2024.06.19 线性代数参考解答

1．（8 分）设 A 是三阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

解：

$$
\begin{aligned}
|(3A)^{-1}-2A^*| &= 2|A|\cdot|(3A)^{-1}-2A^*| = 2|A((3A)^{-1}-2A^*)| \\
&= 2\left|\frac{1}{3}E-2|A|E\right| = 2\left|-\frac{2}{3}E\right| \\
&= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{16}{27}.
\end{aligned}
$$

2．（8 分）设行列式 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，

求（1） $A_{31}+A_{32}+A_{33}$；　（2）　$A_{34}+A_{35}$.

解：将 $|A|$ 中第三行的元素依次换成 5, 5, 5, 3, 3. 则第二行与第三行的对应元素相等，于是行列式的值为 0. 按第三行展开，则

$$5(A_{31}+A_{32}+A_{33})+3(A_{34}+A_{35})=0, \qquad (*)$$

同理，将第 $|A|$ 中第三行的元素依次换成第四行的对应元素. 按第三行展开，则

$$2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+A_{34}+A_{35}=0. \qquad (**)$$

解 (*), (**) 联立方程组，得

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}=A_{34}+A_{35}=0.$$

3.(8 分)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=X+B$.

解：矩阵方程 $AX=X+B$ 等价于 $(A-E)X=B$，采用初等行变换

$$(A-E\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&0\vdots&1&2\\1&1&1\vdots&3&4\\0&1&1\vdots&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&0\vdots&1&2\\0&1&1\vdots&2&1\\1&1&1\vdots&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\vdots&1&2\\0&1&1\vdots&2&1\\0&0&1\vdots&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0\vdots&1&2\\0&1&0\vdots&0&-1\\0&0&1\vdots&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\vdots&1&3\\0&1&0\vdots&0&-1\\0&0&1\vdots&2&2\end{pmatrix}.$$

所以，$X=\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\\2&2\end{pmatrix}$.

4. (10 分)已知矩阵 A 和矩阵 B 的逆矩阵 A^{-1},B^{-1} 都存在，求分块矩阵 $P=\begin{pmatrix}C&A\\B&O\end{pmatrix}$的逆矩阵 P^{-1}.

解：因为 $\begin{pmatrix}E&-CB^{-1}\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&A\\B&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$,

所以 $\begin{pmatrix}C&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E&-CB^{-1}\\O&E\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$,

从而 $P^{-1}=\begin{pmatrix}C&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-CB^{-1}\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\end{pmatrix}$.

2024.06.19 线性代数参考解答

5.(10 分)求向量组

$$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T,\alpha_4=(1,-2,2,0)^T,\alpha_5=(2,1,5,10)^T$$

的秩及一个最大线性无关组.

解：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，用行初等行变换将 A 化为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&-1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以， 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为 3，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$或 $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$为最大线性无关组(写出一组即可).

6.(12 分)已知 R^3 的两组基(I) $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$；(II) $\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(1,2,0)^T$，求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基 β_1,β_2,β_3的过渡矩阵，并求向量$\xi=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$在基 β_1,β_2,β_3下的坐标.

解 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Q$,则 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$,

所以 $\xi=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(y_1,y_2,y_3)^T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(-1,2,1)^T$,

从而向量 $\xi=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3下的坐标为

$$(y_1,y_2,y_3)^T=Q^{-1}(-1,2,1)^T=(-5,-7,4)^T.$$

7. (10 分) 当 a 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 1 \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$

无解、有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

解： 系数行列式 $\begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 5a^2 - a - 4 = (a-1)(5a+4),$

故当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -\dfrac{4}{5}$ 时，院方程组有唯一解.

当 $a = 1$ 时，原方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，当 $a = 1$ 时，原方程组有无穷多解，取 x_3 为自由未知量，得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$ 其中 k 是任意常数.

当 $a = -\dfrac{4}{5}$ 时,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

显然，$r(A) \neq r(\overline{A})$, 此时方程组无解.

