课后作业习题答案与提示–Part II

若有错误，请指出

练习1. 判断下列级数的敛散性（如收敛，须说明是条件收敛还是绝对收敛）：

$$(1).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}}{n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n^p},\quad \text{这里 } p>0.$$

答案. *(1).* $\sin\frac{i}{n}=\frac{e^{-1/n}-e^{1/n}}{2i}=\frac{-1}{2i}[\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})]$. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2i}[\frac{2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})],\quad \text{绝对收敛}.$$

(2). 发散。

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\cos(2n)}{n^p}+i\frac{\sin(2n)}{n^p}],$$

Case 1. $p>1$, 绝对收敛; *Case 2.* $0<p\le 1$, 由*Dirichlet* 判别法知，条件收敛。

练习2. 求下列幂级数收敛半径：

$$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^{2n},\quad (2).\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin\frac{1}{n})^{-n^2}z^n.$$

答案. *(1).* $R=\sqrt{\frac{1}{e}}$, *(2).* $R=\frac{1}{e}$;

练习3. 设$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$的收敛半径分别为$R_1\,(>0)$, $R_2\,(>0)$,求证$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n$ 的收敛半径$R\ge R_1R_2$（提示：用定义）; 并举例使得$R>R_1R_2$成立。

Proof. 对任意$z:|z|<R_1R_2$时, 可分解$z=z_1z_2$使得$|z_1<R_1$, $|z_2|<R_2$. 注意$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n z_1^n|=0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\beta_n z^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n z_1^n||\beta_n z_2^n|<M\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n z_2^n|,\text{绝对收敛},\ M\ \text{为一合适正常数}.$$

故$R\ge R_1R_2$。 □

举例如下：

Example 1. $\alpha_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2},\ \beta_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ R=+\infty,\ R_1=R_2=1,$

Example 2. $\alpha_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}2^n,\ \beta_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ R=1,\ R_1=\dfrac{1}{2},\ R_2=1.$

练习4. 确定幂级数的收敛圆盘并求和函数：

$$(1).\ f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^n,\quad (2).\ g(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}z^n.$$

答案. *(1).* $f(z)=\frac{2z^2}{(1-z)^3}$，*(2).* $g(z)=z-(z-1)\ln(1-z)$.

练习5. 下列三个幂级数具有相同的收敛半径（用定义证明, 只需要考虑收敛半径为正数的情形）：

$$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad (2).\ \sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1},\quad (3).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}.$$

注：只需要证明前面两个幂级数的收敛半径相同就可以了。

Proof. 设(1),(2)中幂级数的收敛半径分别为R, r.因为$\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^n$收敛半径一致,不难看出$R\ge r$.若$R=0$则显然$R=r=0$,不妨设$R>0$。下证当$|z|<R$时$\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^n$绝对收敛即可.取$z_0$使得$|z|<|z_0|<R$, 则$q=\sqrt{\frac{|z|}{|z_0|}}<1$及$\lim_{n\to\infty}nq^n=0$, $\lim_{n\to\infty}|c_nz_0^n|=0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|c_nz^n|=\sum_{n=1}^{\infty}n|c_nz_0^n||\frac{z^n}{z_0^n}|=\sum_{n=1}^{\infty}nq^n|c_nz_0^n|q^n<\sum_{n=1}^{\infty}Mq^n<+\infty,\ M \text{ 为一合适正常数}.$$

□

练习6. 在相应点对下列函数展开Taylor级数(前四项即可),并指出收敛半径：

$$(1).\ \tan z,\ z_0=\frac{\pi}{4},\quad (2).\ e^{\frac{z}{z-1}},\ z_0=0.$$

答案. 展开略。*(1).* $R=\frac{\pi}{4}$，*(2).* $R=1$.

练习7. 求下列幂级数在复平面上和函数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

答案. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$是$\mathbb{C}$ 上整函数。注意到$f'''(z)=f(z)$, 以及$f(0)=1,f'(0)=f''(0)=0$. 解此常微分方程可得

$$f(z)=\frac{1}{3}(e^z+e^{\omega z}+e^{\omega^2z}),\ \text{其中}\ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

练习8. 求值：$\ln^{(2n)}(1+iz^2)|_{z=0}$ $(n\ge1)$.（此处为$2n$阶导数）

答案. $f(z)=\ln(1+iz^2)$.

$$\ln(1+iz^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(iz^2)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^ni}{n+1}z^{2(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

比较两边同幂次前系数，可得：$\ln^{(2n)}(1+iz^2)|_{z=0}=f^{(2n)}(0)=\frac{(-i)^{n-1}i(2n)!}{n}$.

