线性代数 A 参考答案（A 卷）

1. $$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&0&5\\3&-2&0&-4\\4&-1&0&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&5\\3&-2&-4\\1&-1&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5&-13\\3&1&-31\\1&0&0\end{vmatrix}=-142$$

2. $$D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&1&\cdots&1\\1&1&a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1-a_1&a_2-1&0&\cdots&0\\1-a_1&0&a_3-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1-a_1&0&0&\cdots&a_n-1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)\begin{vmatrix}\frac{a_1}{a_1-1}&\frac{1}{a_2-1}&\frac{1}{a_3-1}&\cdots&\frac{1}{a_n-1}\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1}&\frac{1}{a_2-1}&\frac{1}{a_3-1}&\cdots&\frac{1}{a_n-1}\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1})$$

3. （1）$2A^{-1}B=B-4E\Rightarrow 2B=AB-4A\Rightarrow AB-2B-4A+8E=8E$

$\Rightarrow(A-2E)B-4(A-2E)=8E\Rightarrow(A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E$

所以$A-2E$可逆且$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$

（2）由（1）知$A-2E=8(B-4E)^{-1}$，故$A=2E+8(B-4E)^{-1}$

而$(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

所以$A=2E+8\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

$A=PQ=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$,

$QP=2$，$A^n=PQ\cdot PQ\cdot\cdots\cdot PQ=P\cdot(QP)^{n-1}\cdot Q=2^{n-1}A$

4. 此题答案不唯一

因为$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，所以最大无关组为$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$，6 分

且有$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$

（1）$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

（2）设α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$X$，在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标为$Y$，则

$X=(-1,-2,5)^T,Y=A^{-1}X$，而$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right]$，故$Y=(2,3,5)^T$

7. 此题答案不唯一

由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关和$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\cdot\alpha_4$可知$R(A)=3$，故$AX=0$的基础解系中只包含一个向量，由$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-0\cdot\alpha_4=0$知，向量$(1,-2,1,0)^T$为方程组$AX=0$的一个解，故$AX=0$的通解为$k(1,-2,1,0)^T,k\in R$

又因为$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，故向量$(1,1,1,1)^T$为方程组

$AX=\beta$的一个特解，所以$AX=\beta$的通解为$(1,1,1,1)^T+k(1,-2,1,0)^T, k\in R$

8. 由条件可知，A对应于$\lambda=1$的线性无关的特征向量有 2 个，故$R(E-A)=1$，而

$E-A=\begin{bmatrix}-6&12&-6\\-10&20&-x\\-y&24&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&x-10\\y-12&0&0\end{bmatrix}$，所以$x=10, y=12$

9. 故矩阵$A=\begin{bmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{bmatrix}$，其特征多项式为

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7&12&-6\\-10&\lambda+19&-10\\-12&24&\lambda-13\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，

所以特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$E-A=\begin{bmatrix}-6&12&-6\\-10&20&-10\\-12&24&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以$A$属于特征值 1

的特征向量为$\xi_1=(2,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$

当$\lambda_3=-1$时，$-E-A=\begin{bmatrix}-8&12&-6\\-10&18&-10\\-12&24&-14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&6&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以$A$属于特征值-1 的

特征向量为$\xi_3=(3,5,6)^T$，

令$P=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&0&5\\0&1&6\end{bmatrix}$，则$P$可逆，且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

10. 证明：因为A为正定矩阵，所以不妨设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$且$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，

则$A+E$的特征值为$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$且$\lambda_i+1>1(i=1,2,\cdots,n)$，故有

$\left|A+E\right|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1$

（1） $A=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\1+a & 1-a & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$由二次型的秩为 2 知$R(A)=2$，故$\left|A\right|=0$，解得$a=0$

（2）因为$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，所以 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$，

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，$2E-A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，所以$A$属于特征值 2 的特征向量为$\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(0,0,1)^T$

对于$\lambda_3=0$，$-A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，所以$A$属于特征值 0 的特征向量为$\xi_3=(-1,1,0)^T$

由于已经两两正交，故只需将其单位化，$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1,\eta_2=\xi_2,\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3$，

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则$X=QY$即为所求

（3）因为$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2$，所以$f(x_1,x_2,x_3)=1$为圆柱面。