

2022年湖南大学课程考试试卷

1. 若 $f(x)$ 是 x 的二次函数, 且 $f(0) = 1$, $f(x+1) - f(x) = 2x$, 求 $f(x)$ 的表达式

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right)}{e^x - 1} = 3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{\sin(bx)}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 试确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$

6. 求 $\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}} dx$

7. 求方程 $xy' - y = x \tan \frac{y}{x}$ 的通解

8. 设 $y = f(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

9. 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1 + \cos x}, & -1 < x < 0 \end{cases}$, 计算 $\int_1^4 f(x-2) dx$

11. 设 $f(t) = \int_1^t e^{-x^2} dx$, 求 $\int_0^1 t^2 f(t) dt$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = 1 + \int_1^x \frac{x f(t)}{t^2} dt$, 求 $f(x)$

13. 求曲线 $y = \ln x$ 在区间 $(2, 6)$ 内的一条切线, 使该切线与 $x = 2$ 、 $x = 6$ 及 $y = \ln x$ 所围面积最小

14. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明: 对任意正数 a, b , 存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi_1)} + \frac{b}{f'(\xi_2)} = a + b$$

