

# 《随机信号处理》

## 第二章 离散随机信号

### 内容提要

- ✓ 2.1 随机变量;
- ✓ 2.2 随机信号
- ✓ 2.3 平稳随机信号的时域统计表达;
- ✓ 2.4 平稳随机信号的z域及频域的统计表达;
- ✓ 2.5 线性系统对随机信号的响应;
- ✓ 2.6 随机信号的模型;

对随机信号做一个简短的回顾, 并且介绍一些在以后各章中我们将要用的概念。

### 2.1 随机变量

**定义:** 用一个**随机变量X**来描述自然界中的**随机事件**。

若X的取值是连续的, 则X为**连续型随机变量**;

若X的取值是离散的, 则X为**离散型随机变量**。

随机变量和随机信号用大写外文符号表示, 如X, Y等, 随机信号的一次实现仍用小写外文符号表示, 如x(t), x(n)

**描述:** 对随机变量X, 一般用**分布函数**、**概率密度**及**数字特征**

### 2.1.1 离散随机变量及其分布

离散随机变量可取有限个或可数无穷多个数值。

它是这样的数的集合, 其中所有数可按一定顺序排列, 其可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ 。即 $X(\Omega) = x_i, i = 1, 2, \dots$ 为一随机事件。

随机变量 $X(\Omega)$ 有它确定的概率, 用 $p(x_i)$ 表示:

$$P[X(\Omega) = x_i] = p(x_i), i = 1, 2, \dots$$

离散随机变量还满足:

$$\begin{aligned} p(x_i) &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) &= 1 \end{aligned}$$

随机变量 $X(\Omega)$ 的**分布函数**:

$$F(x) = P[X(\Omega) \leq x_i] = \sum_{x_j \leq x} p(x_j)$$

分布函数的性质:

$$F(\infty) = 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(b) - F(a) = P[a < X(\Omega) \leq b]$$

在离散随机变量中的常见的概率分布:

(1) 二项式分布

(2) 泊松分布

### 2.1.2 连续随机变量及其分布

◆**概率分布函数**  $P(x) = \text{Probability}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$

◆**概率密度**  $p(x) = dP(x)/dx$

**概率密度的性质:**

① 概率密度函数是非负函数, 即对于一切x, 存在 $p(x) \geq 0$ 。

②  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = F(+\infty) = 1$

③ 随机变量X落在区间 $(x_1, x_2)$ 内的概率为

$$P(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

④ 如果x是概率密度函数 $p(x)$ 的连续点, 那么, 分布函数与概率密度函数具有如下关系

$$F'(x) = p(x)$$

即分布函数 $F(x)$ 是概率密度函数 $p(x)$ 的一个原函数。

在连续随机变量中的常见的概率分布:

(1) 均匀分布

若连续随机变量X的一切可能取值充满某一有限区间 $[a, b]$ , 并且在该区间内处处具有相同的分布密度, 这种分布称为均匀分布, 其概率密度函数为

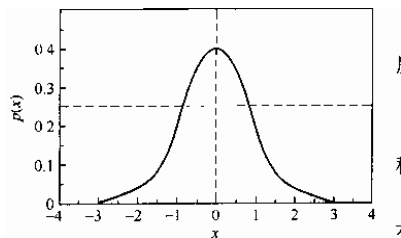
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 高斯分布

高斯分布是一种最常见、也是最重要的分布。其概率密度函数满足以下关系

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x_t - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

标准高斯分布:  $\sigma_x = 1, m_x = 0$ , 记 $N(0, 1)$



- (3) 韦布尔分布;  
(4) 对数正态分布

$$\textcircled{2} F_2(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_2(x, y) dx dy$$

③ 边缘分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dy$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^y dy \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx$$

④ 二维概率密度函数隐含一维概率密度函数的信息:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$$

⑤ 随机点 (X, Y) 落在某一个区间 R 内的概率:

$$P[(x, y) \in R] = \iint_R p_2(x, y) dx dy$$

常见的二维概率密度函数:

二维正态随机变量的概率密度函数

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

下图为均值  $m_x = m_y = 0$ , 方差  $\sigma_x = \sigma_y = 1$ , 相关系数  $\rho = 0.8$  的二维正态随机变量的概率密度函数

$$F_2(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

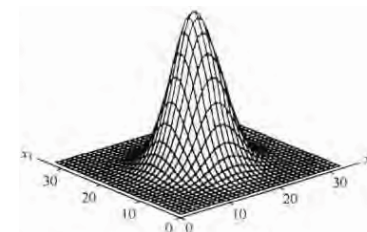
显然,  $F_2(x, y)$  就是随机变量 (X, Y) 落在以点 (x, y) 为顶点的左下方的无限大矩形区域内的概率,

**二维随机变量的联合概率密度函数定义:** 如果分布函数  $F_2(x, y)$  连续, 并且存在二阶混合偏导数, 则定义它的二阶偏导数为二阶联合概率密度函数;

$$p_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}$$

**二维联合概率密度函数的性质:**

①  $p_2(x, y)$  非负,  $p_2(x, y) \geq 0$



**X 和 Y 统计独立:** 当  $\rho = 0$  时, 有  $p_2(x, y) = p(x)p(y)$ , 此时联合的概率密度函数为单独两个一维正态概率密度之积, 称二维随机变量 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量。

二维随机变量的概念推广到多维的情形

**n 维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合分布函数定义:**

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n]$$

**n 维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的概率密度函数, n 阶混合偏导数存在,**

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

**n 维随机变量统计独立条件**

如  $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2) \dots p(x_n)$  成立, 则随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的。

2.1.4 随机变量的数字特征

(1) 数学期望

对于离散随机变量 X, 定义它的均值或数学期望为

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

**意义:** 随机变量所有可能取值以其相应的概率进行加权平均。

对于连续随机变量 X, 定义其均值或数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = m_x$$

随机变量的数学期望具有如下性质

① 对于常数 b 有

$$E(bX) = bE(X)$$

② 对于随机变量 X 和 Y、有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

以上结论可以推广到多个随机变量的情形。

③ 如果随机变量 X 和 Y 彼此统计独立, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

这结论也可推广至多个彼此统计独立随机变量的情形。

## (2) 随机变量的方差

对于离散随机变量  $X$ , 定义其方差为

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p(x_k)$$

假定上式级数和绝对收敛

对于连续随机变量  $X$ , 定义其方差为

$$D(X) = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p(x) dx$$

假定上式积分绝对收敛,

**含义:** 反映了随机变量偏离均值的程度, 随机变量偏离均值的误差总功率。

实际进行方差计算时, 常用下式:

