2022年上半年线性代数A试题（A卷）

一、计算题Ⅰ（每题6分，共42分）

1、计算n阶行列式行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$的值。

解：$$D_n=\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+n-1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}=(x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

2、若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量，且四阶行$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=2,|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=3$，求四阶行列式$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|$的值。

解：$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|$$

$$=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=1$$

3、已知三阶矩阵A的逆矩阵为$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的伴随矩阵$A^*$的逆矩阵。

解：$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-4,\quad A=(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=-4\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4、若四阶方阵A与B相似，且A的特征值为$2,3,4,5$，求行列式$|B^{-1}-E|$的值，

这里 E 是四阶单位矩阵。

解：由条件知：B 有特征值 $2,3,4,5$，于是 $B^{-1}-E$ 有特征值 $-\frac{1}{2},-\frac{2}{3},-\frac{3}{4},-\frac{4}{5}$，

故，$\left|B^{-1}-E\right|=(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{3}{4})\cdot(-\frac{4}{5})=\frac{1}{5}.$

5、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足

$AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求矩阵 X。

解：$AXA+BXB=AXB+BXA+E\Rightarrow AX(A-B)+BX(B-A)=E$

$$\Rightarrow(AX-BX)(B-A)=E\Rightarrow(A-B)X(A-B)=E$$

而 $|A-B|=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=1\neq0,$，所以 $A-B$ 可逆，且 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$

故 $X=[(A-B)^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$

6、设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,2,0,2)^T,\alpha_3=(1,2,1,a)^T$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数为2，求 a 的值。

解：由条件可知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,$

而 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&1&2\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&a-4\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $a=4.$

7、当 a 取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+2ax_2x_3$ 为正定二次型。

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&a\\0&a&4\end{pmatrix},$，

若 f 为正定的，则 f 的所有顺序主子式均大于0，而

$$|A_1| = 2, |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2, |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & a \\ 0 & a & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2a^2,$$

所以 $-2 < a < 2.$

二、计算题 II（每题 10 分，共 30 分）

8、设向量组

$\alpha_1 = (1+a,1,1,1)^T, \alpha_2 = (2,2+a,2,2)^T, \alpha_3 = (3,3,3+a,3)^T, \alpha_4 = (4,4,4,4+a)^T$。问 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表出。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$

当 $a = 0$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 1,$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，极大无关组为 α_1，且

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_3 = 3\alpha_1, \quad \alpha_4 = 4\alpha_1.$$

当 $a \neq 0$ 时，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

当 $a = -10$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 3,$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，极大无关组为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，且

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4.$$

9、在 R^3 中，求由基 $\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T$ 到基 $\beta_1 = (1,2,3)^T, \beta_2 = (2,1,3)^T, \beta_3 = (3,1,2)^T$ 的过渡矩阵，并求向量 $\alpha = (1,2,1)^T$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

解：设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，则 $A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$

而 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$

所以过渡矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$

设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\alpha,$

而 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

所以 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}=(1,1,-1)^{\mathrm T}.$

10、求一个正交变换，化二次型

$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3}$为标准型，并指出方程

$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=1}$表示何种二次曲面。

解：$A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$，则 $|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$，

故特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

$\lambda_1=0$ 时，的 $-AX=0$ 基础解系为 $\xi_1=(-1,1,2)^{\mathrm T}$，单位化得 $\eta_1=\dfrac{\sqrt6}{6}(-1,1,2)^{\mathrm T}$，

$\lambda_2=4$ 时，$(4E-A)X=0$ 的基础解系为 $\xi_2=(1,1,0)^{\mathrm T}$，单位化得 $\eta_2=\dfrac{\sqrt2}{2}(1,1,0)^{\mathrm T}$，

$\lambda_3=9$ 时，$(9E-A)X=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(1,-1,1)^{\mathrm T}$，单位化得 $\eta_3=\dfrac{\sqrt3}{3}(1,-1,1)^{\mathrm T}$，

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 $X=QY$ 即为所求的正交变换，

标准型为: $f=4y_2^2+9y_3^2$，$4y_2^2+9y_3^2=1$ 表示椭圆柱面。

三、综合题（11 和 12 题各 10 分，13 题 8 分，共 28 分）

11、设矩阵 $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2\\ a\\ -2\end{pmatrix}}$。讨论方程组 $\boldsymbol{AX=B}$ 解的情况，在有解

时，求出它的解。

解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\2&a&1&a\\-1&1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&a+2&3&a-4\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}$

（1）当$a\neq 1$时，若$a\neq -2$时，

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&a+2&3&a-4\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&a+2&0&a-4\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$r(A)=r(\overline{A})=3$时，方程组有唯一解，解得$X=(\frac{3a}{a+2},\frac{a-4}{a+2},0)^T$.

若$a=-2$时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&0&3&-6\\0&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

$r(A)=2,r(\overline{A})=3,$此时方程组无解。

（2）若$a=1$时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&3&3&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$r(A)=r(\overline{A})=2<3,$此时方程组有无穷解。

方程组的特解为$\xi_0=(1,-1,0)^T$.

对应齐次方程组的基础解系为$\xi_1=(0,-1,1)^T$.

故方程组的通解为$\xi_0+k\xi_1,k$为任意常数。

12、设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$相似于矩阵$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$。

（1）求 a，b 的值；　（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解：（1）$\because$ $A\sim B$，$\therefore$ $|A|=|B|,\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$,

即$\begin{cases}2a-3=b,\\3+a=b+2,\end{cases}$解得 $a=4,b=5.$

（2）因为A与B相似且B有特征值1,1,5，故B有特征值1,1,5，

当特征值为1时，由$(E-A)X=0,$而$\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系$\xi_1=(2,1,0)^T,\xi_2=(-3,0,1)^T.$

当特征值为5时，由$(5E-A)X=0,$而$\begin{pmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系$\xi_3=(-1,-1,1)^T.$令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$。

13、若A，B均为三阶方阵，且A有特征值2,3,4，又$A^2+2AB+A-B=E$，求行列式$\left|A^2+BA\right|$的值。

解：因为 $\left|A^2+BA\right|=\left|A+B\right|\cdot\left|A\right|$ 而A有特征值2,3,4，故 $\left|A\right|=2\cdot3\cdot4=24,$，

由 $A^2+2AB+A-B=E\Rightarrow 2A(A+B)-A^2+A-B=E$

$$\Rightarrow 2A(A+B)-(A+B)=E+A^2-2A\Rightarrow(2A-E)(A+B)=(A-E)^2$$

$$\Rightarrow\left|2A-E\right|\left|A+B\right|=\left|A-E\right|^2$$

而 $\left|2A-E\right|=3\cdot5\cdot7,\left|A-E\right|^2=(1\cdot2\cdot3)^2$，于是$\left|A+B\right|=\dfrac{(1\cdot2\cdot3)^2}{3\cdot5\cdot7}=\dfrac{12}{35},$

所以 $\left|A^2+BA\right|=\dfrac{12}{35}\cdot24=\dfrac{288}{35}.$