诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

考试中心填写:

____年___月___日
考　试　用

湖南大学课程考试试卷

湖南大学课程考试试卷

专业班级:　　学号:　　姓名:

装订线(题目不得超过此线)

湖南大学教务处考试中心

课程名称: 线性代数 A ;课程编码: GE03003 试卷编号: A ;考试时间:120 分钟

题　号	1~3	4~5	6~7	8	9~10						总分
应得分	30	20	20	12	18						100
实得分											
评卷人											

1.(10 分)计算 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}$.

2.(10 分)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&1&\cdots&1\\1&1&a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a_n\end{vmatrix}$,其中 $\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)\neq 0$.

3.（10 分）已知 A、B 为三阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$，其中 E 是三阶单位矩阵.

（1）证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；

（2）若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A.

湖南大学课程考试试卷

装订线（题目不得超过此线）

4.（10 分）已知矩阵 $A=PQ$，其中 $P=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A, A^n，其中 n 为正整数.

5.（10 分）求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T, \alpha_2=(0,3,1,2)^T, \alpha_3=(3,0,7,14)^T$, $\alpha_4=(1,-2,2,0)^T, \alpha_5=(2,1,5,10)^T$ 的一个最大无关组，并把其余向量用这个最大无关组线性表示.

湖南大学教务处考试中心

6.（10 分）在 R^3 中，由基 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求

（1）由基 β_1,β_2,β_3 所构成的矩阵 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$；

（2）向量 $\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

7.（10 分）已知四阶方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，这里 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $AX=\beta$ 的通解.

8.（12 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & x\\ y & -24 & 13\end{bmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=1$ 是 A 的二重特征值。试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵，并写出其对角形矩阵.

湖南大学课程考试试卷

装订线（题目不得超过此线）

湖南大学教务处考试中心

9.（6 分） 设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，证明：$E+A$ 的行列式大于 1.

10. （12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $X=QY$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；

（3）二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是何几何形状.

提醒：请诚信应考，考试违规将带来严重后果！

教务处填写：

____年___月___日

考　试　用

湖南大学课程考试试卷

课程名称：线性代数 A；课程编码：GE03003；

试卷编号：A；考试形式：闭卷；考试时间：**120** 分钟。

题　号	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11					总分
应得分	16	16	18	20	18	12					100
实得分											
评卷人											

湖南大学课程考试试卷

专业班级：

学号：

姓名：

装订线（题目不得超过此线）

湖南大学教务处

1. （8 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

2. （8 分）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 A^n.

3. （8 分）设 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$， B 为四阶非零矩阵，且 $AB=0$，求 k 的值.

4. （8 分）求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,1,0)^T, \alpha_2=(2,1,4,-2,0)^T, \alpha_3=(3,0,6,-1,0)^T, \alpha_4=(0,3,0,0,1)^T$ 的一个最大无关组，并把其余向量用这个最大无关组线性表示.

湖南大学课程考试试卷

装订线（题目不得超过此线）

湖南大学教务处

5. （6 分）若矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵，求 a 的取值.

6. （12 分）设 R^3 中的两组基为 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$,

$\beta_1=(1,-1,0)^T,\beta_2=(2,1,3)^T,\beta_3=(3,1,2)^T$，求

（1）由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 A；

（2）向量 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

7. （8 分）求一个齐次线性方程组，使得它的基础解系为$\xi_1=(0,1,2,3)^T,\xi_2=(3,2,1,0)^T$.

8. （12 分）当λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=\lambda\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-1\\ \lambda x_1+x_2+2x_3=1\end{cases}$有解？并写出无穷解时的通解.

湖南大学课程考试试卷

9.（8 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\xi_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^3-4A+E$，这里 E 为三阶单位矩阵. 求 B 的全部特征值和对应的特征向量.

装订线（题目不得超过此线）

10. （10 分）在某地，每年有比例为 $\dfrac{3}{4}$ 的农村居民移居城镇，有比例为 $\dfrac{1}{20}$ 的城镇居民移居农村。假设某地的总人口数不变，且上述人口迁移的规律不变。若该地在 2000 底的农村人口和城镇人口相等，请预测在 2019 年底该地的农村人口和城镇人口占总人口的比例分别是多少？

湖南大学教务处

11. （12 分）求一个正交变换 $X = QY$ ，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 化成标准型，并说明曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是何几何形状.