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

**含义: 方差 = 平均功率 - 均值平方**

标准差:

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - m_X)^2]}$$

方差具有以下性质

① 对于常数  $b$ , 有  $D(b) = 0$ 。

② 若  $b$  为常数, 则有

$$D(bX) = b^2 D(X)$$

③ 若随机变量  $X$  和  $Y$  统计独立, 则有

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

以上结论可以推广至多维的情形。

## (3) 随机变量的矩

随机变量  $X$  的  $k$  阶原点矩  $m_k$  为

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx, \quad k=1, 2, \dots$$

随机变量  $X$  的  $k$  阶中心矩  $c_k$  为

$$c_k = E[(X - m_X)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k p(x) dx, \quad k=1, 2, \dots$$

**结论:** 均值是一阶原点矩, 方差则是二阶中心矩

随机变量  $X$  和  $Y$  的  $(i+j)$  阶混合矩  $m_{ij}$  为

$$m_{ij} = E(X^i Y^j), \quad i, j=1, 2, \dots$$

随机变量  $X$  和  $Y$  的  $(i+j)$  阶混合中心矩  $c_{ij}$  为

$$c_{ij} = E[(X - m_X)^i (Y - m_Y)^j], \quad i, j=1, 2, \dots$$

## (4) 随机变量的协方差

随机变量  $X$  和  $Y$  的协方差定义

$$C_{XY} = E[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

**结论:** 协方差是一阶混合中心矩

随机变量  $X$  和  $Y$  的相关系数 = 随机变量  $X$  和  $Y$  归一化协方差

$$\gamma_{XY} = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sqrt{E[(X - m_X)^2]E[(Y - m_Y)^2]}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

式中  $\sigma_X$  和  $\sigma_Y$  分别为随机变量  $X$  和  $Y$  的标准差, 简称标准差。

**关于相关系数有以下几点说明**

① 相关系数满足  $|\gamma_{XY}| \leq 1$

② 如果随机变量  $X$  和  $Y$  统计独立, 则有  $\gamma_{XY} = 0$

称  $X$  和  $Y$  是不相关的。

**注意:** 两个随机变量统计独立  $\xleftrightarrow[\text{只有正态分布随机变量}]{\text{总成立}}$  它们互不相关

③ 如果  $E(XY) = 0$ , 则称随机变量  $X$  和  $Y$  是正交的。

④ 相关系数  $|\gamma_{XY}| = 1$  时, 说明随机变量  $X$  和  $Y$  之间呈线性关系。或称  $X$  和  $Y$  依概率线性相关;

当  $|\gamma_{XY}| = 0$  时, 说明  $X$  和  $Y$  线性无关;

当  $|\gamma_{XY}| < 1$  时, 说明  $X$  和  $Y$  以一定概率大小相关。

相关系数大小充分说明了一个随机变量依赖于另一个随机变量的程度。

## 协方差矩阵

对于二维随机变量  $X_1$  和  $X_2$ , 存在四种二阶中心矩, 分别为

$$C_{X_1} = D(X_1) = E[(X_1 - m_{X_1})^2]$$

$$C_{X_1 X_2} = E[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})]$$

$$C_{X_2 X_1} = E[(X_2 - m_{X_2})(X_1 - m_{X_1})]$$

$$C_{X_2} = D(X_2) = E[(X_2 - m_{X_2})^2]$$

二维随机变量  $X_1$  和  $X_2$  的协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} C_{X_1} & C_{X_1 X_2} \\ C_{X_2 X_1} & C_{X_2} \end{bmatrix}$$

对于  $n$  维随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 存在二阶中心矩

$$C_{X_i X_j} = E[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})], \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

$n$  维随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的协方差矩阵

$$C = \begin{bmatrix} C_{X_1} & C_{X_1 X_2} & \dots & C_{X_1 X_n} \\ C_{X_2 X_1} & C_{X_2} & \dots & C_{X_2 X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{X_n X_1} & C_{X_n X_2} & \dots & C_{X_n} \end{bmatrix}$$

**【例 1】** 已知高斯随机变量  $X$  的概率密度

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma^2}}$$

求它的数学期望和方差。

**解：**根据数学期望和方差的定义

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令

$$t = \frac{x-m_X}{\sigma}, \quad dx = \sigma dt$$

代入上式并整理

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{m_X}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 + \frac{m_X}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = m_X$$

$$C_{XY} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (y-m_Y)^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x,y) dx \right] dy = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (y-m_Y)^2 p(y) dy = \frac{\sigma_Y^2}{a}$$

由前两式联立，解得

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$$

$$C_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$$

可见，当  $X$  与  $Y$  呈线性关系  $Y = aX + b$ ，且  $a > 0$  时，二者的相关系数

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$$

即  $X$  与  $Y$  是完全相关的。

如  $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2) \cdots p(x_n)$  成立，则随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的

如果  $r_{XY} = 0$ ，称  $X$  和  $Y$  是不相关的。

**注意：**两个随机变量统计独立  $\xleftarrow{\text{总成立}}$  它们互不相关  $\xrightarrow{\text{只有正态分布随机变量}}$

与前面做同样的变换，即令  $t = \frac{x-m_X}{\sigma}$ ，整理后

$$D(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$D(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sigma^2$$

最后得：

可见，高斯变量的概率密度由它的数学期望和方差唯一决定

**【例 3】** 二维随机变量  $(X, Y)$  满足

$$\begin{cases} X = \cos\Phi \\ Y = \sin\Phi \end{cases}$$

式中， $\Phi$  由是在  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量，讨论  $X, Y$  的独立性和相关性。

