

# 2021年《高等数学A1》真题

1. 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

2. 求函数  $f(x) = \frac{\sin x + x}{\sin x}$  的所有间断点, 并指出各间断点的类型

3. 设  $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$  确定的函数  $y = f(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  以及  $y = f(x)$  在  $t = \frac{\pi}{3}$  时的切线方程

4. 求函数  $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$  的拐点和凹凸区间

5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b + \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ . 试确定  $a, b$  的值, 使得  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续

6. 求下列不定积分和定积分:

$$(1) \int e^{2x} \cos x dx$$

$$(2) \int_{-1}^1 \left( \frac{x-1}{x^2+2} + \sqrt{1-x^2} \right) dx$$

7. 设抛物线  $y^2 = 2x$ , 计算该抛物线在点  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  处的法线方程, 以及该法线与该抛物线所围图形的面积

8. 计算曲线  $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$  在区间  $0 \leq x \leq 2$  的弧长

9. 设隐函数方程  $y = 1 + x^y$  确定的函数  $y = f(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$

10. 求解初值问题:  $y'' + y + \sin 2x = 0$ ,  $y(\pi) = y'(\pi) = 1$

11. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可微, 且  $f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt + \sin x$ , 求  $f(x)$

12. 求  $f(x) = xe^x$  的  $n$  阶麦克劳林公式, 并估计  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$  的值, 使得误差小于 0.002

13. 设  $D_1$  是由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x = a$ 、 $x = 2$  以及  $y = 0$  所围成的平面区域。 $D_2$  是由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x = a$  以及  $y = 0$  所围成的平面区域, 其中  $0 < a < 2$ 。

(1) 求  $D_1$  绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积  $V_1$

(2) 求  $D_2$  绕  $y$  轴旋转而成的旋转体体积  $V_2$

(3) 试问当  $a$  取何值时,  $V_1 + V_2$  取最大值? 并求该最大值

14. 已知  $f(x)$  具有连续的导函数, 且满足

$$a < f(x) < b, \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| < 1$$

(1) 证明存在唯一的  $x^* \in (a, b)$  使得  $f(x^*) = x^*$

(2) 对于任意的  $x_0 \in [a, b]$ , 证明由  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$  产生的序列  $\{x_n\}$  收敛于 (1) 中的点  $x^*$