

2015级高等数学A(1)期末考试试题

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若曲线 $xy = a$ 与直线 $y = 2x - 1$ 相切, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知点 $x = 0$ 是函数 $y = \frac{e^{2x} + k}{x}$ 的第一类间断点, 则常数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 曲线 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}$ 的单调减少区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 1 \text{ or } x > 2, \end{cases}$, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 计算题 (每小题 6 分, 共 42 分)

6. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + x}}{x^2 \sin 3x}$.
7. 设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = t - e^{-t} \end{cases}$ 所确定的函数, 计算二阶导数 $y''(1)$.
8. 将函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 (1 + \frac{1}{n})^{nx}$ 展开成带佩亚诺(Peano)余项的 7 阶麦克劳林(Maclaurin)公式, 并求 $f^{(7)}(0)$.
9. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$.
10. 求不定积分 $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, 其中 $a > 0$.
11. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + x^2} - \int_{-1}^1 f(x) dx$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
12. 求初值问题 $(1 + x^2) dy - (\arctan x - y) dx = 0$, $y(0) = 0$ 的特解.

三. 应用题 (每小题 9 分, 共 27 分)

13. 若连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求该函数 $f(x)$.
14. 一个对称的正十字图形(如图所示), 其外接圆的半径为 R , 正十字形的边长所张的圆心角为 φ . 问当 φ 为多少时, 该十字图形的面积最大, 并求其最大面积.

15. 已知某容器内表面形状可视为由曲线段 $y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ x^2 - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, (单位: m) 绕 y 轴旋转一周所成. (1) 求该容器的容积; (2) 若该容器盛满水, 求将水全部提升到高出容器 1m 的地方所做的功. (水的密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

四. 证明与讨论题(每小题 8 分, 共 16 分)

16. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, $a > 0$. (1) 证明

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx;$$

(2) 试列举一个函数, 使得上述不等式得等号成立.

17. 设函数 $f(x)$ 对一切实数 x 满足关系式 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, (1) 若 $f(x)$ 在点 $x = c (c \neq 0)$ 处有极值, 问它是极大值还是极小值? 为什么? (2) 若 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处有极值, 问它是极大值还是极小值? 为什么?