

第九章 分支限界法



概述



图问题中的分支限界法



组合问题中的分支限界法



小结



分支限界法—概述



- 分支限界法按**广度优先**策略搜索问题的**解空间树**，在搜索过程中，对待处理的结点根据**限界函数**估算目标函数的可能取值，从中选取使目标函数取得极值（极大或极小）的结点优先进行广度优先搜索，从而不断调整搜索方向，尽快找到问题的解。
- 分支限界法适用于求解最优化问题。

9.1.1 分支限界法的设计思想

- 确定一个合理的限界函数，并根据限界函数确定目标函数的界[down, up]。
- 按照广度优先策略搜索问题的解空间树，在分支结点上，依次扩展该结点的所有孩子结点，分别估算这些孩子结点的目标函数的可能取值，**某孩子结点的目标函数的可能取值超出目标函数的界，则将其丢弃**；否则，将其加入待处理结点表（以下简称表PT）中。
- 依次从表PT中选取使目标函数取得极值的结点成为当前扩展结点，重复上述过程，直至找到最优解。

分支限界法需要解决的关键问题



- 如何确定合适的限界函数。（提示：计算简单，减少搜索空间，不丢解）
- 如何组织待处理结点表。（提示：表PT可以采用堆的形式，也可以采用优先队列的形式存储）
- 如何确定最优解的各个分量。（提示：必须保存搜索过程中经过的路径信息。）



回溯法与分支限界法区别?



回溯法从根结点出发，按照深度优先策略遍历问题的解空间树。

分支限界法按广度优先策略搜索问题的解空间树。



二者与蛮力法区别?

9.1.2 分支限界法的时间性能

类比回溯法分析分支限界法的时间性能

在最坏情况下，时间复杂性为指数阶。与回溯法不同的是，分支限界法首先扩展解空间树中的上层结点，**并采用限界函数，有利于实行大范围剪枝**，同时，根据限界函数不断调整搜索方向，选择最有可能取得最优解的子树优先进行搜索。

分支限界法的较高效率是以付出一定代价为基础的，其工作方式也造成了算法设计的复杂性。

图问题中的分支限界法—TSP问题

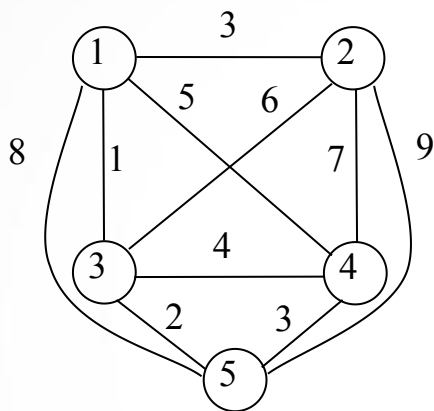
问题描述：TSP问题是指旅行家要旅行 n 个城市，要求各个城市经历且仅经历一次然后回到出发城市，并要求所走的路程最短。

想法：

- 确定目标函数的界[down, up]。（提示：如何确定上、下界？）
- 确定目标函数值的计算方法（限界函数）。
- 基于上、下界，按分支限界法设计思想，搜索解空间树，得到最优解。

图问题中的分支限界法—TSP问题

图9.5(a)所示是一个带权无向图，(b)是该图的代价矩阵。



(a) 一个无向图

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & \infty & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & \infty & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & \infty & 3 \\ 8 & 9 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

