对傅里叶级数的理解

电子 173 班　罗啸

2019 年 10 月 28 日

傅里叶级数是把任意周期函数或周期信号分解成一个（可能由无穷个元素组成的）简单振荡函数的集合，即正弦函数和余弦函数.

这里, 我通过利用仿真软件进行实验的方法加深了对傅里叶级数的理解

一、方案设计

由于任何满足迪利克雷条件的信号都能展开为傅里叶级数，为研究原始信号的输出波形和傅里叶展开后波形的关系，这里需设计一个原始电路和多电源叠加电路。为了方便后续的观察，原始电路采用周期明显的方波信号作为输入源，幅值设为 1V，周期为 20ms. 设计电路图如图 1 所示，其中电阻阻值为 1k.

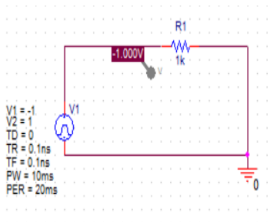

图 1: 原始电路图

对于多电源叠加电路，采用计算的方法求出各阶电路的频率与幅值，再根据计算结果连接电路。

二、方波傅里叶级数展开

对于方波信号，设其周期为 T, 幅值为 1. 则根据傅里叶级数的展开公式，可对其展开式进行求解.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{-T}{2}} x(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{-T}{2}} x(t)\cos{(n\omega_0 t)}dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{-T}{2}} x(t)\sin{(n\omega_0 t)}dt$$

继续求解，得到:

$$b_n = \frac{4}{n\pi}, n = 1, 3, 5$$

$$b_n = 0, n = 2, 4, 6$$

根据傅里叶级数：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(2\omega_1 t\right) + b_n \sin\left(2\omega_1 t\right)\right)$$

代入 a_n b_n 将方波信号的傅里叶级数表示为：

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(2n-1\right)\omega_0 t$$

三、orCAD 软件仿真

利用 orCAD 软件对图 1 原始电路图进行仿真，得到输出波形见图 2，该仿真波形为矩形脉冲源的输出信号，其幅值为 1V，周期为 20ms.

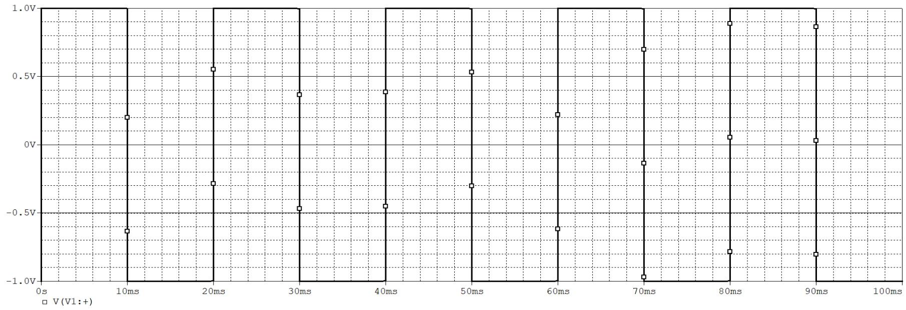

图 2: 原始电路仿真图

3.1 三阶展开仿真

对傅里叶级数进行三阶展开

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\omega_0 t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\omega_0 t\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\omega_0 t\right)\right)$$