练习9. 设整函数$f(z)$在复平面 $\mathbb{C}$ 上处处满足 $|f(z)|\le|z|^s$, 此处s为正常数但 $s\notin\mathbb{Z}$, 求证：$f(z)\equiv0$.

Proof. 在$\mathbb{C}$上有Taylor展开：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\ 其中c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

$C_R:\ |z|=R,\ R>0.$

$$|c_n|=|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}|=|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{|z|^sdz}{|z|^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{R^{n-s}}=\begin{cases}\to 0, & R\to+\infty,\ if\ \ n>s;\\ \to 0, & R\to 0^+,\ if\ \ n<s.\end{cases}$$

于是$c_n\equiv 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, 从而$f(z)\equiv 0.$ □

练习10. 证明解析函数唯一性定理：设函数$f(z),\ g(z)$在区域D上解析，$a\notin\{z_n\}_{n=0}^{\infty}\subset D,\ a\in D$, 若

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}z_n=a,\quad (2)\ f(z_n)=g(z_n),\ n\in\mathbb{N},$$

则$f(z)\equiv g(z)$.

提示. 注意到$\{z_n\}$是函数$f(z)-g(z)$的一系列零点，用零点孤立性，立即可得。

练习11. 计算积分

$$(1).\ I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}z\sin\frac{z}{z-1}dz,\quad (2).\ I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}z\sinh\frac{z}{z-1}dz.$$

提示. 对$z\cosh\frac{z}{z-1}$ 进行*Laurent*展开如下*(*设$\zeta=z-1$*)*:

$$z\sin\frac{z}{z-1}=[(z-1)+1]\sin(1+\frac{1}{z-1})=[\zeta+1][\sin 1\cos\frac{1}{\zeta}+\cos 1\sin\frac{1}{\zeta}]$$
$$=(\zeta+1)[\sin 1(1-\frac{1}{2!\zeta^2}+\frac{1}{4!\zeta^4}+\cdots)+\cos 1(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{3!\zeta^3}+\frac{1}{5!\zeta^5}+\cdots)]$$

于是$c_{-1}=\cos 1-\frac{\sin 1}{2}$, 从而$I_1=\cos 1-\frac{\sin 1}{2}$.

类似对$z\sinh\frac{z}{z-1}$ 进行*Laurent*展开可求得

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}z\sinh\frac{z}{z-1}=\cosh 1+\frac{\sinh 1}{2}.$$

练习12. 求$\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^{6n}}{(-2n)!}$在$\mathbb{C}-\{0\}$上的和函数。

答案. $\cosh\frac{1}{z^3}$.

练习13. 设集合$A=\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}$是$\mathbb{C}$中$m-$点集。如果函数$f(z)$在$\mathbb{C}\backslash A$上解析且有界，试证明：$f(z)\equiv$常数。

Proof. 如果直接使用判别可去奇点的充要条件，此函数补充定义后就成了整函数，那么由Liouville定理直接可证。但我们此时还不能直接使用可去奇点的观念，所以只能在∞的某个邻域内进行Laurent展开，然后证明它的所有非常数项系数为0，这样由函数唯一性定理，$f(z)\equiv$常数。

$|f(z)|<M$, 对足够大的R,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n:\quad R<|z|<+\infty.$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}},\ r\in(R,+\infty),$$

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)||dz|}{|z|^{n+1}} \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{Mds}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n},$$

令$r\to+\infty$,不难看出当$n\ge 1$时, $c_n\equiv 0$.

下证当$n\le -1$时, $c_n\equiv 0$. 由复合闭路定理,对充分小的$r_1,r_2,\cdots,r_m$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_j|=r_j}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$$

令

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_j|=r_j}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}},$$

则

$$\begin{aligned}|a_j| &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_j|=r_j}\frac{|f(z)||dz|}{|z|^{n+1}} \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_j|=r_j}M(|z_j|+r_j)^{-n-1}ds\\ &= Mr_j(|z_j|+r_j)^{-n-1}\to 0,\ as\ r_j\to 0_+.\end{aligned}$$

不难看出: $c_n = a_1+a_2+\cdots+a_m = 0$.