线性代数 A 试卷

一、填空题 （每题 5 分，共 40 分）

1、三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$_______.

2、设 A 是三阶方阵，且$|A| = 2$，则$|2A^{-1} - 3A^*| =$________.

3、设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha, \beta$均为 4 维列向量，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha), B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$，且

$|A| = 2, |B| = 3$，则$|A + 2B| =$_______.

4、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是线性方程组$AX = b(b \neq 0)$的解，若要$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$也是

线性方程组$AX = b$的解，需要满足的条件是________________________.

5、若三阶方阵 A 的特征值为$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$，则$|A^{-1} + E| =$_______.

6、二次型$f = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} X$对应的矩阵为___________.

7、在R^3中，由基$\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T$到基

$\beta_1 = (1,0,1)^T, \beta_2 = (0,1,-1)^T, \beta_3 = (1,2,0)^T$的过渡矩阵为_________.

8、若二次型$f = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$为正定二次型，则 k 的取值为

________.

二、计算题（每题 10 分，共 60 分）

9、计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a+a_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+a_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+a_3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+a_n \end{vmatrix}$,这里$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

10、设$AP=PB$，其中$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求$A^n$.

11、求向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)^T$，$\alpha_5=(2,1,5,10)^T$的秩及一个最大无关组，并把其余向量用你选定的最大无关组线性表示.

12、设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，

求（1）x 与 y 的值；

（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

13、已知线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=4,\\x_1+\mu x_2+x_3=3,\\x_1+3\mu x_2+x_3=9,\end{cases}$ 问 λ,μ 为何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？并求出无穷多解时的通解.

14、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，

求（1）a 的值；

(2) 求一个正交矩阵 P，将二次型化为标准型；

(3) 判断二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的几何形状.

提醒：请诚信应考，考试违规将带来严重后果！

教务处填写：

____年___月___日
考　试　用

湖南大学课程考试试卷

课程名称：　　　线性代数 A　　　　　；课程编码：　　GE03003　　；

试卷编号：　　A　　；　考试形式：　闭卷　；　　考试时间：**120** 分钟。

题　号	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12				总分
应得分	12	14	18	22	16	18				100
实得分										
评卷人										

湖南大学课程考试试卷

专业班级：

学号：

姓名：

湖南大学教务处

装订线（题目不得超过此线）

1. (6 分) 设 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 A 中的元素 a_{ij} 对应的代数余子式，

求 $-A_{41}-2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}$ 的值.

2. (6 分) 计算 n 行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

3.（6 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -7 & 2\end{pmatrix}$，求 A 的逆矩阵 A^{-1}.

4.（8 分）设向量组 $\alpha_1=(1,-1,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(3,\ 0,\ 4,\ -2)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(3,0,1,0)$, $\alpha_4=(1,2,1,-1)$，判断 $\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4$ 能否构成 R^4 空间的基, 并说明理由.

湖南大学课程考试试卷

装订线（题目不得超过此线）

湖南大学教务处

5.（8 分）设 $\alpha=(1,-2,5)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$， 求 A^5.

6.（10 分）设向量组 $\alpha_1=(1,4,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(2,1,-1,-3)^{\mathrm{T}}$，

$\alpha_3=(1,0,-3,-1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_4=(0,2,-6,3)^{\mathrm{T}}$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩，并求它的一个最大无关组.

7.（10 分）已知 R^3 的两组基分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$\beta_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$， $\beta_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$， $\beta_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$，(1)求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 A; (2)求向量 $\eta=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

8. （12 分）讨论 λ 为何值时， 非齐次方程组 $\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3=1,\\-x_1+\lambda x_2-x_3=-\lambda,\\-x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$ （1）无解？（2）有唯一解？ （3）有无穷多解？并求无穷多解时的通解.

湖南大学课程考试试卷

9. (8 分) 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 $2, 1, -1$, 令 $B = f(A) = A^2 + 3A - 5E$,

求 B 的所有特征值，并求 B 的行列式 $|B|$.

