейных уравнений гиперболического типа

Разрыв распадается на серию упорядоченных сильных и слабых разрывов, разделенных областями постоянного течения и волнами разрежения, и движущихся со скоростями  $\lambda_\alpha$ .

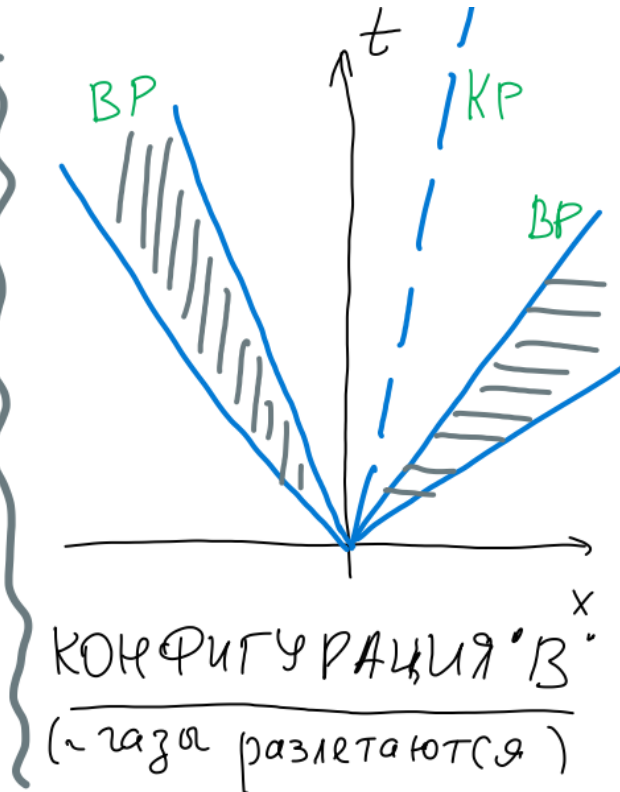
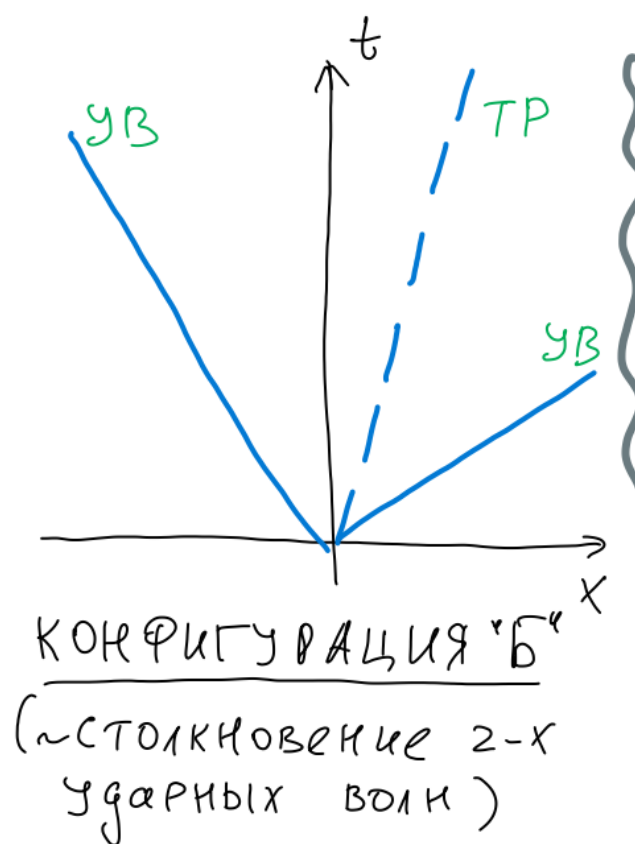
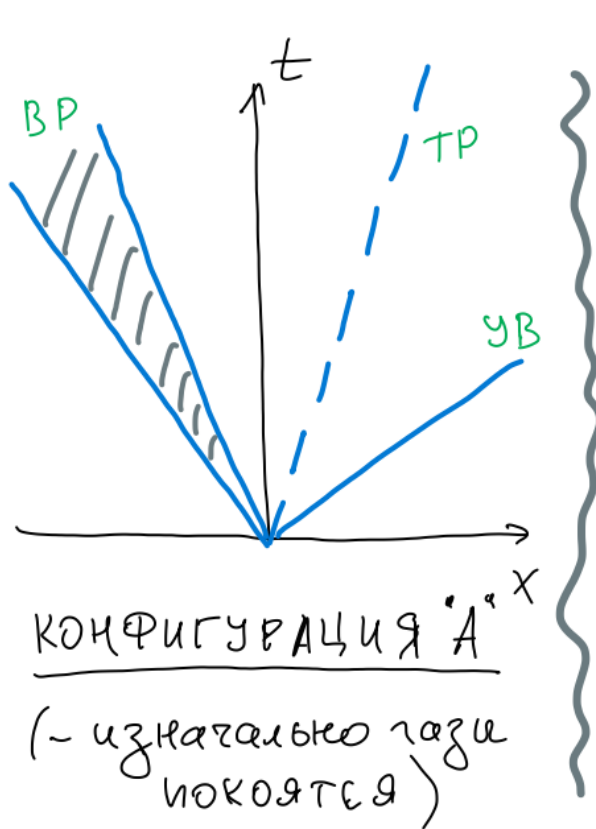


