

# 2022 年上半年 线性代数 A 试题 (A 卷)

考试时间：120 分钟 | 总分：100 分

## 一、计算题 I (每题 6 分, 共 42 分)

1. 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

2. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  都是四维列向量, 且

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = 2, \quad |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = 3$$

求四阶行列式  $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2|$  的值。

3. 已知三阶矩阵  $A$  的逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  的逆矩阵。

4. 若四阶方阵  $A$  与  $B$  相似, 且  $A$  的特征值为  $2, 3, 4, 5$ , 求行列式  $|B^{-1} - E|$  的值。

(其中  $E$  是四阶单位矩阵)

5. 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且矩阵  $X$  满足:

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E$$

求矩阵  $X$ 。

6. 设

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 2, 0, 2)^T, \quad \alpha_3 = (1, 2, 1, a)^T$$

若由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  生成的向量空间的维数为 2, 求  $a$  的值。

7. 当  $a$  取何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2ax_2x_3$$

为正定二次型?

## 二、计算题 II (每题 10 分, 共 30 分)

8. 设向量组

$$\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \quad \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \quad \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$$

问  $a$  为何值时, 向量组线性相关? 并求极大无关组及线性表示。

9. 在  $\mathbb{R}^3$  中, 求由基

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$$

到基

$$\beta_1 = (1, 2, 3)^T, \quad \beta_2 = (2, 1, 3)^T, \quad \beta_3 = (3, 1, 2)^T$$

的过渡矩阵, 并求向量  $\alpha = (1, 2, 1)^T$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标。

10. 求一个正交变换, 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形, 并指出方程  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  表示何种曲面。

## 三、综合题 (共 28 分)

11. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{bmatrix}$$

讨论方程组  $AX = B$  解的情况, 在有解时求出通解。

12. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角阵。

13. 若  $A, B$  均为三阶方阵,  $A$  有特征值  $2, 3, 4$ , 且

$$A^2 + 2AB + A - B = E$$

求行列式  $|A^2 + BA|$  的值。