高数 A(1)期末考试题 A 卷参考答案(2024.11.)

一. 计算题 I (每题 6 分，共 42 分)

1. 解. 由于 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x-1}=\infty$，所以曲线有一条铅直渐近线 $x=1$． 又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$，所以曲线有一条水平渐近线 $y=2$．曲线没有斜渐近线.

2. 解. 由于 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ 在 $x=0$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处均无定义，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}\\(k\in Z)}}\dfrac{\tan x}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 是第一类间断点，并且是可去间断点；$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是第二类间断点(无穷间断点).

3. 解. $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 对应的点为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$. 切线斜率为

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{2\cos\theta}{-\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-2.$$

切线方程为 $y-\sqrt{2}=-2\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$， 即 $2x+y-2\sqrt{2}=0$．

4. 解. 将 $x=0$ 代入方程得 $y=2$．

在原方程两边同时对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，得

$$(y+xy')e^{x^2y^2}+y'e^x+ye^x=0.$$

将 $x=0,y=2$ 代入上式，得 $y'|_{x=0}=-4$. 故 $dy|_{x=0}=-4\,dx$.

5. 解. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **(3 分)** $y''=-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

6. 解. 定义域为 $(-\infty,+\infty)$．$f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处均不可导. 当 $x\neq 0,1$ 时, 有

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{3}-x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=\frac{1}{3}$.

因为当 $x<0$ 和 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 内单增；当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 内单减；于是 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 处取极大值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. 又因当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单增，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 $f(1)=0$.

7. 解. 取 $x=y=0$, 得 $f(0)=2f(0)$, 故 $f(0)=0$. 于是由已知条件, 有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x f(\Delta x)-e^x f(0)+e^{\Delta x}f(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=e^x f'(0)+f(x)=e^{x+1}+f(x).$$

解微分方程 $f'(x)=e^{x+1}+f(x)$，得

$$f(x)=e^{\int dx}\left(\int e^{x+1}e^{-\int dx}dx+C\right)\quad =xe^{x+1}+Ce^x.$$

又由 $f(0)=0$，得 $C=0$. 故 $f(x)=xe^{x+1}$.

二. 计算题II(每题 8 分，共 32 分)

8. 解法一. 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-x})(x^2-x\ln(1+x))}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2-x\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]}{x^2-x\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}\quad =\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=\frac{1}{6}.$$

解法二. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-x})(x^2-x\ln(1+x))}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2-x\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x-\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x+2x^2-(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x-\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{4-\frac{1}{1+x}}\quad =\frac{1}{6}$$

9. 解法一. 令$t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$，则$x=\dfrac{1}{t^2-1}$，$dx=-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}dt$，从而有

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{-2t^2}{(t^2-1)^2}dt$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-1}-2\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

$$=-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)^2dt$$

$$=-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{dt}{t^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C$$

$$=\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\sqrt{x(1+x)}+C.$$

解法二.　$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

$$= \int \frac{d(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x}} + \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1+x)}}$$

$$= \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

10. 解.　设 $x = \tan t$，则　$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sec^4 t}\cdot \sec^2 t\, dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos^2 t dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t(1+\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos 2t\, dt$$

$$= \frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

11. 解. 特征方程为 $\lambda^2+1=0$. 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$. 于是原方程对应的齐次方程的

通解为　$Y = C_1\cos x + C_2 \sin x.$

对非齐次方程　$y'' + y = \sin 2x$　①

可设其特解为 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$,　代入方程①，得

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \sin 2x$$

由此得　$A = 0,\ B = -\frac{1}{3}.$

于是 $y^* = -\frac{1}{3}\sin 2x.$　故原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x.$$

三. 应用题(第 12 题 12 分，第 13 题 8 分，共 20 分)

12. 解. (1) $A=\int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx+\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}\right)dx \quad =\frac{1}{3}$.

或 $A=\int_0^1 (y^2+1-2y)\,dy$ (**4** 分) $=\frac{1}{3}$.

(2) $A=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 1-\pi\int_0^1 [2-(y^2+1)]^2\,dy \quad =\frac{4\pi}{5}$.

13. 解. 质量为 m 的物体与地球中心相距 x 时，引力为 $F=G\cdot\frac{mM}{x^2}$,其中 M 为地球质量, 由于 $mg=G\cdot\frac{mM}{R^2}$，因此有 $G=\frac{R^2 g}{M}$， 从而把质量为 m 的物体送到离地面高 h 处，克服地球引力所做的功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}dx$$

$$=\frac{mgRh}{R+h}$$

$$=1123668000\ (焦耳)$$

$$\approx 1.12\times 10^9\ (焦耳)$$

四. 证明题(6 分)

14. 证. 由于函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足罗尔中值定理的条件，所以存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=0$. (2 分) 令 $F(x)=(x-1)^2 f'(x)$, (4 分) 显然 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导, 并且 $F(\eta)=F(1)=0$. 由罗尔中值定理，存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得

$$F'(\xi)=2(\xi-1)f'(\xi)+(\xi-1)^2 f''(\xi)=0,$$

即

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$