В идеальной ГД при распаде разрыва может образоваться не более *трех бегущих волн*.

## §6.5 Решение задачи Римана для уравнений одномерной ГД

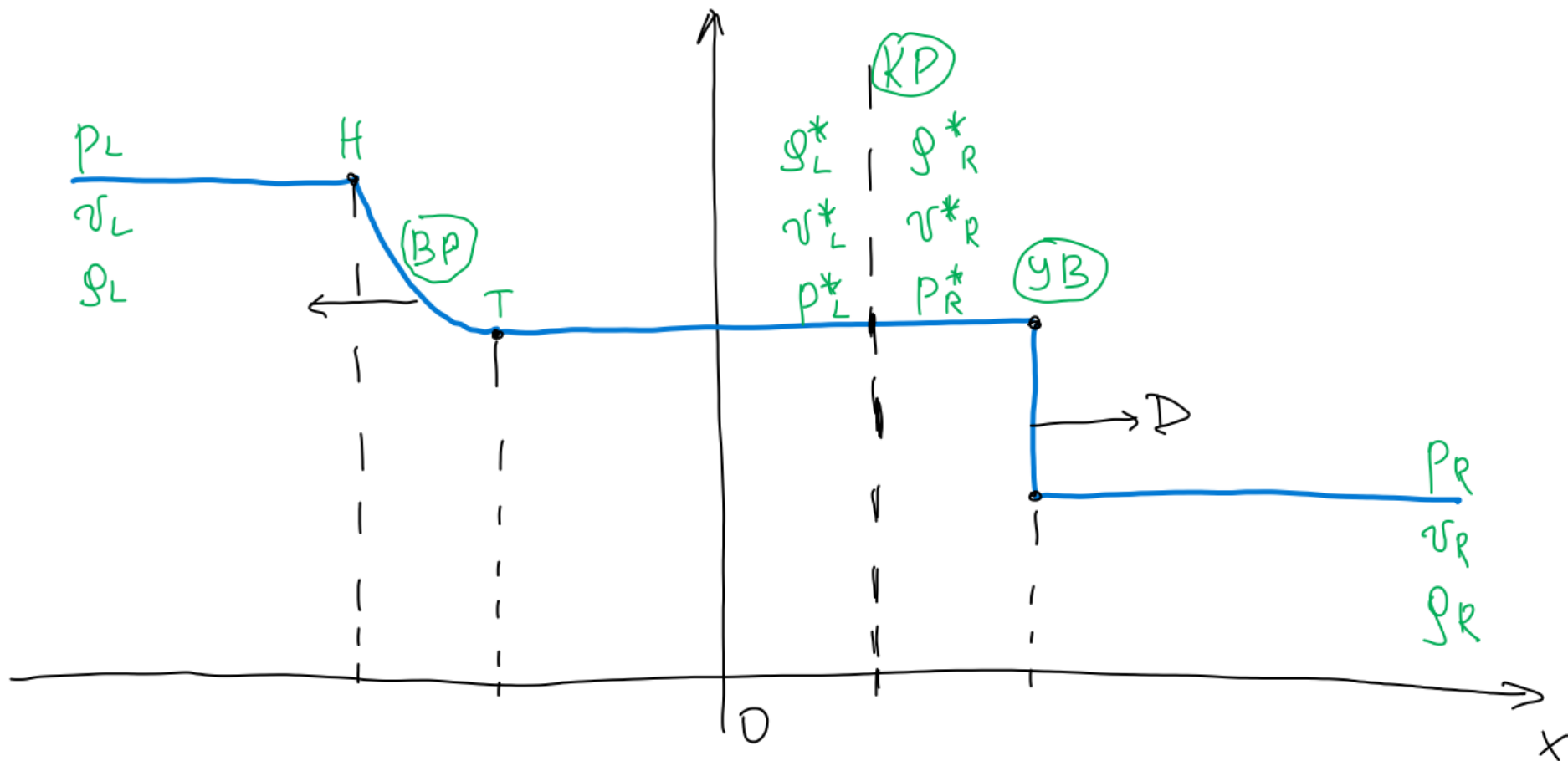
При распаде разрыва образуется не более 3-х бегущих волн: ВР, КР и УВ.

