

## 博弈论

考试内容：五道大题

概念：

(1) 囚徒困境

被捕的囚徒之间一种特殊博弈，即使合作对双方都有利，保持合作也困难。

(2) 不可信威胁变可信威胁

在动态博弈求出的纳什均衡有的不可能达到，因为参与者是理性的，如果为了减小别人的利益而选择不利于自己的是不可置信威胁。

(3) 发送信号

信号发送者首先行动，向信号接收者发送一个关于自身类型的信号，信号接收者收到信号后根据信号的内容选择行动，最终双方的收益均有信号发送者的类型，信号发送者选择发送的信号，与信号接收者的行动共同决定。

1、纳什均衡：在该策略组合上，任何参与人单独改变策略都不会得到好处。

划线法，在最大的值下面划线，都有线的是纳什均衡。

		B	
		靠左行	靠右行
A	靠左行	1, 1	-1, -1
	靠右行	-1, -1	1, 1

均衡 (左, 左) (右, 右)

		B	
		N	R
A	N	2, 1	0, 0
	R	0, 0	1, 2

均衡 (N, N) (R, R)

		B	
		合	不
A	合	3, 3	-1, 4
	不	4, -1	0, 0

均衡 (不合作, 不合作)

2、多重均衡的五个选择标准

(1) 帕累托优势标准：得益最大

		企业C	
		3.5英寸盘	5.25英寸盘
企业A	3.5英寸盘	8, 8	3, 2
	5.25英寸盘	2, 3	6, 6

两个均衡 (3.5, 3.5) (5.25, 5.25)，按照支付大小筛选纳什均衡 (3.5, 3.5)

(2) 风险优势标准：风险更小

		学生乙	
		作弊	不作弊
学生甲	作弊	9, 9	0, 8
	不作弊	8, 0	7, 7

假如乙的选择不变，甲偏离作弊， $9-8=1$ ，偏离不作弊  $7-0=7$

假如甲的选择不变，乙偏离作弊， $9-8=1$ ，偏离不作弊  $7-0=7$

比较原则：二人偏离作弊的损失 VS 不作弊的损失

$1*1 < 7*7$ ，偏离（不作弊，不作弊）损失更大=49，所以不偏离，所以选择（不作弊，不作弊）均衡

(3) 聚点均衡

多重纳什均衡中，人们预期最可能出现的均衡。根据社会文化习惯，博弈历史等信息达到均衡。强调规律。

(4) 相关均衡

参与人通过大家都能观测到的共同信号选择行动

		企业乙	
		好产品	差产品
企业甲	好产品	4, 4	-8, -2
	差产品	-2, -8	-2, -2

(5) 防共谋均衡

要求局中人在这个策略组合下没有单独偏离的动机也没有合伙偏离的动机

		局中人3			
		A		B	
		局中人2		局中人2	
		L	R	L	R
局中人1	U	0, 0, 10	-5, -5, 0	-2, -2, 0	-5, -5, 0
	D	-5, -5, 0	1, 1, -5	-5, -5, 0	-1, -1, 5

纳什均衡：(U, L, A) 和 (D, R, B)

✗ (U, L, A)



中国大学MOC  
在局中人3不改变策略选择的情况下，  
存在局中人1和局中人2两人共谋选择偏离的动机。

因为这样两人的收益可以从 0 变到 1

2 (D, R, B)

在此均衡状态下，不但没有单独偏离的动机，  
也没有集体偏离的激励，因此它是抗共谋纳什均衡。

表 三人博弈的收益矩阵

		局中人3	
		A	B
局中人2	L		
	R		

囚徒困境

个体理性与集体理性的矛盾

## 囚徒困境的一般表示

	合作	不合作
合作	T, T	S, R
不合作	R, S	P, P

满足:  $R > T > P > S$ ;  $(S+R) < T+T$

## 用法律解决囚徒困境

	合作	不合作
合作	T, T	S, R-X
不合作	R-X, S	P, P

满足:  $X > R - T$

example

### 双寡头竞争

- 企业最大化利润的一阶条件为:

$$q_1 = R_1(q_2) = \frac{a-c}{2} - \frac{q_2}{2}$$

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{a-c}{2} - \frac{q_1}{2}$$

- 纳什均衡产量:  $q_1^{NE} = q_2^{NE} = \frac{a-c}{3}$

- 纳什均衡利润为:  $\Pi_1^{NE} = \Pi_2^{NE} = \frac{(a-c)^2}{9}$

32

example

### 垄断产量和垄断利润

- 垄断企业的目标函数:

$$\Pi_M = QP(Q) - QC = Q(a - Q - c)$$

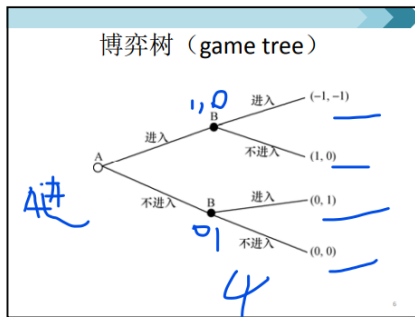
- 垄断产量:  $Q_M = \frac{a-c}{2}$

- 垄断利润:  $\Pi_M = \frac{(a-c)^2}{4}$

33

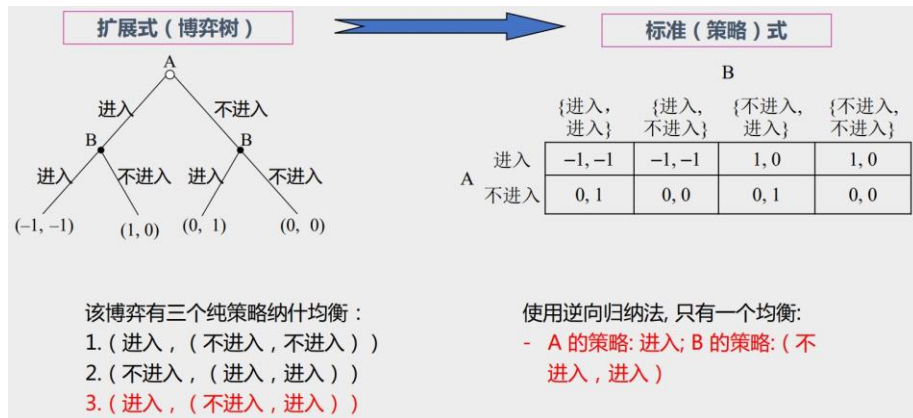
让两条直线相交（横轴  $q_1$ , 纵轴  $q_2$ ）得到交点坐标是纳什均衡产量， $(q_1, q_2)$  当商家 1 生产  $q_1$  时，商家 2 生产  $q_2$  最优。反之一样。当边际成本相同时，每个商家产量  $(a-c)/3$ ，总产量  $2 \cdot (a-c)/3$ ，商品价格带入市场反需求函数  $P=a-Q$ ,  $Q=a-2 \cdot (a-c)/3 = (a+2c)/3$ ，每个商家利润  $= ((a+2c)/3 - c) \cdot \text{产量} = (a-c)^2/9$

3、SPNE



A

		B			
		(进入, 进入)	(进入, 不进入)	(不进入, 进入)	(不进入, 不进入)
A	进入	-1, -1	-1, -1	1, 0	1, 0
	不进入	0, 1	0, 0	0, 1	0, 0

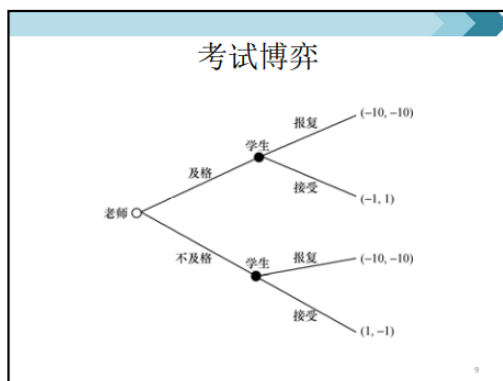


A: 进, 不

B: 进进 (如果 A 选择进入, B 选择进入, A 选择不进入, B 选择进入), 进不 (如果 A 选择进入, B 进入, A 不进入, B 不进入), 不进, 不进

