

## 2011级高等数学A(1)期末考试试题

第 1~9 题每题 5 分，共 45 分.

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$ .

2. 设常数  $a > 0, b > 0, c > 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

3. 设  $f(x)$  可导, 且  $y = f[\sin(x^2)] + \sin^2[f(x)]$ , 求导数  $\frac{dy}{dx}$ .

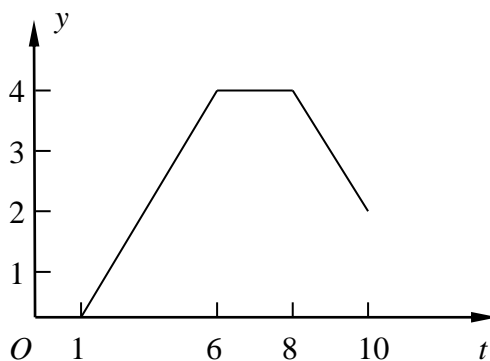
4. 设方程  $y = 1 + xe^y$  确定函数  $y(x)$ , 求导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

5. 求不定积分  $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5} dx$ .

6. 计算定积分  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ .

7. 设由连续曲线  $y = f(x)$ , 直线  $x = p, x = q$  以及  $x$  轴所围的曲边梯形面积为  $\sqrt{q^2 - p^2}$ , 求函数  $f(x)$ .

8. 若一物体沿直线运动, 物体的运动速度的变化曲线如下图 (单位 m/s), 求物体在这段位移过程中的平均速度.



9. 将函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$  展开成正弦级数.

第 10~12 题每题 7 分，共 21 分.

10. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$  的收敛性, 若收敛求其和.

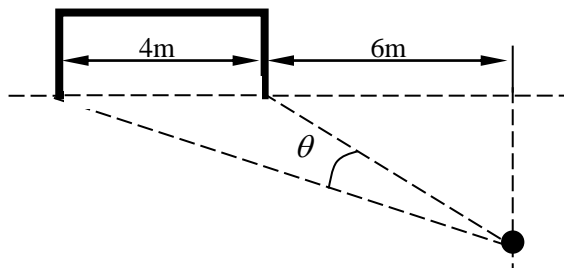
11. 求解微分方程问题  $x \frac{dy}{dx} + y = x \cos 2x$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

12. 求解微分方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = e^x + \cos x$ .

**第 13,14 题每题 8 分, 共 16 分.**

13. 假设足球场的球门宽度为 4 米, 一球员

沿垂直于底线的方向带球前进, 其行进路线与底线的交点距离右门柱 6 米, 问他在离底线几米的位置上将获得最大的射门张角  $\theta$ ?



14. 古埃及胡夫金字塔的塔基为  $230\text{m} \times 230\text{m}$  的正方形, 塔高  $146\text{m}$ , 建造金字塔所用的 230 多万块石料的平均密度为  $3210\text{kg/m}^3$ . (1) 运用积分方法计算金字塔的体积; (2) 建造时需要将石料从地面抬到所在高处, 试估算建成金字塔所作的总功.

**第 15,16 题每题 9 分, 共 18 分.**

15. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且有  $F(x) = \int_0^x (2t - x)f(t)dt$ . 试讨论:

(1) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $F(x)$  是否也是偶函数? (2) 若  $f(x)$  是单调减函数, 则  $F(x)$  是否也是单调减函数?

16. 设当  $x \in [0, 1]$  时,  $|f''(x)| \leq M$ , 且  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内取得最大值, 试证明不等式

$$|f'(0)| + |f'(1)| \leq M.$$