2024年1月 湖南大学课程考试试卷

课程名称：线性代数 A

课程编码：GE03003 | 试卷编号：A | 考试时间：120 分钟

1.（8 分）
设 $f(x) = x^2 - x - 1$，对于 n 阶方阵 A，定义

$$f(A) = A^2 - A - E$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵。若

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $f(A)$。

2.（8 分）求下列行列式的值：

$$D_5 = \begin{vmatrix} a^4 & (a-1)^4 & (a-2)^4 & (a-3)^4 & (a-4)^4 \\ a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 & (a-4)^3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 & (a-4)^2 \\ a & a-1 & a-2 & a-3 & a-4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3.（10 分）
已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -4 \\ -5 & 3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$$

且 $AX = B$，求矩阵 X。

4.（10 分）
设有分块矩阵

$$P = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

其中 A, B 均为可逆矩阵，求 P^{-1}。

5.（10 分）
已知向量组

$$\alpha_1=(0,1,2,3)^T,\quad \alpha_2=(3,0,1,2)^T,\quad \alpha_3=(2,3,0,1)^T,\quad \alpha_4=(2,1,1,2)^T,\quad \alpha_5=(0,-2,1,1)^T$$

求该向量组的秩并求一个极大无关组。

6.（12 分）
已知 $\mathbb{R}^2$ 的两组基 α_1,α_2 与 e_1,e_2，求一个非零向量 $\beta\in\mathbb{R}^2$，使得 β 关于这两组基有相同的坐标，并求 β 关于第三组基 ξ_1,ξ_2 的坐标，其中：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix};\quad e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\quad \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

7.（12 分）
p,t 取何值时，方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$$

无解、有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出通解。

8.（10 分）
设矩阵 A,B 相似，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$$

(1) 求 x,y 的值；
(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$。

9.（12 分）
已知二次型

$$f=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad (b>0)$$

其中 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

(1) 求 a,b 的值；
(2) 求正交变换 $x=Py$，将二次型化为标准形。

10.（8 分）
设 A 为 n 阶实方阵，利用二次型证明：

(1) A^TA 是半正定矩阵；
(2) 若 A 可逆，则 A^TA 是正定矩阵。