

2016级高等数学A(1)期末考试试题

一、计算题 I(每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$.

3. 设可微函数 $f(x) > 0$, 求微分 $df[\frac{\ln f(x)}{f(x)}]$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - e^{-t}, \\ y = e^{2t} \end{cases}$ 所确定, 计算 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=-1}$.

二、计算题 II(第 6~8 题每题 6 分, 第 9~10 题每题 8 分, 共 34 分)

6. 求不定积分 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$.

7. 计算定积分 $\int_0^4 \sin(\sqrt{x}-1) dx$.

8. 设 β 为常数, 计算定积分 $\int_0^1 x |x - \beta| dx$.

9. 求解一阶微分方程的初值问题: $y' = (1 - y^2) \tan x$, $y(0) = 2$.

10. 求解二阶线性微分方程 $y'' + 4y = x \cos x$.

三、应用题 (每题 10 分, 共 20 分).

11. 做半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积最小, 并求出该最小值.

12. 一贮油罐内装有密度为 $\gamma = 9.6 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$ 的油料. 为便于清理和检修, 罐的下部侧面开有一个半径为 $R=0.38\text{m}$ 的圆孔(如图), 孔的中心距液面为 $h=6.8\text{m}$, 孔口挡板用螺钉固紧. 已知每颗螺钉能承受 $4.9 \times 10^3 \text{ N}$ 的力, 问至少要用多少螺钉?

