三角函数积分

一、三角有理函数

以 $R(u,v)$ 表示由 u,v 及常数经过有限次的四则运算得到的二元函数，而 $R(\sin x,\cos x)$ 则称为三角有理函数，如：$y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$、$y=\frac{1}{1+\cos x}$

> **注意**：一切三角有理函数都可以通过换元 $\tan\frac{x}{2}=t$（万能公式）化为有理函数，但不一定是最佳解法，需具体问题具体分析。

（一）通用方法——万能公式换元：令 $\tan\frac{x}{2}=t$

对于 $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$，令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $x=2\arctan t$，故 $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$，且：

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

代入可得：

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

最后再回代即可。

例题 1： $\int\frac{1}{3+5\cos x}\,dx$

解：令 $\tan\frac{x}{2}=t$

$$I=\int\frac{1}{3+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{2}{3(1+t^2)+5(1-t^2)}\,dt=\int\frac{2}{8-2t^2}\,dt=\int\frac{1}{4-t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{1}{(2+t)(2-t)}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2+t}\,dt+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2-t}\,dt=\frac{1}{4}\ln|2+t|-\frac{1}{4}\ln|2-t|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C$$

回代 $t=\tan\frac{x}{2}$ 得：

$$I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

例题 2： $\int\frac{1}{1+\cos x+\cos^2 x}\,dx$

解：令 $\tan\frac{x}{2}=t$

$$I=\int\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{1}{\frac{(1+t^2)^2+(1-t^2)(1+t^2)+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

分子展开：

$$(1+t^2)^2=1+2t^2+t^4$$
$$(1-t^2)(1+t^2)=1-t^4$$
$$(1-t^2)^2=1-2t^2+t^4$$

相加得：$1+2t^2+t^4+1-t^4+1-2t^2+t^4=3+t^4$

所以：

$$I=\int\frac{2}{3+t^4}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{2}{3+t^4}\,dt$$

这一步较复杂，可进一步分解或使用对称性处理。但更优解法见下文。

> **注**：若被积函数中 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的次数太高，不建议用万能公式（会使次数更高）。

（二）特殊解法（利用三角恒等变形和凑微分技巧）

（1）擅长使用"缩分母"技巧

对于分母为 $1+\cos x$ 或 $1+\sin x$ 的积分，分子分母同乘以其共轭表达式 $(1-\cos x),(1-\sin x)$，并利用二倍角公式 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ 等。

例题 1： $\int\frac{1}{1+\cos x}\,dx$

法一：同乘共轭表达式

$$I=\int\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx=\int\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx=\int\csc^2 x\,dx-\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx=-\cot x+\frac{1}{\sin x}+C$$

法二：二倍角公式

$$I=\int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C$$

例题 2：$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

法一：

$$I=\int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx-\int \tan^2 x\,dx=\int \frac{1}{\cos x}\,d(-\cos x)-\int(\sec^2 x-1)\,dx=-\frac{1}{\cos x}-\tan x$$

法二：

$$I=\int \frac{\sin x+1-1}{1+\sin x}\,dx=\int 1\,dx-\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx=x-\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

利用 $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx=\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\,dx=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$，最终得：

$$I=x+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$$

例题 3：$\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$

解：

$$I=\int \frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}\,dx=\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos 2x}\,d(2x)+\frac{1}{2}\int 1\,dx-\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,d(2x)=\frac{1}{2}\ln|\tan 2x+\sec 2$$

例题 4：$\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

解：设 $I=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$，记 $J=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

则 $I+J=\int 1\,dx=x+C_1$，$I-J=\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\ln|\sin x+\cos x|+C_2$

联立得：

$$I=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C$$

例题 5：$\int \sec^3 x\,dx$

法一：令 $\sin x=t$

$$I=\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx=\int \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt=\int \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt$$

令 $t=\sin\theta$，则 $dt=\cos\theta\,d\theta$，得：

$$I=\int \frac{1}{(1-\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\cos\theta\,d\theta=\int \frac{1}{\cos^3\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta=\int \sec^2\theta\,d\theta=\tan\theta+C$$

回代得：$I=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}+C=\frac{\sin x}{\cos x}+C=\tan x+C$

法二：分部积分 + 积分重现

$$I=\int \sec^3 x\,dx=\int \sec x\cdot\sec^2 x\,dx=\sec x\tan x-\int \tan x\cdot\sec x\tan x\,dx=\sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 x\,dx=\sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x\cdot$$

