

2019级高等数学A(1)期末考试试题

一 填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的_____ (在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个填入)条件.
2. 函数 $y = \frac{1}{\tan x}$ 的间断点是_____.
3. 抛物线 $y = x^2$ 在其顶点处的曲率半径 $\rho =$ _____.
4. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的水平渐近线方程为_____.
5. 心形线 $r = 1 + \cos \theta$ 的全长为_____.

二 计算题(每小题 8 分, 共 56 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x(1 - \sqrt{1 - x^2})}$.
2. 设 $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$.
3. 求 $f(x) = x \ln(x-1)$ 在 $x_0 = 2$ 处的带有佩亚诺余项或拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.
4. 求 $\int \frac{2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$
5. 求 $\int_{-2}^2 \min\{|x|, x^2\} dx$.
6. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{1 + e^{-x}} dx$.
7. 求微分方程 $y'' + y = x - \cos 2x$ 的通解.
8. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx$.

三 应用题(第一小题 12 分, 第二小题 8 分, 共 20 分)

1. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过原点, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $y \geq 0$. 又已知该曲线与直线 $x = 1, y = 0$ 所围平面图形面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c , 使该平面图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积最小, 并求出最小值.
2. 一曲线通过点 $(2, 3)$, 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 建立该曲线所对应的微分方程, 并求这条曲线方程.

四 证明题 (9 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$; (2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.