诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

考试中心填写：

____年___月___日

考 试 用

湖南大学课程考试试卷

课程名称：高等数学 A1；课程编码：GE03025；试卷编号：A；考试时间：120 分钟

题 号	1-2	3-5	6-8	9-11	12-13	14				总分
应得分	12	18	18	24	20	8				100
实得分										
评卷人										

专业班级：

学号：

姓名：

装订线（答题不得超过此线）

一、计算题 I（每小题 6 分，共 48 分）

1．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

（1）**解**： 原式= $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-1}=e^{-1}$。

（2） （2）**解**：利用洛必达法则，

原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x-x}{xe^x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{2x}-e^x}{xe^x+2e^x}=\dfrac{3}{2}$。

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\sin x}$ 的所有间断点，并指出各间断点的类型。

解：由函数的定义域知间断点为 $x=\pm n\pi,\ \ n=0,1,2\cdots$。

由于当 $n\neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x+x}{\sin x}=\infty$，故 $x=\pm n\pi,\ n=1,2\cdots$ 为第二类间断点；

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x}{\sin x}=2$，故 $x=0,$ 为第一类间断点。

3. 设$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$确定的函数为$y = f(x)$，求$\dfrac{dy}{dx}$以及$y = f(x)$在$t = \dfrac{\pi}{3}$时的切线方程。

解： x和y对t求导得，$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t \end{cases}$，

故$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \dfrac{y - x}{y + x}$。

当$t = \dfrac{\pi}{3}$时，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$，切线方程为

$y - \dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}\right)$，即$\left(1+\sqrt{3}\right)y - \left(1-\sqrt{3}\right)x - 2e^{\frac{\pi}{3}} = 0$.

4. 求函数$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$的拐点和凹凸区间.

解：求二阶导得$\dfrac{dy}{dx} = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}$，故拐点为$(1, e^{-\frac{1}{2}})$和$(-1, e^{-\frac{1}{2}})$。

当$x^2 - 1 > 0$时$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$，原函数的凹区间为$\left(-\infty, -1\right) \cup \left(1, +\infty\right)$；

当$x^2 - 1 < 0$时$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} < 0$，原函数的凸区间为$(-1, 1)$.

5. 设函数$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b + \arctan\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$。试确定$a, b$的值，使得$f(x)$在$x = 0$处连续。

解： 由于$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(b + \arctan\dfrac{1}{x}\right) = b + \dfrac{\pi}{2}$，

故由$f(x)$在$x = 0$处连续得$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$，即$a = 1$，$b = 1 - \dfrac{\pi}{2}$。

6. 求下列不定积分和定积分

（1） $\int e^{2x}\cos x dx$　　　　　　　　（2） $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x^2+2}+\sqrt{1-x^2}\right)dx$

（1）**解**：由分部积分得 $\int e^{2x}\cos x dx=\frac{1}{2}\int \cos x de^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x dx$，

又　$\int e^{2x}\sin x dx=\frac{1}{2}\int \sin x de^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx$，

故 $\int e^{2x}\cos x dx=\frac{2}{5}e^{2x}\cos x+\frac{1}{5}e^{2x}\sin x+C$.

（2）**解**：由 $\frac{x}{x^2+2}$ 在 $(-1,1)$ 上是奇函数，故 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+2}dx=0$；

又 $-\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2}dx=-2\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+2}dx=-\sqrt{2}\int_{0}^{1}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=-\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$；

以及　$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

因此　$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x^2+2}+\sqrt{1-x^2}\right)dx=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}\text{。}$$

7. 设抛物线 $y^2=2x$，计算该抛物线在点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 处的法线方程，以及该法线与该抛物线所围图形的面积。

解：方程两边对 x 求导得 $2yy'=2$，即 $y'=\frac{1}{y}$。过点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的斜率为 $y'|_{\left(\frac{1}{2},1\right)}=1$，从而所求法线程为 $y-1=-(x-\frac{1}{2})$，即 $x+y-\frac{3}{2}=0$.

