1. (6 分）解

方法一：

将原行列式各列加到第一列并提取公因式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+x \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (10+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+x \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (10+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (10+x)x^3 .$$

故解方程 $(10+x)x^3=0$ 得到： $x=-10$ 和 $x=0$.

方法二：

将原行列式按各列分解为两个行列式之和，并删掉等于零的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+x \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ x & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & x & 3 & 0 \\ x & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & x & 4 \\ 0 & x & 0 & 4 \\ x & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^3 + 2x^3 + 3x^3 + 4x^3 + x^4 = (10+x)x^3 .$$

故解方程 $(10+x)x^3=0$ 得到： $x=-10$ 和 $x=0$.

方法三：

观察发现，原行列式展开一次项、二次项均为 0，故原方程是有一个三重根 $x=0$.

计算 x^3 项的系数可知其等于 10， x^4 项的系数等于 1.

于是原方程有解 $x=-10$ 和 $x=0$.

2（6 分）**解**：$|A_1|=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-1,\ \ |A_2|=2,$

$\because |A_1|\neq 0, A_1$ 可逆，且 A_2^{-1} 可逆，

$\therefore B=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2^{-1}\end{bmatrix}$ 可逆，从而 B^* 可逆，且

$$|B^*|=|B|^{4-1}=|B|^3=\left(|A_1|\cdot|A_2^{-1}|\right)^3=\left(|A_1|\cdot|A_2|^{-1}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}.$$

3.（6 分）**解**：

$$AX+E=A^2+X\Rightarrow (A-E)X=A^2-E=(A-E)(A+E)$$

$$\because\ A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 5\\ 1 & -4 & 1\end{bmatrix},\quad A-E=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 5\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix},\quad |A-E|\neq 0.$$

$$\therefore\ A-E \text{ 可逆，从而 } X=A+E=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 5\\ 1 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

4.（6 分）**解**：由题意，A 的特征值为 $1,-2,3$，

则 $|A|=1\times(-2)\times 3=-6$，

设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是矩阵 A^* 的特征值，则

$$\mathrm{tr}A^*=A_{11}+A_{22}+A_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{|A|}{1}+\frac{|A|}{-2}+\frac{|A|}{3}=-5$$

5.（6 分）**解**：由题意，知 A 的特征值为 $-1,1,0$，

因此 $2E+3A$ 的特征值为 $2+3\times(-1), 2+3\times 1, 2+3\times 0$，即 $-1,5,2$，

$\therefore |2E+3A|=(-1)\times 5\times 2=-10$.

6.（6 分）解：

$$\begin{aligned} A^{100} &= (P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q) \\ &= P\Lambda(QP)\Lambda(QP)\cdots(QP)\Lambda Q = P\Lambda^{100}Q \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7（6 分）解：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故矩阵$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$可逆. 又$\operatorname{rank}A=2$，则

$$\operatorname{rank}[A\alpha_1\ A\alpha_2\ A\alpha_3] = \operatorname{rank}(A[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]) = \operatorname{rank}A = 2.$$

8.（10 分）解：

设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为C，则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} C$

$$\therefore C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

又 $\xi = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)C^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore \xi$在基β_1,β_2,β_3下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

9.（10分）解：

设 $A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]$，对 A 进行初等行变换，化为最简行阶梯形.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\4&5&2&2\\1&-1&5&2\\0&-3&6&-1\\2&2&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4].$$

(1) $\operatorname{rank}A=3$，故向量组的秩为3，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

(2) A 的最简行阶梯形中基本向量 e_1,e_2,e_3 在1,2,4列，故 A 有一个极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；

(3)　由于 $\beta_3=3\beta_1-2\beta_2$，知 $\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2$.

10.（10分）解：对此方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-3&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-7&5&-9&5\\0&-15&10&-18&10\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-7&5&-9&5\\0&-1&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3&5&-2\\0&1&0&0&0\\0&0&5&-9&5\end{bmatrix}.$$

原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1-3x_3+5x_4=-2,\\ \qquad\qquad x_2=0,\\ \quad 5x_3-9x_4=5.\end{cases}$$

此方程组对应导出组的基础解系和一个特解为

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}2\\0\\9\\5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_0=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

故通解为 $\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0\qquad k\in\mathbb{R}$.

11.（10 分）解：

(1) 二次型及其对应的标准形的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & a\\ -1 & a & 1\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & b\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,b$，从而由

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-a^2-2a-1=0$$

知 $a=-1$，又 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$，则 $b=-1$．于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,-1$．

对于 $\lambda=2$，解 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}，\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda=-1$，解 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得

$$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

所求正交矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\ \ \boldsymbol{q}_2\ \ \boldsymbol{q}_3]=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,-1$，故 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $4,4,1$，则 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的所有特征值为正，

从而 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

12.（**10 分**）**解：**

（1）由题目条件 $A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$A$ 不可逆可知，$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=0$ 是 A 的特征值。A 对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},k\neq 0$，对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},k\neq 0$。

令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ 是 A 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量，则有

求得 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_1-x_3=0\end{cases}$，求得 A 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $k\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},k\neq 0$。

（2）取 $p_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},p_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$。令 $P=[p_1\ \ p_2\ \ p_3]$，则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

从而得到 $A=P\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

13.（8 分）**解：**

(1) 若记 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3], B=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$，则 $[A\alpha_1，A\alpha_2，A\alpha_3]=PB.$，因 $|B|=9\neq 0$，

故 B 可逆，故 $\operatorname{rank}[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=\operatorname{rank}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=3$，故 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 也线性无关.

(2) 因 $AP=[A\alpha_1，A\alpha_2，A\alpha_3]=PB$，故 $A=PBP^{-1}$，故

$$|A-2E|=|B-2E|=\begin{vmatrix}-1&0&2\\2&-1&0\\0&2&-1\end{vmatrix}=7$$