装订线（题目不得超过此线）

10. (8 分) 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 6，3，3，特征值 6 对应的特征向量为

$p_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，特征值 3 对应的特征向量分别为 $p_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$， $p_3 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

求矩阵 A.

湖南大学教务处

11. (12 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

(1) 求此二次型对应矩阵的特征值；(2) 求正交变换 $x = Py$，使二次型 f 化为标准型.

12. (6 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，且 $B = \lambda E + A^{\mathrm{T}} A$, 证明：当 $\lambda > 0$ 时，二次型 $x^{\mathrm{T}} Bx$ 为正定二次型.

2022年上半年线性代数A试题（A卷）

一、计算题 I（每题6分，共42分）

1、计算 n 阶行列式行列式 $\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{x} \end{vmatrix}$ 的值。

2、若 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2}$ 都是四维列向量，且四阶行 $\boldsymbol{|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=2,|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=3}$，求四阶行列式 $\boldsymbol{|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|}$ 的值。

3、已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A^{-1}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A^*}$ 的逆矩阵。

4、若四阶方阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 $\boldsymbol{2,3,4,5}$，求行列式 $\boldsymbol{|B^{-1}-E|}$ 的值，这里 E 是四阶单位矩阵。

5、已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵$X$满足

$\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$，求矩阵$X$。

6、设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1,a)^T$，若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为2，求$a$的值。

7、当a取何值时，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+2ax_2x_3$为正定二次型。

二、计算题II（每题10分，共30分）

8、设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^T$。问$a$为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关？当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时，求其一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表出。

9、在$\boldsymbol{R}^3$中，求由基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T$到基$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,3)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2)^T$的过渡矩阵，并求向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

10、求一个正交变换，化二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$为标准型，并指出方程

$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面。

三、综合题（11和12题各10分，13题8分，共28分）

11、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2\\ a\\ -2\end{pmatrix}$。讨论方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$解的情况，在有解时，求出它的解。

12、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$。

（1）求 a，b 的值；　　（2）求可逆矩阵 P，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

13、若 A，B 均为三阶方阵，且 A 有特征值 2, 3, 4，又 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，求行列式 $\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right|$ 的值。

湖南大学课程考试试卷

课程名称：<u>线性代数 A</u>；课程编码：<u>GE03003</u>；试卷编号：<u>A</u>；考试时间：120 分钟

一、计算题 I（每小题 6 分，共 42 分）

1. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+x \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

2. 已知 $A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}, B^*$ 为 B 的伴随矩阵，求 $\left|B^*\right|$.

3. 设矩阵 X 满足关系 $AX + E = A^2 + X$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$，$E$ 为三阶单位阵，求矩阵 X.

4. 设三阶实矩阵$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$的特征值为$1,-2,3$, $A_{ij}\left(i,j=1,2,3\right)$为$A$中元素$a_{ij}$的代数余子式，求$A_{11}+A_{22}+A_{33}$.

5. 设A是正负惯性指数均为 1 的 3 阶实对称矩阵，且满足$\left|E+A\right|=\left|E-A\right|=0$，求$\left|2E+3A\right|$.

6. 设$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，且$A=P\Lambda Q$，求$A^{100}$.

7. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三个线性无关的列向量，求向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩.

二、计算题 II（每小题 10 分，共 30 分）

8. 设$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$为$R^3$的一组基，$\beta_1=(1,2,1)^T$，$\beta_2=(2,3,4)^T,\beta_3=(3,4,3)^T$为$R^3$的另一组基，求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵，并求向量$\xi=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标.

9. 设 $\alpha_1=(1,4,1,0,2)^T,\alpha_2=(2,5,-1,-3,2)^T,\alpha_3=(-1,2,5,6,2)^T$，$\alpha_4=(0,2,2,-1,0)^T$，

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩并讨论线性相关性；

(2) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组；

(3) 把其余向量表示成极大线性无关组的线性组合.

10. 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\3x_1-3x_2+x_3-3x_4=4,\\x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2.\end{cases}$

三、综合题（11 和 12 题各 10 分，13 题 8 分，共 28 分）

11. 设实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$ 通过正交变换可化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$.