2024.06.19 线性代数参考解答

8. (12 分) 已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1, y_0=0, z_0=2$，且

$$\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases} \qquad n\ge 1,\quad 记\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},写出满足\alpha_n=A\alpha_{n-1}的矩阵$$

A，并求出 A^n 及 x_n, y_n, z_n.

解：$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

由 $|\lambda E-A|=0$, 即 $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 2 \\ 6 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$ 得 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $Ax=0$ 得基础解系为 $\eta_1=(1,-1,1)^T$，

当 $\lambda_2=1$ 时，由 $(E-A)x=0$ 得基础解系为 $\eta_1=(2,-2,3)^T$，

当 $\lambda_2=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0$ 得基础解系为 $\eta_1=(-1,2,0)^T$.

故存在可逆矩阵 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=diag(0,1,-2)$，即

$A=P\Lambda P^{-1}$，从而

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} -4+(-1)^{n+1}2^n & -2+(-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4+(-1)^n 2^{n+1} & 2+(-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+(-1)^{n+1}2^n & -2+(-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4+(-1)^n 2^{n+1} & 2+(-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8+(-2)^n \\ -8+(-2)^{n+1} \\ 12 \end{pmatrix}.$$

即 $x_n=8+(-2)^n, y_n=-8+(-2)^{n+1}, z_n=12, (n\ge 1).$

2024.06.19 线性代数参考解答

9. **（12 分）已知二次型** $f = x^T Ax = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$ **经正交变换化为** $3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2$，

（1）求 a，b **的值；**

(2) 求所用的正交变换 $x = Cy$.

解：（1） $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

由于 A 与 B 不仅合同而且相似，因此 $Tr(A) = Tr(B)$, 即$1+1+1 = 3+3+b$,
从而 $b = -3$.

对于 $\lambda = 3$, 则 $|3E - A| = -2(a+2)^2 = 0$, 因此， $a = -2$（二重根）.

（2） 由 $(3E - A)x = 0$，得特征向量 $\alpha_1 = (1,-1,0)^T, \alpha_2 = (1,0,-1)^T$
对于 $\lambda = -3$, 由 $(-3E - A)x = 0$，得特征向量 $\alpha_3 = (1,1,1)^T$.
由于 $\lambda = 3$, 是二重特征值，对 α_1, α_2 正交化有
$\beta_1 = \alpha_1 = (1,-1,0)^T$,
$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (1,0,-1)^T - \dfrac{1}{2}(1,-1,0)^T = \dfrac{1}{2}(1,1,-2)^T$.
单位化，有 $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $\gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, $\gamma_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

令 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

正交变换 $x = Cy$, 二次型化为

$$3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2.$$

2024.06.19 线性代数参考解答

10.（10 分）设 A^* 为 n 阶实方阵 A 的伴随矩阵，证明：

（1）若 A 是正定矩阵，则 A^* 为正定矩阵；（2）若 n 为偶数，且 A^* 为正定矩阵，则是 A 是正定矩阵.

证明：

(1) 由 $AA^* = |A|E$ 可知： $A^* = |A|A^{-1}$. 注意到行列式 $|A|$ 及 A 的特征值都是正实数，从而易知 A^* 的特征值也是正实数,这说明 A^* 为正定矩阵.

（2）若 A^* 为正定矩阵，由 $AA^* = |A|E$ 可知：由 $A = |A|(A^*)^{-1}$ 可知： $A^T = A$.

可以证明 $|A| \neq 0$. 事实上，若 $|A|=0$，则 $AA^* = 0$，由 A^* 的可逆性知： $A=0$，进而有 $A^*=0$，与 A^* 正定矛盾！故 $|A| \neq 0$.

由 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n$ 知: $|A^*| = |A|^{n-1}$. 由于 n 为偶数,从而 $|A|$ 与 $|A^*|$ 同号,故 $|A| > 0$.

故由 $A = |A|(A^*)^{-1}$ 及 A^* 为正定矩阵可知： A 的所有特征值都是正实数，从而 A 是正定矩阵.