

姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分

# Hyperion 混沌翻转运动的模拟

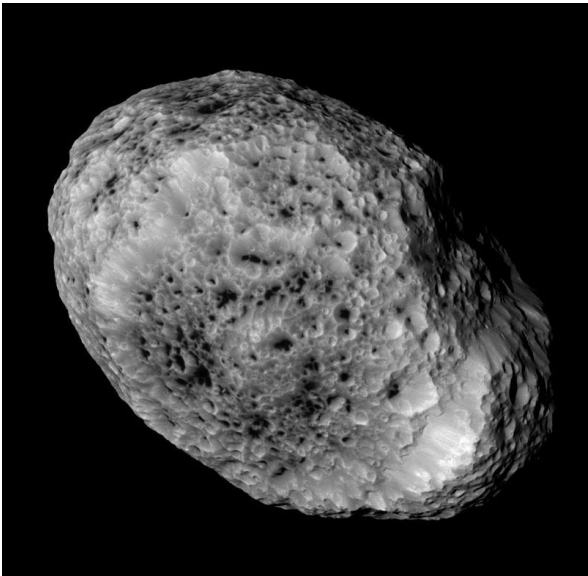
罗开发 2014301580293 物理学基地二班

**摘要:** 本文从简化的Hyperion模型出发,建立了Hyperion公转时的自转角速度的物理模型,并利用Euler-Cromer算法模拟了土星的这颗自身翻转运动呈现混沌的卫星运动情形。基于考察混沌现象的基本方程,通过绘制翻转时角速度、角度随时间以及两者在相空间中的轨迹直观地分析Hyperion翻转运动的混沌性,同时考察了Hyperion在不同公转轨迹离心率下其Lyapunov exponent的变化。

**关键词:** 简化Hyperion模型, 混沌, 李雅普诺夫指数

## I 介绍

Hyperion 是土星的第七颗卫星,也是人类在太阳系中发现的第一颗其自身翻转运动呈现出混沌现象的独特星体<sup>[1]</sup>。1984年时已有人预言Hyperion的翻转是一个混沌系统,经过13周的天文观察,1986年Hyperion的翻转被确认为一个混沌系统。



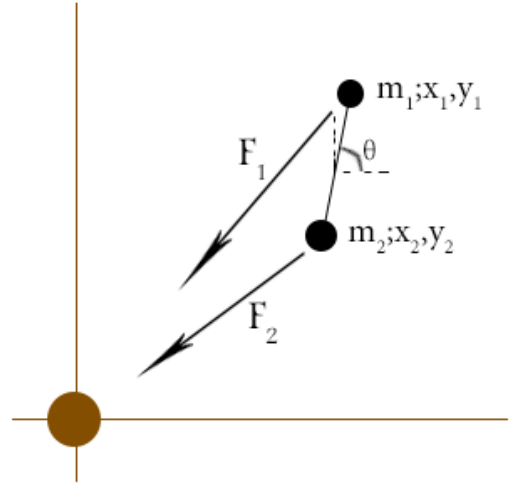
(Hyperion ; 205×130×110 km<sup>2</sup>)

它的混沌源于其独特的类似于椭球形的形状。事实上,经过精确的天文学观察,Hyperion 绕土星公转的轨道也呈现混沌。下面本文假设其公转为严格的(圆/椭圆)周期运动,通过建立简化的动力学模型来模拟 Hyperion 的翻转运动。

## II 正文

### 一、物理模型的建立

首先,由于 Hyperion 的独特翻转运动源于其非球形的体积分布,因此我们需要考虑土星对 Hyperion 的引力的空间分布情况,而不能将 Hyperion 简单地视作质点。为了突出其引起混沌现象的不均匀体积分布,这里我们将 Hyperion 视作一个哑铃状的模型,两个质点  $m_1, m_2$  被一根无质量的刚性杆固连。则土星与 Hyperion 的引力作用可如右图所示:



由万有引力定律可得:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\frac{GM_{Sat}m_1}{r_1^3}(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \\ \vec{F}_2 = -\frac{GM_{Sat}m_2}{r_2^3}(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \end{cases} \quad (1)$$