Возможные конфигурации:





# 1) Решение для конфигурации «А»



## 1) Решение для конфигурации «А»

Область между ВР и УВ, содержащая КР:

$$v_{xL}^* = v_{xL} - \frac{2c_L}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p^*}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (6.26)$$

$$\rho_L^* = \rho_L \left( \frac{p^*}{p_L} \right)^{1/\gamma} \quad (6.27)$$

$$v_{xR}^* = v_{xR} + \frac{1}{\rho_R c_R} \frac{p^* - p_R}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_R} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \quad (6.28)$$

$$\rho_R^* = \rho_R \frac{(\gamma+1) p^*/p_R + (\gamma-1)}{(\gamma+1) + (\gamma-1) p^*/p_R} \quad (6.29)$$

Давление  $p^* = p_L^* = p_R^*$  определяется из равенства

$$v_{xL}^* = v_{xR}^* \quad (6.30)$$

ВР разрежения, распространяющаяся влево:

Скорость движения переднего фронта:

$$v_H^{RW} = v_L - c_L \quad (6.31)$$

Скорость движения заднего фронта:

$$v_T^{RW} = v^* - c_L \left( \frac{p^*}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (6.32)$$

Скорость, плотность и давление газа внутри ВР:

$$v^{RW} = v_L \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} + c_L \right) \quad (6.33)$$

$$\rho^{RW} = \rho_L \left[ \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)c_L} \left( v_L - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (6.34)$$

$$p^{RW} = p_L \left[ \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)c_L} \left( v_L - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.35)$$

УВ, распространяющаяся вправо

Скорость распространения:

$$D = v_R + c_R \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.36)$$

Конфигурация «А» реализуется при условии

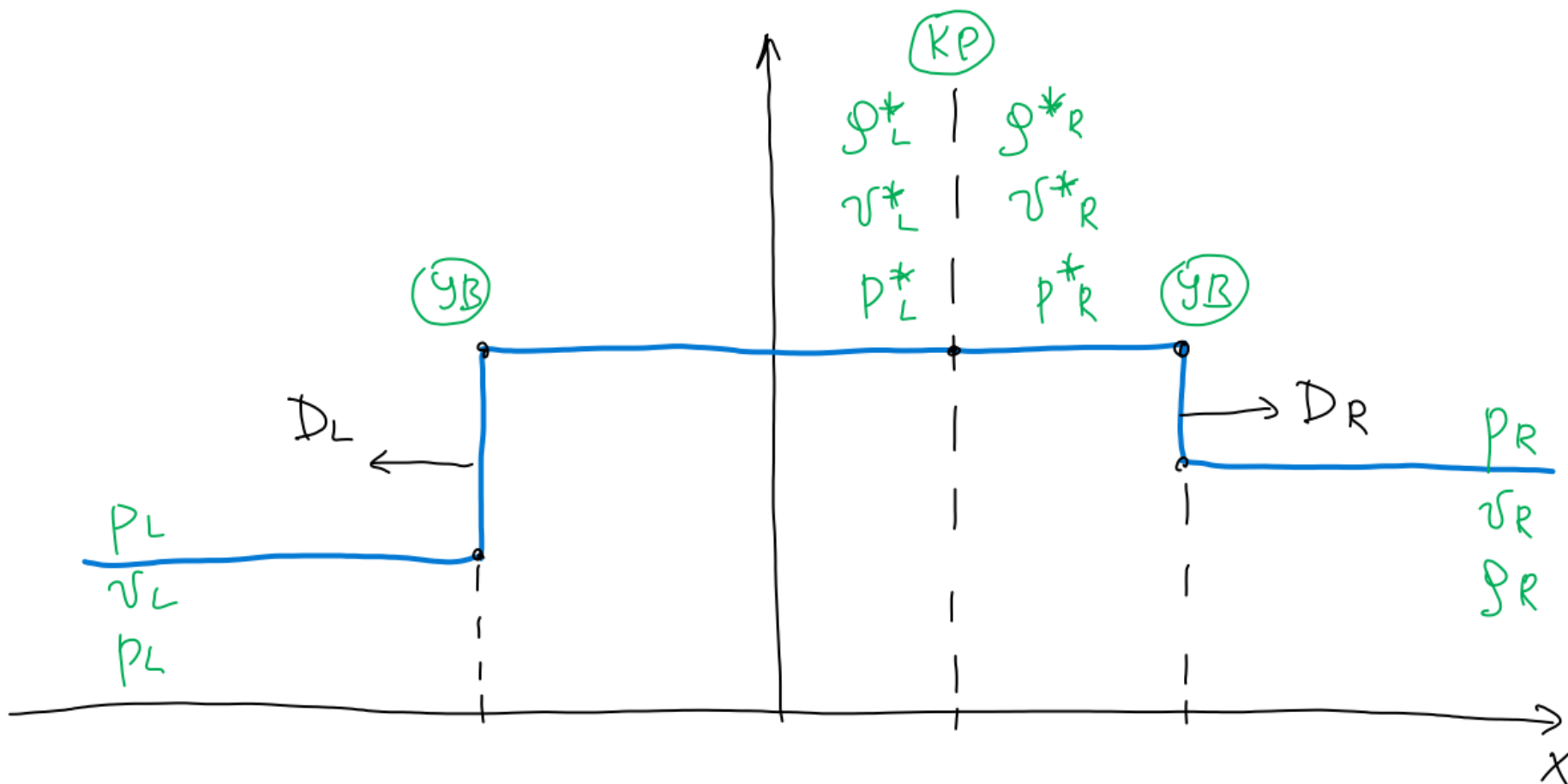
$$v_A < v_{xL} - v_{xR} < v_B \quad (6.37)$$

где

$$v_A = \frac{2c_L}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_R}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] < 0 \quad (6.38)$$

$$v_B = \frac{1}{\rho_R c_R} \frac{p_L - p_R}{\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_L}{p_R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} > 0 \quad (6.39)$$

## 2) Решение для конфигурации «Б»



## 2) Решение для конфигурации «Б»

Область между фронтами УВ

$$v_{xL}^* = v_{xL} - \frac{1}{\rho_L c_L} \frac{p^* - p_L}{\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_L} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} \quad (6.40)$$

$$\rho_L^* = \rho_L \frac{(\gamma + 1) p^* / p_L + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1) p^* / p_L} \quad (6.41)$$

$$v_{xR}^* = v_{xR} + \frac{1}{\rho_R c_R} \frac{p^* - p_R}{\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} \quad (6.42)$$

$$\rho_R^* = \rho_R \frac{(\gamma + 1) p^* / p_R + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1) p^* / p_R} \quad (6.43)$$

