第五章习题解答

5. 证明：因z_0是$f(z)$的零点，又已知$f(z)\not\equiv 0$, 知存在$m\in N,\phi(z)$在z_0解析，$\phi(z_0)\neq 0$, $f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$. 类似的有$n\in N,\psi(z)$在z_0解析，$\psi(z_0)\neq 0$, $g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$.

(a). 若$m<n$, 则有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^{n-m}\psi(z)}=\infty.$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\tfrac{f'(z)}{g'(z)} &= \lim_{z\to z_0}\tfrac{m(z-z_0)^{m-1}\phi(z)+(z-z_0)^m\phi'(z)}{n(z-z_0)^{n-1}\psi(z)+(z-z_0)^n\psi'(z)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\tfrac{m\phi(z)+o(z-z_0)}{(z-z_0)^{n-m}(n\psi(z)+o(z-z_0))}=\infty.\end{aligned}$$

即等式两边均等于∞.

(b). 若$m>n$. 由上面的分析可得$\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{f(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{g'z)}{f'(z)}=\infty$, 这等价于

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=0.$$

(c). 若$m=n$. 由上面的分析可得：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z)}{\psi(z)}=\frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)}.$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}\phi(z)+(z-z_0)^m\phi'(z)}{m(z-z_0)^{m-1}\psi(z)+(z-z_0)^m\psi'(z)}=\frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)}.$$

即等式两边均等于$\frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)}$.

9(3). 易见当$m\leq 0$时，被积函数处处解析，积分为零. 当$m\geq 1$时，由$\cos z$的Taylor级数得被积函数为

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^m}=\frac{1-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}}{z^m}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-m}}{(2k)!}.$$

从而有

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \oint_{|z|=\frac{3}{2}} z^{2k-m} dz.$$

因当$p \geq 0$ 和$p = -2q, q \in N$时，有$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} z^p dz = 0$, 知当$m = 1$或为偶数时，积分为零。当$m = 2n+1, n \in N$时，积分为

$$\frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(2n)!} = \frac{(-1)^{\frac{m-3}{2}} 2\pi i}{(m-1)!}.$$

9(6). 记

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^n} dz.$$

(A). $|a| < |b| < 1$. 当$n > 1$时，在闭曲线$|z| = 1$内被积函数有两个相异n阶极点，故积分为零。当$n = 1$时，

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left[Res[\tfrac{1}{(z-a)(z-b)}, a] + Res[\tfrac{1}{(z-a)(z-b)}, b] \right] \\ &= 2\pi i \left[\tfrac{1}{a-b} + \tfrac{1}{b-a} \right] = 0. \end{aligned}$$

(B). $|a| < 1 < |b|$. 由Laurant级数（见后面的附注）：

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(n-1)!} x^k, \ \ |x| < 1,$$

可得当$|z-a| < |b-a|$时，

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(z-a)^n (z-b)^n} &= \tfrac{1}{(z-a)^n} \tfrac{1}{(a-b)^n} \tfrac{1}{\left(1+\frac{z-a}{a-b}\right)^n} \\ &= \tfrac{1}{(z-a)^n} \tfrac{1}{(a-b)^n} \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \tfrac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(a-b)^k (n-1)!} (z-a)^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \tfrac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(a-b)^{n+k} (n-1)!} (z-a)^{k-n}. \end{aligned}$$

由此式可得$(z-a)^{-1}$的系数为

$$(-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(a-b)^{2n-1} ((n-1)!)^2}.$$

因而得

$$I = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(a-b)^{2n-1} ((n-1)!)^2} 2\pi i.$$

(C). $1 < |a| < |b|$. 这时被积函数在闭曲线内和闭曲线上无奇点，故$I = 0$.

12(2). 令$t = \frac{1}{z}$, 则原积分变为

$$\oint_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{e^t}{t^4 (1+t)} dt.$$

在$t=0$附近可得Laurant级数：

$$\frac{e^t}{t^4(1+t)}=\frac{1}{t^4}+\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{3t}+O(1).$$

由此可得原积分为$2\pi i\left(\frac{-1}{3}\right)=-\frac{2\pi i}{3}$.

12(3). 当$n=1$时，

$$I_1=\oint_{|z|=r>1}\frac{z^2}{1+z}dz=\oint_{|z|=r>1}(z-1)dz+\oint_{|z|=r>1}\frac{1}{1+z}dz=\oint_{|z|=r>1}\frac{1}{1+z}dz=2\pi i.$$

当$n>1$时，由$z_k^n=-1$, 得$-z_k=\frac{1}{z_k^{n-1}}, k=1,2,\cdots,n$,及

$$\begin{aligned}
I_n &= \oint_{|z|=r>1}\tfrac{z^{2n}}{1+z^n}dz=\oint_{|z|=r>1}(z^n-1)dz+\oint_{|z|=r>1}\tfrac{1}{1+z^n}dz=\oint_{|z|=r>1}\tfrac{1}{1+z^n}dz\\
&=2\pi i\textstyle\sum_{k=1}^n Res\left[\tfrac{1}{1+z^n},\ z_k\right]=2\pi i\sum_{k=1}^n\tfrac{1}{nz_k^{n-1}}\\
&=\tfrac{-2\pi i}{n}\textstyle\sum_{k=1}^n z_k=0.
\end{aligned}$$

故得$I_1=2\pi i, I_n=0, n>1$.（其中等式$\sum_{k=1}^n z_k=0$可由根与系数的关系得到。）

13(4). 易得方程$z^4+1=0$在上复平面的两个根分别为$z_1=e^{\frac{\pi}{4}},\ z_2=e^{\frac{3\pi}{4}}$. 记

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx,$$

则

$$\begin{aligned}
2I &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\left(Res\left[\tfrac{z^2}{1+z^4},\ z_1\right]+Res\left[\tfrac{z^2}{1+z^4},\ z_2\right]\right)\\
&=2\pi i\left(\tfrac{z_1^2}{4z_1^3}+\tfrac{z_2^2}{4z_2^3}\right)=\tfrac{\pi i}{2}\left(\tfrac{1}{z_1}+\tfrac{1}{z_2}\right)\\
&=\tfrac{\pi i}{2}\left(e^{-\frac{\pi i}{4}}+e^{-\frac{3\pi i}{4}}\right)=\tfrac{\pi i}{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4}-i\sin\tfrac{\pi}{4}+\cos\tfrac{3\pi}{4}-i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)\\
&=\tfrac{\pi i}{2}\left(-2i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)=\pi\sin\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

故得

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

13(6). 由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\ =\ 2\pi iRes\left[\frac{ze^{iz}}{1+z^2},\ i\right]=2\pi i\frac{ie^{-1}}{2i}=\frac{\pi i}{e}.$$

得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\right)=\frac{\pi}{e}.$$

附注：当$|x|<1$时，令

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m x^m$$

则可得

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= \tfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} = \textstyle\sum_{m=n-1}^{+\infty}(-1)^m m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)x^{m-n+1} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+n-1}(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)x^k. \end{aligned}$$

由此即得当$|x|<1$时，

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(n-1)!}x^k.$$