

# 湖南大学《线性代数 A》考试试卷

1. (10 分) 计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

2. (10 分) 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{其中} \quad \prod_{i=1}^n (a_i - 1) \neq 0$$

3. (10 分) 已知  $A, B$  为三阶矩阵, 且满足  $2A^{-1}B = B - 4E$ , 其中  $E$  是三阶单位矩阵。

(1) 证明: 矩阵  $A - 2E$  可逆;

(2) 若

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵  $A$ 。

4. (10 分) 已知矩阵  $A = PQ$ , 其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵  $A$  和  $A^n$ , 其中  $n$  为正整数。

5. (10 分) 求向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \quad \alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \quad \alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T, \\ \alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T, \quad \alpha_5 = (2, 1, 5, 10)^T$$

的一个最大无关组, 并把其余向量用这个最大无关组线性表示。

6. (10 分) 在  $R^3$  中, 由基

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$$

到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求:

(1) 由基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  所构成的矩阵  $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ ;

(2) 向量  $\alpha = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标。

7. (10 分) 已知四阶方阵  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ , 这里  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为 4 维列向量, 其中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关,  $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 。若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 求线性方程组  $AX = \beta$  的通解。

8. (12 分) 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & x \\ y & -24 & 13 \end{bmatrix}$$

已知  $A$  有三个线性无关的特征向量,  $\lambda = 1$  是  $A$  的二重特征值。试求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角形矩阵, 并写出其对角形矩阵。

9. (6 分) 设  $A$  是  $n$  阶正定矩阵,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 证明:  $E + A$  的行列式大于 1。

10. (12 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2。

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求正交变换  $X = QY$ , 把  $f(x_1, x_2, x_3)$  化成标准形;

(3) 二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  是何几何形状?

---