**解：**根据已知条件， $x^2 + y^2 = 1$ ，显然它们的取值互相依赖于对方，或者说是通过参变量  $\Phi$  互相联系，因此不可能是互相独立的。

另一方面，它们却是不相关的，因为

$$E(X) = \int_0^{2\pi} \cos\varphi p(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$$

$$E(Y) = \int_0^{2\pi} \sin\varphi p(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$$

$$R_{XY} = E(XY) = E(\sin\varphi \cos\varphi) = \frac{1}{2} E(\sin 2\varphi) = 0$$

$$C_{XY} = E[(X-m_X)(Y-m_Y)] = E(XY) = 0$$

所以  $r_{XY} = 0$ ， $X$  与  $Y$  是不相关的。

该例子说明相互不独立的两个随机变量可以是不相关的

## 2.1.5 随机变量的变换

**问题：**在随机信号与系统分析的许多应用中，常常会遇到这样一类问题，即随机变量通过某函数关系的变换，需要确定变换前后随机变量的统计特性。设这一变换关系为

$$Y = g(X)$$

**情况一：**设  $Y = g(X)$

↓ 单值对应关系

反函数  $X = h(Y)$ ，

$X$  落在  $(x \pm dx)$  很小区间内概率 =  $Y$  落在  $(y \pm dy)$  很小区间内概率

$$p(x)dx = p(y)dy$$

$$p(y) = \frac{dx}{dy} p(x)$$

↓ 概率密度函数为非负函数

$$p(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| p[h(y)]$$

情况二: 如果随机变量  $X$  与  $Y$  是一种多值变换关系

↓ 多值变换

反函数  $x_1 = h_1(y)$ ,  $x_2 = h_2(y)$ , ...

$Y$  落在  $(y + dy)$  很小区间内概率 =  $X$  落在很小区间  $(x_1 + dx_1)$ ,  $(x_2 + dx_2)$ , ... 内概率和

$$p(y)dy = p(x_1)dx_1 + p(x_2)dx_2 + \dots$$

$$p(y) = \left| \frac{dx_1}{dy} \right| p[h_1(y)] + \left| \frac{dx_2}{dy} \right| p[h_2(y)] + \dots$$

情况三: 考虑二维随机变量  $X_1$  和  $X_2$  的变换关系。设系统变换后的随机变量为  $Y_1$  和  $Y_2$ 。输入与输出随机变量的联合概率密度函数分别为  $p_2(x_1, x_2)$  和  $p_2(y_1, y_2)$ , 且有

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2)$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2)$$

↓ 单值变换关系

$$X_1 = h_1(Y_1, Y_2)$$

$$X_2 = h_2(Y_1, Y_2)$$

随机变量  $X_1$  和  $X_2$  落在  $\Omega_x$  域内的概率 =  $Y_1$  和  $Y_2$  落在  $\Omega_y$  域内的概率

$$p_2(y_1, y_2)dy_1dy_2 = p_2(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{一维变换: } J &= \frac{dx}{dy} \\ \text{二维变换: } J &= \frac{d\Omega_x}{d\Omega_y} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \\ &\vdots \\ \text{n 维变换: } J &= \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \end{aligned} \right\}$$

必须注意: 实际求解随机变量变换后的概率密度函数时, 还会遇到变换前后随机变量维数不相等和变换关系不是单值关系的情况。在此不作更深入的研究。

实例一: 考察平方律系统, 随机变量  $Y$  与  $X$  之间的变换关系为

$$Y = g(X) = X^2$$

已知随机变量  $X$  服从正态分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

这属于多值变换关系, 由变换关系可得

$$x = h_0(y) = \pm\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

所以, 有

$$p_2(y_1, y_2) = p_2(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = p_2[h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)] \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|$$

情况三推广: 如果  $n$  维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  之间是单值变换关系, 则可将以上结果推广至多维随机变量的变换关系

$$p_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = p_n[h_1(y_1, y_2, \dots, y_n), h_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, h_n(y_1, y_2, \dots, y_n)] \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right|$$

在以上坐标变换中, 设

【例 4】随机变量  $X$  与  $Y$  满足线性关系  $Y = aX + b$ ,  $X$  为高斯变量,  $a$ ,  $b$  为常数, 求  $Y$  的概率密度。

解: 设  $X$  的数学期望和方差分别为  $m_x$  和  $\sigma_x^2$ ,  $X$  的概率密度

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

因为  $Y$  与  $X$  是严格单调函数关系其反函数

$$X = h(Y) = \frac{Y - b}{a}$$

$$\text{且 } h'(Y) = \frac{1}{a}, \text{ 代入 } p(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| p[h(y)]$$

即可得到  $Y$  的概率密度

$$p(y) = p(x_1) \left| \frac{dx_1}{dy} \right| + p(x_2) \left| \frac{dx_2}{dy} \right| = 2 \left| \frac{dx}{dy} \right| p(x) = 2 \left| \frac{1}{2x} \right| p(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} p(\sqrt{y}), \quad y > 0$$

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y \sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right), \quad y > 0$$

上式是具有单个自由度的  $\chi^2$  分布的概率密度函数

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

式中,  $X$  和  $Y$  之间的变换称为雅可比(Jacobian)变换,  $J$  称为雅可比行列式。各维变换的雅可比行列式分别为

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a} - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma_x} e^{-\frac{(y-am_x-b)^2}{2a^2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

显然,  $Y$  仍然服从正态分布, 只是均值、方差有所不同。

**[例 5]** 设  $X, Y$  是互相独立的高斯变量, 数学期望为零, 方差  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ ,  $A$  和  $\Phi$  为随机变量, 且

$$\begin{cases} Y = A \sin \Phi \\ X = A \cos \Phi \\ A > 0, 0 \leq \Phi \leq 2\pi \end{cases}$$

求  $p_2(a, \varphi)$ ,  $p(a)$  和  $p(\varphi)$ 。

**解:**

$$p_2(x, y) = p(x)p(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

出于给出的条件即为反函数, 可直接求雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -a \sin \varphi \\ \sin \varphi & a \cos \varphi \end{vmatrix} = a$$

**[例 6]** 已知二维随机变量  $X_1, X_2$  的联合概率密度  $p_2(x_1, x_2)$ , 求  $Y = X_1 + X_2$  的概率密度。

**解:** 设  $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2$ , 这种假设是为了运算过程的简单,

也可作其他形式的假设。

先求随机变量  $Y_1, Y_2$  反函数及雅可比行列式

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 \\ X_2 &= Y_2 - Y_1 \\ J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

可得到二维随机变量  $(Y_1, Y_2)$  的联合概率密度

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega$$

在已知随机变量  $X$  的特征函数的情况下, 可运用傅立叶变换确定其概率密度函数

$$\begin{aligned} p_2(y_1, y_2) &= p_2(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| \\ &= p_2[h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)] \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| \\ p_2(x, y) &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

