

2014级高等数学A(1)期末考试试题

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(t^2) dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 曲线 $\sin(xy) = y$ 上点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 函数 $f(x) = e^{-x}$ 的带皮亚诺余项的三阶麦克劳林公式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数

$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 曲线 $y = x^2 + x$ 上在点 $(-1, 0)$ 处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

8. 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二. 计算题 (每小题 8 分, 共 48 分)

1. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t \end{cases}$ 给出, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right).$

3. 求 $\int e^{\sin x} \sin 2x dx$.

4. 求 $\int_4^5 \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$.

5. 求微分方程 $xdy + (1+x)ydx = e^x dx$ 的通解.

6. 求微分方程 $y'' - y = 4xe^x$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的解.

三. 讨论题 (8 分)

设函数 $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$. (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性; (2) 讨论曲线 $y = f(x)$ 的凸性.

四. 应用题 (7 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.

五. 证明题 (7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且有 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明: (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$. (2) 存在 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.