# 湖南大学《线性代数 A》课程考试试卷

---

## 一、计算题 I（每题 6 分，共 42 分）

1.设 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 1$$

求

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

的值。

---

2.设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

求其伴随矩阵 $A^*$ 的行列式。如果 $A^*$ 可逆，求其逆矩阵 $(A^*)^{-1}$。

---

3.设 $-2,-2,1$ 为 3 阶矩阵 $A$ 的特征值，试计算矩阵

$$A^3 + 2A^2 + 6A - 3E$$

的全部特征值及其行列式。

---

4. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求满足矩阵方程

$$A + X = XA$$

的 3 阶矩阵 $X$。

---

5.设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

求该向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用此组线性表示。

---

6.试求 $a$ 的范围，使得二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型。

---

7. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

求一个 $4 \times 2$ 的矩阵 $X$，使其满足 $AX = 0$ 且 $r(X) = 2$。

---

# 二、计算题 II（每题 10 分，共 30 分）

8.设 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基分别为：

(I) $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T,\ \alpha_2 = (0, 1, 1)^T,\ \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$
(II) $\beta_1 = (1, 0, 1)^T,\ \beta_2 = (0, 1, -1)^T,\ \beta_3 = (1, 2, 0)^T$

(1) 求从基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $C$；
(2) 若向量 $\gamma$ 在基 (II) 下的坐标为 $(1, 0, -1)^T$，求其在基 (I) 下的坐标。

---

9.设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解，求 $k$ 的值及通解。

---

10. 设 $n$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{bmatrix}$$

求 $|A|$，并问当 $x$ 满足什么条件时，对任意 $n$ 维向量 $b$，方程组 $Ax = b$ 都有解？

---

# 三、综合题（共 28 分）

11.已知二次型

$$f = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

的秩为 1，试确定 $a$，并求正交矩阵 $Q$，使 $x = Qy$ 将其化为标准形。

12. 已知 3 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

相似于对角矩阵，且 $\lambda = 2$ 是二重特征值。

(1) 求 $x, y$;
(2) 求可逆矩阵 $P$，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

---

13. 已知线性方程组 (I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$，其中 $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{i,2n})^T$

试写出线性方程组 (II)

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \cdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的通解，并说明理由。