□

练习14. 设函数$f(z)$在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析且处处满足 $|f(z)|\le|z|^m$, 此处m为一非0整数，求证：$f(z)\equiv Kz^m$, 其中K为某常数且$|K|\le 1$.

提示. *使用上面习题9的方法。*

练习15. 找出下列函数在扩充复平面$\overline{\mathbb{C}}$上所有奇点并进行分类:

$$(1).\ \frac{z}{(1+e^{\pi z})^3(1+z^2)^2},\quad (2).\ \frac{1}{z}-\frac{1}{\sin z}+\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^5}.$$

答案. *以下$n\in\mathbb{Z}$.*

(1). ∞：非孤立奇点; $i(2n+1)(n\ne 0,-1)$:均是3级极点; $\pm i$: 均是5级极点。

(2). ∞：非孤立奇点; $n\pi(n\ne 0)$:均是单极点; 0:可去奇点; 2:4级极点。

练习16. 证明Weierstrass定理：设z_0为$f(z)$一个本性奇点, 对$\forall$给定 $A\in\overline{\mathbb{C}}$, 在$z_0$点某个空心邻域$B^*_\delta(z_0)$内存在复数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$,使得

$$(1).\ \lim_{n\to\infty}z_n = z_0,\quad (2).\ \lim_{n\to\infty}f(z_n) = A.$$

Proof. 反证法.

情形1. 设$A\in\mathbb{C}$. 若不存在所需要的子列,则必存在$b>0$使得$|f(z)-A|>b$ 在z_0某个小邻域内成立. 于是$\frac{1}{f(z)-A}$在此邻域内有界, z_0为$\frac{1}{f(z)-A}$的可去奇点,可认为$\frac{1}{f(z)-A}$是此邻域内解析函数. 要么$\frac{1}{f(z)-A}|_{z=z_0}=0$,此时$z_0$必须为$f(z)-A$极点,从而是$f(z)$ 极点,与z_0是本性奇点矛盾; 要么$\frac{1}{f(z)-A}|_{z=z_0}\ne 0$, 此时$z_0$必须是$f(z)$ 可去奇点,矛盾.

情形2. 设$A=\infty$. 若不存在所需要的子列, 则必存在$M>0$使得$|f(z)|<M$ 在z_0某个小邻域内成立, 此时z_0必是$f(z)$ 可去奇点,矛盾! □

练习17. 设z_0为$f(z)$一个孤立奇点, m, k为两个正整数且$m<k$. 若

(1). $\lim\limits_{z\to z_0} f^{(m)}(z)=0$, 则$z_0$为$f(z)$可去奇点;

(2). $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^k f^{(m)}(z)=A\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则$z_0$为$f(z)$之$(k-m)$级极点.

提示. 利用*Laurent*展开式，来判断其负幂项的最高可能次数（先排除本性奇点可能）。

练习18. 设$f(z)$在$z=0$的某个空心邻域$B=\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<R\}$ $(R>0)$内解析且以$z=0$为奇点，已知存在复数列$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}\subset B$满足下列条件(i)(ii)(iii):

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty} z_n=0,\quad (ii)\quad \lim_{n\to\infty} f'(z_n)=1,\quad \text{及}\quad (iii)\quad f(z_n)\equiv 2, \text{对}\ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

试判断$z=0$为$f(z)$的何种孤立奇点，并证明你的结论。

答案. $z=0$为$f(z)$的本性奇点。

证明：由条件*(iii)*知道，$z=0$不可能为$f(z)$的极点，只需再证明$z=0$不可能为$f(z)$的可去奇点，反证法，假设$z=0$为$f(z)$的可去奇点，则由条件*(iii)*必有$\lim_{z\to 0} f(z)=2$. 在补充定义$f(0)=2$后，$f(z)$成为$B\cup\{0\}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<R\}$上解析函数。注意此时$f(z)-2$以0及所有$z_n$作为零点，由解析函数零点孤立性，必须有$f(z)\equiv 2$, 从而$f'(z)\equiv 0$,这矛盾于条件*(2)*. 证毕。

练习19. 计算下列函数在扩充复平面$\overline{\mathbb{C}}$上所有孤立奇点处留数：

$$(1).\ \frac{e^z}{z^2+1},\quad (2).\ z^2\cos\frac{z}{z-1}.$$

答案.

