

• 智能技术 •

# 惯性权重粒子群算法模型收敛性分析及参数选择

孙 湘<sup>1</sup>, 周大为<sup>2+</sup>, 张希望<sup>2</sup>

(1. 江苏大学附属医院 信息科, 江苏 镇江 212013; 2. 江苏大学 汽车与交通工程学院, 江苏 镇江 212013)

**摘 要:** 为提高粒子群算法的收敛性, 基于动力系统的稳定性理论分析了带有惯性权重的粒子群算法模型的收敛性, 提出了在算法模型收敛条件下惯性权重  $w$  和加速系数  $c$  的参数约束关系。使用 4 个测试函数对具有所提参数约束关系的惯性权重粒子群算法模型和典型参数取值惯性权重粒子群算法模型进行了对比仿真研究, 实验结果表明, 具有提出的参数约束关系的惯性权重粒子群算法模型在收敛性方面具有显著优越性。

**关键词:** 粒子群算法; 动力系统稳定性理论; 惯性权重; 加速系数; 收敛性

中图分类号: TP18 文献标识码: A 文章编号: 1000-7024 (2010) 18-4068-04

## Convergence analysis and parameter selection of PSO model with inertia weight

SUN Xiang<sup>1</sup>, ZHOU Da-wei<sup>2+</sup>, ZHANG Xi-wang<sup>2</sup>

(1. Department of Information, Affiliated Hospital of Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;

2. School of Automobile and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract:** In order to improve the convergence of particle swarm optimization (PSO), convergence performance of the PSO with inertia weight (IPSO) is analyzed based on stability theorem of dynamic system. And the constraint relationship between the acceleration coefficient  $c$  and the inertia weight  $w$  is proposed to ensure the convergence of the IPSO model. The IPSO satisfying the performed  $w$ - $c$  constraint condition is tested with four well-known benchmark functions compared with IPSO model with typical values of  $w$  and  $c$ . The experimental results show that IPSO model satisfying the proposed  $w$ - $c$  constraint condition has better convergence performance.

**Key words:** PSO; stability theorem of dynamic system; inertia weight; acceleration coefficient; convergence

## 0 引言

粒子群算法(PSO)广泛应用于函数优化、神经网络训练、模糊系统控制以及其它应用领域, 该算法由 Kennedy 和 Eberhart<sup>[1]</sup>提出, 基本思想源于对自然界社会群体习性的观察, 如鸟群、鱼群和人类群体的习性。PSO 算法与遗传算法类似, 是一种基于群体的智能进化优化技术。

PSO 算法易实现、效率高、速度快的特点已经引起了众多学者的重视。Clerc 和 Kennedy 提出了在 PSO 算法的速度更新公式中引入收缩因子来控制 PSO 算法的收敛趋势, 并进行了理论分析<sup>[2]</sup>。Carvalho 通过引入家族拓扑结构改善了 PSO 算法的收敛速度<sup>[3]</sup>。Frans 通过在 PSO 算法中引入合作特征, 来改善算法的寻优性能<sup>[4]</sup>。Liang 提出了广义学习粒子的概念, 利用所有粒子的最有信息来更新粒子的速度, 并保持了粒子多样性<sup>[5]</sup>。Blackwell 针对动态优化环境将整个群体划分为一系列相关小群体, 并加入反收敛因子保持小群体的多样性<sup>[6]</sup>。Liu 研究了粒子的智能混沌动态特征, 提出了李亚普诺夫指数对智能粒子模式有较大的影响<sup>[7]</sup>。Soudan 将动态粒子群体引

入 PSO 算法, 减少了算法的耗时<sup>[8]</sup>。Worasuchep 将停滞检测和分散机制引入到 PSO 算法中来避免局部收敛<sup>[9]</sup>。Zhang 从普通粒子中随机分离出探测粒子, 利用一种新的速度迭代公式进行邻界区域的搜索, 保持了粒子的多样性并加快了收敛速度<sup>[10]</sup>。目前, 对于 PSO 算法研究的重点为算法的收敛性和算法全局性两个方面。本研究着重对 PSO 算法的收敛性进行了一定的分析。

