量子力学

一、简答题

1、什么是光电效应？请写出爱因斯坦光电效应方程。然后从光子论的角度解释光电效应。

答：光电效应：当波长较短的可见光或紫外光照射到某些金属表面上时，金属中的电子就会从光中吸取能量而从金属表面逸出的现象。

光电效应方程：

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A$$

光子论的解释：当金属中一个自由电子从入射光中吸收一个光子后，就获得能量 h □，如果 h □大于电子从金属表面逸出时所需的逸出功 A，这个电子就从金属中逸出，而成为光电子，即产生光电效应。

2、描述康普顿效应的实验现象，并解释其原因。

答：实验现象：（1）散射光中有 $\lambda' > \lambda_0$ 的谱线。$\Delta\lambda$ 随散射角 θ 的增大而增加，且新谱线的相对强度也增大。（2）在同一散射角 θ 下，λ_0 与散射物无关。（3）原子量越小的物质，康普顿效应越显著。

原因：把 X 射线看做能量为 hν 的光子束的集合。X 射线光子与“静止”的“自由电子”弹性碰撞。光子不仅带有能量，而且具有冲量。当光子与电子碰撞时，光子把部分能量传给电子，光子的 E 下降，由 E＝hν 可知，E 下降，ν 下降，λ 变大。轻原子中的电子束缚较弱，康普顿效应明显。

3、原子模型有哪几种？分别进行解释，并说明其优点和局限性。

答：一、汤姆逊原子结构模型：原子呈球状，带正电荷，带负电的电子一粒粒“镶嵌”在这个圆球上，即“枣糕模型”，或“葡萄干布丁模型”。

优点：第一次较形象地描述了原子模型。

局限：无法解释原子散射实验中的大角度偏转现象。

二、卢瑟福的原子有核模型——“行星模型”：原子有一个小而重的带正电的原子核，几乎集中了原子的全部质量。带负电的电子沿着特定的轨道绕着原子核运行。原子核的尺寸与整个原子相比非常小。即所谓的“行星模型”。

优点：该模型能很好地解释 α 粒子的大角度偏转问题。

局限：但不能解释原子的稳定性问题和原子的大小问题。

三、玻尔模型：（1）定态假设：电子在原子中不可能沿着经典理论所允许的所有轨道运动，而只能在一些特殊的轨道上运动，这些分立的轨道与分立的能量（E_1，E_2，E_3，…）相对应，电子在这样的轨道上运动是处于稳定状态，即定态（Stationary state）。当电子处在这种状态时，它们不吸收也不发生辐射，只有当电子从一个定态跃迁到另一个定态时，才会吸收能量或发生辐射。（2）频率条件：原子在两定态之间跃迁时，将发射或吸收一个光子。吸收或发射辐射的光子频率为：$h\nu = E_2 - E_1$。（3）轨道量子化条件：玻尔根据对应原理（Correspondence Principle）求出氢原子的能级公式，并导出角动量量子化条件：电子在确定轨道上运动时，其轨道角动量 L= mvr 取一些断续值：$L = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}\ \ n = 1,2,3,\cdots$

优点：圆满地解释了氢原子光谱的规律；从理论上算出了里德伯常量；加以修正后能对类氢离子光谱给予说明。

局限：只能说明氢和类氢原子光谱，而不能合理解释其余原子；不能解释氢光谱的谱线强度、发光强度、光谱精细结构、多电子原子的光谱现象。只能处理简单的周期运动，而不能处理非束缚态问题。未解释原子稳定存在的原因，对原子在强磁场中的行为，玻尔也没有解释；并没有从根本上解决能量不连续性的本质。

4、试解释玻尔的原子模型的三个假设。

答：（1）定态假设：电子在原子中不可能沿着经典理论所允许的所有轨道运动，而只能在一些特殊的轨道上运动，这些分立的轨道与分立的能量（E_1，E_2，E_3，…）相对应，电子在这样的轨道上运动是处于稳定状态，即定态（Stationary state）。当电子处在这种状态时，它们不吸收也不发生辐射，只有当电子从一个定态跃迁到另一个定态时，才会吸收能量或发生辐射。（2）频率条件：原子在两定态之间跃迁时，将发射或吸收一个光子。吸收或发射辐射的光子频率为：$h\nu = E_2 - E_1$。（3）轨道量子化条件：玻尔根据对应原理（Correspondence Principle）求出氢原子的能级公式，并导出角动量量子化条件：电子在确定轨道上运动时，其轨道角动量 L= mvr 取一些断续值：$L = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}\ \ n = 1,2,3,\cdots$

5、解释德布罗意波。

答：德布罗意引入物质波的概念，指出电子不仅是粒子，也是波。物质粒子的运动伴随着某种引导波，这些波伴随粒子一起在空间传播。即：电子在运行的时候，伴随着一个速度为 u

＝ c^2/ν_0 的波，称为“相波”，即德布罗意波。

解释：自然界是对称统一的。实物粒子（如电子，质子，中子等）和光子一样，也具有波粒二象性。如果用能量 E 和动量 p 来描述实物粒子的粒子性，则可用频率 ν 和波长 λ 来表征实物粒子的波动性。