## Скорости фронтов УВ

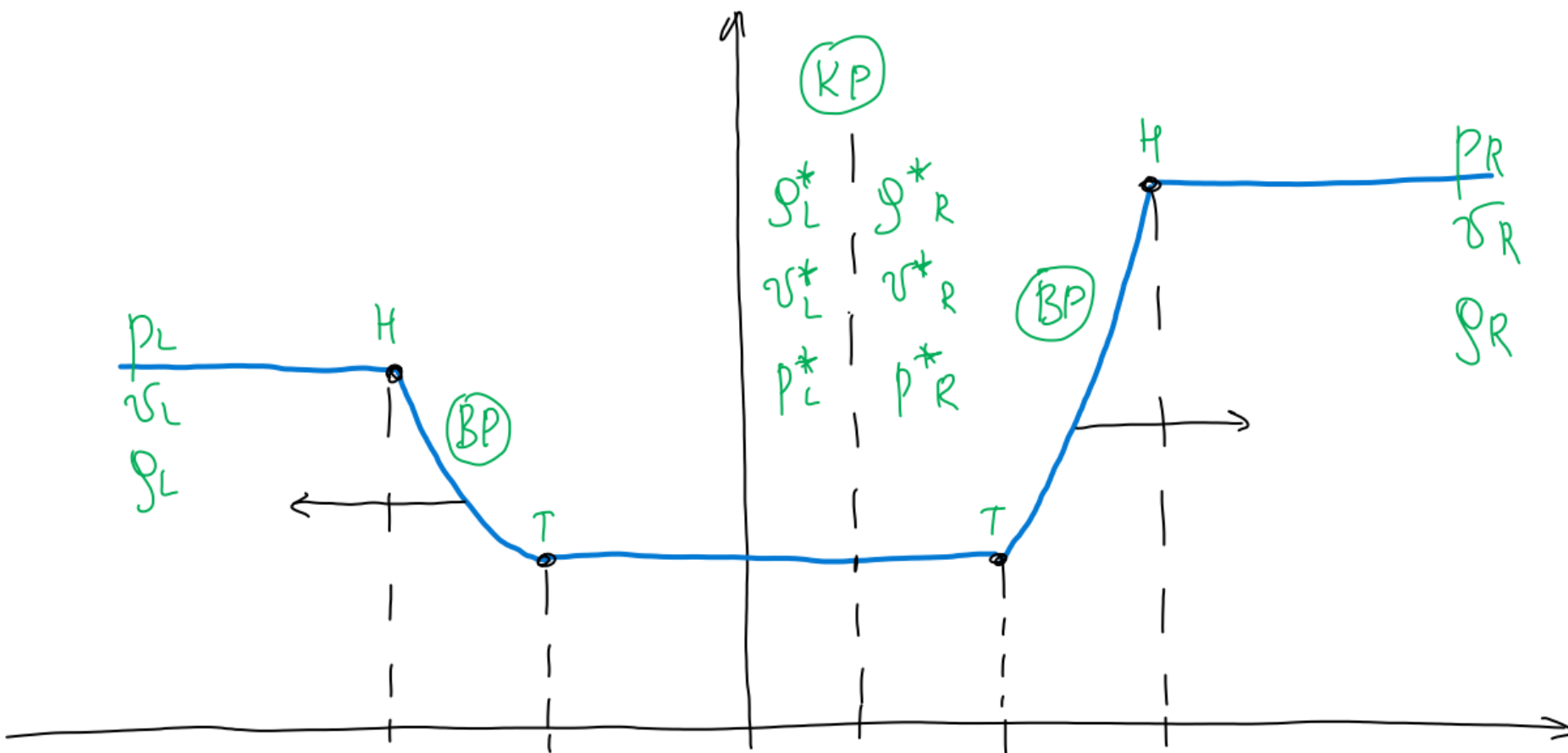
$$D_L = v_L - c_L \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_L} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.44)$$

$$D_R = v_R + c_R \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.45)$$

Конфигурация реализуется при

$$v_{xL} - v_{xR} > v_B \quad (6.46)$$

### 3) Решение для конфигурации «В»





### 3) Решение для конфигурации «В»

Решение в области между слева от КР:

Аналогично конфигурации «А».

Область между КР и правой ВР

$$v_{xR}^* = v_{xR} + \frac{2c_R}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p^*}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (6.47)$$

$$\rho_R^* = \rho_R \left( \frac{p^*}{p_R} \right)^{1/\gamma} \quad (6.48)$$

ВР разрежения, распространяющаяся вправо.