本文对具有惯性权重的粒子群算法 (PSO with inertia weight, IPSO)<sup>[11]</sup>模型在一定条件下进行假设, 将复杂的数学模型进行简化, 并根据动力学稳定性理论对简化后模型的收敛性进行了数学分析, 提出了惯性权重  $w$  和加速系数  $c$  之间的约束关系。最后通过 4 个测试函数验证所提参数约束关系对 PSO 算法收敛性的影响。

## 1 IPSO 算法及其简化

### 1.1 IPSO 算法

IPSO 算法同其它算法一样首先在搜索空间中随机生成一组初始解, 即每个粒子初始位置  $x_0$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ), 并对每个

收稿日期: 2009-10-26; 修订日期: 2009-12-29。

基金项目: 江苏高校自然科学基金项目 (08KJD510011)。

作者简介: 孙湘 (1972 -), 女, 江苏镇江人, 工程师, 研究方向为智能计算、信息安全等; +通讯作者: 周大为 (1983 -), 男, 江苏淮安人, 硕士, 研究方向为复杂系统建模、智能计算等; 张希望 (1989 -), 男, 江苏淮安人, 研究方向为智能计算与交通规划。E-mail: zhouda83@163.com

粒子赋予随机的初始速度  $v_i^j(j=1, 2, \dots, N)$ , 其中  $N$  为群体中粒子的个数。每个粒子的速度和位置信息根据群体的特性, 随着群体的进化进行不断的调整, 其速度和位置的更新方程见式(1)和式(2)。

$$v_j^{i+1} = w \cdot v_j^i + c_1 \cdot rand_1 \cdot (p_{gd} - x_j^i) + c_2 \cdot rand_2 \cdot (p_{gd} - x_j^i) \quad (1)$$

$$x_j^{i+1} = x_j^i + v_j^{i+1} \quad (2)$$

式中  $w$ ——惯性权重  $c_1, c_2$ ——加速系数  $rand_1, rand_2$ ——在  $[0, 1]$  内的随机数  $v_j^i$ ——第  $i$  代群体中第  $j$  个粒子的速度向量,  $v_j^{i+1}$ ——第  $i+1$  代群体中第  $j$  个粒子的速度向量  $x_j^i$ ——第  $i$  代群体中第  $j$  个粒子的位置向量  $x_j^{i+1}$ ——第  $i+1$  代群体中第  $j$  个粒子的位置向量  $p_{gd}$ ——第  $j$  个粒子的个体历史最优位置  $p_{gd}$ ——第  $j$  个粒子的群体历史最优位置。

IPSO 算法流程的伪代码如下:

INITIALIZATION :随机初始化群体中每个粒子位置向量和速度向量;

WHILE(终止条件未满足)

IF :当代群体最优个体适应度 > 群体历史最优个体适应度

THEN :更新群体历史最优位置;

END IF

IF :当代个体的适应度 > 单位个体历史最优适应度

THEN :更新个体历史最优位置;

END IF

根据公式(1)和公式(2)更新粒子的位置信息和速度信息;

END WHILE

## 1.2 系统模型的简化

为方便讨论, 将式(1)和式(2)进行简化, 不考虑原方程中的随机分量  $rand_i(i=1, 2)$ , 并假设  $p_d$  为一常量且定义如式(3)

$$p_d = \frac{c_1 \cdot p_{gd} + c_2 \cdot p_{gd}}{c_1 + c_2} \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)中可得

$$v_{i+1} = w \cdot v_i + c \cdot (p_d - x_i) \quad (4)$$

式中  $c = c_1 + c_2$ 。

假设  $y_i = p_d - x_i$ , 则原速度更新公式和位置更新公式可简写为式(5)和式(6)

