薛定谔方程

一、计算题

1、计算撞击到势垒上的粒子的穿透深度。假定区域 I 中入射电子速度为 1×10^5 m/s。设势垒高度即 U(x)＝2E。（$m=9.11\times10^{-31}\ kg$，$\hbar=1.055\times10^{-34}\ J\cdot s$）

解：区域 I，U(x)＝0，E＝T，故：

$$E=T=\frac{1}{2}mv^2=2.85\times10^{-2}\ \ eV$$

区域 II，假设深度 x＝d 处波函数衰减到 x＝0 处的 e^{-1}，有 $-k_2d=-1$，则：

$$1=d\sqrt{\frac{2m(2E-E)}{\hbar^2}}=d\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

因此：

$$d=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}}=11.6\times10^{-10}\ \ m=11.6\ \text{Å}$$

2 个硅晶格。

2、计算电子穿过势垒的概率。考虑电子能量为 2 eV，势垒高度为 $\boldsymbol{U_0}$＝20 eV，宽度为 3Å。

解：由隧穿概率公式：

$$k_2=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}=\sqrt{\frac{2(9.11\times10^{-31})(20-2)(1.6\times10^{-19})}{(1.064\times10^{-34})^2}}=\boldsymbol{2.17\times10^{10}\ \ m^{-1}}$$

透射系数：

$$T\approx16\left(\frac{E}{U_0}\right)\left(1-\frac{E}{U_0}\right)exp(-2k_2a)$$

$$=16(0.1)(1-0.1)exp[-2\times(2.17\times10^{10})(3\times10^{10})]=3.17\times10^{-6}$$

3、已知在一维无限深势阱中，粒子的定态波函数为$\Psi_n=\sqrt{2/a}\,sin(n\pi x/a)$。求：粒子在 n＝2 的状态时，在 x＝a/3 处和 x ＝0~a/3 之间找到粒子的概率分别是多少？

解：在 n＝2 的状态时，波函数为：

$$\Psi_2=\sqrt{2/a}\,sin(2\pi x/a)$$

概率密度：

$$P=|\Psi_2|^2=\frac{2}{a}sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

在 x＝a/3 处，找到粒子的概率：

$$P_{x=\frac{a}{3}} = |\Psi_2|^2 = \frac{2}{a} sin^2\left(\frac{2\pi}{a}\frac{a}{3}\right)$$

在 x＝0 ~ a/3 之间找到粒子的概率：

$$P_{0\sim\frac{a}{3}} = \int_0^{a/3} |\Psi_2|^2 dx = \int_0^{a/3} \frac{2}{a} sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 26.44\%$$

4、设体系的初始状态为：$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{3}{7}}\Psi_0(x) + \sqrt{\frac{4}{7}}\Psi_2(x)$，其中 Ψ_0 和 Ψ_2 分别是频率为 ν 的 $n = 0$ 和 $n = 2$ 的简谐振子能量本征态。求：$\Psi(x,0)$ 是定态吗？在 $\Psi(x,0)$上测量体系的能量，能测到哪些值？测到这些值的概率是多大？测量值的平均值是多少？

解：（1）$\Psi(x,0)$ 不是定态。

在状态$\Psi(x,0)$上测量体系的能量，测到的值为：

$$E_0 = \frac{1}{2}h\nu$$

$$E_2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right)h\nu = \frac{5}{2}h\nu$$

测到 E_0 的概率：3/7；测到 E_2 的概率：4/7；它们分别等于展开式中相应展开系数的模方。

测量值的平均值：

$$\bar{E} = \frac{3}{7}E_0 + \frac{4}{7}E_2 = \frac{23}{14}h\nu$$