这里,  $M_{Sat}$  是土星的质量,  $\vec{i}, \vec{j}$  分别是 x 方向和 y 方向的单位矢量,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  分别是  $m_1, m_2$  到土星质心的距离, 设 Hyperion 的质心坐标为  $(x_c, y_c)$ , 可以得到  $m_1, m_2$  关于质心的力矩为:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_1 = [(x_1 - x_c)\vec{i} + (y_1 - y_c)\vec{j}] \times \vec{F}_1 \\ \vec{\tau}_2 = [(x_2 - x_c)\vec{i} + (y_2 - y_c)\vec{j}] \times \vec{F}_2 \end{cases} \quad (2)$$

同时，我们有：

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2}{I} \quad (3)$$

where  $I = m_1 |r_1|^2 + m_2 |r_2|^2$  is the moment of inertia

根据(1) (2) (3), 并进行一定的化简和近似<sup>[2]</sup>, 可得下式：

$$\frac{d\omega}{dt} \approx -\frac{3GM_{Sat}}{r_c^5} (x_c \sin \theta - y_c \cos \theta)(x_c \cos \theta + y_c \sin \theta) \quad (4)$$

即我们建立的关于 Hyperion 翻转时角速度关于角度以及土星和 Hyperion 质心距离的微分方程。

由于前面已将 Hyperion 的公转运动简化为周期运动，也就是简单的双星系统运动，并且将土星作为系统的参考系，Hyperion 的质量用约化质量代替即可（事实上这里并没有用到），易得公转运动的物理模型为：

$$\begin{cases} GM_{Sat} = v^2 r = 4\pi^2 \frac{AU^3}{yr^2} \\ \frac{1}{2} M_{Sat} v^2 - \frac{GM_{Sat}}{r} = Const \end{cases} \quad (5)$$

其运动轨迹方程为：

$$r = a(1 - e^2) \frac{1}{1 - e \cos \theta} \quad (6)$$

其中  $a$  为轨迹的长半轴， $e$  为离心率。

通过(4) (5) (6)可以完整得描述基于“哑铃状”质量分布以及周期公转运动的 Hyperion 翻转系统。

## 二、Euler-Cromer 算法处理

为了保证天体运动过程中的机械能守恒,这里采用 Euler-Cromer 方法对上述建立的模型进行离散化处理,方便编程和数值模拟。易得,描述公转运动的差分方程如下:

$$\begin{cases} r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2 x_i}{r_i^3} \Delta t \\ v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2 y_i}{r_i^3} \Delta t \\ x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1} \Delta t \\ y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1} \Delta t \end{cases} \quad (7)$$

描述翻转运动的差分方程如下:

