线性代数 A 参考答案（A 卷）

1．将行列式按第一列展开得 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$， $(n\geq 3)$，

又因为 $D_1=\alpha+\beta, D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2, D_3=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$ ，

若 $\alpha=\beta$，不妨设 $D_{n-1}=n\alpha^{n-1}$，则有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=2\alpha n\alpha^{n-1}-\alpha^2(n-1)\alpha^{n-2}=(n+1)\alpha^n$$

由归纳假设知 $D_n=(n+1)\alpha^n$

若 $\alpha\neq\beta$，不妨设 $D_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，则有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

由归纳假设知 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

2. 令 $A_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}, A^n=\begin{bmatrix}A_1^n&0\\0&A_2^n\end{bmatrix}$,

而 $A_1^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=E$，所以 $A_1^n=\begin{cases}E, n=2k\\A_1, n=2k-1\end{cases}$

又因为 $A_2^2=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A_2^3=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以 $A_2^n=\begin{bmatrix}1&0&-n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,

故当 $n=2k$ 时， $A^n=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-n\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$,

故当 $n=2k-1$ 时， $A^n=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-n\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$,

3. 由题意可知 $r(A)<4$，而

$$A=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&k\\0&k-1&0&1-k\\0&0&k-1&1-k\\0&1-k&1-k&1-k^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&k\\0&k-1&0&1-k\\0&0&k-1&1-k\\0&0&0&(1-k)(3+k)\end{bmatrix},$$

所以 $k=1$ 或 $k=-3$

4. 因为 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\-1&1&0&3\\2&4&6&0\\1&-2&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&3&3&3\\0&0&0&0\\0&-4&-4&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且有 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

5. 因为 A 为正定矩阵，所以有

$$D_1=2-a>0,D_2=\begin{vmatrix}2-a&1\\1&1\end{vmatrix}>0,D_3=\begin{vmatrix}2-a&1&0\\1&1&0\\0&0&a+2\end{vmatrix}>0$$

解得 $-2<a<1$

6. （1）因为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$ 而

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&-1&1&1\\0&0&1&0&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&-1&1\\0&1&0&-1&-2&-1\\0&0&1&0&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&1&2\\0&1&0&-1&-2&-1\\0&0&1&0&3&2\end{bmatrix}$$

故 $$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&-2&-1\\0&3&2\end{bmatrix}$$

（2）设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)Y,$，则 $Y=A^{-1}X$，而

$$\begin{bmatrix}2&1&2&2\\-1&-2&-1&-1\\0&3&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-3&0&0\\0&3&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

所以 $Y=(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2})^T$

7. 设方程为 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$，由题意有 $\begin{cases}a_2+2a_3+3a_4=0\\3a_1+2a_2+a_3=0\end{cases}$，

而 $\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&0&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{bmatrix}$，

得基础解系 $\eta_1=(1,-2,1,0)^T,\eta_2=(2,-3,0,1)^T$，故方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\2x_1-3x_2+x_4=0\end{cases}$ 8 分

8.

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&\lambda\\1&\lambda&1&-1\\\lambda&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&\lambda\\0&\lambda+1&0&-(\lambda+1)\\0&\lambda+1&2-\lambda&1-\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&\lambda\\0&\lambda+1&0&-(\lambda+1)\\0&0&2-\lambda&(1+\lambda)(2-\lambda)\end{bmatrix}$$

当 $\lambda\neq2$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，有唯一解，

当 $\lambda=2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，有无穷解

当 $\lambda=-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，有无穷解

当 $\lambda=2$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&3&0&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

解得 $\eta_0=(1,-1,0)^T,\xi=(-1,0,1)^T$，故通解为 $\eta_0+k\xi,k\in R$

当 $\lambda=-1$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

解得 $\eta_0=(-1,0,0)^T,\xi=(1,1,0)^T$，故通解为 $\eta_0+k\xi,k\in R$

9. 令 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-4\lambda+1$，则 B 的特征值为 $\varphi(1)$，$\varphi(2),\varphi(-2)$，即 $-2,1,1$

因为 $B\xi_1=(A^3-4A+E)\xi_1=A^3\xi_1-4A\xi_1+E\xi_1=(\lambda_1^3-4\lambda_1+1)\xi_1=\varphi(\lambda_1)\xi_1$

所以 当 ξ_1 是 A 的属于特征值 λ_1 的特征向量时，ξ_1 也是 B 的属于特征值 $\varphi(\lambda_1)$ 的特征向量，故要求 B 的特征向量，只需求 A 的特征向量

A 为实对称矩阵，故不同特征值所对应的特征向量正交，即 A 的另两个特征向量满足方程 $x_1-x_2+x_3=0$，此方程的基础解系为：$\xi_2=(1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$

所以，B 的属于特征值 -2 的特征向量为：$k\xi_1,k\in R且k\neq 0$

属于特征值1的特征向量为 $k\xi_2+l\xi_3,k,l\in R$ 且不同时为零

10. 设 x_0,y_0 表示 2000 年底农村人口与城镇人口占总人口的比例，x_n,y_n 表示从 2000 年底之后的 n 年农村人口和城镇人口所占比例，则有

$$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\times -\\y_1=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{19}{20}\times -\end{cases}$$

令 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{20}\\\frac{3}{4}&\frac{19}{20}\end{bmatrix}$，上式可写为 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$,

因为总人口不变且迁移规律不变，所以有 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\frac{1}{5}$，其对应的特征向量为 $\xi_1=(1,15)^T,\xi_2=(-1,1)^T$，

令 $P=(\xi_1,\xi_2)$，则 $A=P\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}P^{-1}$，所以

$$A^n=P\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5^n}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\15&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5^n}\end{bmatrix}\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1\\-15&1\end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1+\frac{15}{5^n}&1-\frac{1}{5^n}\\15-\frac{15}{5^n}&15+\frac{1}{5^n}\end{bmatrix}$$

所以 2019 年底农村人口与城镇人口所占比例为 $\begin{bmatrix} x_{19} \\ y_{19} \end{bmatrix}=A^{19}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1+\frac{7}{5^{19}} \\ 15-\frac{7}{5^{19}} \end{bmatrix}$

11. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$，特征方程为$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-9)$，

故 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

基础解系为$\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-2,0,1)^T$，正交化$\beta_1=\alpha_1=(2,1,0)^T,\beta_2=\alpha_2=(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$，单位化$\xi_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\xi_2=(-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}})^T$

当$\lambda_3=9$时，$A-\lambda E=\begin{bmatrix} -8 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -18 & -18 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

基础解系为$\alpha_3=(\frac{1}{2},-1,1)^T$，单位化$\xi_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$

令$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $X=QY$ 即为所求正交变换，

标准型为 $f=9y_3^2$，故 $f=9y_3^2=1$ 即 $y=\pm\frac{1}{3}$为空中两张平行的平面。