

湖南大学《线性代数 A》2019 年期末考试试卷

1. (8 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

2. (8 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A^n 。

3. (8 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

B 为四阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 求 k 的值

4. (8 分) 求向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (2, 1, 4, -2, 0)^T, \quad \alpha_3 = (3, 0, 6, -1, 0)^T, \quad \alpha_4 = (0, 3, 0, 0, 1)^T$$

的一个最大无关组, 并把其余向量用这个最大无关组线性表示。

5. (6 分) 若矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

是正定矩阵, 求 a 的取值

6. (12 分) 设 R^3 中的两组基为

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$$

$$\beta_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \beta_2 = (2, 1, 3)^T, \quad \beta_3 = (3, 1, 2)^T$$

求:

(1) 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 A :

(2) 向量 $\alpha = 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标

7. (8 分) 求一个齐次线性方程组, 使得它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T$$

8. (12 分) 当 λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1 \\ \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

有解? 并写出无穷解时的通解

9. (8 分)

设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\xi_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量。记

$$B = A^3 - 4A + E$$

其中 E 为三阶单位矩阵。求 B 的全部特征值和对应的特征向量。

10. (10 分)

在某地, 每年有比例为 $\frac{3}{4}$ 的农村居民移居城镇, 有比例为 $\frac{1}{20}$ 的城镇居民移居农村。假设该地的总人口数不变, 且上述人口迁移的规律不变。若该地在 2000 年底的农村人口和城镇人口相等, 请预测在 2019 年底该地的农村人口和城镇人口占总人口的比例分别是多少?

11. (12 分)

求一个正交变换 $X = QY$, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化成标准形, 并说明曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是何几何形状。