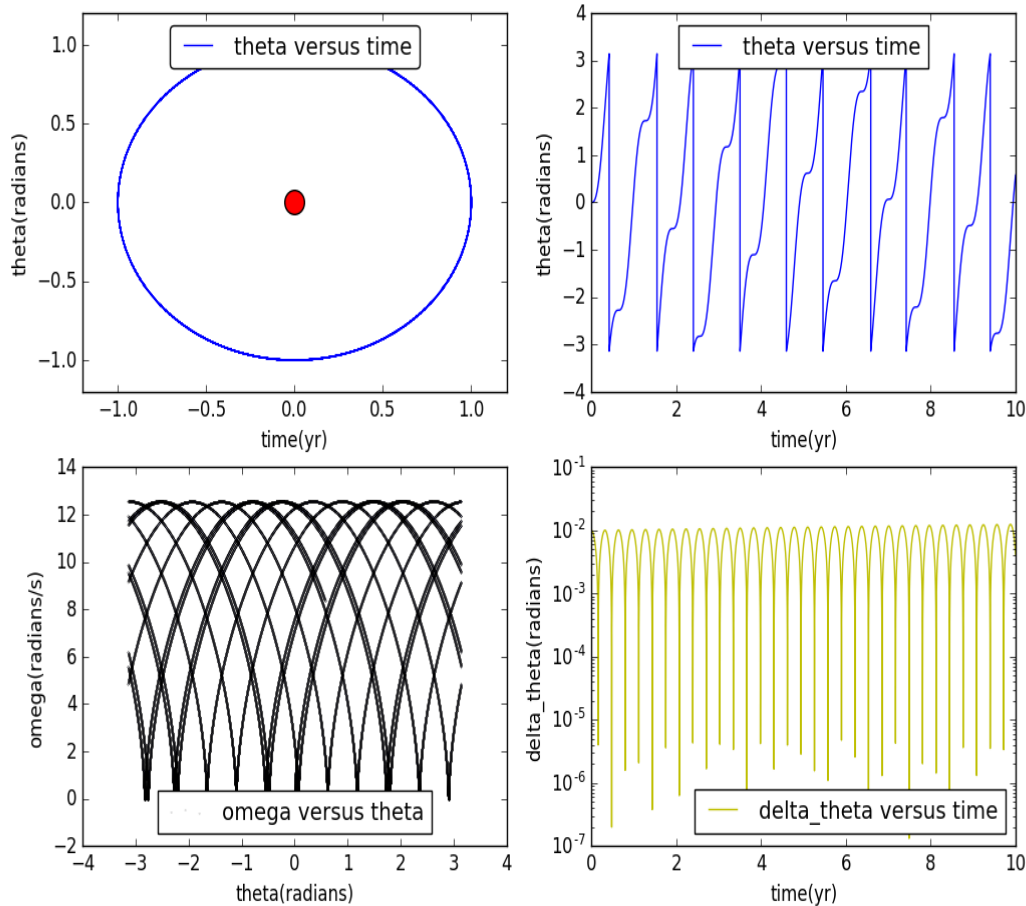
$$\begin{cases} \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{3GM_{Sat}}{r_c^5} (x_i \sin \theta_i - y_i \cos \theta_i)(x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i) \Delta t \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t \end{cases} \quad (8)$$

具体程序及代码实现见 Github 个人主页。

## 三、模拟结果

根据之前对单摆以及洛伦兹天气模型的研究可知,一个系统出现混沌是需要一定条件的。在有阻尼的物理摆系统中体现为外部驱动力的大小需要满足一定范围,在 Lorentz 的简化版 Navier-Stokes 方程中则体现在流体参数  $r$  需满足一定大小,而在我们的 Hyperion 翻转模型中,这个条件则体现在其公转轨迹的离心率上。下面就考察不同轨迹离心率对于的 Hyperion 翻转运动的具体情况。