设计电路见图 3，即采用三个正弦波电源叠加．其中，电源电压的幅值以及频率均

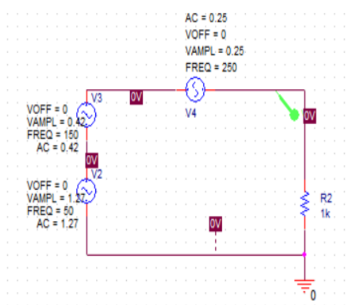

图 3: 三阶展开电路设计

不相等，通过计算三个电源的幅值分别为:1.27V 0.42V 0.25V, 频率分别为 50Hz、150Hz、250Hz．

利用 orCAD 软件连接电路图，并利用 Pspice 对图 3 电路图进行仿真，仿真结果见图 4．

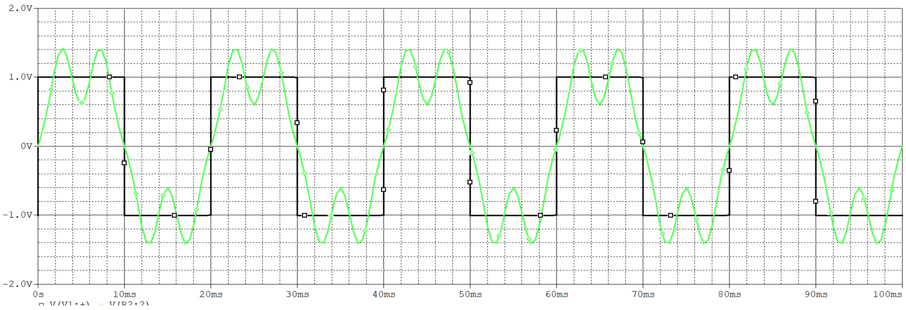

图 4: 三阶展开仿真图

其中类似曲线变化的为三个电源叠加的输出波形，方波为原始电路的输出曲线

观察三阶展开叠加的仿真图，发现虽然三个叠加电源的频率和幅值均不相等，但通过叠加后输出的波形为周期性变化的曲线，且驮载在展开前的输出方波上，周期大致相同.

3.2 七阶展开仿真

与三阶仿真相似，将输入函数进行更高阶的展开，利用多个正弦交流源叠加，观察其输出波形的情况．为了方便起见，这里对方波信号进行七阶展开，即七个电源进行叠加．设计电路图见图 5.

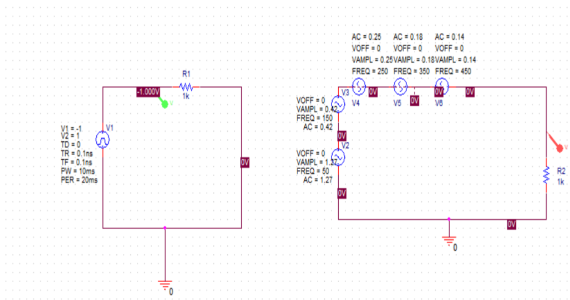

图 5: 七阶展开电路设计

利用 orCAD 软件连接电路图，并利用 Pspice 对图 5 电路图进行仿真，仿真结果见图 6.

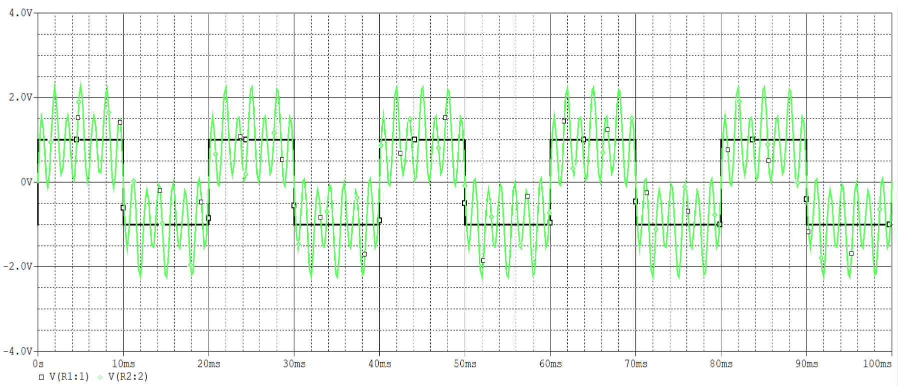

图 6: 七阶展开仿真图

输出波形驮载在未展开的方波信号上，且与方波信号更相似.

由此，可以得出结论：将方波信号进行无穷阶的傅里叶级数展开，其输出波形将无限接近方波信号.

你眼中看似落叶纷飞变化无常的世界，实际只是躺在上帝怀中一份早已谱好的乐章.