

2021年《高等数学A1》真题

1. 求下列函数的极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

2. 求函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\sin x}$ 的所有间断点，并指出各间断点的类型

3. 设 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 确定的函数 $y = f(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 以及 $y = f(x)$ 在 $t = \frac{\pi}{3}$ 时的切线方程

4. 求函数 $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的拐点和凹凸区间

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b + \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 。试确定 a, b 的值，使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

6. 求下列不定积分和定积分：

$$(1) \int e^{2x} \cos x dx$$

$$(2) \int_{-1}^1 \left(\frac{x-1}{x^2+2} + \sqrt{1-x^2} \right) dx$$

7. 设抛物线 $y^2 = 2x$, 计算该抛物线在点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 处的法线方程，以及该法线与该抛物线所围图形的面积

8. 计算曲线 $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $0 \leq x \leq 2$ 的弧长

9. 设隐函数方程 $y = 1 + x^y$ 确定的函数 $y = f(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$

10. 求解初值问题： $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微，且 $f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt + \sin x$, 求 $f(x)$

12. 求 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式，并估计 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值，使得误差小于 0.002

13. 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$, $x = 2$ 以及 $y = 0$ 所围成的平面区域。 D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$ 以及 $y = 0$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$ 。

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1

(2) 求 D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2

(3) 试问当 a 取何值时， $V_1 + V_2$ 取最大值？并求该最大值

14. 已知 $f(x)$ 具有连续的导函数，且满足

$$a < f(x) < b, \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| < 1$$

- (1) 证明存在唯一的 $x^* \in (a, b)$ 使得 $f(x^*) = x^*$
- (2) 对于任意的 $x_0 \in [a, b]$, 证明由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛于(1)中的点 x^*