20200914 线性代数 A 试卷参考答案

一、填空题

1、-28　2、-32，　3、216，　4、$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，5、24，　6、$\begin{bmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{bmatrix}$，

7、$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$，　8、$-1<k<0$。

二、计算题

9、解 1：采用加边法 1

$$D_n=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&a+a_1&a&\cdots&a\\0&a&a+a_2&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a&a&\cdots&a+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\-1&a_1&0&\cdots&0\\-1&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&a&a&\cdots&a\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\cdot\left(1+a\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

解2. $$D_n \xlongequal[k=2,3,\cdots,n]{r_{k-1}-r_k} \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ a & a & a & a & \cdots & a & a+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{每个列提出一个}a_i} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cancel{a_{n-1}}\,1 & -1 \\ \frac{a}{a_1} & \frac{a}{a_2} & \frac{a}{a_3} & \frac{a}{a_4} & \cdots & \frac{a}{a_{n-1}} & 1+\frac{a}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_j+c_{j-1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{a}{a_1} & \frac{a}{a_1}+\frac{a}{a_2} & * & \frac{a}{a_4}+\sum_{j=1}^{3}\frac{a}{a_j} & \cdots & 1\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k} & 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{a_i} \end{vmatrix} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$$

$$* = \frac{a}{a_1}+\frac{a}{a_2}+\frac{a}{a_3}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \left(1 + a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

10、解：$\because\ \ |P|=-1\neq 0,\quad \therefore\ \ P$ 可逆。

故 $\quad AP=PB\Rightarrow A=PBP^{-1}$

$\therefore A^n=PB^nP^{-1}$

而 $\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$

当 n 为奇数时：

$$A^n=PB^nP^{-1}=PBP^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$$

当 n 为偶数时：

$$A^n=PB^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

11、解: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{bmatrix}\to$

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&4&1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore R(A)=3.$ 　可选 α_1，α_2，α_4 为其最大无关组

此时有 $\quad \alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2.$

12、解（1） $\because A$与B相似， $\therefore |A|=|B|$

而 $\ |A|=-2,\quad |B|=-2y\quad \therefore y=1$

即 B 有特征值 2，1，-1，故 A 也有特征值 2，1，-1

$$\therefore |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda-x\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left[\lambda^2-x\lambda-1\right]=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)\text{，}$$

故　$x=0$。

（2）当 $\lambda_1=2$时，$2E-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

可得对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\xi_1=(1,0,0)^T$

同理可得对应于 $\lambda_2=1,\quad \lambda_3=-1$ 的特征向量分别为 $\xi_2=(0,1,1)^T$，$\xi_3=(0,1,-1)^T$，

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求可逆矩阵，且有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

13、解：$\overline{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 4\\ 1 & \mu & 1 & 3\\ 1 & 3\mu & 1 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda & 4-3\lambda\\ 0 & 2\mu & 0 & 6\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda & 4-3\lambda\\ 0 & \mu & 0 & 3\end{bmatrix}$ 2 分

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \mu & 1\\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=-\mu(1-\lambda)$$

（1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\mu\neq 0$ 时，方程组有唯一解；

（2）当 $\mu=0$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1-\lambda & 4-3\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，方程组无解；

（3）当 $\lambda=1$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1-\mu & 0 & 1\\ 0 & \mu & 0 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1-\mu & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\mu-3\end{bmatrix}$

当 $\mu=\dfrac{3}{4}$ 时，方程组有无穷解，

当$\mu \neq \frac{3}{4}$时，方程组无解。

当$\lambda = 1$，$\mu = \frac{3}{4}$时，$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

非齐次的特解为 $\xi_0 = (0,4,0)^T$，

对应的齐次方程组的基础解系为$\xi_1 = (-1,0,1)^T$

故原方程的通解为$\xi = \xi_0 + k\xi_1, k \in R.$ 1

14、解：（1）$A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$， $\because R(A) = 2,\quad \therefore |A| = 2 \cdot \left[(1-a)^2 - (1+a)^2\right] = 0$

得$a = 0,$ 即$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

（2） $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \cdot \lambda$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

当$\lambda_1 = 0$时， （$\lambda E - A$）$X = 0$，得基础解系 $\xi_1 = (1,-1,0)^T$

单位化， $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$，

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时，（$2E - A$）$X = 0$，得基础解系$\xi_2 = (0,0,1)^T$， $\xi_3 = (1,1,0)^T$

正交化单位化有，$\eta_2 = (0,0,1)^T$， $\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$

令$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，则$\boldsymbol{P}$即为所求正交矩阵，在正交变换$X = PY$下的标准形为

$$f = 2{y_2}^2 + 2{y_3}^2$$

（3） $f(x_1, x_2, x_3) = 1,$ 在三维空间为一个圆柱面。