(1). $Res[\frac{e^z}{z^2+1},\infty]=-\sin 1$; $Res[\frac{e^z}{z^2+1},i]=\frac{e^i}{2i}$, $Res[\frac{e^z}{z^2+1},-i]=\frac{e^{-i}}{-2i}$,

(2). $Res[z^2\cos\frac{z}{z-1},1]=-(\frac{5}{6}\sin 1+\cos 1)=-Res[z^2\cos\frac{z}{z-1},\infty]$, 参考练习*11*的解答.

练习20. 计算积分：

(1). $\oint_{|z|=2}\frac{z^{2n}}{z^n+1}dz$, 其中$n$为正整数;

(2). $\oint_{|z|=3}\tan(\pi z)dz$;

(3). $\oint_{|z|=R}\frac{z^2}{1-e^{2\pi i z^3}}dz$, $n<R^3<n+1$, n 为正整数.

答案.

(1). $\oint_{|z|=2}\frac{z^{2n}}{z^n+1}dz=\oint_{|z|=2}\frac{z^{2n}-1+1}{z^n+1}dz=\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^n+1}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\geq 2;\end{cases}$

(2). $\oint_{|z|=3}\tan(\pi z)dz=-12i$;

(3). $\oint_{|z|=R}\frac{z^2}{1-e^{2\pi i z^3}}dz=2n+1$, $n<R^3<n+1$, n 为正整数.

第(3)小题提示：被积函数在积分围道内有孤立奇点$z=0$，以及方程$z^3=k$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$的根共$6n$个, 这$6n+1$个孤立奇点均为一级极点，容易算出他们处的留数。

练习21. 设$R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$,其中$P_n(z)$, $Q_m(z)$分别为n,m次多项式,求证：当$m-n\geq 2$时，$Res[R(z),\infty]=0$.

提示. *证法1*：直接证明

$$Res[R(z),\infty]=-\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}R(z)dz=0.$$

证法2：$Res[R(z),\infty]=Res[\frac{-1}{z^2}R(\frac{1}{z}),0]=0$, $\because$ $\frac{-1}{z^2}R(\frac{1}{z})$ *has removable singularity at* 0.

练习22. 用留数方法计算积分：

$$\begin{aligned}
&(1).\ I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2},\quad \text{其中}|a|<1,\ a\in\mathbb{R};\\
&(2).\ I(b)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{b+\sin\frac{\theta}{2}},\quad \text{其中}b>1;\\
&(3).\ I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n},\quad n\in\mathbb{Z}^+;\\
&(4).\ I(p,q)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+px+q},\quad \text{其中}\Delta=p^2-4q<0.
\end{aligned}$$

答案.

$$\begin{aligned}
&(1).\ I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi}{1-a^2};\\
&(2).\ I(b)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{b+\sin\frac{\theta}{2}}=2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{b+\sin t}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{b+\sin t}=\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}};\\
&(3).\ I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\begin{cases}\pi\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\pi\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}, & n\geq 2,\\ \pi,\quad n=1;\end{cases}\\
&(4).\ I(p,q)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+px+q}=\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\cos\frac{p}{2}}{\sqrt{-\Delta}}.
\end{aligned}$$

练习23. 构造有理函数$R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, 其中$P_n(z)$, $Q_m(z)$分别为n, m次多项式,使得
$(1).\ Res[R(z)e^{iz},\infty]=0$, $(2).$ $m-n=1$同时成立。

答案.

$$\begin{aligned}
&Res[\frac{e^{iz}}{z},\infty]=A=-1,\quad Res[\frac{e^{iz}}{z^3},\infty]=B=\frac{1}{2},\ choose\ c_1,c_2\in\mathbb{C}\ such\ that\ c_1A+c_2B=0,\\
&for\ example:\ c_1=1,c_2=2.\ So,\ Res[\frac{e^{iz}}{z}+\frac{2e^{iz}}{z^3},\infty]=Res[\frac{z^2+2}{z^3}e^{iz},\infty]=0.
\end{aligned}$$

注：上述例子在实轴上有极点，也不难构造例子$R(z)$使得(1)(2)成立外，并且$R(z)$在实轴上无奇点。