2023年6月 湖南大学课程考试试卷

课程名称：线性代数 A

课程编码：GE03003 | 试卷编号：A | 考试时间：120 分钟

一、计算题 I （每小题 6 分，共 42 分）

1. 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+x \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

2.已知

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

B' 为 B 的伴随矩阵，求 $|B'|$。

3.设矩阵 X 满足关系

$$AX + E = A^2 + X$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad E \text{ 为三阶单位阵}$$

求矩阵 X。

4.设三阶实矩阵 $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ 的特征值为 $1, -2, 3$，$A_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，求

$$A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

5.设 A 是正负惯性指数均为 1 的 3 阶实对称矩阵，且满足

$$|E + A| = |E - A| = 0$$

求 $|2E + 3A|$。

6.设

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

且 $A=P\Lambda Q$，求 A^{100}。

7.设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三个线性无关的列向量，求向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩。

二、计算题 II （每小题 10 分，共 30 分）

8.设

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\quad \alpha_2=(1,0,-1)^T,\quad \alpha_3=(1,0,1)^T$$

为 R^3 的一组基，

$$\beta_1=(1,2,1)^T,\quad \beta_2=(2,3,4)^T,\quad \beta_3=(3,4,3)^T$$

为 R^3 的另一组基。

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，并求向量

$$\xi=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$$

在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。

9.设

$$\alpha_1=(1,4,1,0,2)^T,\quad \alpha_2=(2,5,-1,-3,2)^T,\quad \alpha_3=(-1,2,5,6,2)^T,\quad \alpha_4=(0,2,2,-1,0)^T$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩并讨论线性相关性；

(2) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组；

(3) 把其余向量表示成极大线性无关组的线性组合。

10.求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ 3x_1-3x_2+x_3-3x_4=4\\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$$

三、综合题 （第11、12题各10分，第13题8分，共28分）

11.设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$$

通过正交变换可化为标准形

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + by_3^2$$

(1) 求 a, b 及所用正交变换矩阵 Q；

(2) 证明 $A + 2E$ 为正定矩阵，其中 A 是二次型 f 的矩阵。

---

12. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 不可逆，且

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量；

(2) 求矩阵 A。

---

13. 设 3 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，A 为三阶方阵，且

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3, \quad A\alpha_3 = \alpha_3 + 2\alpha_1$$

(1) 证明 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 也线性无关；

(2) 计算行列式 $|A - 2E|$，其中 E 为单位阵。