Скорость движения переднего фронта:

$$v_H^{RW} = v_R + c_R \quad (6.49)$$

Скорость движения заднего фронта:

$$v_T^{RW} = v^* + c_R \left( \frac{p^*}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (6.50)$$

Скорость, плотность и давление газа внутри ВР:

$$v^{RW} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_R + \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{x}{t} - c_R \right) \quad (6.51)$$

$$\rho^{RW} = \rho_R \left[ \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_R} \left( v_R - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (6.52)$$

$$p^{RW} = p_R \left[ \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_R} \left( v_R - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.53)$$

Конфигурация реализуется при условии

$$v_{xL} - v_{xR} < v_A. \quad (6.54)$$

Возможен случай, когда в области между ВР образуется вакуумная область (с нулевой плотностью газа). Этот случай соответствует условию

$$v_{xL} - v_{xR} < v_C, \quad (6.55)$$

где

$$v_C = -\frac{2}{\gamma - 1} (c_L + c_R) < 0 \quad (6.56)$$

## Алгоритм решения задачи

### 1) Решение нелинейного уравнения

$$v_{xL}^*(p^*) = v_{xR}^*(p^*) \quad (6.57)$$

Рекомендуется использовать итерационный метод Ньютона. Начальные приближения:

$$p^0 = \frac{1}{2}(p_L + p_R), \quad (6.58)$$

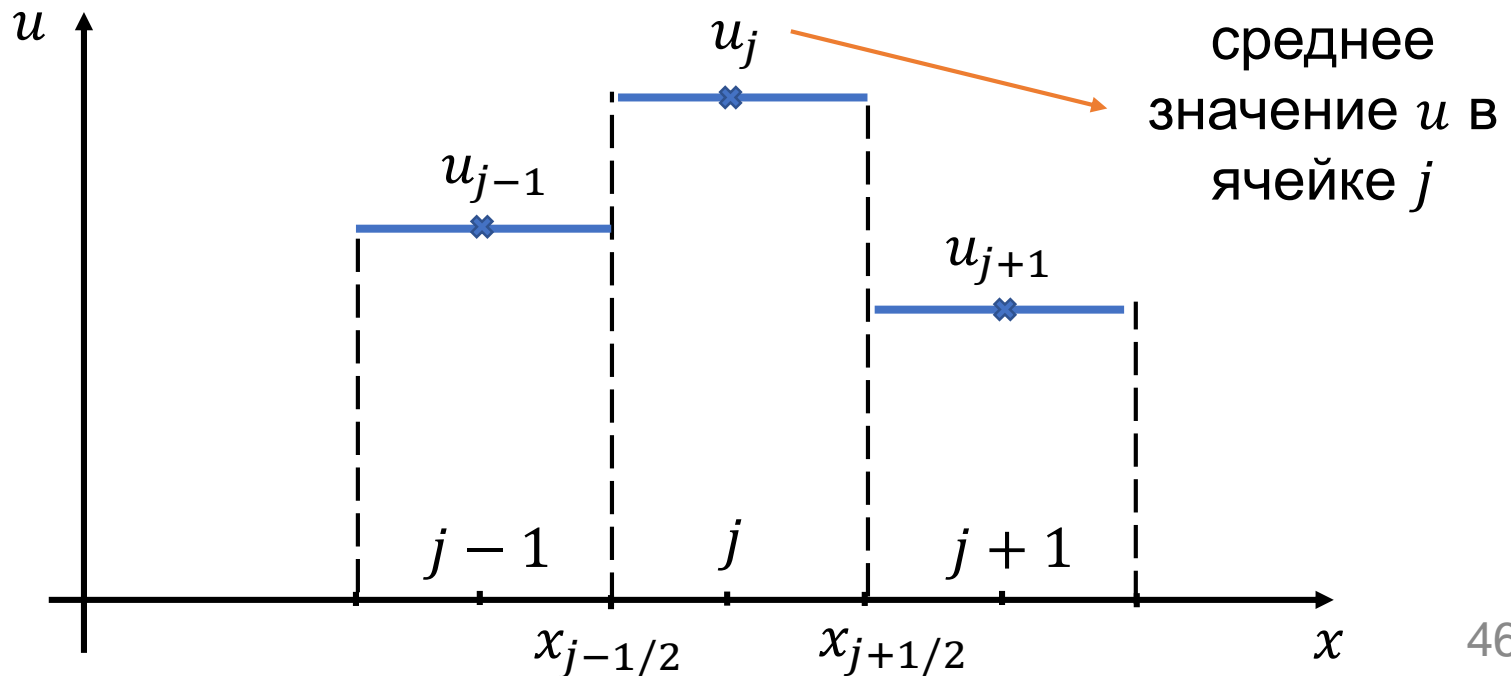
$$p^0 = \frac{\rho_R c_R p_L + \rho_L c_L p_R + \Delta v \rho_L \rho_R c_L c_R}{\rho_L c_L + \rho_R c_R} \quad (6.59)$$

### 2) После этого все величины в области \*, скорости УВ и ВР, характеристики течения в области УВ и ВР определяются по вышеприведенным формулам для соответствующих конфигураций.

