

2013级高等数学A(1)期末考试试题

一、求下列极限（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n^2 + 4n + 5} - (n-1)].$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \tan(x^2) dx}{x^3}.$

二、求下列导数（每小题 6 分，共 18 分）

3. 设 $y = \ln^3(x^3)$, 求 y' .

4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$ 和 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1}$.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + y^3 - 5x = 0$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 和 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

三、计算下列积分（每小题 5 分，共 20 分）

6. $\int \frac{x+1}{3x^2+5} dx.$ 7. $\int_0^4 \cos(\sqrt{x}-1) dx.$ 8. 设 a 为常数, 求 $\int_0^1 x(x-a) dx.$

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1 + \sin x) \ln x$, 求 $\int x f'(x) dx.$

四、求解微分方程（共 14 分）

10. (6 分) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}, y|_{\frac{\pi}{2}} = 1.$ 11. (8 分) $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}(x+1)$

五、讨论题（共 16 分）

12. (10分) 讨论函数 $f(x) = \int_0^x \frac{3x}{x^2 - x + 1} dx$ 的增减性、凸性, 并求其极值.

13. (6分) 在区间 $[0, 1]$ 上验证罗尔(Rolle)中值定理对函数 $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-1}$ 的正确性.

六、应用题（每题7分，共14分）

14. 已知一立体, 以长半轴 $a=10\text{cm}$ 、短半轴 $b=5\text{cm}$ 的椭圆为底, 而垂直于长轴的截面均为等边三角形, 求其体积.

15. 一底为 8cm 、高为 6cm 的等腰三角形膜片, 铅直地沉没于水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶在水下 3cm 深处, 试求膜片一面所受的压力.

(水的密度为 $\gamma = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$).