$$v_{i+1} = w \cdot v_i + c \cdot y_i \quad (5)$$

$$y_{i+1} = -w \cdot y_i + (1-c) \cdot y_i \quad (6)$$

## 2 IPSO 模型的收敛性分析

假设  $\mathcal{P}_t = \begin{bmatrix} v_t \\ y_t \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} w & c \\ -w & 1-c \end{bmatrix}$ , 则 IPSO 算法模型可用矩阵方程  $\mathcal{P}_t = M^t \mathcal{P}_0$  形式来表示, 且  $M$  的特征值经计算可得式(7)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{w+1-c+\sqrt{(w+1-c)^2-4w}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{w+1-c-\sqrt{(w+1-c)^2-4w}}{2} \end{cases} \quad (7)$$

(1) 当  $(w+1-c)^2 \neq 4w$  时, 可以定义矩阵  $N$  且满足下式

$$NMN^{-1} = L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{式中 } N = \begin{bmatrix} 2w & w-1+c-\sqrt{(w+1-c)^2-4w} \\ 2w & w-1+c+\sqrt{(w+1-c)^2-4w} \end{bmatrix}.$$

假设  $Q_t = NP_t$ , 则  $Q_t = L^t Q_0$ 。由于  $L$  为对角矩阵, 可得式(9)

$$L^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \quad (9)$$

由动力系统的稳定性理论, 可得如下定理:

定理 1 要使 IPSO 算法模型稳定, 即收敛于  $p_d$ , 当且仅当  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ 。

推论 1 当  $(w+1-c)^2 \neq 4w$  且  $0 < w < 1$  时要使 IPSO 算法模型稳定, 即收敛于  $p_d$ , 当且仅当  $0 < c < 2(w+1)$ 。

证明: 当  $(w+1-c)^2 > 4w$  时,  $\lambda_1, \lambda_2$  均为实数。所以收敛条件可以转化为式(10)

$$\begin{cases} |\lambda_1| = \left| \frac{w+1-c+\sqrt{(w+1-c)^2-4w}}{2} \right| < 1 \\ |\lambda_2| = \left| \frac{w+1-c-\sqrt{(w+1-c)^2-4w}}{2} \right| < 1 \end{cases} \quad (10)$$

解不等式可得式(11)

$$\begin{cases} 0 < c < 2(w+1) & w < 1 \\ w-1 < c < w+3 & w = 1 \end{cases} \quad (11)$$

考虑  $(w+1-c)^2 > 4w$ , 根据文献[11]取  $0 < w < 1$ , 可得式(12)

$$\begin{cases} c > (\sqrt{w+1})^2 \\ c < (\sqrt{w-1})^2 \end{cases} \quad (12)$$

将式(11)和式(12)联立可得式(13)

$$\begin{cases} 0 < c < (\sqrt{w-1})^2 \\ (\sqrt{w+1})^2 < c < 2(w+1) \end{cases} \quad (13)$$

当  $(w+1-c)^2 < 4w$  时, 则  $\lambda_1, \lambda_2$  均为虚数, 且有式(14)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{w+1-c+i\sqrt{4w-(w+1-c)^2}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{w+1-c-i\sqrt{4w-(w+1-c)^2}}{2} \end{cases} \quad (14)$$

要满足  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ , 则有式(15)

$$\left( \frac{w+1-c}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{4w-(w+1-c)^2}}{2} \right)^2 < 1 \quad (15)$$

解之得式(16)

$$0 < w < 1 \quad (16)$$

由条件  $(w+1-c)^2 < 4w$  可得式(17)

$$(\sqrt{w-1})^2 < c < (\sqrt{w+1})^2 \quad (17)$$

联立式(16)和式(17)可得下式

$$(\sqrt{w-1})^2 < c < (\sqrt{w+1})^2 \text{ 且 } 0 < w < 1 \quad (18)$$

联立式(13)和(18)可得结论: 当  $(w+1-c)^2 \neq 4w$  且  $0 < w < 1$  时要使 IPSO 算法模型稳定则需满足  $0 < c < 2(w+1)$ 。

