

2009级高等数学A(1)期末考试试题

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2+1}$, $-\infty < x < +\infty$, 则此函数为 【 】

- (A) 有界函数 (B) 奇函数 (C) 偶函数 (D) 周期函数

2. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\sin x} = 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\varphi(x)$ 等价的无穷小量是 【 】

- (A) $\ln(1-x)$ (B) $\cos x - 1$ (C) $\sqrt{1+2x} - 1$ (D) $\sin |x|$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则应有 【 】

- (A) $n=0$ (B) $n>0$ (C) $n=1$ (D) $n>1$

4. 设有四个条件: (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, (3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, (4) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 它们之间的正确关系为 【 】

- (A) $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$ (B) $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$
(C) $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$ (D) $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$

5. 设 $f(x)$ 连续, a, b 为常数, 则 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy =$ 【 】

- (A) $f(b-a)$ (B) $f(a+b)$ (C) $f(b+x) - f(a+x)$ (D) $f(b-x) - f(a-x)$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

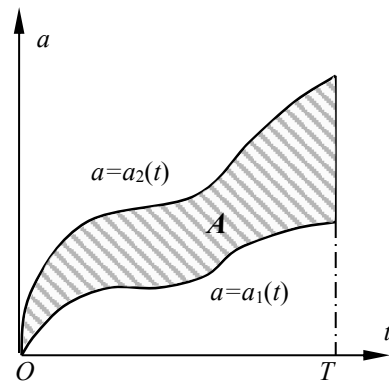
6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \leq 0 \\ \frac{x}{\sin ax}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续, 则常数 $a =$ _____.

7. 设 $f(x) = xe^x$, 则 $f^{(n)}(x)$ 的极小值为_____.

8. $f(x) = e^{2x}$ 的带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式为 _____.

9. 微分方程 $xy'' + y' = 0$ 的通解为_____.

10. 设两辆汽车从静止开始加速沿直线前进, 右图中两条曲线 $a=a_1(t)$ 和 $a=a_2(t)$ 分别是两车的加速度曲线, 则位于这两条曲线和直线 $t=T (T>0)$ 之间的图形 (阴影部分) 面积 A 所表示的物理意义为 T 时刻的_____.



三、计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

12. 设函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求导数 y''

13. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$ 所确定, 求二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

14. 求不定积分 $\int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx$.

15. 已知 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 利用分部积分公式计算定积分 $\int_0^\pi f(x) dx$.

16. 求微分方程 $y'' + y + \sin x = 0$ 的通解.

四、应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设曲边梯形由曲线 $y = x + 1/x$ ($x > 0$) 和直线 $y=0$, $x=a$, $x=a+1$ 所围成 (其中 $a > 0$).

当 a 为何值时, 该曲边梯形的面积达到最小, 最小面积是多少?

18. 某车间的容积为 $10,000\text{m}^3$, 其中一台设备会产生 $0.3\text{m}^3/\text{min}$ 的 CO_2 . 为降低空气中 CO_2 的含量, 车间内有一台风量为 $1,500\text{m}^3/\text{min}$ 的鼓风机将室外的新鲜空气 (CO_2 含量 0.04%) 抽入室内, 同时有排风扇以相同的风量将室内的空气外排. 若假定进入室内的新鲜空气与原有空气能迅速混合, 且每天开工时室内空气中的 CO_2 含量为 0.12% , (1) 求室内空气中 CO_2 含量的变化规律; (2) 问多长时间后能使 CO_2 含量降低至 0.08% 以下? (3) 讨论室内 CO_2 含量的极限情况.

五、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

19. 定积分具有性质: 若 $f(x)$ 连续且为偶函数, 则 $\forall a > 0$, 有 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

今设 x_0 为一常数, 有连续函数 $g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ 均满足 $g(x_0 - x) = g(x_0 + x)$.

(1) 试将定积分的上述性质推广到上述函数 $g(x)$ 的情形, 并叙述之; (2) 证明(1)的结论.

20. 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数, 且 $f''(x) \neq 0$, 证明:

(1) 若给定 $(-1, 1)$ 内的 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$;

(2) 对于 $(-1, 1)$ 内任意的 $x \neq 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.