2012级高等数学A (1)期末考试试题

一．填空题（每小题 3 分，共 33 分）

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases} a+x^2, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \ln(b+x+x^2), & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续， 则 $a=$______ ，$b=$_______.

2. 若 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{ax}, & x\le 0 \\ b(1-x^2), & x>0 \end{cases}$ 处处可导，则 $a=$_____ ,$b=$______ .

3. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记 Δy 为 $f(x)$ 的增量，$\mathrm{d}y$ 为 $f(x)$ 的微分，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=$___________ .

4. 函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 的带佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为______________________.

5. 曲线 $y=2(x-1)^2$ 的最小曲率半径 $\rho=$____________.

6. 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的斜渐近线为_____________________ .

7. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$____________________ .

8. $\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ___________________ .

9. $\int_{0}^{+\infty}\min\left(\mathrm{e}^{-x},\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=$ ___________________ .

10. 曲线 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ 上相应于 x 从 -1 到 1 的一段弧的长度 $s=$________ .

11. 已知一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=\mathrm{e}^x$ 有特解 $y=x\mathrm{e}^x$，则该微分方程的通解为_____.

二．计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

2．设 $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3.方程 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\,dt$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 求 $\int\dfrac{1+x}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(t)=\int_1^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

6. 求微分方程 $y''+y=\cos^2 x$ 的通解.

三. 应用题 (12 分) 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，问 a 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形面积最小？

四．证明题(7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有

$$f(a)=a,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.