证毕。

(2) 当  $(w+1-c)^2 = 4w$  时, 则有下式

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{w+1-c}{2} = (\sqrt{w \pm 1})^2 \quad (19)$$

矩阵  $M$  只能转化为 Jordan 矩阵的形式, 即存在矩阵  $P$  使得矩阵  $M$  满足下式

$$PMP^{-1} = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (20)$$

矩阵  $J$  的  $t$  次方可见式(21)

$$J^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{bmatrix} \quad (21)$$

又  $\lim_{t \rightarrow \infty, 0 < \lambda < 1} t\lambda^{t-1} = 0$  得到以下推论。

推论 2 当  $(w+1-c)^2 = 4w$ , 且  $0 < w < 1$  时要使 IPSO 算法模型稳定, 即收敛于  $p_d$ , 当且仅当  $w-1 < c < w+3$ 。

证明 :由 $|w|<1$   $\lambda=(w+1-c)/2$ 得

$$\left|\frac{w+1-c}{2}\right|<1 \tag{22}$$

解得下式

$$w-1< c < w+3 \tag{23}$$

由条件 $(w+1-c)^2=4w$ 可得式(24)

$$c=(\sqrt{w+1})^2 \tag{24}$$

联立式(23)和(24)得式(25)

$$c=(\sqrt{w\pm1})^2 \quad 0<w<1 \tag{25}$$

证毕。

推论 3 当 $0<w<1$ 时要使 IPSO 算法模型稳定 ,即收敛于  $p_d$  ,当且仅当  $0<c<2(w+1)$ 。

证明 :联立式(13)、(18)和(25)易证得下式

$$0<c<2(w+1) \quad 0<w<1 \tag{26}$$

图 1 中阴影部分的加速系数  $c$  和惯性权重  $w$  之间的关系满足 PSO 算法模型的收敛性。根据这个特性 ,可以在粒子群迭代系统中通过惯性权重值的大小来确定当代加速系数大小。在实际操作的过程中 ,加速系数往往需要乘以  $[0,1]$  区间内的随机数  $rand$  ( $i=1,2$ ) ,所以这里只需确定使算法模型收敛的加速系数约束条件的上限值 ,则将此加速系数上限值乘以  $[0,1]$  区间内随机数也必然满足收敛条件。

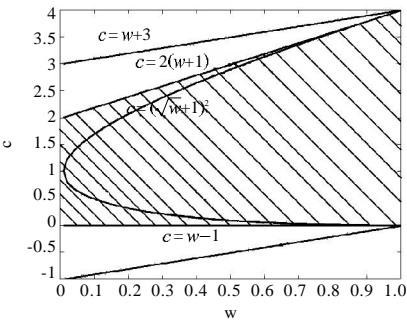


图 1 参数  $w$  和  $c$  在满足系统收敛性时的关系

3 具有收敛条件参数约束关系的 IPSO

由以上分析可知 ,可以在粒子更新迭代过程中根据惯性权重  $w$  的值对当代粒子速度更新公式中的加速系数  $c_1$  和  $c_2$  进行限定。

改进算法流程如下 :

步骤 1 系统初始化 ,生成初始粒子群的位置和初始粒子的速度信息 ;

步骤 2 计算群体中每个粒子的适应度 ;

步骤 3 根据粒子的适应度确定单位历史最优个体和群体历史最优个体 ;

步骤 4 根据式(27)和式(28)确定速度更新公式中的惯性权重  $w$  和加速系数  $c_1, c_2$  ;

步骤 5 据式(1)和式(2)更新粒子速度和粒子位置 ;

步骤 6 计算每个新粒子的适应度 ;

步骤 7 判断是否满足终止条件 ,如果满足终止条件则跳出循环输出全局最优个体 ,如果不满足条件则转步骤 3。

本文采用 PSO 算法的惯性权重系数为线性递减的 ,计算

方法如式(27)所示

$$w=w_{\max}-\frac{w_{\max}-w_{\min}}{Max\_generation}\times Generation \tag{27}$$