抛物线 $y^2=2x$ 与在点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 处的法线的交点为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 和 $\left(\frac{9}{2},-3\right)$，于是该法线与该抛物线所围图形的面积为

$$A=\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-y-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3\Big|_{-3}^{1}=\frac{16}{3}.$$

8. 计算曲线 $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ 在区间段 $0\le x\le 2$ 的弧长。

解：　　对函数求导得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$，

弧长为：$s=\int_0^2\left(1+\frac{1}{9}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^2\left(1+9\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{27}\left(1+9\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=\frac{2}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$

二、计算题 II（每小题 8 分，共 32 分）

9. 设隐函数方程 $y=1+xe^y$ 确定的函数为 $y=f(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：方程两边对 x 求导得 $\frac{dy}{dx}=e^y+xe^y\frac{dy}{dx}$，即 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}$

方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{2-y}$ 两边对 x 求导得 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^y y'(2-y)+e^y y'}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.

10. 求解初值问题：$y''+y+\sin 2x=0,\quad y(\pi)=y'(\pi)=1$。

解：原方程对应得特征方程为 $r^2+1=0$，故 $r=\pm i$，于是对应得齐次方程得通解为

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x。$$

由于 $\pm 2i$ 不是特征根，可设原方程得特解为 $y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$，代入方程得 $a=0,b=\frac{1}{3}$。因此原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$。

将初始条件 $y(\pi)=y'(\pi)=1$ 代入得 $C_1=-1,C_2=-\frac{1}{3}$。故初值条件的方程解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x。$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $f(x)=1+\int_0^x f(t)dt+\sin x$，求 $f(x)$。

解：方程两边对 x 求导得 $f'(x)=f(x)+\cos x$。

对应的齐次方程 $f'(x)=f(x)$ 的通解为 $f(x)=Ce^x$。设原方程的通解为 $f(x)=C(x)e^x$ 并代入 $f'(x)=f(x)+\cos x$ 得 $C'(x)e^x+C(x)e^x=C(x)e^x+\cos x$，即 $C'(x)=e^{-x}\cos x$，两边积分求得 $C(x)=\int e^{-x}\cos x dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^{-x}+C$。

因此原方程得解为 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+Ce^x$。

注意到 $f(0)=1$，故 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{3}{2}e^x$

12. 求 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式, 并估计 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值，使得误差小于 0.002 。

解: 求 $f(x)$ 关于 x 的到 $n+1$ 阶导数，$f'(x)=xe^x+e^x$，$f''(x)=xe^x+2e^x$，. . . ，$f^{(n)}(x)=xe^x+ne^x$，$f^{(n+1)}(x)=xe^x+$（$n+1$）e^x, 故 $f\ (0)=0$， $f'(0)=1$， . . . ，$f^{(n)}(0)=n$，$f^{(n+1)}(\xi)=(\xi+n+1)e^{\xi}$ 。

于是 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$xe^x=x+x^2+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(\xi+n+1)e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 到 x 之间。因此，将 xe^x 用它在 $x_0=0$ 处的 n 阶泰勒多项式近似表示为

$$xe^x\approx x+x^2+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!},$$

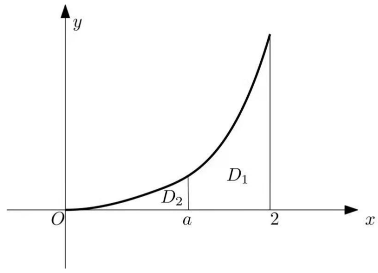
所产生的误差为 $\left|\frac{(\xi+n+1)e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$。取 $x=-\frac{1}{2}$，$n=4$，则

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\approx-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{96}\approx-0.3021,$$

其误差 $\left|-\frac{(\xi+5)e^{\xi}}{3840}\right|=\frac{(\xi+5)e^{\xi}}{3840}<\frac{5e^{\xi}}{3840}<\frac{1}{768}<0.002$.