(b) 无向图的代价矩阵

图9.4 无向图及其代价矩阵

1.确定问题的上界16， 下界14。



如何设计求上、下界策略？

图问题中的分支限界法—TSP问题

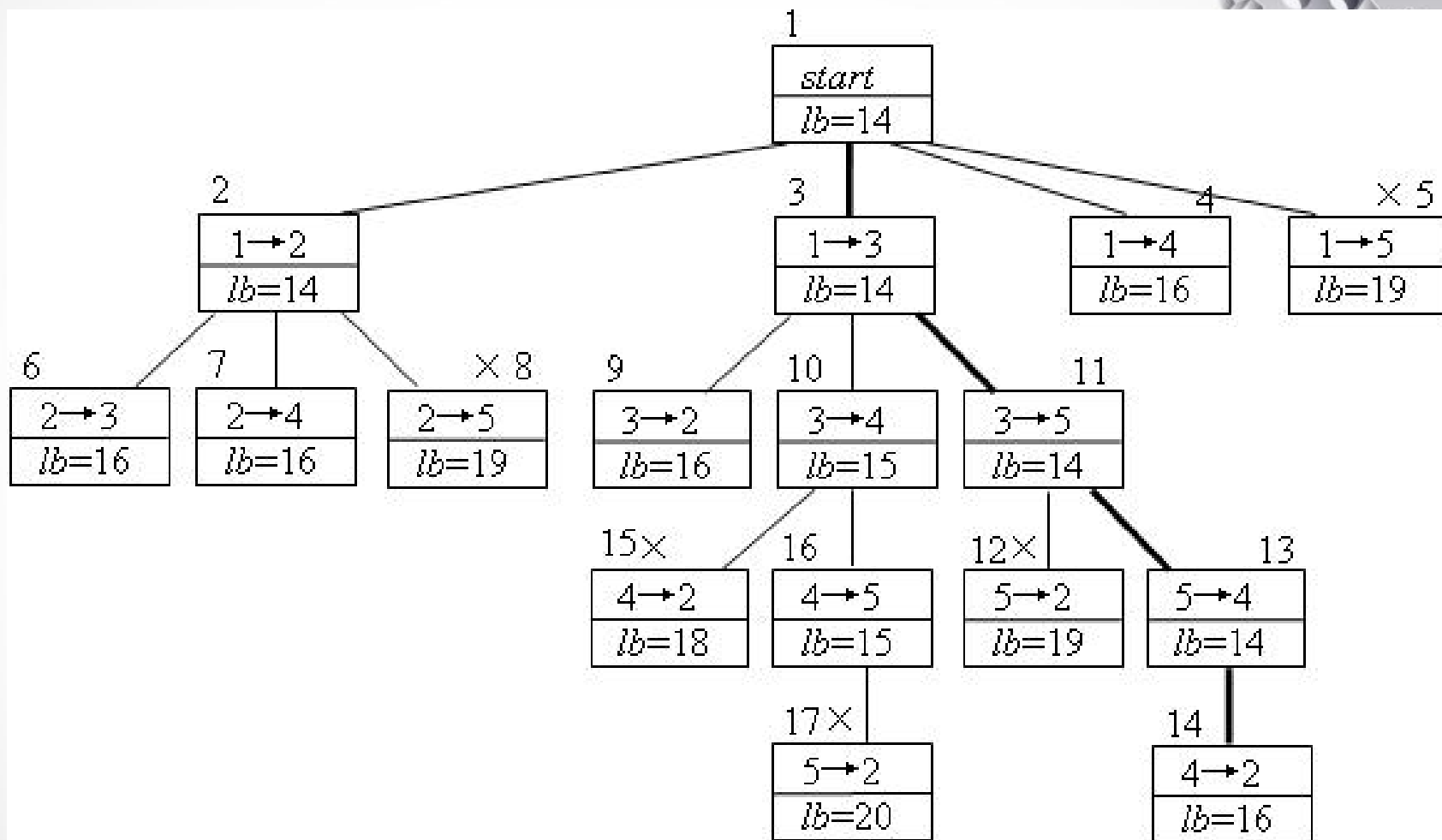
2.确定限界函数计算方法

一般情况下，假设当前已确定的路径为 $U=(r_1, r_2, \dots, r_k)$ ，即路径上已确定了 k 个顶点，此时，该部分解的目标函数值的计算方法如下：

$$lb = (2 \sum_{i=1}^{k-1} c[r_i][r_{i+1}] + \sum_{r_i \in U} r_i \text{行不在路径上的最小元素} + \sum_{r_j \notin U} r_j \text{行最小的两个元素}) / 2$$

3.基于分支限界法的思想，从根结点开始依次计算目标函数值加入待处理结点表中直至叶子结点。

图问题中的分支限界法—TSP问题



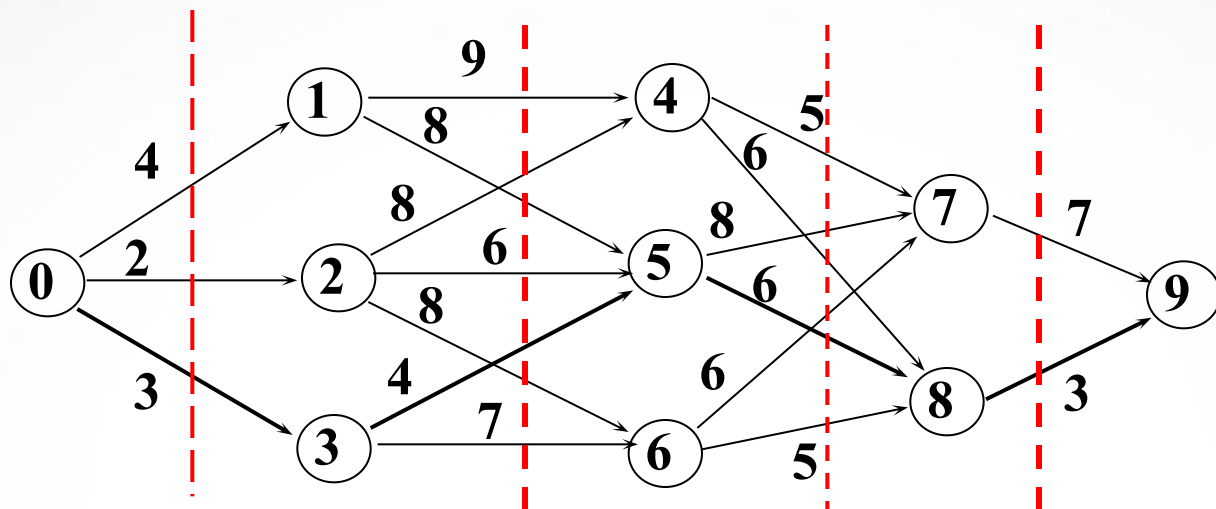
分支限界法求解TSP问题的算法

1. 根据限界函数计算目标函数的下界**down**；采用贪心法得到上界**up**；
2. 计算根节点的目标函数值并加入待处理结点表**PT**；
3. 循环直到某个叶子节点的目标函数值在表**PT**中取得极小值
 - 3.1 **i** = 表**PT**中具有最小值的结点；
 - 3.2 对结点**i**的每个孩子结点**x**执行下列操作：
 - 3.2.1 估算结点**x**的目标函数值**lb**；
 - 3.2.2 若(**lb** ≤ **up**)，则将结点**x**加入表**PT**中；
否则丢弃该结点；
4. 将叶子结点对应的最优值输出，回溯求得最优解的各个分量；