式中 : $Max\_generation$ ——最大迭代次数 , $Generation$ ——当前代数 , $w_{\max}$ ——惯性权重最大值 , $w_{\min}$ ——惯性权重的最小值。根据文中的收敛性分析可知 ,为提高算法的收敛性 ,假设  $c_1=c_2=c/2$  ,加速系数  $c_1$  和  $c_2$  可如下式取值

$$c_1=c_2=\frac{c}{2}=(w+1) \tag{28}$$

式中 : $w$ ——当前的惯性权重值。

4 仿真实验

本文利用表 1 中 4 个测试函数 ,对具有本文所提参数约束关系的 IPSO 模型和典型参数取值 IPSO 模型进行了对比仿真研究。经计算可得仿真实验中典型参数取值 IPSO 模型在迭代更新的过程中不满足所提的参数约束关系。选择的 4 个测试函数的维数 ,解空间的范围和最小函数值 ,如表 1 所示。

表 1 测试函数的基本特性

函数名	维数	解空间	最小值
SH-Shuber	2	$[-10,10]^2$	-186.7309
Sphere	30	$[-100,100]^{30}$	0
Generalized Rastrigin	30	$[-5.12,5.12]^{30}$	0
Generalized Griewank	30	$[-600,600]^{30}$	0

4.1 算法参数设置

IPSO 算法中  $c_1=c_2=2$  , $w$  在区间  $[0.4,0.9]$  中线性递减 ,且粒子速度范围也为解空间的范围。对于本文所提算法模型  $w$  取值和粒子速度范围均与 IPSO 相应参数典型取值一致。粒子群体规模均设定为 50。

4.2 对比仿真实验

针对每个测试函数 ,利用不同参数选择方法的 IPSO 算法模型分别进行 30 次迭代寻优操作 ,当算法寻优结果达到指定误差范围之内则停止搜索 ,且每次算法结束后均输出所消耗的迭代次数。

4.2.1 函数 SH-Shuber

对于函数 SH-Shuber ,允许误差范围设定为  $10^{-7}$  ,两种参数选择方法的 IPSO 算法最大迭代次数  $Max\_generation$  均设定为 300 ,仿真结果如表 2 所示。

表 2 IPSO 模型两种参数选择方法对于函数 SH-Shuber 的收敛性对比

$w, c$	平均消耗代数	最大消耗代数	最小消耗代数	波动范围
典型参数	192.57	247	149	98
本文方法	149.7	195	112	83

由表 2 可以看出 ,具有本文所提参数约束关系的 IPSO 模型在所有的检验指标上均超过了典型参数取值的 IPSO 模型。由此可见 ,对于 SH-Shuber 问题 ,本文所提参数约束关系的 IPSO 模型具有比典型参数取值的 IPSO 模型更佳的收敛效果。

4.2.2 函数 Sphere

对于函数 Sphere ,允许误差范围设定为 10-1 ,最大迭代次数  $Max\_generation$  均设定为 5000 ,计算结果如表 3 所示。

表 3 IPSO 模型两种参数选择方法对于函数 Sphere 的收敛性对比

$w,c$	平均消耗代数	最大消耗代数	最小消耗代数	波动范围
典型参数	1508.1	2009	1096	913
本文方法	1135.5	1466	738	728

由表 3 可见 ,对于 Sphere 问题 ,本文所提参数约束关系的 IPSO 模型可以在 1500 代之内搜索到指定误差范围之内的最优函数值 ,较典型参数取值的 IPSO 模型提前了 500 多代 ,收敛性有了明显的提高。

4.2.3 函数 Generalized Rastrigin

对于函数 Generalized Rastrigin ,允许误差范围设定为 200 ,最大迭代次数  $Max\_generation$  均设定为 3000 ,计算结果如表 4 所示。