三、综合题（第 13 小题 12 分，第 14 小题 8 分，共 20 分）

13. 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 以及 $y=0$ 所围成的平面区域。D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 以及 $y=0$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$。



(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1。

(2) 求 D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2。

(3) 试问当 a 取何值时，V_1+V_2 取最大值？并求该最大值。

解：（1）$V_1=\pi\int_a^2 4x^4dx=\frac{4\pi}{5}\left(32-a^5\right)$

（2）$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\frac{\pi}{2}\int_0^{2a^2}ydy=\pi a^4$ **或** $V_2=\int_0^a 2\pi x\cdot 2x^2dx=\pi a^4$

（3） 设 $f(a)=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}\left(32-a^5\right)+\pi a^4$，其中 $0<a<2$，等式两边对 a 求导，则 $f'(a)=-4\pi a^3\left(a-1\right)$。由 $f'(a)=0$ 得 $a=1$。因为 $f''(1)=-4\pi<0$，故当 $a=1$ 时，V_1+V_2 取最大值，且最大值为 $\frac{129\pi}{5}$。

14. 已知 $f(x)$ 具有连续的导函数，且满足

$$a < f(x) < b，\quad \max_{a\le x\le b}|f'(x)|<1$$

(1) 证明存在唯一的 $x^*\in(a,b)$ 使得 $f(x^*)=x^*$；

(2) 对于任意的 $x_0\in[a,b]$，证明由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(f(x_n)+x_n\right)$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛于(1)中的点 x^*。

证：(1) 令 $g(x)=f(x)-x$，$x\in(a,b)$。由 $a<f(x)<b$ 得 $g(a)g(b)<0$，由零点定理知至少存在一点 $x^*\in(a,b)$ 使得 $g(x^*)=0$，即 $f(x^*)=x^*$。

又由 $\max_{a\le x\le b}|f'(x)|<1$ 知 $g'(x)=f'(x)-1<0$，从而 $g(x)=f(x)-x$ 在区间 (a,b) 内单调递减，故存在唯一的 $x^*\in(a,b)$ 使得 $f(x^*)=x^*$。

(2) 因为 $x_{n+1}-x_n=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{2}+\frac{x_n-x_{n-1}}{2}$，由 Lagrange 中值定理知存在 ξ 介于 x_n 和 x_{n-1} 之间使得 $f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi)(x_n-x_{n-1})$，因此 $x_{n+1}-x_n=\frac{f'(\xi)+1}{2}(x_n-x_{n-1})$。因为 $\max_{a\le x\le b}|f'(x)|<1$，故 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，即序列 $\{x_n\}$ 单调。因为 $a\le x_n\le b$，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在。令 $\lim_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$，则 $\bar{x}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(f(x_n)+x_n\right)=\frac{1}{2}\left(f(\bar{x})+\bar{x}\right)$，即 $f(\bar{x})=\bar{x}$。由 (1) 知 $\bar{x}=x^*$。

证法 2：设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(f(x_n)+x_n\right)$ 两边取极限得：$A=\frac{1}{2}\left(f(A)+A\right)$，即 $A=f(A)$，由 (1) 知 $A=x^*$.

又 $$\left|x_{n+1}-x^*\right|=\left|\frac{1}{2}(f(x_n)+x_n)-\frac{1}{2}(f(x^*)+x^*)\right|=\left|\frac{1}{2}(f(x_n)-f(x^*))+(x_n-x^*)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}(f'(\xi)+1)(x_n-x^*)\right|\le L\left|x_n-x^*\right| \quad (L=\frac{1}{2}(M+1)\in(0,1),\ \text{其中 } M=\max_{x\in(a,b)}\left|f'(x)\right|<1)$$

$$\le L^2\left|x_{n-1}-x^*\right|\le\cdots\le L^{n+1}\left|x_0-x^*\right|\to 0\ (n\to\infty\text{时}),$$

故 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$.