题目:

1(8分) 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&0&1&a\\0&-1&-1&b\\-1&-1&-1&c\\-1&1&0&d\end{vmatrix}$ 的值.

2(8分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$ 求 BA^T 和 $(AB)^T$.

3(8分) 设 $A=\begin{pmatrix}-10&6\\-18&11\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, 求 $P^{-1}AP$ 及 A^{2024}.

4(8分) 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-4&3\\1&-5&3\\-1&6&-4\end{pmatrix}$,求 A 的伴随矩阵 A^*.

5(8分) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&y&\cdots&y\\y&x&\cdots&y\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y&y&\cdots&x\end{vmatrix}$ 的值.

6(12分) 已知向量组 $\alpha_1=(1,3,5,-1)^T, \alpha_2=(2,-1,-3,4)^T, \alpha_3=(7,7,9,1)^T, \alpha_4=(3,2,2,3)^T$.

$\alpha_5=(6,4,4,2)^T$. 求此向量组的一个极大无关组, 并用极大无关组表示其余向量.

7 (14分) 已知向量组 $\alpha_1=(1,0,0)^T, \alpha_2=(1,1,0)^T, \alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 R^3 中的一组基.

(1) 证明向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T, \beta_2=(1,2,3)^T, \beta_3=(1,4,0)^T$ 也是 R^3 中的一组基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 C.

(3) 求向量 $\gamma=\beta_1+\beta_2-\beta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

8(14分) 讨论参数 λ,μ 的取值, 使得非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_3=-1,\\-x_1+x_2-3x_3=2,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=\mu\end{cases}$

无解, 有唯一解, 有无穷多解? 有解时, 请求出方程组的解.

9 **(14分)** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$ 的矩阵为

$A=\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，且矩阵 A 有一个特征值为 -3.

(1) 求参数 k 的值；

(2) 求一个正交变换，将二次型 f 化为标准形，并写出该正交变换对应的正交矩阵.

10 **(6分)** 设 $A\in R^{m\times n}$，E 为 n 阶单位矩阵. 已知 $B=\lambda E+A^TA$. 试证明 当 $\lambda>0$ 时，

B 为正定矩阵.

参考解答:

1(8 分)

解 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & b \\ -1 & -1 & -1 & c \\ -1 & 1 & 0 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 0 & c+a \\ 0 & 1 & 1 & d+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 0 & d+a+b \end{vmatrix}$

$=(d+a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-(a+b+d)$

2(8 分)

解 $BA^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\therefore (AB)^T=\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

3(8 分)

解 易求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & 6\\-18 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}=\Lambda$$

$$\therefore A^{2024}=P^{-1}\Lambda^{2024}P=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{2024}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4-3\cdot 2^{2024} & 2^{2025}-2\\6-3\cdot 2^{2025} & 2^{2026}-3\end{pmatrix}.$$

4（8 分）

解 由已知条件知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\1 & -5 & 3\\-1 & 6 & -4\end{pmatrix}$，又因为 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$,

故 $A^*=|A|A^{-1}$, 易求得 $|A|=1$,

故 $A^*=A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\1 & -5 & 3\\-1 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

5(8 分)

解 当 $x=y$ 时，$D_n=\begin{vmatrix}x & y & \cdots & y\\y & x & \cdots & y\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\y & y & \cdots & x\end{vmatrix}$ =0

当 $x\neq y$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix}x+(n-1)y & y & \cdots & y\\x+(n-1)y & x & \cdots & y\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\x+(n-1)y & y & \cdots & x\end{vmatrix}=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix}1 & y & \cdots & y\\1 & x & \cdots & y\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & y & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix}1 & y & \cdots & y\\0 & x-y & \cdots & y\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & x-y\end{vmatrix}=(x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}.$$

6（12 分）

解 记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&7&3&6\\3&-1&7&2&4\\5&-3&9&2&4\\-1&4&1&3&2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然，$r(A)$=3. 可选 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 一个线性无关组.

此时 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2;\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_3.$

7（14 分）

证 记 $A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，$B=(\beta_1\beta_2\beta_3)$

(1) 由于向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(1,4,0)^T$ 也是 R^3 中的一组向量，只要说明它们线性无关即可.

由于 $$|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&0\end{vmatrix}=-7\neq0,$$

故向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关，从而也是 R^3 中的一组基.

(2) 由基变换公式 $(\beta_1\beta_2\beta_3)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)C$ 得 $C=A^{-1}B$

$$\therefore C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\0&-1&4\\1&3&0\end{pmatrix}$$

(3) 由坐标变换公式 $X=CY=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\0&-1&4\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=(2,-5,4)^T$

8（14 分）

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-1&\lambda&\mu\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&\lambda-5&\mu+3\end{pmatrix}$

故 $\lambda=5,\mu\neq-3$ 时，无解；

$\lambda\neq5$ 时，有唯一解，此时解为

$$(x_1,x_2,x_3)^T=\left(-\frac{\lambda+2\mu+1}{\lambda-5},\frac{\lambda+\mu-2}{\lambda-5},\frac{\mu+3}{\lambda-5}\right)^T;$$

$\lambda=5,\mu=-3$ 时，有无穷多解，此时通解为

$(x_1,x_2,x_3)^T=(-1,1,0)^T+C(-2,1,1)^T$，其中 C 为任意常数.

9（14 分）

解 (1) 由矩阵 A 有一个特征值为 -3，

则 $|-3E-A|=\begin{vmatrix}3-k&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{vmatrix}=0$，得 k=1.

(2) 由矩阵 A 的特征方程 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=0$

得 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

易求得 $\lambda_1=-3$ 对应特征向量 $\xi_1=(1,0,-2)^T$；

$\lambda_2=2$ 对应特征向量 $\xi_2=(0,1,0)^T,\xi_3=(2,0,1)^T$

显然，这三个特征向量已经正交，只要单位化即可. 取

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)^T,\eta_2=(0,1,0)^T,\eta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^T$$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\-\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ 则 Q 为所求的正交变换矩阵.

在变换 $x=Qy$ 下，二次型化为标准形 $f=-3y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

10（6）

证明 首先$B \in R^{n\times n}$,且$B^T=(\lambda E+A^T A)^T=B$,故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

由于$\forall x \in R^n, x^T x \geq 0$,且$\forall x \neq 0$,就有$x^T x>0$.而

$$x^T Bx = x^T(\lambda E + A^T A)x = \lambda x^T x + (Ax)^T Ax$$

因此,当$\lambda>0$时,$\forall x \neq 0$,有$x^T Bx = x^T(\lambda E + A^T A)x = \lambda x^T x + (Ax)^T Ax > 0$.

即以 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型为正定二次型，故 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵正定.