式中,  $A^2 = x^2 + y^2$ ,

$A$  的概率密度:

$$p_2(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_2(y_1, y_2) = |J| p_2(x_1, x_2) = p_2(x_1, x_2) = p_2(y_1, y_2 - y_1)$$

$$p(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y_1, y_2 - y_1) dy_1$$

用  $Y$  和  $X_1$  代替  $Y_2$  和  $Y_1$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, y - x_1) dx_1$$

如果  $X_1, X_2$  互相独立

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) p(y - x_1) dx_1 = p(x_1) \otimes p(x_2)$$

两个随机变量互相独立, 其和的概率等于两个随机变量概率的卷积。

**(2) 应用**

a) 利用特征函数, 可以确定随机变量  $X$  经过某种变换后的概率密度函数。

b) 直接根据定义确定随机变量各阶矩, 计算很不方便。有时采用特征函数解决同样问题会更有效。

设随机变量  $X$  和  $Y$  的变换关系为

$$Y = g(X)$$

$$\Phi_Y(\omega) = E[e^{j\omega Y}] = E[e^{j\omega g(X)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega g(x)} p(x) dx$$

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_Y(\omega) e^{-j\omega y} d\omega$$

这就是瑞利分布, 是通信与电子系统中应用很广的分布。

正交处理后 I 通道和 Q 通道数据高斯分布的, 作为 FFT 的实部和虚部的输入, FFT 后模的平方是瑞利分布

$\Phi$  的概率密度

$$p_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} d\frac{A^2}{2\sigma^2}$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2\pi}$$

可见由为在  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量。

## 2.1.6 随机变量的特征函数

一、特征函数的定义

(1) 定义

离散随机变量  $X$  的特征函数为

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega x_k} p(x_k)$$

连续随机变量  $X$  的特征函数为

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = E[\cos(\omega X) + j \sin(\omega X)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} p(x) dx$$

随机变量  $x$  的特征函数是  $e^{j\omega X}$  的数学期望。

此外, 特征函数与概率密度函数构成一对傅立叶变换。

**实例:** 设随机变量  $X$  均匀分布于  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上。其非线性变换关系为  $Y = \sin(X)$ , 求变换后随机变量  $Y$  的概率密度函数  $p(y)$ 。

**解:** 根据特征函数的定义, 有

$$\Phi_Y(\omega) = E[e^{j\omega Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega \sin x} p(x) dx$$

因为

$$p(x) = \frac{1}{\pi}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

由  $y = \sin x$  可得

$$x = \arcsin y$$

所以

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

于是, 有

$$\Phi_Y(\omega) = \int_{-1}^1 e^{j\omega y} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} dy$$



不难求得，随机变量Y的概率密度函数为

$$p(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, |y| \leq 1$$

各  $X_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 的特征函数分别为  $\Phi_1(\omega)$ ,  $\Phi_2(\omega)$ , ...,  $\Phi_n(\omega)$ , 则有

$$\Phi_Y(\omega) = \Phi_1(\omega)\Phi_2(\omega)\cdots\Phi_n(\omega) = \prod_{k=1}^n \Phi_k(\omega)$$

独立分布随机变量之和的特征函数为它们各随机变量的特征函数之乘积。

$$p(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\sigma_X^2}{n}\right)}} \exp\left(-\frac{\bar{X}^2}{2\left(\frac{\sigma_X^2}{n}\right)}\right)$$

零均值高斯独立分布随机变量的  $\bar{X}$  仍为正态分布，其均值为零，方差却成为  $\frac{\sigma_X^2}{n}$ 。

均值中心极限定理（更一般）：非高斯独立分布随机变量的  $\bar{X}$  也趋于正态分布，方差却成为  $\frac{\sigma_X^2}{n}$

例子：雷达中的非相干处理

## 二、特征函数的性质

①  $\Phi_X(\omega)$  总是存在的，即

$$|\Phi_X(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{j\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

或写成  $|\Phi_X(\omega)| \leq |\Phi_X(0)| = 1$

② 对于随机变量X，如果存在以下线性变换

$$Y = g(X) = aX + b, \quad a, b \text{ 均为常数}$$

则有

$$\Phi_Y(\omega) = \Phi_X(a\omega)e^{j\omega b}$$

③ 如果随机变量  $X_1$  和  $X_2$  统计独立，即

$$p_2(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2)$$

$X_1$  和  $X_2$  的特征函数分别为  $\Phi_1(\omega)$  和  $\Phi_2(\omega)$

对于  $Y = X_1 + X_2$  的变换，其特征函数

例：考察具有独立分布随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，定义它们的样本平均值为  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  如果各随机变量  $X_k$  服从高斯分布，其均值为零，方差为  $\sigma_X^2$ ，求样本平均值的概率密度函数。

解： $X_k$  的概率密度函数为

$$p(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

可求得  $X_k$  的特征函数为

$$\Phi_{X_k}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma_X^2}{2}\right)$$

设  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ ，因为各  $X_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 彼此统计独立，根据特征函数的性质，有

$$\Phi_Y(\omega) = \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(\omega) = \exp\left(-\frac{n\omega^2 \sigma_X^2}{2}\right)$$

## 三、特征函数与原点矩关系

直接根据定义确定随机变量各阶矩，计算很不方便。有时采用特征函数解决同样问题会更有效。

设随机变量X均值为零，则有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

对随机变量X的特征函数  $\Phi_X(\omega)$  关于  $\omega$  求导，可得

$$\frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} jxe^{j\omega x} p(x) dx$$

令  $\omega = 0$ ，上式成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = E(X) = j \frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0}$$

$$\Phi_Y(\omega) = \Phi_1(\omega)\Phi_2(\omega)$$

Y 的概率密度函数为

$$p(y) = p(x_1) \otimes p(x_2)$$

独立分布随机变量之和的联合概率密度函数是各自概率密度函数的卷积，该结论同于前例6。

以上结论可推广至多个独立分布随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  之和的情况。设

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n} Y$$

又因为

利用特征函数性质2，有

$$\Phi_Y(\omega) = \exp\left(-\frac{n(\frac{1}{n}\omega)^2 \sigma_X^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma_X^2}{2n}\right) = \exp\left(-\frac{\omega^2 (\frac{\sigma_X^2}{n})}{2}\right)$$