(1) 求 a,b 及所用正交变换矩阵 Q；

(2) 证明 $A+2E$ 为正定矩阵, 其中 A 是二次型 f 的矩阵.

12. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 不可逆，且 $A\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量；

(2) 求矩阵 A.

13. 设3维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，A 为三阶方阵，且 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_3+2\alpha_1$，

(1) 证明 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 也线性无关.

(2) 计算行列式 $|A-2E|$，其中 E 为单位阵.

2024.06.19 线性代数参考解答

1．（8 分）设 A 是三阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

2．（8 分）设行列式 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，

求（1） $A_{31}+A_{32}+A_{33}$；（2） $A_{34}+A_{35}$.

3. (8 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=X+B$.

4. (10 分) 已知矩阵 A 和矩阵 B 的逆矩阵 A^{-1},B^{-1} 都存在，求分块矩阵 $P=\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 P^{-1}.

5.(10 分)求向量组

$$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T,\alpha_4=(1,-2,2,0)^T,\alpha_5=(2,1,5,10)^T$$

的秩及一个最大线性无关组.

6.(12 分)已知 R^3 的两组基(I) $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$;(II) $\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(1,2,0)^T$,求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵,并求向量 $\xi=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

2024.06.19 线性代数参考解答

7. (10 分) 当 a 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 1 \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$

无解、有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

2024.06.19 线性代数参考解答

8. (12 分) 已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1, y_0=0, z_0=2$，且

$$\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases} \quad n\geq 1, \quad 记\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, 写出满足\alpha_n=A\alpha_{n-1}的矩阵$$

A，并求出 A^n 及 x_n, y_n, z_n.

2024.06.19 线性代数参考解答

9. (12 分)已知二次型 $f = x^T Ax = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经正交变换化为 $3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2$，

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求所用的正交变换 $x = Cy$.

10. (10 分)设 A^* 为 n 阶实方阵 A 的伴随矩阵，证明：

(1) 若 A 是正定矩阵，则 A^* 为正定矩阵；(2) 若 n 为偶数，且 A^* 为正定矩阵，则是 A 是正定矩阵.

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

湖南大学课程考试试卷

课程名称：线性代数 A；课程编码：GE03003；试卷编号：A；考试时间：120 分钟

姓名：______________；学号：__________________；专业班级：_____________________.

1．(8 分) 设 $f(x)=x^2-x-1$, 对于 n 阶方阵 A, 定义 $f(A)=A^2-A-E$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵，若 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

2．(8 分) 求下列行列式的值：

$$D_5=\begin{vmatrix}a^4&(a-1)^4&(a-2)^4&(a-3)^4&(a-4)^4\\a^3&(a-1)^3&(a-2)^3&(a-3)^3&(a-4)^3\\a^2&(a-1)^2&(a-2)^2&(a-3)^2&(a-4)^2\\a&a-1&a-2&a-3&a-4\\1&1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

3. (10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -4 \\ -5 & 3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$, 且 $AX=B$, 求矩阵 X .

4. (10 分) 设有分块矩阵 $P=\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$,其中 A,B 皆为可逆矩阵， 求 P^{-1}.

5 . (10 分) 已知向量组 $\alpha_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(3,0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,3,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(2,1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_5=(0,-2,1,1)^{\mathrm{T}}$, 求该向量组的秩并求一个极大无关组.

6.（12 分）已知 R^2 的两组基 α_1, α_2 与 e_1, e_2，求一个非零向量 $\beta \in R^2$，使得 β 关于这两组基有相同的坐标，并求 β 关于第三组基 ξ_1，ξ_2 的坐标，其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}，\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix};\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.（12 分）p,t 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$ 无解、有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

8.（10 分）设矩阵 A，B 相似，其中 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

（1） 求 x, y 的值；　　（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

9.（12 分）已知二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\,(b>0)$, 其中 A 的特征值之和为 1， 特征值之积为 -12.

（1） 求 a, b 的值；　　（2）求正交变换 $x=Py$, 将二次型 f 化为标准形.

10.(8 分)设 A 为 n 阶实方阵，利用二次型证明

(1) $A^{\mathrm{T}}A$ 是半正定矩阵； (2) 若 A 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}A$ 是正定矩阵.