多段图的最短路径问题

问题描述：设图 $G=(V, E)$ 是一个带权有向连通图，如果把顶点集合 V 划分成 k 个互不相交的子集 V_i ($2 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq k$)，使得 E 中的任何一条边 (u, v) ，必有 $u \in V_i$, $v \in V_{i+m}$ ($1 \leq i < k$, $1 < i+m \leq k$)，则称图 G 为多段图，称 $s \in V_1$ 为源点， $t \in V_k$ 为终点。多段图的最短路径问题是求从源点到终点的最小代价路径。

求解过程:



1.应用贪心法求得近似解为 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ ，其路径代价为 $2+7+6+3=18$ ，这可以作为多段图最短路径问题的上界。把每一段最小的代价相加，可以得到一个非常简单的下界，其路径长度为 $2+4+5+3=14$ 。于是，得到了目标函数的界 $[14, 18]$ 。

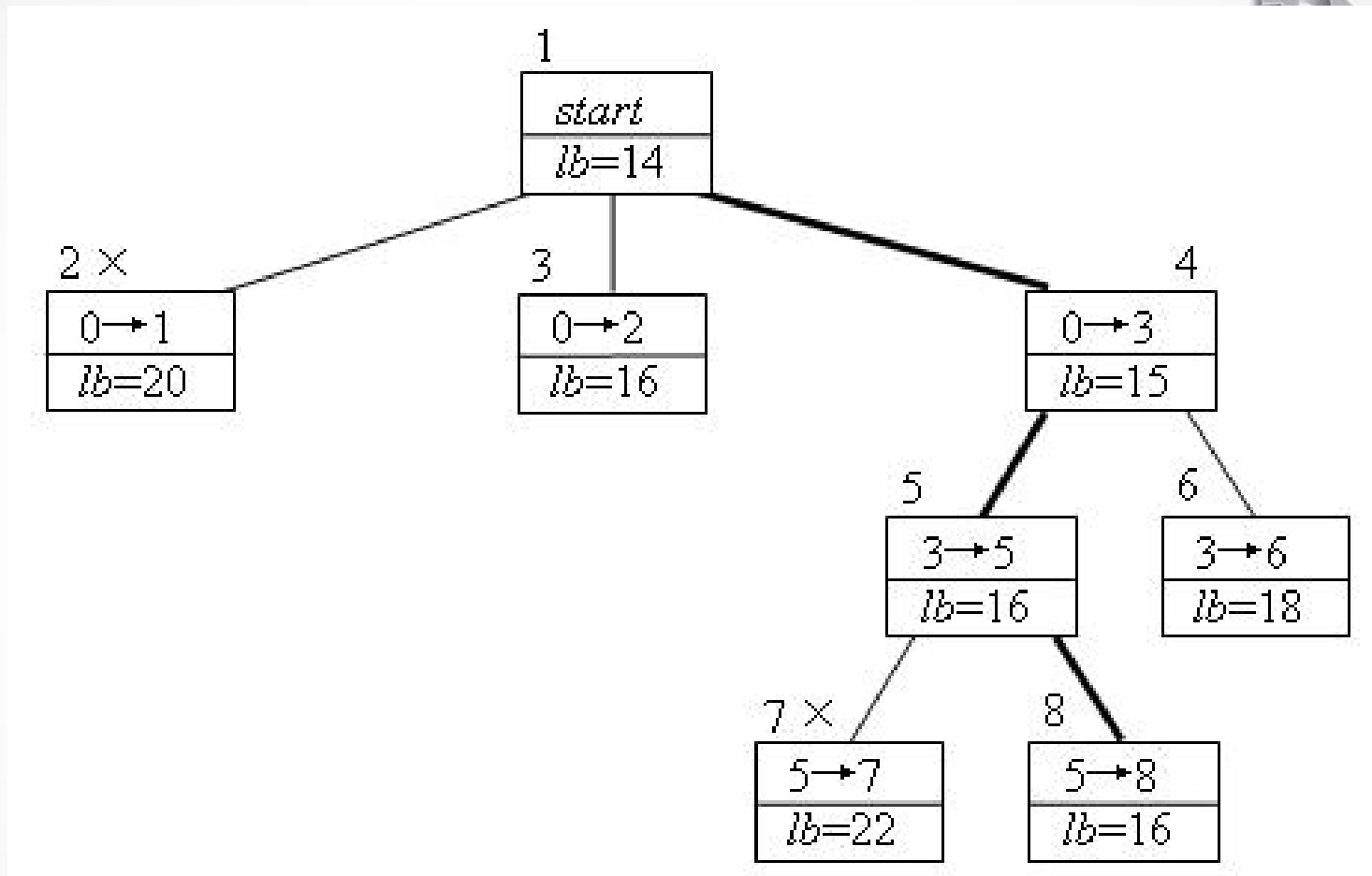
求解过程:

2.一般情况下, 对于一个正在生成的路径, 假设已经确定了前*i*段 ($1 \leq i \leq k$), 其路径为 $(r_1, r_2, \dots, r_i, r_{i+1})$, 此时, 该部分解的目标函数值的计算方法即限界函数如下:

$$lb = \sum_{j=1}^i c[r_j][r_{j+1}] + \min_{\langle r_{i+1}, v_p \rangle \in E} \{c[r_{i+1}][v_p]\} + \sum_{j=i+2}^k \text{第}j\text{段的最短边}$$

如果部分解包含路径**0→1**, 则第**1**段的代价已经确定, 并且在下一段只能从顶点**1**出发, 最好的情况是选择从顶点**1**出发的最短边, 则该部分解的下界是 **$lb=4+8+5+3=20$** 。

分支限界法求解多段图的最短路径问题，搜索空间：



分支限界法求解多段图的最短路径问题，搜索过程？

组合问题中的分支限界法 —0/1背包问题



问题描述：给定 n 种物品和一个容量为 W 的背包，物品 i 的重量是 w_i ，其价值为 v_i ，对每种物品 i 只有两种选择：装入背包或不装入背包，如何选择装入背包的物品，使得装入背包中物品的总价值最大？

例子：有4个物品，重量分别为 $(4, 7, 5, 4)$ ，价值分别为 $(40, 42, 25, 12)$ ，背包容量是10

想 法:

1 确定目标函数上、下界;

2 确定目标函数计算方法;

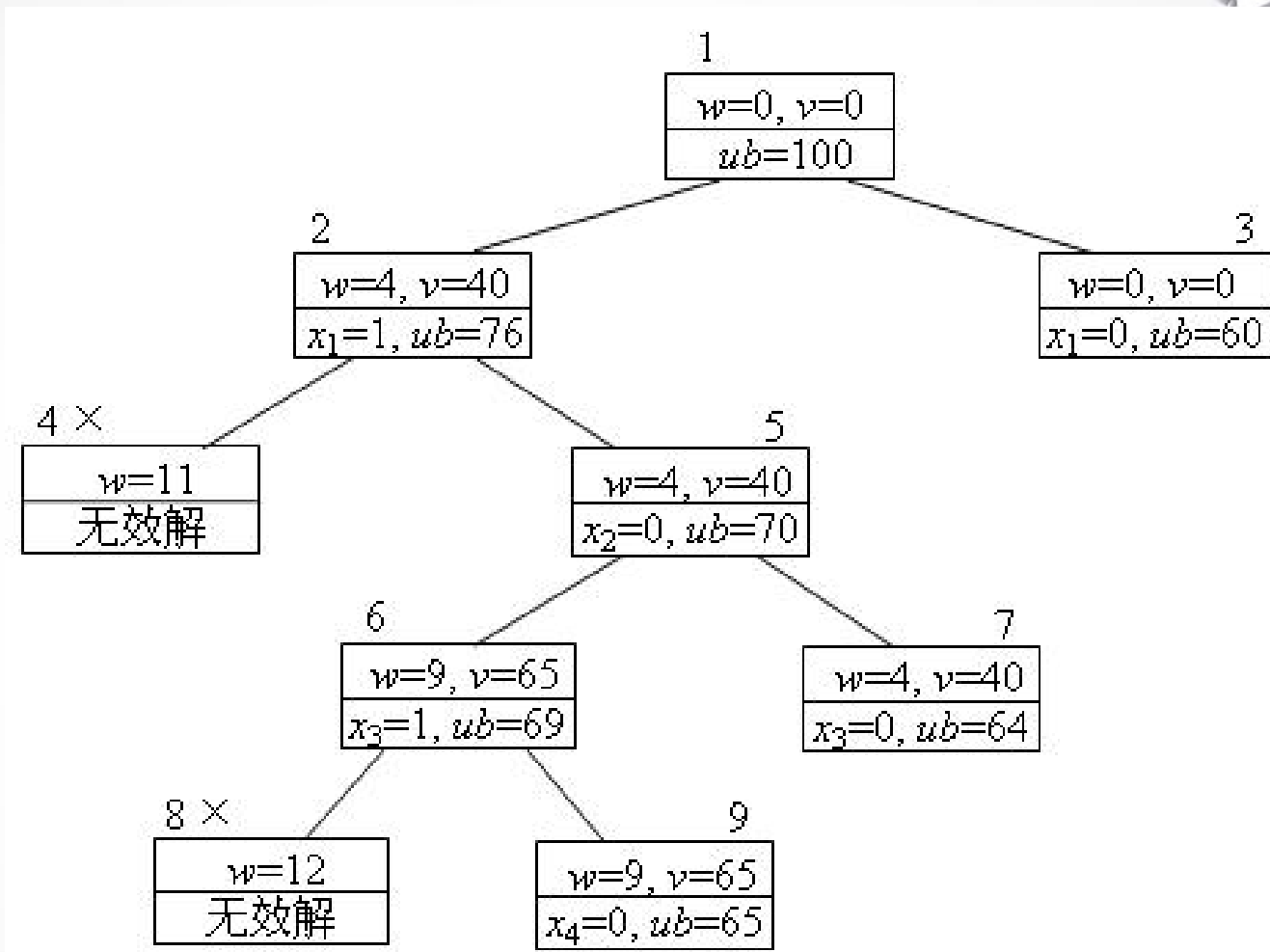
一般情况下,假设当前已对前 i 个物品进行了某种特定的选择,且背包中已装入物品的重量是 w ,获得的价值是 v ,计算该结点的目标函数上界的一个简单方法是, **将背包中剩余容量全部装入第 $i+1$ 个物品**,并可以将背包装满,于是,得到限界函数:

$$ub = v + (W - w) \times (v_{i+1} / w_{i+1})$$

3 依上计算从根结点到叶子结点的目标函数值直到表PT中取得极大值。



分支限界法求解0/1背包问题，搜索空间：



搜索过程？

分支限界法求解0/1背包问题算法

1. 根据限界函数计算目标函数的上界 up ；采用贪心法得到下界 $down$ ；
2. 计算根节点的目标函数值并加入待处理结点表 PT ；
3. 循环直到某个叶子节点的目标函数值在表 PT 中取极大值
 - 3.1 i = 表 PT 中具有最大值的结点；
 - 3.2 对结点 i 的每个孩子结点 x 执行下列操作：
 - 3.2.1 如果结点 x 不满足约束条件，则丢弃该结点；
 - 3.2.2 否则，估算结点 x 的目标函数值 lb ，
将结点 x 加入表 PT 中；
4. 将叶子结点对应的最优值输出，回溯求得最优解的各个分量；

组合问题中的分支限界法—任务分配问题



问题描述：任务分配问题要求把 n 项任务分配给 n 个人，每个人完成每项任务的成本不同，要求分配总成本最小的最优分配方案。

任务分配问题的实例



任务分配成本矩阵如下：

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{任务1} & \text{任务2} & \text{任务3} & \text{任务4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{人员}a \\ \text{人员}b \\ \text{人员}c \\ \text{人员}d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

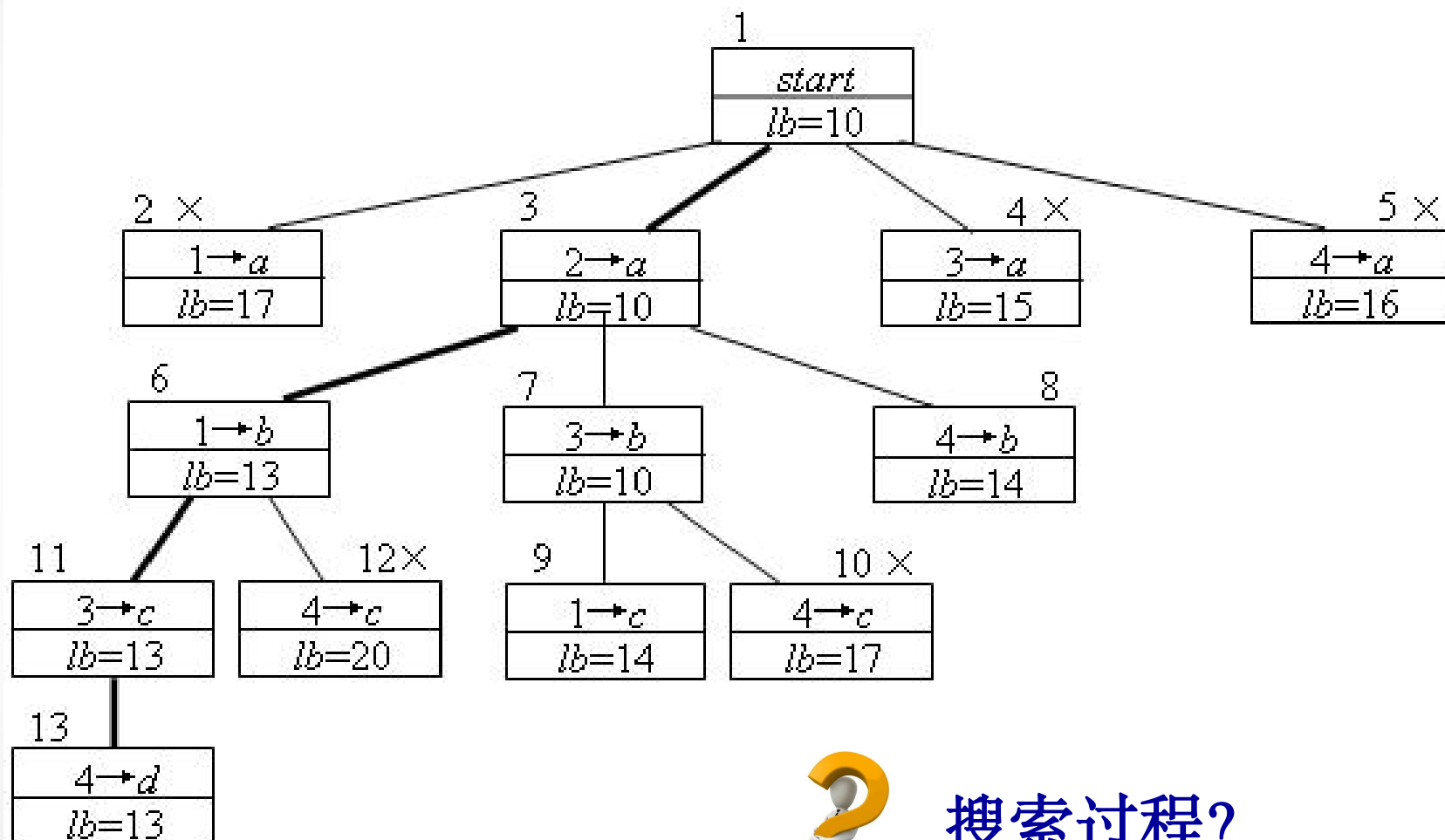
想法:

- 应用贪心法求得一个合理的上界 $2+3+5+4=14$, 将每一行的最小元素加起来就得到解的下界 $2+3+1+4=10$ 。最优值一定是 $[10, 14]$ 之间的某个值。
- 设当前已对人员 $1 \sim i$ 分配了任务, 并且花费了成本 v , 则限界函数可以定义为:

$$lb = v + \sum_{k=i+1}^n \text{第} k \text{行的最小值}$$

假设已经将任务2分配给人员 a , 任务3分配给人员 b , 花费的成本是5, 则该部分解可能获得的最小成本是 $5+(1+4)=10$ 。

分支限界法求解任务分配问题，搜索空间：



搜索过程？

组合问题中的分支限界法—批处理作业调度问题

问题描述： 给定 n 个作业的集合 $J=\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ ，每个作业都有3项任务分别在3台机器上完成，作业 J_i 需要机器 j 的处理时间为 t_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 3$)，每个作业必须先由机器1处理，再由机器2处理，最后由机器3处理。批处理作业调度问题要求确定这 n 个作业的最优处理顺序，使得从第1个作业在机器1上处理开始，到最后一个作业在机器3上处理结束所需的时间最少。

想法:

批处理作业的一个最优调度应使机器1没有空闲时间，且机器2和机器3的空闲时间最小。可以证明，存在一个最优作业调度使得在机器1、机器2和机器3上作业以相同次序完成。



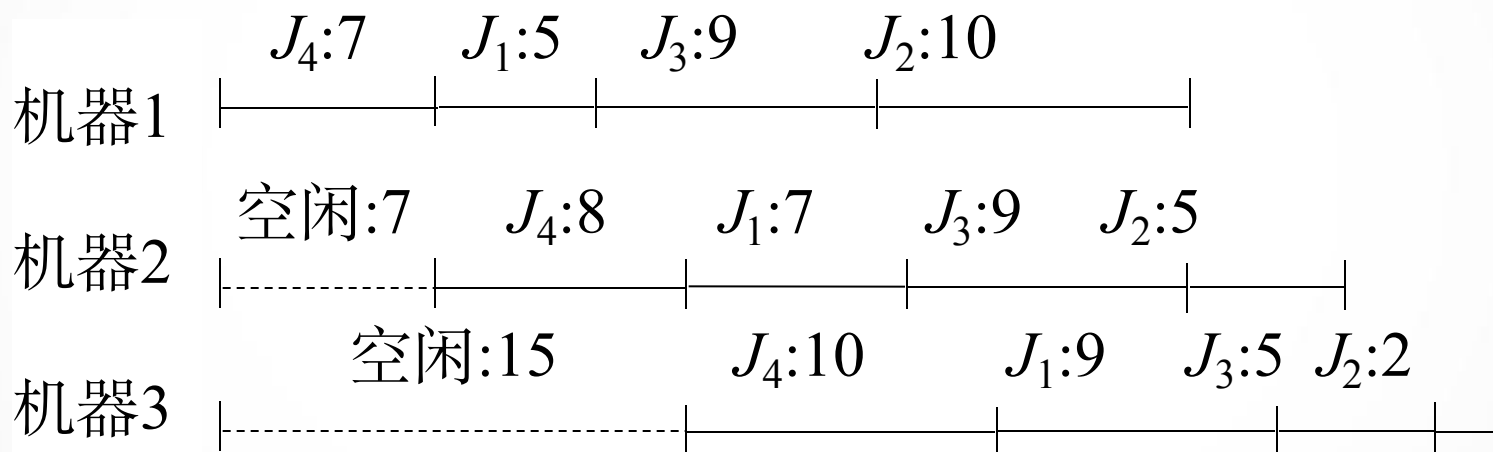
批处理作业调度问题的实例。



$$T = \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{array} \begin{array}{ccc} \text{机器1} & \text{机器2} & \text{机器3} \\ \left(\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 5 & 2 \\ 9 & 9 & 5 \\ 7 & 8 & 10 \end{array} \right) \end{array}$$

上界确定的方法:

可以随机产生几个调度方案，从中选取具有最短完成时间的调度方案作为近似最优解。



下界确定的方法:

分支限界法求解批处理作业调度问题的关键在于限界函数，即如何估算部分解的下界。考虑理想情况，机器1和机器2无空闲，最后处理的恰好是在机器3上处理时间最短的作业。

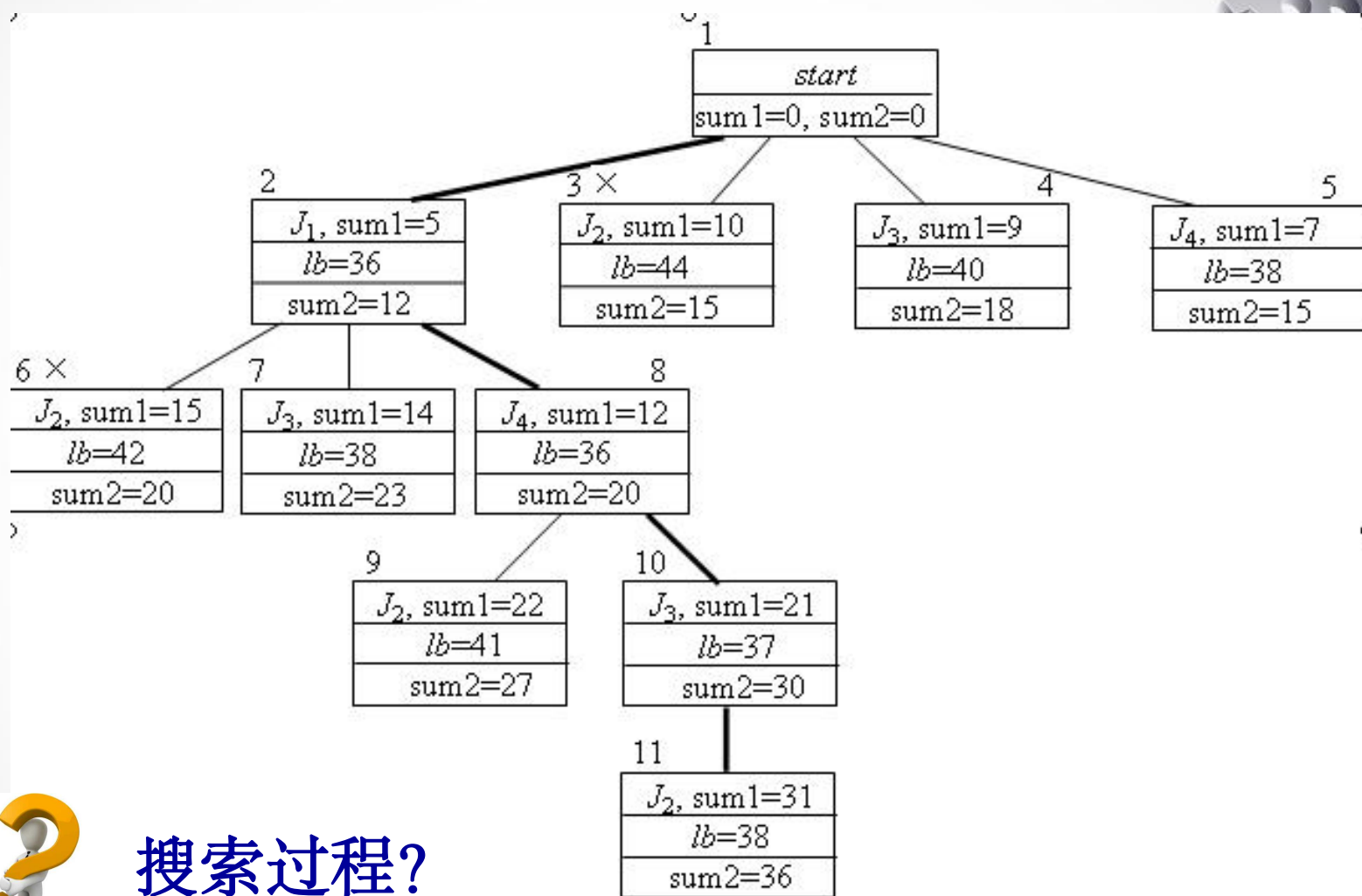
一般情况下，假设 M 是当前已安排了 k 个作业的集合，设 sum1 表示机器1完成 k 个作业的处理时间， sum2 表示机器2完成 k 个作业的处理时间，现在要处理作业 $k+1$ ，此时，该部分解的目标函数值的下界计算方法如下：

$$(1) \quad \text{sum1} = \text{sum1} + t_{k+1,1}$$

$$(2) \quad lb = \max \{ \text{sum1}[k+1], \text{sum2}[k] \} + \sum_{i \notin M} t_{i,2} + \min \left\{ \sum_{j \neq k+1, j \notin M} t_{j,3} \right\}$$