同理，求  $\Phi_X(\omega)$  的各阶导数并令  $\omega = 0$ ，可得

$$(-j)^k \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx = E(X^k)$$

若将  $\Phi_X(\omega)$  展开成泰勒级数，并利用上面关系，则有

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \times \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d(\omega^k)} \Big|_{\omega=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^k}{k!} E(X^k)$$

例：随机变量  $X$  的概率分布为正态分布  $\mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ ，特征函数  $\Phi_X(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma_X^2}{2}\right)$ ，求该随机变量的各阶中心矩。

解：

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 & E(X^2) &= \sigma_X^2 \\ E(X^2) &= \sigma_X^2 & E(X^4) &= 3\sigma_X^4 \\ E(X^3) &= 0 & E(X^6) &= 15\sigma_X^6 \\ E(X^4) &= 3\sigma_X^4 & \dots & \end{aligned}$$

或 
$$E(X^k) = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (k-1) \sigma_X^k, & k \geq 2 \text{ 的偶数} \\ 0, & \text{当 } k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

- 分析表明，采用特征函数确定各阶中心矩，采用微分运算，显然比采用积分方法确定各阶矩简单。
- 服从高斯分布的随机变量，其各奇次阶中心矩均为零。
- 事实上，对称分布的随机变量，其各奇次阶中心矩均为零，这是一个很重要的性质。

我们的研究就是在噪声中的信号处理（信号检测和估计）

必须先研究噪声背景的统计特性

了解随机过程

## 2.2 随机信号（随机过程，随机序列）

随机过程的定义及其统计特性

随机过程的数字特征

平稳随机过程

各态历经过程

平稳过程的相关函数

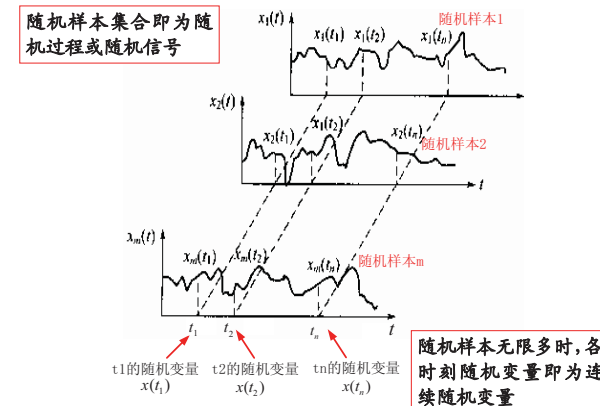
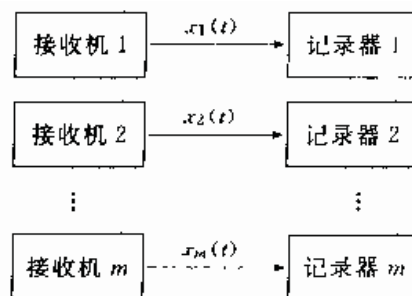
平稳随机过程的功率谱密度

- 通常，信号的形式体现为两种：确定性信号；随机信号。
- 确定性信号 - 信号的大小随时间的变化具有某种规律性，可以再现的，可以用某一明确的数学关系进行描述。
- 随机信号 - 信号随时间  $t$  的变化不具备某种明确变化规律，不可预料，不能用某一明确的数学关系描述这类信号。但是，这类信号具有某些统计特性，可用概率和统计的方法进行描述。
- 严格地讲，实际信号都带有随机性。像通信信号，电视信号，气象信号，生物医学信号等，都带有某种随机因素。

- 通常将这样一类具有随机性的时间函数称为随机信号，亦称随机过程。

### 2.2.1 随机过程的定义及其统计特性

设有  $n$  台性能完全相同的高灵敏度无线电接收机；  
在相同的工作条件下，接通电源一段时间后；  
在没有输入信号时，即输入端接地。  
分别用  $n$  部记录仪同时记录各接收机的输出噪声电压。





### (1) 随机过程定义

可以看到, M 台记录仪所记录的结果并不因为具有相同的工作条件而得到相同的输出波形。即任何一部接收机的输出噪声电压随时间变化的规律都是不可预测的。

$x_1(t)$  表示第一台记录仪的输出结果, ...,

$x_n(t)$  表示第 n 台记录仪的输出结果。

$X(t)$  表示所有  $x_k(t)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , 的集合, 称  $X(t)$  为随机过程。

而其中某一记录  $x_k(t)$  称为随机过程  $X(t)$  的一个实现或一个样本函数。任何一个实现  $x_k(t)$  都是不可预知的, 而且也不相同。

### (2) 随机过程和随机变量的关系

n 个时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  上对随机过程  $X(t)$  诸样本进行均匀采样

在任意时刻  $t_k$ , 采样结果为  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ , 这样, 由各样本函数在  $t=t_k$  时刻的诸采样值便构成:

一个随机变量  $X_k = X(t_k)$ 。

在  $t=t_1, t_2, \dots, t_n$  各时刻的诸采样值便构成 n 个随机变量  $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n)$ 。只要各采样间隔足够小, 即 n 足够大, 那么可以采用随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  描述随机过程  $X(t)$ 。由

于  $X_k$  的下标表示等间隔时刻量, 因此, 也常称  $X_1, X_2, \dots$  为时间序列。

一个随机信号 (或序列) 是一个随机过程, 在它每个时间点上的取值都是随机的, 可用一个随机变量表示, 或者说, 一个随机过程是一个随机试验所产生的随机变量依时序组合得到的序列。

如果随机过程  $X(t)$  的样本函数趋于无限多个, 那么依时序组合的各随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  将成为连续型随机变量。