即：

$$I=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|\Rightarrow 2I=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|\Rightarrow I=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$$

探索题：已知 $\int \sec x\,dx=\ln|\tan x+\sec x|+C$，$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

计算 $\int \sec^n x\,dx\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$

记 $I_n=\int \sec^n x\,dx$

- **偶数**：$I_{2n}=\int \sec^{2n} x\,dx=\int(1+\tan^2 x)^{n-1}d(\tan x)$
- **奇数**：$I_{2n+1}=\int \sec^{2n+1} x\,dx=\int \sec^{2n} x\cdot\sec x\,dx=\int(1+\tan^2 x)^n d(\tan x)$

也可递推：

$$I_n=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

例题 6：导出 $I_n=\int \tan^n x\,dx$ 的递推公式

$$I_n=\int \tan^n x\,dx=\int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\,dx=\int \tan^{n-2}x\,d(\tan x)-\int \tan^{n-2}x\,dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$$

例题 7： $\int \frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2 \sin x}\, dx$

解：令 $\cos x = t$，则 $-\sin x\, dx = dt$

$$I = \int \frac{5+4t}{(2+t)^2(1-t)}\, dt = \int \frac{1}{t-1}\, dt - \int \frac{1}{t^2+4t+4}\, dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{1}{t+2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\right| + \frac{1}{\cos x+2} + C$$

例题 8： $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx$

解：令 $\tan x = t$，则 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{(1+t^2)+1}\, dt = \int \frac{1}{t^2+2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

例题 9： $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}\, dx$

解：利用 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x}\, d(\tan x) = \int \frac{1+t^2}{t^4}\, dt = \int \left(t^{-4} + t^{-2}\right) dt = -\frac{1}{3}t^{-3} - t^{-1} + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C$$

例题 10： $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$

解：拆分为三部分：

$$I = \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx + \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\, dx + \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$$

第一项：令 $\tan x = t$，则 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$，$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$，得：

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t = \arctan(\tan x) = x$$

第二项：$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\, dx$，令 $u = \cos x$，得：

$$\int \frac{-du}{1+(1-u^2)} = \int \frac{-du}{2-u^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + C$$

第三项：$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$，令 $u = \sin x$，得：

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan(\sin x)$$

综合得：

$$I = x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}\right| + \arctan(\sin x) + C$$

例题 11： $\int \frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\, dx$

设 $3\sin x + 4\cos x = P(2\sin x + \cos x) + Q(2\cos x - \sin x)$

比较系数：

$$\begin{cases} 2P - Q = 3 \\ P + 2Q = 4 \end{cases} \Rightarrow P = 2, Q = 1$$

所以：

$$I = \int 2\, dx + \int \frac{2\cos x - \sin x}{2\sin x + \cos x}\, dx = 2x + \ln|2\sin x + \cos x| + C$$

例题 12： $\int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 3x}\, dx$

利用 $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$$I = \int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 3x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}[\cos(2x) - \cos(4x)]}\, dx = 2\int \frac{1}{\cos 2x - \cos 4x}\, dx$$

利用和差化积：

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 2\sin 3x \sin x$$

所以：

$$I = 2\int \frac{1}{2\sin 3x \sin x}\, dx = \int \frac{1}{\sin 3x \sin x}\, dx$$

继续化简或换元。

例题 13： $\int \frac{1}{2\sin x+\sin 2x}\,dx$

解：$\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以：

$$I = \int \frac{1}{2\sin x + 2\sin x\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$$

令 $\cos x = t$，则 $-\sin x\,dx = dt$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C$$

例题 14： $\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

解：令 $u = \cos x + \sin x$，则 $du = (-\sin x + \cos x)\,dx$

所以：

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\cos x + \sin x| + C$$

例题 15： $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

解：$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

令 $u = \sin 2x$，则 $du = 2\cos 2x\,dx$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u}{1-\frac{1}{2}u^2}\cdot\frac{du}{2\cos 2x}$$

略显复杂，可尝试其他方法。

总结

1. **万能公式**适用于所有三角有理函数，但可能使计算复杂。
2. **凑微分法**、**恒等变形**、**降幂公式**、**和差化积**是常用技巧。
3. **递推公式**在处理高次幂时非常有效。
4. **分式分解**和**配方法**常用于简化积分。
5. **观察结构**，灵活选择方法是关键。