# 基本方法

## 凑微分法（第一换元积分法）

- 关键在于找到那一个可以将积分简化成会积函数的形式的东西

### Ex1

$$I=\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$$

联想：$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

解

$$I=\int\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\,dx$$

$$=-\int\frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\,d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C$$

$$=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

### Ex2

$$I=\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)}\,\mathrm{d}x$$

联想：$(xe^x)'=(1+x)e^x$
解

$$I=\int\frac{(1+x)e^x}{xe^x(1+xe^x)}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{xe^x(1+xe^x)}\,d(xe^x)$$

$$=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x).$$

## Ex3

$$I = \int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'}{2+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}+C
\end{aligned}$$

## Ex4

$$I = \int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

## Ex5

$$I = \int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{1+x^4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\,d\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+C.
\end{aligned}$$

# 第二换元积分法

- 三角代换
- 根式代换
- 倒置代换

- 二项代换
- 欧拉代换

## Ex1

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{(5+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$$

解
令 $x=\sqrt{5}\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$dx=\sqrt{5}\sec^2 t\,dt$$

$$I=\int \frac{\sqrt{5}\sec^2 t}{\sqrt{125}\ \sec^3 t}\,dt$$

$$=\frac{1}{5}\int \cos t\,dt$$

$$=\frac{\sin t}{5}+C$$

$$=\frac{x}{5\sqrt{5+x^2}}+C$$

## Ex2

$$I=\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$I=\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}}{\sqrt[3]{(x+1)^6(x-1)^4}}\,dx=\int \frac{1}{(x+1)^2}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4 dx$$

令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，则

$$x=1+\frac{2}{t^3-1}$$

$$I=-\frac{3}{2}\int dt$$

$$=-\frac{3}{2}t+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$$

- 二项代换$t=x\pm\dfrac{1}{x}$

## Ex3

$$I=\int\frac{x^8(x^2+1)}{(x^2-1)^{10}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$I=\int\frac{x^{10}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{10}\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}}d\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{x}\right)^{9}}+C$$

$$=-\frac{x^9}{9(x^2-1)^9}+C$$

## Ex4

$$I=\int\frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

解

$$I=\int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)}dx$$

$$=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)+C$$

# 分部积分法

- 一般为“三指对反幂”

## 回归法；

顾名思义就是分部积分几次之后又得到了最初的被积函数，此时我们可以直接把结果解出来

### Ex1

$$I=\int\frac{xe^{arctanx}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,d\left(e^{\arctan x}\right)\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int e^{\arctan x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,d\left(e^{\arctan x}\right)\\&=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx\end{aligned}$$

## 拆项法

- 有些积分可以通过拆项变成几个积分，（1）可能会出现非初等函数，但是最后这些非初等函数会相互抵消，最后反而可以求出积分（2）可能会出现上面的“回归”现象

### Ex1

$$I=\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

解

$$I=\int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

其中

$$\begin{aligned}\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx&=\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx\\&=\int x\,e^{x+\frac{1}{x}}\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=\int x\,d\left(e^{x+\frac{1}{x}}\right)\\&=xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx\end{aligned}$$

**Ex2**

$$I=\int \frac{x^2(x\sec^2x+\tan x)}{(x\tan x+1)^2}\mathrm{d}x$$

解

注意到

$$(x\tan x+1)'=x\sec^2 x+\tan x,$$

$$I=\int x^2\,d\left(-\frac{1}{x\tan x+1}\right)$$

$$=-\frac{x^2}{x\tan x+1}+\int\frac{2x}{x\tan x+1}\,dx$$

$$=-\frac{x^2}{x\tan x+1}+2\int\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\,dx$$

注意到

$$(x\sin x+\cos x)'=x\cos x,$$

$$I=-\frac{x^2}{x\tan x+1}+2\int\frac{d(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}$$

$$=-\frac{x^2}{x\tan x+1}+2\ln|x\sin x+\cos x|+C$$

**Ex3**

$$I=\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

解

联想到

$$d\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)},$$

这里 $f(x)=x\sin x+\cos x$，$f'(x)=x\cos x$

$$I=\int\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{x}{\cos x}\,d\left(-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\cdot\left(\frac{x}{\cos x}\right)'dx$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$$