$$(3) \quad \text{sum2} = \max \{ \text{sum1}, \text{sum2} \} + t_{k+1,2}$$

分支限界法求解作业调度问题， 搜索空间：



搜索过程？

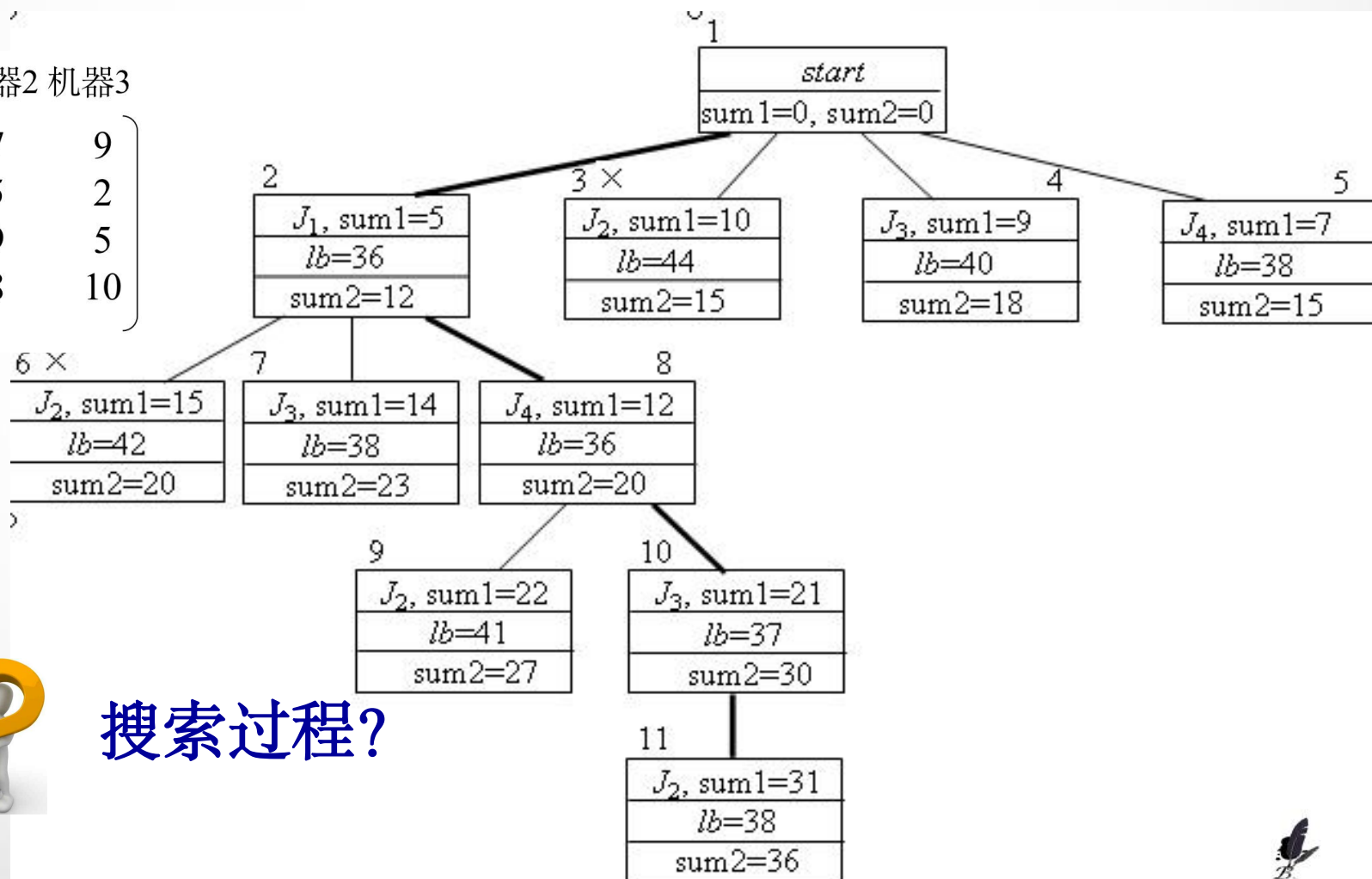


分支限界法求解作业调度问题，搜索空间【】：

$$lb = \max \{ \text{sum1}[k+1], \text{sum2}[k] \} + \sum_{i \notin M} t_{i2} + \min \{ \sum_{j \neq k+1, j \in M} t_{j3} \}$$

机器1 机器2 机器3

J_1	5	7	9
J_2	10	5	2
J_3	9	9	5
J_4	7	8	10



搜索过程？



练习



■ **P169-170:**

■ **T2, T5**

■ **T2:** 给定背包容量 $W=20$ ，6个物品，重量分别为 $(5,3,2,10,4,2)$ ，价值分别为 $(11,8,15,18,12,6)$ 。画出回溯法求解上述0/1背包问题的搜索空间。

■ **T5:** 给定一个正整数集合 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和一个正整数 y ，设计回溯算法，求集合 X 的一个子集 Y ，使得 Y 中元素之和等于 y 。

作业



■ 作业

■ P189-189:

■ T3, T9

■ **T3**: 给定背包容量 $W=20$, 6个物品, 重量分别为 $(5,3,2,10,4,2)$, 价值分别为 $(11,8,15,18,12,6)$ 。画出分枝限界法求解上述0/1背包问题的搜索空间。

■ **T9**: 设某一机器由 n 个部件组成。每一种部件都可以从 m 个不同的供应商处购得。设 w_{ij} 是从供应商 j 处购得的部件 i 的重量; c_{ij} 是相应的价格。设计分枝限界算法, 给出总价格不超过 d 的最小重量的部件购买方案。



关于考试

- 常用公式

1、 $\sum_{1 \leq i \leq n} i = n(n+1)/2$

$$1 \leq i \leq n$$

2、 $\sum_{1 \leq i \leq n} i^2 = (2n^3+3n^2+n)/6$

$$1 \leq i \leq n$$

3、 $\sum_{1 \leq i \leq n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$

$$1 \leq i \leq n$$

4、 $\sum_{0 \leq i \leq \infty} a^i = 1/(1-a)$ for $0 < a < 1$

$$0 \leq i \leq \infty$$