

诚信应考，考试违规将带来严重后果！

湖南大学课程考试试卷

课程名称: 高等数学 A1; 课程编码: ZJ001SX24AI; 试卷编号: A; 考试时间: 120 分钟

姓名: _____; 学号: _____; 专业班级: _____

一. 计算题I(每题 6 分, 共 42 分)

1. 求曲线 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 的渐近线.

2. 求函数 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ 的间断点, 并判断间断点类型.

3. 求曲线 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 对应的点处的切线方程.

4. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\int_0^{xy} e^t dt + ye^x = 2$ 所确定的隐函数, 求 $dy|_{x=0}$.

5. 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 求函数 $f(x) = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$ 的极值.

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, $f'(0) = e$, 且对任意的实数 x 和 y 满足

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x),$$

求函数 $f(x)$.

二. 计算题II(每题 8 分, 共 32 分)

8. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt{1-x}}{x^2 - x \ln(1+x)}$.

9. 求 $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} dx$.

10. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx$.

11. 求二阶微分方程 $y'' + y = \sin 2x$ 的通解.

三. 应用题(第 12 题 12 分, 第 13 题 8 分, 共 20 分)

12. 设由曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D .

(1) 求平面图形 D 的面积 A ;

(2) 求平面图形 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

13. 一个人造地球卫星的质量为 200kg, 在高于地面 630km 处进入轨道. 问把这个卫星从地面送到 630km 的高空处, 克服地球引力要做多少功? 已知重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 地球半径 $R = 6370 \text{ km}$.

四. 证明题(6 分)

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1)$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$