### (3) 随机过程的概率分布和概率密度函数

在  $t=t_k$  时刻, 对随机过程  $X(t)$  的各样本采样, 构成一随机变量  $X_k = X(t_k)$ 。

$X_k$  的概率分布函数为

$$F(x_k) = P[X(t_k) \leq x_k]$$

式中,  $x_k$  是随机变量  $X_k$  的某一取值; P 表示概率。

$X_k$  的概率密度函数定义为

$$p(x_k) = \frac{dF(x_k)}{dx_k}$$

若将采样点推广至整个时间轴

随机过程  $X(t)$  在任意时刻的一维概率分布函数

$$F(x, t) = P[X(t) \leq x]$$

相应的一维概率密度函数为

$$p(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$$

一维概率分布函数和密度函数只描述随机过程在某一固定时刻的统计特性。

在不同时刻, 随机过程的一维统计特性是可以不一样的。

随机过程不同时刻的随机变量之间并不是孤立的。

为了更加完整地表征随机过程, 还需要了解随机过程的二维及多维统计特性。

在  $t_1$  和  $t_2$  两个时刻对随机过程进行采样, 得到两个随机变量  $X_1$  和  $X_2$ , 这两个随机变量之间的联合分布函数为

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$$

定义  $X_1$  和  $X_2$  之间的联合概率密度函数为

$$p_m(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_m(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

m 个随机变量之间的联合分布函数为

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_m \leq x_m\}$$

m 个随机变量之间的概率密度函数为

$$p_m(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \frac{\partial^m F_m(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}$$

【例 2.1.1】随机过程  $Y(t) = X \cos \omega t$ , X 为高斯分布的随机变量,  $\omega$  为常数, 求  $Y(t)$  的一维概率密度。

解: 求  $Y(t)$  的一维概率密度的问题, 就是对  $Y(t)$  进行一次抽样后的随机变量  $Y(t_1)$  的概率密度问题。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

已知 X 的概率密度

在  $t=t_1$  时刻,  $Y(t_1)$  是一个随机变量, 令

$$Y_1 = Y(t_1) = X \cos \omega t_1$$

根据一维随机变量的函数变换, 需求出反函数及其导数

$$X = \frac{Y_1}{\cos \omega t_1}, \quad \frac{dx}{dy_1} = \frac{1}{\cos \omega t_1}$$

于是, 得到  $Y(t_1)$  的概率密度

$$p(y_1, t_1) = p_X(x) \left| \frac{dx}{dy_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2\sigma_X^2}(-\frac{y_1}{\cos \omega t_1} - m_X)^2} \frac{1}{|\cos \omega t_1|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X |\cos \omega t_1|} e^{-\frac{(y_1 - m_X \cos \omega t_1)^2}{2(\sigma_X \cos \omega t_1)^2}}$$

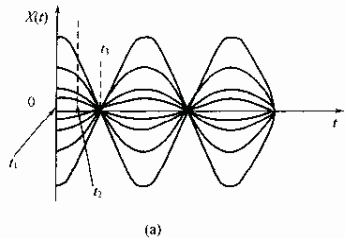
对于固定时刻  $t_1$ ,  $\cos(\omega t_1)$  是常数。这个变换是线性变换, 因此变换后  $Y(t_1) = X \cos(\omega t_1)$  仍然是高斯变量。

随机变量  $Y(t_1)$  的数学期望为  $m_X \cos(\omega t_1)$ ,

随机变量  $Y(t_1)$  的方差为  $\sigma_X^2 [\cos(\omega t_1)]^2$ 。

**注意:** 把  $t_1$  改为  $t$ , 上式则表示随机过程  $Y(t)$  的分布。解这个题的关键是要注意在  $t=t_1$  时刻,  $Y(t_1)$  是一个随机变量, 最终归结为随机变量的变换问题。

下图可知, 随机过程  $X(t)$  的一维概率密度随时间  $t$  而变化, 任一时刻的取值都是正态分布, 但各个时刻的方差有所不同,  $t_1$  时最大,  $t_2$  时变小, 而  $t_3$  时最小 (趋于零), 这时概率密度变为  $\delta$  函数。



常用的数字特征包括数学期望, 方差和相关函数, 这一点与随机变量的情况类似。所不同的就是**随机过程的数字特征是时间的函数**。

另外, 随机过程有实过程和复过程, 以后如无特别说明, 均指实随机过程。

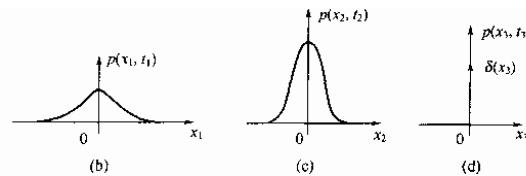
**【例 2.1.2】** 设随机振幅信号  $X(t) = X \cos(\omega_0 t)$ , 式中  $\omega_0$  为常量,  $X$  为标准正态随机变量。试求时刻  $t=0, \frac{\pi}{3\omega_0}, \frac{\pi}{2\omega_0}$  时  $X(t)$  的一维概率密度。(上例的进一步讨论)

**解:** 标准正态随机变量  $X$  的一维概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

$X(t)$  在任一时刻  $t_i$  的取值为  $x(t_i) = x_i = x \cos(\omega_0 t_i)$

由随机变量的概率密度变换, 可求得  $X(t)$  在  $t=t_i$  时的一维概率密度为



$t_1$  时刻信号变化幅度最大, 即方差最大;

$t_2$  时刻信号变化幅度减小, 即方差减小;

$t_3$  时刻信号变化幅度最小为零, 即方差为零。

### (1) 随机过程 $X(t)$ 的数学期望

设随机过程  $X(t)$  在时间轴上固定  $n$  个时刻  $t=t_k, k=1, 2, \dots, n$ , 由于  $t_k$  是任意的, 根据随机变量均值的定义, 可得随机过程  $X(t)$  的数学期望为

$$E[X(t)] = m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx$$

对于离散随机序列  $X(n)$ , 其均值为

$$E[X(n)] = m_X(n) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xp(x, n)$$

均值  $m_X(t)$  仅仅描述了  $t$  时刻随机过程诸样本函数在  $m_X(t)$  上下起伏的趋势。

$$p(x_i, t_i) = p(x, t_i) \left| \frac{dx}{dx_i} \right| = p\left(\frac{x_i}{\cos \omega_0 t_i}, t_i\right) \left| \frac{1}{\cos \omega_0 t_i} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\cos \omega_0 t_i|} e^{-\frac{x_i^2}{2 \cos^2 \omega_0 t_i}} \quad -\infty < x < \infty$$

故得

$$t_1 = t_1 = 0 \text{ 时, } p(x_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right]$$

$$t_2 = t_2 = \frac{\pi}{3\omega_0} \text{ 时, } p(x_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.5} \exp\left[-2x_2^2\right]$$

$$t_3 = t_3 = \frac{\pi}{2\omega_0} \text{ 时, } p(x_3, t_3) = \lim_{t \rightarrow t_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\cos \omega_0 t|} \exp\left[-\frac{x_3^2}{2 \cos^2 \omega_0 t}\right] = \delta(x_3)$$