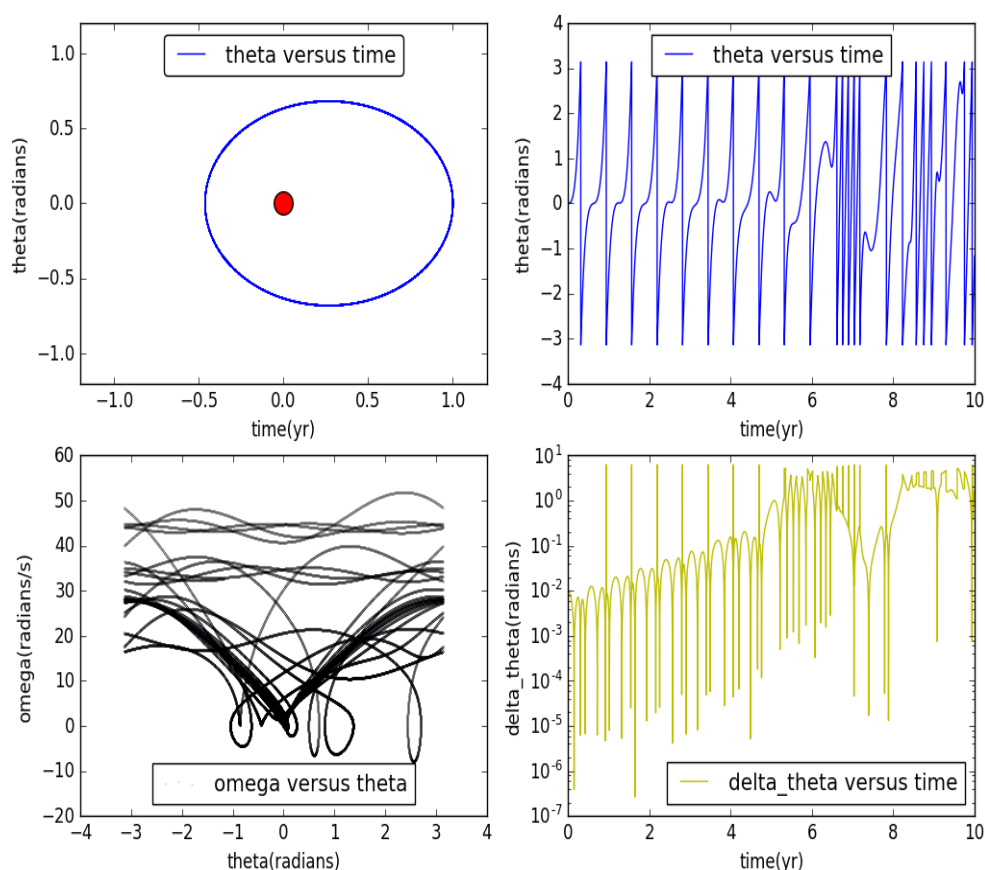
## Hyperion Circular orbit



**Figure 1.** 本图展示了 Hyperion 绕土星做圆周运动时自身的翻转运动情况，其中从左至右、从上至下依次为 **Subfigure 1.1-4**。**Subfigure 1.1** 是公转运动轨迹图；**Subfigure 1.2** 是角度随时间的图像，并且在这里将角度限制在了  $(-\pi, \pi)$  中；**Subfigure 1.3** 是角速度和角度在相空间中的轨迹图；**Subfigure 1.4** 是设置除初始条件不同外完全相同的 Hyperion 系统，考察它们的角度差随时间的变化图像，其中一个为  $\theta(0) = 0, \omega(0) = 0$ ，另一个为  $\theta(0) = 0.001\omega(0)$ ；在这里，将步长设为  $\Delta t = 0.0001$

从 **Subfigure 1.4** 容易看出，这时的相轨线呈现明显的周期性，**Subfigure 1.4** 也反映出此时的 Hyperion 系统具有可预测性(两个具有微小初值差异的系统可以保持长期的同步)，说明当离心率为 0，Hyperion 做公转圆周运动时，其翻转运动时有周期性，未出现混沌。

## *Hyperion Elliptical orbit*



**Figure 2.** 本图与 Figure 1 唯一的不同在于将 Hyperion 的初始运动速度由  $2\pi HU / \text{Hyperion} - \text{year}$  减小至  $5HU / \text{Hyperion} - \text{year}$ ，亦即使轨道由圆变成了椭圆，如 Subfigure 2.1 所示。