## §6.6 Метод Годунова

В основе метода лежит процедура решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва.

Заметим, что дискретное представление величин на расчетной сетке приводит к тому, что при  $t^n$  на границе каждой ячейки имеет место произвольный разрыв



Рассмотрим базовую схему, полученную интегро-интерполяционным методом:

$$\frac{\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{\vec{F}_{j+1/2} - \vec{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (6.60)$$

где  $\vec{u}_j^n$  – среднее значение сеточной функции в ячейке  $j$  в момент времени  $t^n$ ,  $\vec{F}_{j+1/2}$  – поток величины  $\vec{u}$  через грань  $j + 1/2$ .

В методе Годунова делается естественное предположение: в последующий момент времени  $t^{n+1}$  каждый разрыв на границах ячеек должен распасться. В результате на границах между ячейками сеточная функция примет значение

$$\vec{u}^* = \vec{u}(x_{j+1/2}, t^n) \quad (6.61)$$

которое определяется из решения задачи Римана. Соответствующие потоки определяются как

$$\vec{F}_{j+1/2} = \vec{F}(\vec{u}^*) \quad (6.62)$$

## Замечания

- 1) Условие того, что образующиеся бегущие волны от соседних граней ячеек не достигнут данной грани и не повлияют на решение  $\vec{u}^*$ , приводят к условию устойчивости КФЛ

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_{max}} \quad (6.63)$$

- 2) Схема (6.60) имеет первый порядок аппроксимации по  $t$  и  $x$ , является консервативной и монотонной (не дает нефизических осцилляций).
- 3) В методе Годунова считается, что на границе каждой ячейки может присутствовать сильный разрыв, поэтому эта схема хорошо подходит для решения ГД-задач с ударными волнами и контактными разрывами.

## Схема для уравнения переноса

В этом случае решение задачи Римана соответствует перемещению разрыва с постоянной скоростью  $a$ , поэтому на границе каждой ячейки:

$$u^* = \begin{cases} u_L, & a > 0, \\ u_R, & a < 0, \end{cases} \quad (6.64)$$

где  $u_L = u_j$ ,  $u_R = u_{j+1}$ .

Это решение можно записать в компактном виде:

$$u^* = h(a)u_L + h(-a)u_R, \quad (6.65)$$

где

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (6.66)$$

– функция Хевисайда.



Соответствующие потоки:

$$F^* = au^* \quad (6.67)$$

можно записать как

$$F^* = \frac{F_L + F_R}{2} - \frac{|a|}{2} (u_R - u_L), \quad (6.68)$$

где  $F_L = F(u_L)$ ,  $F_R = F(u_R)$ .

Тогда базовая схема (6.29) запишется как

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x} = 0 \\ F_{j+1/2} = \frac{F_j^n + F_{j+1}^n}{2} - \frac{|a|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \end{cases} \quad (6.69)$$

## §6.7 Схемы, основанные на приближенном решении задачи Римана

Точное решение задачи Римана построено лишь для ряда простых систем.

Заметим, что сама сеточная функция  $u_j^n$  известна лишь приближенно.

Поэтому в ряде методов для построения годуновских потоков  $F^*$  используется не точное, а приближенное решение задачи Римана.

В таком решении учитывается только определенное число или определенные типы волн, возникающих в результате распада разрыва: схема Лакса-Фридрихса, Хартена-Лакс-ван Лира (HLL) и ее модификации (HLLC, HLLD), Роу, Ошера и т.д.

