

湖南大学《线性代数 A》考试试卷

1. (10 分) 计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

2. (10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{其中 } \prod_{i=1}^n (a_i - 1) \neq 0$$

3. (10 分) 已知 A, B 为三阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是三阶单位矩阵。

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵 A 。

4. (10 分) 已知矩阵 $A = PQ$, 其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = [2 \quad -1 \quad 2]$$

求矩阵 A 和 A^n , 其中 n 为正整数。

5. (10 分) 求向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \quad \alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \quad \alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T,$$

$$\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T, \quad \alpha_5 = (2, 1, 5, 10)^T$$

的一个最大无关组, 并把其余向量用这个最大无关组线性表示。

6. (10 分) 在 R^3 中, 由基

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$$

到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求:

(1) 由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 所构成的矩阵 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$;

(2) 向量 $\alpha = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

7. (10 分) 已知四阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 这里 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 。若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $AX = \beta$ 的通解。

8. (12 分) 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & x \\ y & -24 & 13 \end{bmatrix}$$

已知 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda = 1$ 是 A 的二重特征值。试求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵, 并写出其对角形矩阵。

9. (6 分) 设 A 是 n 阶正定矩阵, E 是 n 阶单位矩阵, 证明: $E + A$ 的行列式大于 1。

10. (12 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2。

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $X = QY$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(3) 二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是何几何形状?