先看 B, (1, 0) (0, 1), 然后看 A, 最后选择 A 进入, B 不进入

SPNE (进, 不进)



**战略表式下的纳什均衡**

		学生			
		A, F	F, A	A, A	F, F
老师	及格	-1, 1	-10, -10	-1, 1	-10, -10
	不及格	-10, -10	1, -1	1, -1	-10, -10

(A, F) 理解为: 如果老师给及格就接受, 不及格就报复。

三个纳什均衡

SPNE (不及格; 接受, 接受)

## 2.5 混合战略纳什均衡

- 有些博弈没有“纯战略”纳什均衡, 但有混合战略纳什均衡, 如**监督博弈**。

	偷懒	不偷懒
监督	1, -1	-1, 2
不监督	-2, 3	2, 2

给定工人**偷懒**, 老板的最优选择是**监督**; 给定老板**监督**, 工人的最优选择是**不偷懒**; 给定工人**不偷懒**, 老板的最优选择是**不监督**; 给定老板**不监督**, 工人的最优选择是**偷懒**; 如此循环。

假设偷懒概率  $q$ , 监督概率  $p$

$$EU(\text{监督经理}) = q + (1-q) * (-1) = 2q - 1$$

$$EU(\text{不监督经理}) = (-2) * q + 2(1-q) = 2 - 4q$$

监不监督经理收益一样，否则可以通过改变偷懒概率减小经理收益

$$2q-1 = 2-4q \quad q=0.5$$

$$EU(\text{偷懒工人}) = p(-1) + 3(1-p) = 3-4p$$

$$EU(\text{不偷懒工人}) = p(2) + 2(1-p) = 2$$

$$3-4p = 2 \quad p=1/4$$

3. 双寡头 (古诺是一起, 斯塔克伯格有先后)

Stackelberg寡头竞争模型	对比: 古诺竞争
$\text{Max}_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, s_2(q_1)) = q_1[a - q_1 - s_2(q_1) - c]$ <p>解一阶条件得:</p> $q_1^* = \frac{1}{2}(a-c)$ <p>将 <math>q_1^* \Rightarrow s_2(q_1)</math></p> <p>得:</p> $q_2^* = s_2(q_1^*) = \frac{1}{4}(a-c)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>企业最大化利润的一阶条件为: <math display="block">q_1 = R_1(q_2) = \frac{a-c}{2} - \frac{q_2}{2}</math> <math display="block">q_2 = R_2(q_1) = \frac{a-c}{2} - \frac{q_1}{2}</math> </li> <li>纳什均衡产量: <math display="block">q_1^{NE} = q_2^{NE} = \frac{a-c}{3}</math> </li> <li>纳什均衡利润为: <math display="block">\Pi_1^{NE} = \Pi_2^{NE} = \frac{(a-c)^2}{9}</math> </li> </ul>

古诺是首先求出两个厂商利润最大化条件, 而后联立利润最大化条件求解即可。

斯塔克伯格是首先计算出追随者的反应函数, 其次计算领导者反应函数 (将追随者反应函数代入), 最后求解即可。

#### 4、纳什谈判解

##### 纳什谈判解

- 考虑一个画家与拍卖商之间的讨价还价问题: 如果画家自己出售画, 可得1000元; 如果拍卖商干其他事情 (如拍卖别人的画), 收入是500元; 如果画家委托拍卖商出售画, 画的价格是3000元。
- 他们之间如何分配这3000元?

