# 变限积分复合函数导数

## 【情形一】 $F(x)=\int_a^x g(x)f(t)\,dt$

对于【情形一】，由于积分变量为 $t$，可将函数 $g(x)$ 提出到积分前面，则有

$$F(x)=g(x)\cdot\int_a^x f(t)\,dt$$

即原有的式子可变为 $g(x)$ 与 $\int_a^x f(t)\,dt$ 两项之积。

根据求导基本法则中的乘法法则可知，函数 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$ 的导数为

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

则有

$$F'(x)=g'(x)\cdot\int_a^x f(t)\,dt+g(x)\cdot\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=g'(x)\int_a^x f(t)\,dt+g(x)f(x)$$

### 【例】已知函数 $F(x)=\int_a^x xt\,dt$，求函数 $F(x)$ 的导数。

#### 【解】

$$\begin{aligned}F'(x)&=(x)'\int_a^x t\,dt+x\left(\int_a^x t\,dt\right)'\\&=\int_a^x t\,dt+x\cdot x\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^x+x^2\\&=\frac{1}{2}(3x^2-a^2)\end{aligned}$$

---

## 【情形二】 $F(x)=\int_a^x f(t,x)\,dt$

对于【情形二】，$t$ 和 $x$ 无法分离，需要采用换元法将 $x$ 分离出来。

### 【例】求函数 $F(x)=\int_a^x tf(x^2-t^2)\,dt$ 的导数。

#### 【解】令 $u=x^2-t^2$，则 $du=-2t\,dt\Rightarrow dt=-\frac{du}{2t}$，带入原式可得

$$F(x)=\int_{x^2-a^2}^{x^2-x^2} tf(u)\cdot\frac{du}{-2t}=-\frac{1}{2}\int_{x^2-a^2}^{0} f(u)\,du$$

即

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2-a^2} f(u)\,du$$

则

$$F'(x)=\frac{1}{2}f(x^2-a^2)\cdot(x^2-a^2)'=xf(x^2-a^2)$$