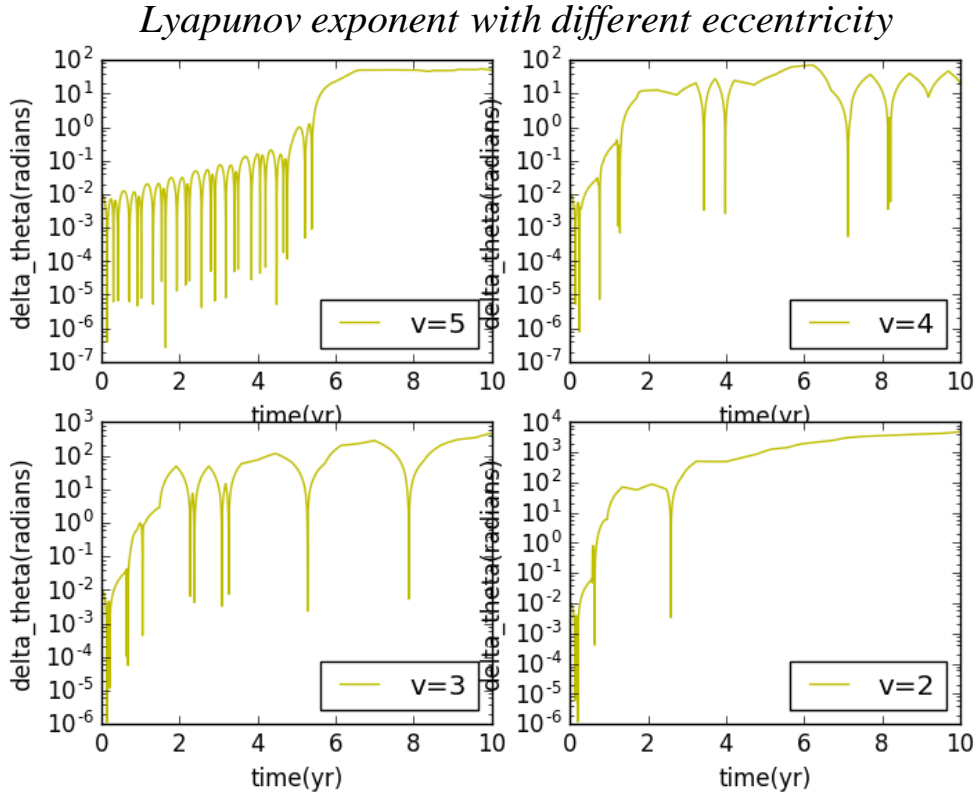
如上图时，当我们使轨道变为椭圆时，无论是相轨线还是角度随时间的变化，在经历一段不长的时间（离心率越大，这段相对稳定时间越短）后，系统都会逐渐失去周期性从而陷入混沌，这一点在 Subfigure 2.3 中可以很明显的看出来，相轨线呈现混乱的状态，时间足够长后相轨线几乎会充满一片矩形的区域。

此时分析 Subfigure 2.4, 对比 Subfigure 1.4 可发现除了逐渐失去周期性外，考察每一个“周期”的最大值并连起来，会发现这条连线整体呈线性关系（此时 y 轴为对数坐标轴），这也是混沌系统中

可进行分析的一个重要参数  $\lambda$  ——Lyapunov exponent：

$$\Delta\theta \approx e^{\lambda t} \quad (9)$$

下面我们分析李雅普诺夫指数与离心率之间的关系。



**Figure 3.** 本图展示了两个差别仅为  $\Delta\theta_0=0.01$  的两 Hyperion 系统，在不同的离心率情形下，其混沌中李雅普诺夫指数的变化情况，这里  $v$  为初始速度，单位为  $HU / Hyperion\text{-}year$ 。

由于离心率变大时， $\Delta\theta$  会快速增大并发散，这里为了观察 Lyapunov exponent 而解除了前面对  $\theta \in (-\pi, \pi)$  的限制。很显然，随着离心率变大，李雅普诺夫指数也会增大，两者呈正相关，这反映离心率越大的 Hyperion 系统，其混沌程度也越大。

### III 结论

本文基于简化的 Hyperion 模型,建立该天体的翻转运动与公转运动的微分方程模型,对 Hyperion 独特的混沌现象进行了模拟分析。利用相空间和李雅普诺夫指数这两个工具,经过公转圆轨道和椭圆轨道两者情形的对比发现,导致 Hyperion 的翻转运动陷入混沌是由于椭圆轨道以及其独特的“类哑铃”形状,两者共同作用,使得运动系统失去周期性。

进一步地,考察椭圆轨道中不同离心率时 Hyperion 翻转的变化。发现随着离心率增大,李雅普诺夫指数会随之增大,相轨线以及角速度和角度随时间的变化也更加混乱。

这是人类在太阳系中发现的第一个呈混沌现象的天体运动,也说明即使是在几乎由牛顿定律统治的天体运动中,混沌现象也是经常性存在的。

### IV 论文引用及致谢

- [1] James Jay KLAVERTER. ROTATION OF HYPERION. I. OBSERVATIONS, 1989
- [2] Nicholas J. Giordano, Hisao Nakanishi. Computational Physics[M], 清华大学出版社 2006
- [3] 许安定, 丁棣华, 王波. 经典力学[M]. 武汉大学出版社