表 4 IPSO 模型两种参数选择方法对于函数 Generalized Rastrigin 的收敛性对比

$w,c$	平均消耗代数	最大消耗代数	最小消耗代数	波动范围
典型参数	1231	2360	679	1681
本文方法	924.6	1386	512	874

由表 4 可见 ,对于 Generalized Rastrigin 问题 ,本文所提参数选择方法 IPSO 模型的最小消耗代数与原方法相差较小 ,而改进方法在最大消耗代数上有很大优势。通过波动范围的对比可知 ,对于该函数所提算法的稳定性较典型参数取值的 IPSO 算法有很大提高。

4.2.4 函数 Generalized Griewank

对于函数 Generalized Griewank ,允许误差范围设定为 100 ,最大迭代次数  $Max\_generation$  均设定为 3000 ,计算结果如表 5 所示。

表 5 PSO 模型两种参数选择方法对于函数 Generalized Griewank 的收敛性对比

$w,c$	平均消耗代数	最大消耗代数	最小消耗代数	波动范围
典型参数	1400.2	1922	938	984
本文方法	1106.7	1982	635	1347

由表 5 可见 ,针对 Generalized Griewank 问题 ,本文所提参数约束关系 IPSO 模型的最大消耗次数略多于典型 IPSO ,迭代次数的波动范围也较大 ,但平均消耗代数和最小消耗代数都要低于典型 IPSO。这是由于增强算法收敛性所带来的负面效果。由于增强收敛性粒子会尽可能向目前搜索到的最优点逼近 ,而导致算法全局性的下降。整体来看 ,满足本文所提参数

约束关系 IPSO 模型仍具有一定的优越性。

5 结束语

收敛性是演化算法性能的重要指标之一。本文基于动力系统的稳定性理论 ,对 IPSO 模型的收敛性进行了分析 ,提出了使得 IPSO 模型收敛的  $w-c$  参数约束关系。并通过仿真研究验证了具有所得约束关系的 IPSO 可以显著提高寻优能力。本文所得收敛性结论只保证算法模型收敛于当前最好的  $P_d$  ,并不能保证算法收敛到全局最优解。若算法在有限代内能找到全局最优解 ,则算法全局收敛 ;若算法在有限代内能找到局部最优解 ,则算法局部收敛 ;否则算法不收敛。

参考文献:

[1] Kennedy J,Eberhart RC. Particle swarm optimization [C]. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995:1942-1948.

[2] Clerc M,Kennedy J.The particle swarm:explosion,stability,and convergence in a multi-dimensional complex space [J]. IEEE Trans Evolut Comput,2002,6(1):58-73.

[3] Carvalho D F,Bastos C J A.Clan particle swarm optimization[C]. Proceedings of IEEE Conference of Evolutionary Computation, 2008:3044-3051.

[4] Frans V B, Andries P E. A cooperative approach to particle swarm optimization[J].IEEE Trans Evolut Comput,2004,8(3): 225-239.

[5] Liang J J, Qin A K, Sugenthan P N, et al. Comprehensive learning particle swarm optimizer for global optimization of multimodal functions[J].IEEE Trans Evolut Comput,2006,10 (3):281-295.

[6] Blackwell T,Jurgen B.Multiswarms,exclusion,and anti-convergence in dynamics environments[J].IEEE Trans Evolut Comput, 2006,10(4):459-472.

[7] Liu H,Abraham A,Clerc M.Chaotic dynamic characteristics in swarm intelligence [J]. Applied Soft Computing, 2007,7 (3): 1019-1026.

[8] Soudan B, Saad M. An evolutionary dynamic population size PSO implementation [C]. 3rd Information and Communication Technologies:From Theory to Applications,2008:1-5.

[9] Worasuchee C.A particle swarm optimization with stagnation detection and dispersion[C].Proceedings of IEEE Conference of Evolutionary Computation,2008:424-429.

[10] Zhang Y N,Teng H F.Detecting particle swarm optimization[J]. Concurrency and Computation-Practice and Experience,2009,21 (4):449-473.

[11] Shi Y,Eberhart R C.A modified particle swarm optimizer[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation,1997:303-308.