## 1) Уравнения идеальной ГД в одномерном случае

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.70) \\ (6.71) \\ (6.72) \end{array}$$

Система замыкается уравнением состояния

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1), \quad (6.73)$$

где  $\varepsilon$  – внутренняя энергия газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Уравнения (6.70-6.72) могут быть записаны в консервативной форме (6.2) при

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

Матрица гиперболичности:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\rho} & v & (\gamma - 1) \\ 0 & \frac{p}{\rho} & v \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = v \mp c_s, \quad \lambda_3 = v$$

где

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (6.76)$$

– адиабатическая скорость звука

Характеристики 1 и 2 являются звуковыми, характеристика 3 – энтропийной.

## 2) Схема Лакса-Фридрихса

Полагается, что в результате распада разрыва образуется только 2 УВ, распространяющихся в противоположные стороны с одинаковыми скоростями.

Скорости волн определяются как максимальные по модулю собственные значения матрицы гиперболичности,

$$D = \max_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_R)| \} \quad (6.77)$$

В таком случае условия Гюгонио дают решение

$$\begin{aligned} \vec{u}^* &= \frac{\vec{u}_R + \vec{u}_L}{2} - \frac{1}{2D} (\vec{F}_R - \vec{F}_L) \\ \vec{F}^* &= \frac{\vec{F}_R + \vec{F}_L}{2} - \frac{D}{2} (\vec{u}_R - \vec{u}_L) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Схема записывается в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{\vec{F}_{j+1/2} - \vec{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0 \\ \vec{F}_{j+1/2} = \frac{\vec{F}_j^n + \vec{F}_{j+1}^n}{2} - \frac{\lambda_{j+1/2}}{2} (\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n) \end{array} \right. \quad (6.79)$$

где

$$\lambda_{j+1/2} = \max_j \{ |v_j| + c_{s,j} \} \quad (6.80)$$

либо

$$\lambda_{j+1/2} = \max \{ |v_j| + c_{s,j}, |v_{j+1}| + c_{s,j+1} \} \quad (6.81)$$

## 2) Схема HLL

Полагается, что в результате распада разрыва образуется только 2 ударных волны, распространяющихся с разными скоростями. В качестве оценки скоростей можно принять

$$\begin{aligned} D_L &= \min_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_R)| \} \\ D_R &= \max_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_R)| \} \end{aligned} \quad (6.43)$$

В таком случае условия Гюгонио дают решение

$$\vec{F}^* = \begin{cases} \vec{F}_L & D_L \geq 0 \\ \vec{F}_C & D_L \leq 0 \leq D_R, \\ \vec{F}_R & D_R \leq 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

$$\vec{F}_C = \frac{D_R \vec{F}_L - D_L \vec{F}_R + D_L D_R (\vec{u}_R - \vec{u}_L)}{D_R - D_L} \quad (6.45)$$

В одномерной ГД можно использовать:

$$\begin{aligned} D_L &= \min\{v_L, v_R\} - \max\{c_{s,L}, c_{s,R}\} \\ D_R &= \max\{v_L, v_R\} + \max\{c_{s,L}, c_{s,R}\} \end{aligned} \quad (6.46)$$

## 2) Схема HLL

Полагается, что в результате распада разрыва образуется только 2 ударных волны, распространяющихся с разными скоростями. В качестве оценки скоростей можно принять

$$\begin{aligned} D_L &= \min_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_R)| \} \\ D_R &= \max_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\vec{u}_R)| \} \end{aligned} \quad (6.43)$$

В таком случае условия Гюгонио дают решение

$$\vec{F}^* = \begin{cases} \vec{F}_L & D_L \geq 0 \\ \vec{F}_C & D_L \leq 0 \leq D_R, \\ \vec{F}_R & D_R \leq 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

$$\vec{F}_C = \frac{D_R \vec{F}_L - D_L \vec{F}_R + D_L D_R (\vec{u}_R - \vec{u}_L)}{D_R - D_L} \quad (6.45)$$

В одномерной ГД можно использовать:

$$\begin{aligned} D_L &= \min\{v_L, v_R\} - \max\{c_{s,L}, c_{s,R}\} \\ D_R &= \max\{v_L, v_R\} + \max\{c_{s,L}, c_{s,R}\} \end{aligned} \quad (6.46)$$



# Список литературы

- 1) Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А. Газодинамика тесных двойных звезд. М.: Физматлит, 2013.
- 2) Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- 3) Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Науку, 1966.
- 4) Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003.
- 5) Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. Springer, 2009.