设画家获得  $x$ , 拍卖商获得  $y$

$$\frac{x - 1000}{y - 500} = k$$

假如平分,  $k=1$

$$x + y = 3000$$

$$x=1750 \quad y=1250$$

画家 1750 元, 拍卖商 1250 元

##### 应用举例

国有企业出售中的定价问题: 假定某个企业现在由政府100%所有, 由于效率低下, 总价值只有1000万元。设想有一个有能力的私人企业家, 如果政府将企业70%的股权转让给这个企业家 (政府保留30%), 企业的总价值可以增加到5000万元。合理的转让价格应该是多少呢?

$$S = 5000 - 1000 = 4000$$

$$\text{企业家: } 0 + 4000 \times 1/2 = 2000$$

$$\text{政府: } 1000 + 4000 \times 1/2 = 3000$$

$$\text{转让价格: } 5000 \times 0.7 - 2000 = 1500$$

企业家应该获得 2000w, 但是改革后手里有 3500w, 所以需要给政府 1500w。改革后政府手里 1500w, 加上企业家给的 1500w, 一共 3000w。

#### 5、重复博弈

## 多重交易关系与合作行为

交易关系I

	合作	不合作
合作	3, 3	-1, 4
不合作	4, -1	0, 0

交易关系II

	合作	不合作
合作	5, 5	0, 9
不合作	9, 0	4, 4

关系一：

合作的现值： $3+3a+3a^2+\dots = 3/(1-a)$

不合作的现值： $4+0a+0a^2+\dots = 4$

第一次（合作，不合作）之后都是（不合作，不合作）

$$3/(1-a) \geq 4 \quad a \geq 0.25$$

关系二：

合作的现值： $5+5a+5a^2+\dots = 5/(1-a)$

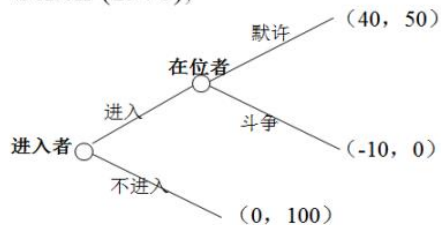
不合作的现值： $9+0a+0a^2+\dots = 9$

$$5/(1-a) \geq 9 \quad a \geq 0.8$$

## 6、连锁店悖论

### “连锁店悖论” (chain-store paradox)

• Selten (1978);



假如在位者  $p$  概率斗争，

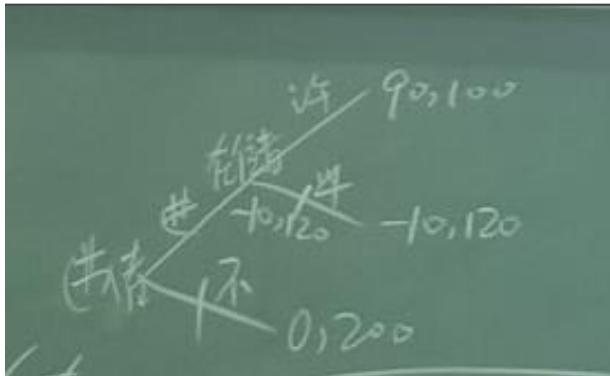
进入者：

进入： $40 * (1-P) + (-10) * P = 40 - 50P$

不进入：0

$40 - 50P > 0 \quad P < 0.8$  进入

5



假如在位者  $p$  概率斗争

进入者：

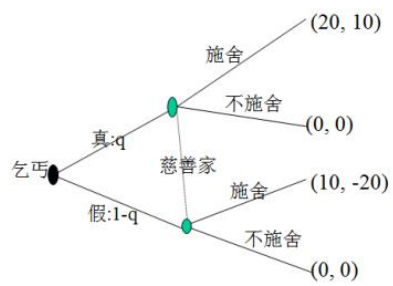
进入： $90 * (1-P) + (-10) * P = 90 - 100P$

不进入：0

$90 - 100P > 0 \quad P < 0.9$  进入

## 7、慈善家

## 有慈善之心,无慈善之举



施舍的期望收益:

$$Q*10 + (1-q)*(-20)=30q-20$$

不施舍期望收益:

$$0$$