诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

湖南大学课程考试试卷

课程名称：线性代数 A；课程编码：GE03003；试卷编号：A；考试时间：120 分钟

姓名：______________；学号：__________________；专业班级：_____________________.

1.（8 分）设 $f(x)=x^2-x-1$，对于 n 阶方阵 A, 定义 $f(A)=A^2-A-E$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，若 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

解

$$f(A)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&9&6\\12&14&8\\12&15&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&7&5\\10&11&6\\9&12&8\end{pmatrix}.$$

2.（8 分）求下列行列式的值：

$$D_5=\begin{vmatrix}a^4&(a-1)^4&(a-2)^4&(a-3)^4&(a-4)^4\\a^3&(a-1)^3&(a-2)^3&(a-3)^3&(a-4)^3\\a^2&(a-1)^2&(a-2)^2&(a-3)^2&(a-4)^2\\a&a-1&a-2&a-3&a-4\\1&1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

解 先 1，5 两行互换，2，4 两行互换，再 1，5 两列互换，2，4 两列互换：

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&a-1&a-2&a-3&a-4\\a^2&(a-1)^2&(a-2)^2&(a-3)^2&(a-4)^2\\a^3&(a-1)^3&(a-2)^4&(a-3)^3&(a-4)^3\\a^4&(a-1)^4&(a-2)^4&(a-3)^4&(a-4)^4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a-4&a-3&a-2&a-1&a\\(a-4)^2&(a-3)^2&(a-2)^2&(a-1)^2&a^2\\(a-4)^3&(a-3)^3&(a-2)^4&(a-1)^3&a^3\\(a-4)^4&(a-3)^4&(a-2)^4&(a-1)^4&a^4\end{vmatrix}$$

$$=4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!=288.$$

注：也可只换行，不换列，再直接用范德蒙行列式的结论，答案对即可.

3.（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&-2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-5&4\\6&-4\\-5&3\\9&-5\end{pmatrix}$， 且 $AX=B,$ 求矩阵 X .

解 相当于解两个方程组 $AX_1=b_1, AX_2=b_2$.

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&3&-5&4\\0&-2&6&-4\\-1&1&-5&3\\3&-1&9&-5\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $$X=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}.$$

4. (10 分) 设有分块矩阵 $P=\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$，其中 A,B 皆为可逆矩阵， 求 P^{-1}.

解 法 1 设 $P^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，

由 $$PP^{-1}=\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

得 $AX_3=E$, $BX_1+CX_3=O$, $AX_4=O$, $BX_2+CX_4=E$,

则 $$X_1=-B^{-1}CA^{-1}, \quad X_2=B^{-1}, X_3=A^{-1}, X_4=O.$$

故 $$P^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{=1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

法 2 $$(P \mid E)=\left(\begin{array}{cc|cc} O & A & E & O \\ B & C & O & E \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} B & C & O & E \\ O & A & E & O \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc} E & B^{-1}C & O & B^{-1} \\ O & E & A^{-1} & O \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} E & O & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ O & E & A^{-1} & O \end{array}\right),$$

故 $$P^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{=1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

5 . (10 分) 已知向量组 $\alpha_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(3,0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,3,0,1)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_4=(2,1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_5=(0,-2,1,1)^{\mathrm{T}}$, 求该向量组的秩并求一个极大无关组.

解 $$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故该向量组的秩为 3，极大无关组可取为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

6.(12 分)已知 R^2 的两组基 α_1,α_2 与 e_1,e_2，求一个非零向量 $\beta\in R^2$，使得 β 关于这两组基有相同的坐标，并求 β 关于第三组基 ξ_1，ξ_2 的坐标，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix};\ e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

解 设 β 关于两组基 α_1,α_2 与 e_1,e_2 的坐标为 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$,

则 $$\beta=A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix},$$

于是 $$(A-E)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

而 $$A-E=\begin{pmatrix}1&5\\-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5\\0&0\end{pmatrix},$$

故 $$\beta=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix},k\in R.$$

设从基 e_1,e_2 到 基 ξ_1，ξ_2 的过渡矩阵为 C,则

$$(\xi_1,\ \xi_2)=(e_1,e_2)C\Rightarrow C=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

则 β 关于第三组基 ξ_1，ξ_2 的坐标为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot k\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}=k\cdot\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

7.(12 分) p,t 取何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$ 无解、有唯一解

或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

解 $(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{pmatrix}$,

若 $t+2\neq 0$ 即 $t\neq -2$ 时，$r(A,b)\neq r(A)$,原方程组无解；

若 $t+2=0$ 且 $p+8=0$ 即 $t=-2$，$p=-8$ 时，$r(A,b)=(A)=2<4$,此时方程组有无穷多解， x_3,x_4 为自由未知量，通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ k_1,k_2\in R;$$

若 $t+2=0$ 且 $p+8\neq 0$ 即 $t=-2$，$p\neq -8$ 时，$r(A,b)=(A)=3<4$,且

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

此时方程组有无穷多解，x_4为自由未知量，通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ k\in R.$$

8. (10 分) 设矩阵 A，B 相似，其中 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$.

(1) 求 x,y 的值；　　(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

解 (1) 因为矩阵 A，B 相似，则 A，B 有相同的特征多项式，即

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B| \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-y \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow x=0, y=-2.$

(2) 由(1)知 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$ 且 A 的特征值分别为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=-2.$$

对于特征值 $\lambda_1=-1$, 解方程组 $(\lambda_1 E-A)x=0$ 得特征向量

$$\alpha_1=(0,\ 2,-1)^{\mathrm{T}};$$

对于特征值 $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$, 分别得特征向量

$$\alpha_2=(0,1,\ 1)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_3=(1,\ 0,-1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\alpha_3)$, 则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=B$.

9. (12 分) 已知二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$, 其中 A 的特征值之和为 1， 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值； (2) 求正交变换 $x=Py$, 将二次型 f 化为标准形.

解 (1) 因 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}A=a+2-2=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \Rightarrow a=1.$

又 $|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-12 \Rightarrow b^2=4$.再由 $b>0$ 得 $b=2$.

(2) 因为 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$，令 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的 3 个特征值分别为

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\qquad \lambda_3=-3.$$

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，得特征向量 $\alpha_1=(2,0,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm T}$，

正交化单位化得 $\varepsilon_1=(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5})^{\mathrm T}$，$\varepsilon_2=(0,1,0)^{\mathrm T}$.

对于特征值 $\lambda_3=-3$，得特征向量 $\alpha_3=(1,0,-2)^{\mathrm T}$，单位化得

$\varepsilon_3=(\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{-2}{\sqrt5})^{\mathrm T}$.

令 $P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$，则正交变换 $x=Py$ 将二次型 f 化为标准形

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

10. (8 分) 设 A 为 n 阶实方阵，利用二次型证明

（1）$A^{\mathrm T}A$ 是半正定矩阵；（2）若 A 可逆，则 $A^{\mathrm T}A$ 是正定矩阵.

证（1）显然 $A^{\mathrm T}A$ 是对称矩阵.

对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in R$，二次型

$$f=x^{\mathrm T}(A^{\mathrm T}A)x=(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\geq 0,$$

故二次型对应的矩阵 $A^{\mathrm T}A$ 是半正定矩阵.

(2) 若 A 可逆，则齐次线性方程组 $AX=0$ 只有唯一解：零解，所以对任意非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，$y=Ax=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}\neq 0$，

则 $$f=x^{\mathrm T}(A^{\mathrm T}A)x=(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2>0,$$

故此时二次型对应的矩阵 $A^{\mathrm T}A$ 是正定矩阵.