

## 2015级高等数学A(1)期末考试试题

### 一. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若曲线  $xy = a$  与直线  $y = 2x - 1$  相切, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.
2. 已知点  $x = 0$  是函数  $y = \frac{e^{2x} + k}{x}$  的第一类间断点, 则常数  $k =$ \_\_\_\_\_.
3. 曲线  $y = \ln x$  在点  $(1, 0)$  处的曲率为\_\_\_\_\_.
4. 函数  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}$  的单调减少区间为\_\_\_\_\_.
5. 设  $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 1 \text{ or } x > 2, \end{cases}$ , 则函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt =$ \_\_\_\_\_.

### 二. 计算题 (每小题 6 分, 共 42 分)

6. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + x}}{x^2 \sin 3x}$ .
7. 设  $y = y(x)$  是由  $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = t - e^{-t} \end{cases}$  所确定的函数, 计算二阶导数  $y''(1)$ .
8. 将函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 (1 + \frac{1}{n})^{nx}$  展开成带佩亚诺(Peano)余项的 7 阶麦克劳林 (Maclaurin) 公式, 并求  $f^{(7)}(0)$ .
9. 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ .
10. 求不定积分  $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ , 其中  $a > 0$ .
11. 设  $f(x)$  为连续函数, 且满足  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + x^2} - \int_{-1}^1 f(x) dx$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
12. 求初值问题  $(1 + x^2)dy - (\arctan x - y)dx = 0, y(0) = 0$  的特解.

### 三. 应用题 (每小题 9 分, 共 27 分)

13. 若连续函数  $f(x)$  满足方程  $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ , 求该函数  $f(x)$ .

14. 一个对称的正十字图形(如图所示), 其外接圆的半径为  $R$ , 正十字形的边长所张的圆心角为  $\varphi$ . 问当  $\varphi$  为多少时, 该十字图形的面积最大, 并求其最大面积.

15. 已知某容器内表面形状可视为由曲线段  $y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ x^2 - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ , (单位: m) 绕  $y$  轴旋转

一周所成. (1) 求该容器的容积; (2) 若该容器盛满水, 求将水全部提升到高出容器 1m 的地方所做的功. (水的密度  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ )

#### 四. 证明与讨论题( 每小题 8 分, 共 16 分)

16. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且单调增加,  $a > 0$ . (1) 证明

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx;$$

(2) 试列举一个函数, 使得上述不等式得等号成立.

17. 设函数  $f(x)$  对一切实数  $x$  满足关系式  $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$ , (1) 若  $f(x)$  在点  $x = c (c \neq 0)$  处有极值, 问它是极大值还是极小值? 为什么? (2) 若  $f(x)$  在点  $x = 0$  处有极值, 问它是极大值还是极小值? 为什么?