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

二、计算题

1、测量得知，太阳光谱单色辐出度的峰值所对应的波长 λ_m 约为 483 nm。试由此估计太阳表面的温度？（$b = 2.897 \times 10^{-3}\ m \cdot K$）

解：把太阳背景视为黑体，太阳可视为黑体中的小孔。

由维恩位移定律：

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{483 \times 10^{-9}} \approx 6000\ K$$

2、波长为 λ_0＝0.2Å 的 X 射线与静止的自由电子碰撞，现从和入射方向成 90° 角的方向去观察散射线。求： (1) 散射 X 射线的波长；(2) 反冲电子的动能；(3) 反冲电子的动量。已知：$\lambda_e = 0.024$Å

解：(1) 因为散射角：$\theta = 90^\circ$，$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_e(1 - cos\theta) = \lambda_e$，$\lambda_e = 0.024$Å

故：散射波长：$\lambda = \lambda_0 + \lambda_e = 0.224$Å

（2）根据能量守恒：

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + mc^2$$

反冲电子的动能为：

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = 6.8 \times 10^3\ eV$$

（3）根据动量守恒，有：

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda} cos90^\circ + mvcos\varphi$$

$$0 = \frac{h}{\lambda} sin90^\circ - mvsin\varphi$$

$$mv = h\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2}} = 4.5 \times 10^{-23}\ \ kgm/s$$

$$\varphi = tg^{-1}(\lambda_0/\lambda) = 42°$$

3、求 $m = 1.0 \times 10^{-3}\, kg$ 的宏观粒子以 $1.0 \times 10^{-2}\, m \cdot s^{-1}$ 的速度运动时，粒子的 de Broglie 波长。（$h = 6.625 \times 10^{-34}\, J \cdot s$）。

解：

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s}{1 \times 10^{-3}\, kg \times 1.0 \times 10^{-2}\, m \cdot s^{-1}} = 6.626 \times 10^{-29}\, m$$

4、一颗质量为 10 g 的子弹，具有 200 m·s⁻¹ 的速率，若其动量的不确定范围为动量的 0.01 %，则该子弹位置的不确定量范围为多大? （$h = 6.625 \times 10^{-34}\, J \cdot s$）

解：子弹的动量：

$$p = mv = 0.01 \times 200 kg \cdot m \cdot s^{-1} = 2.0 kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

动量的不确定范围：

$$\Delta p = 0.01\% \times p = 1.0 \times 10^{-4} \times 2 kg \cdot m \cdot s^{-1} = 2.0 \times 10^{-4} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

由不确定关系式，得子弹位置的不确定范围：

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2.0 \times 10^{-4}} m = 3.3 \times 10^{-30} m$$

5、一电子具有 200 m·s⁻¹ 的速率，动量的不确定范围为动量的 0.01 %，则该电子的位置不确定范围有多大? （$m = 9.11 \times 10^{-31}\, kg$，$h = 6.625 \times 10^{-34}\, J \cdot s$）

解：电子的动量为：

$$p = mv = 9.1 \times 10^{-31} \times 200 kg \cdot m \cdot s^{-1} = 1.8 \times 10^{-28} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

动量的不确定范围：

$$\Delta p = 0.01\% \times p = 1.0 \times 10^{-4} \times 1.8 \times 10^{-28} kg \cdot m \cdot s^{-1} = 1.8 \times 10^{-32} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

由不确定关系式，得电子位置的不确定范围：

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.8 \times 10^{-32}} m = 3.7 \times 10^{-2} m$$

三、证明题

1、证明 Plank 公式在高频区化为 Wein 公式，在低频区化为 Rayley-Jeans 公式。

证明：Plank 公式为：

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

或写为：

$$\rho_\nu d\nu = \frac{C_1 \nu^3 d\nu}{e^{\frac{C_2 \nu}{T}} - 1}$$

其中：

$$C_1 = \frac{8\pi h}{c^3}, \ C_2 = \frac{h}{k}$$

在高频区：

$$e^{h\nu/kT} \gg 1$$

$$\therefore \rho_\nu = C_1 \nu^3 e^{-C_2 \nu/T} d\nu$$

即维恩公式。

在低频区：

$$e^{h\nu/kT} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} = 1 + C_2 \frac{\nu}{T}$$

$$\therefore \rho_\nu d\nu = \frac{C_1 \nu^3 d\nu}{e^{C_2 \nu/T} - 1} = \frac{C_1 \nu^3 d\nu}{C_2 \nu/T} = \frac{C_1}{C_2} T \nu^2 d\nu$$

即瑞利—金斯公式。

2、试由 Plank 公式推导出 Wein 位移公式。

解：由公式：

$$M_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

令：

$$x = \frac{hc}{k\lambda T}$$

上式化为：

$$M_x(T) = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

求极值：

$$\frac{dM_x(T)}{dx} = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x - 1}\right) = 0$$

有：

$$5e^x - xe^x - 5 = 0$$

解得：x＝4.965。

所以：

$$x = \frac{hc}{k\lambda T} = 4.965$$

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4.965k} = 2.898 \times 10^{-3} m \cdot K$$

即维恩位移公式。