

## 第一章习题解答

5. 即  $z^2 = z\bar{z}$ , 这等价于  $z(z - \bar{z}) = 0$ , 这又等价于  $z = \bar{z}$ , 即  $z \in R$ .

6. 令  $h(a) = \max_{|z| \leq 1} |z^n + a|$ . 当  $a = 0$  时, 显然有  $h(a) = 1$ . 设  $a \neq 0$ , 则由

$$|z^n + a| \leq |z^n| + |a| = |z|^n + |a| \leq 1 + |a|, \quad (0.1)$$

知  $h(a) \leq 1 + |a|$ .

且当 (1) 的两个不等式同时取等号时等号成立。而 (1) 的第一个等号成立当且仅当  $z^n$  与  $a$  同向, 即存在正数  $k > 0$ , 使

$$z^n = ka, \quad (0.2)$$

而 (1) 的第二个等号成立当且仅当

$$|z| = 1, \quad (0.3)$$

将 (3) 代入 (2), 得  $1 = k|a|$ , 即  $k = \frac{1}{|a|}$ . 将此代入 (2), 得

$$z^n = \frac{a}{|a|} = \frac{|a|e^{i \arg a}}{|a|} = e^{i \arg a},$$

由此可得

$$z = z_k = e^{i \frac{\arg a + 2(k-1)\pi}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

由上面的讨论可知, 当  $a = 0$  时,  $\max_{|z| \leq 1} |z^n + a| = 1$ , 这时  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

当  $a \neq 0$  时,  $\max_{|z| \leq 1} |z^n + a| = 1 + |a|$ , 这时  $z = z_k = e^{i \frac{\arg a + 2(k-1)\pi}{n}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

11. 证明:

$$\begin{aligned}& |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \\&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\&= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).\end{aligned}$$

几何意义: 平行四边形四边长度的平方和等于其对角线长度的平方和。

19. 此题可推广到 $|z_k| = r > 0, k = 1, 2, 3$ . 因 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , 得 $|z_1 + z_2| = |-z_3| = |z_3| = r$ , 代入到11题, 得 $|z_1 - z_2|^2 = 2(r^2 + r^2) - r^2 = 3r^2$ , 类似可得 $|z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2 = 3r^2$ . 即 $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}r$ . 因而三角形是等边三角形。

另一种证法课上讲。

23. 因平面上任一直线均可写成 $Ax + By + C = 0$ , 这里 $A, B, C \in R$ 且不全为零。

由 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , 代入上式, 得

$$\frac{A-Bi}{2}z + \frac{A+Bi}{2}\bar{z} + C = 0, \text{ 令 } a = \frac{A+Bi}{2}, c = C \text{ 即得 } a\bar{z} + \bar{a}z + c = 0.$$

24. 因圆的方程可写为 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , 由 $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$ 和23题, 可得 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + c = 0$ .

29. 因 $f(z_0) \neq 0$ , 令 $|f(z_0)| = 2\epsilon$ , 则 $\epsilon > 0$ . 因 $f(z)$ 在 $z_0$ 连续, 知存在 $\delta > 0$ , 使 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}, \text{ 这等价于当 } |z - z_0| < \delta \text{ 时, 有 } 0 < \frac{|f(z_0)|}{2} < |f(z)| < \frac{3|f(z_0)|}{2}.$$

30. 因 $A \in C$ , 知 $|A| < +\infty$ , 又因 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 知存在 $\delta > 0$ , 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $||f(z)| - |A|| \leq |f(z) - A| < 1$ , 这意味着当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z)| < |A| + 1$ , 令 $M = |A| + 1$ 即可。

## 附录

**命题:** 设 $f(z) = z^n + \sum_{k=1}^n c_k z^{n-k}$ . 证明:  $f(z)$ 为分圆多项式的充要条件是 $f(z)$ 的 $n$ 个零点为圆内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点。

证明：必要性。设 $f(z)$ 是分圆多项式，则有 $f(z) = z^n + c_n$ 。这时 $f(z) = 0$ 当且仅当 $z^n = -c_n$ ，即

$$z = z_k = |c_n|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\arg(-c_n) + 2(k-1)\pi}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

由此可得

$$|z_k| = |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \arg z_{k+1} - \arg z_k = \arg \frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

即点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 构成圆内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点。必要性得证。

充分性。设 $f(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ 的 $n$ 个零点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 构成圆内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点，则 $z_k = re^{i\theta_k}$ ，这里 $\theta_k = \frac{\phi_0 + 2(k-1)\pi}{n}$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 且 $\phi_0$ 是实常数。再令 $g(z) = z^n + (-1)^n \prod_{k=1}^n z_k$ 。则有

$$\begin{aligned} g(z_k) &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i \sum_{k=1}^n \theta_k} \\ &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i(n\phi_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n (k-1))} \\ &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i(n\phi_0 + (n-1)\pi)} \\ &= z_k^n + (-1)^n r^n (-1)^{n-1} e^{i(n\phi_0)} \\ &= z_k^n - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= r^n e^{i(n\theta_k)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= r^n e^{i(n\phi_0 + 2(k-1)\pi)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= r^n e^{i(n\phi_0)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

即 $g(z_k) = 0$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 。由于 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均是 $n$ 次多项式，且 $z^n$ 的系数均为1(首一多项式)，因而有 $f(z) \equiv g(z)$ 。充分性得证。

命题得证。□