## 2.2.2 随机过程的数字特征

在工程实际中, 要想得到某一随机信号的高维分布函数 (或概率密度) 是相当困难的, 且计算也十分繁琐。因此在实际工作中, 对随机信号的描述, 除了采用较低维的分布函数 (如一维和二维) 外, 主要是使用其一阶和二阶的数字特征。

与分析随机变量一样, 为了简单有效地分析随机过程, 必须引入随机过程数字特征的概念。

### (2) 随机过程 $X(t)$ 的方差

随机过程的方差为

$$E\{[X(t) - m_X(t)]^2\} = D[X(t)] = \sigma_X^2(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [X(t) - m_X(t)]^2 p(x, t) dx$$

方差  $\sigma_X^2(t)$  说明  $t$  时刻诸样本函数或随机过程偏离该时刻均值  $m_X(t)$  的程度。

**实例:** 能够描述随机过程均值与方差物理意义的一个实例是噪声电压  $n(t)$ , 其均值  $m_X(t)$  就是噪声电压的直流分量, 方差  $\sigma_X^2(t)$  则是噪声电压消耗在单位电阻上的瞬时交流功率的统计平均 (平均功率)。

随机过程的标准差: 定义为方差的平方根, 记为  $\sigma_X(t)$ 。

### (3) 随机过程 $X(t)$ 的自相关函数和自协方差函数

连续随机过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

离散随机序列  $X(n)$  的自相关函数为

$$R_X = (n, m) = E[X(n)X(m)]$$

连续随机过程自协方差函数

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} = E[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_1)m_X(t_2) \\ = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

自相关函数和自协方差函数描述了随机过程在两个不同时刻的值与值之间的依赖程度。

**【例 2.1.3】** 设随机振幅信号  $X(t) = X \cos(\omega_0 t)$ , 其中  $\omega_0$  为常量;  $X$  为标准正态随机变量, 求随机过程  $X(t)$  的数学期望、方差、相关函数、协方差函数。

**解:** 因为  $X$  为标准正态随机变量, 故其数学期望  $E(X) = 0$ , 方差  $D(X) = 1$ , 从而均方值

$$E(X^2) = D(X) + E^2(X) = 1$$

根据随机过程的矩函数定义, 并利用数字特征的性质, 求得

$$m_X(t) = E[X(t)] = E(X \cos \omega_0 t) = \cos \omega_0 t \cdot E(X) = 0 \\ \sigma_X^2(t) = D[X(t)] = D(X \cos \omega_0 t) = \cos^2 \omega_0 t \cdot D(X) = \cos^2 \omega_0 t \\ R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E(X^2 \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2) \\ = \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 \cdot E(X^2) = \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2$$

$$\phi_X(n_1, n_2) = E[X^*(n_1)X(n_2)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^*(n_1, i)x(n_2, i)$$

### (5) 自协方差函数

$$\gamma_X(n_1, n_2) = E\{[X(n_1) - m_X(n_1)]^*[X(n_2) - m_X(n_2)]\} \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(n_1, i) - m_X(n_1)]^*[x(n_2, i) - m_X(n_2)]$$

**注:**  $\phi_X(n_1, n_2) = R_X(n_1, n_2)$      $\gamma_X(n_1, n_2) = C_X(n_1, n_2)$

### (4) 随机过程 $X(t)$ 的矩函数

随机过程  $X(t)$  的  $n$  阶原点矩函数为

$$E[X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdots x_n \cdot p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

不难看出:

均值为随机过程的一阶原点矩。

自相关函数则是随机过程的二阶原点矩。

自协方差函数则是随机过程的二阶中心矩。

$$C_X(t_1, t_2) = E[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)] = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ = E[X(t_1)X(t_2)] - R_X(t_1, t_2) = \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 \\ \text{式中, } \dot{X}(t) = X(t) - m_X(t)。$$

以上各式边的求均值运算  $E[\cdot]$  体现了信号的“集合平均”, 该集合平均是由  $X(n)$  的无穷样本  $x(n, i), i = 1, 2, \cdots, \infty$  在相应时刻对应相加 (或相乘后再相加) 来实现。

随机信号的自相关函数  $\phi_X(n_1, n_2)$  描述了信号  $X(n)$  在  $n_1, n_2$  这两个时刻的相互关系, 是一个重要的统计量。若  $n_1 = n_2 = n$ , 则

$$\phi_X(n_1, n_2) = E[|X(n)|^2] = D_X^2(n) \quad \text{均方值}$$

$$\gamma_X(n_1, n_2) = E[|X(n) - m_X(n)|^2] = \sigma_X^2(n) \quad \text{方差}$$

### (5) 随机过程 $X(t)$ 的两个不同时刻取样值之间统计独立、不相关和正交

① 如果  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1, t_1)p(x_2, t_2)$ , 则称随机过程  $X(t)$  在  $t_1$  和  $t_2$  时刻统计独立。

② 如果  $R_X(t_1, t_2) = 0$  则称随机过程  $X(t)$  在  $t_1$  和  $t_2$  时刻相互正交。

③ 如果  $C_X(t_1, t_2) = 0$ , 则称随机过程  $X(t)$  在  $t_1$  和  $t_2$  时刻互不相关。

### 一、二阶数字特征

显然,  $X(n)$  的均值、方差、均方值等一、二阶数字特征均应 是时间  $n$  的函数, 即:

(1) 均值 (数学期望)  $m_X(n) = E[X(n)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(n, i)$

关于样本求和

(2) 方差  $\sigma_X^2(n) = E[|X(n) - m_X(n)|^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x(n, i) - m_X(n)|^2$

(3) 均方值  $D_X^2(n) = E[|X(n)|^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x(n, i)|^2$

(4) 自相关函数 描述同一随机信号在两个时间点间的相关程度

对两个随机信号  $X(n), Y(n)$ , 其互相关函数和互协方差函数 分别定义为:

(6) 互相关函数 描述两个随机信号在两个时间点间的相关程度

$$\phi_{XY}(n_1, n_2) = E[X^*(n_1)Y(n_2)]$$

(7) 互协方差函数

$$\gamma_{XY}(n_1, n_2) = E\{[X(n_1) - m_X(n_1)]^*[Y(n_2) - m_Y(n_2)]\}$$

如果  $\gamma_{XY}(n_1, n_2) = 0$ ，我们称信号 X 和 Y 是不相关的。

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}(n_1, n_2) &= E\{[X(n_1) - m_X(n_1)]^*[Y(n_2) - m_Y(n_2)]\} \\ &= E[X^*(n_1)Y(n_2)] - E[X^*(n_1)]m_Y(n_2) \\ &\quad - m_X^*(n_1)E[Y(n_2)] + m_X^*(n_1)m_Y(n_2) \\ &= E[X^*(n_1)Y(n_2)] - m_X^*(n_1)m_Y(n_2)\end{aligned}$$

所以，若 X, Y 不相关，必有

$$\phi_{XY}(n_1, n_2) = E[X^*(n_1)Y(n_2)] = m_X^*(n_1)m_Y(n_2)$$

补充：特征函数与随机变量 k 阶原点矩之间的关系：

$$(-j)^k \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx = E(X^k)$$

特征函数与随机过程 k 阶原点矩之间的关系

$$(-j)^k \frac{d^k \Phi_X(\omega, t)}{d\omega^k} \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x, t) dx = E[X^k(t)]$$

$k=2$

$$-\frac{\partial^2 \Phi_X(\omega_1, \omega_2; t_1, t_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{\omega_1, \omega_2=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = R_X(t_1, t_2)$$

## 2.3 平稳随机信号的时域统计表达

➤ 所谓平稳随机过程。

是指它的 n 维概率分布函数或 n 维概率密度函数与时间 t 的起始位置无关。

即平稳随机过程的统计特性不随时间的平移而发生变化。

➤ 平稳随机过程包括

狭义平稳随机过程

广义平稳随机过程。

## 2.2.3 随机过程的特征函数

前面已经介绍了随机变量的特征函数，本节将该概念扩展至随机过程中去。

随机过程的一维特征函数为

$$\Phi_X(\omega, t) = E[e^{j\omega X(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} p(x, t) dx$$

显然，特征函数和时间 t 有关。

对上式求逆傅立叶变换，

随机过程的一维概率密度函数

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega, t) e^{-j\omega x} d\omega$$

【例 2.1.4】已知随机过程  $X(t)$  在 t 时刻的取值服从正态分布，其一维概率密度为

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

试求这时随机过程  $X(t)$  的特征函数，并求此时的数学期望、方差、均方值。

解：一维特征函数为

$$\Phi_X(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} p(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\omega x - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

作变量代换  $y = \frac{x-m}{\sigma}$ ，得

$$\Phi_X(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2} + j\omega \sigma y\right] dy = \exp\left[j\omega m - \frac{1}{2}\omega^2 \sigma^2\right]$$

## 2.3.1 平稳随机信号的定义

定义：

一个离散随机信号  $X(n)$ ，如果其均值与时间 n 无关（每个时间点上的均值都相等），其自相关函数  $\phi_X(n_1, n_2)$  和  $n_1, n_2$  的选取无关，而仅和  $n_1, n_2$  之差有关，那么，我们称  $X(n)$  为宽平稳的随机信号，或广义平稳随机信号。即：

描述：

➤ 均值（数学期望）  $m_X(n) = m_X = E[X(n)]$

与时间 n 无关，每个时间点上的均值都相等

随机过程  $X(t)$  的 n 维特征函数为

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= E\{\exp[j\omega_1 X(t_1) + j\omega_2 X(t_2) + \dots + j\omega_n X(t_n)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \\ &\quad \exp[j\omega_1 X(t_1) + j\omega_2 X(t_2) + \dots + j\omega_n X(t_n)] \cdot \\ &\quad dx_1 dx_2 \dots dx_n\end{aligned}$$

随机过程  $X(t)$  的 n 维概率密度函数为

$$\begin{aligned}p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \\ &\quad \exp[-j\omega_1 X(t_1) - j\omega_2 X(t_2) - \dots - j\omega_n X(t_n)] \cdot \\ &\quad d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n\end{aligned}$$

求得数学期望和均方值分别为

$$E[X(t)] = j^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \Phi_X(\omega, t) \right]_{\omega=0} = m$$

$$E[X^2(t)] = j^{-2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Phi_X(\omega, t) \right]_{\omega=0} = \sigma^2 + m^2$$

因而方差为

$$D[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = \sigma^2$$

$$\phi_X(n_1, n_2) = \phi_X(m) = E[X^*(n)X(n+m)]$$

➤ 自相关函数  $m = n_2 - n_1$

➤ 方差  $\sigma_X^2(n) = E[|X(n) - m_X|^2]$

➤ 均方值  $D_X^2(n) = D_X^2 = E[|X(n)|^2]$

➤ 自协方差函数

$$\gamma_X(n_1, n_2) = \gamma_X(m) = E\{[X(n) - m_X]^*[X(n+m) - m_X]\}$$

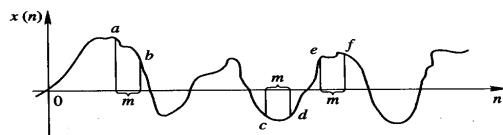
两个平稳随机信号  $X(n)$ ,  $Y(n)$  的互相关函数和互协方差函数分别定义为：

➤ 互相关函数  $\phi_{XY}(m) = E[X^*(n)Y(n+m)]$

## 互协方差函数

$$\gamma_{XY}(m) = E\{[X(n) - m_X]^*[Y(n+m) - m_Y]\}$$

宽平稳随机信号是一类重要的随机信号。在实际工作中，我们往往把所要研究的随机信号视为宽平稳的，这样将使问题得以大大简化。实际上，自然界中的绝大部分随机信号都认为是宽平稳的。今后我们所提到的平稳随机信号如不特别说明，均认为是宽平稳随机信号。



平稳随机过程的二维概率特性只与两点之间的时间差  $m$  有关

## 2.3.2 平稳随机信号相关函数的性质

**重要性质:** 平稳随机信号的相关函数有许多重要的性质:

**性质 1**  $|\phi_X(m)| \leq \phi_X(0)$  (主瓣和旁瓣的概念)

平稳过程的均方值可由自相关函数在  $\tau=0$  时确定，且为非负。其物理意义表示平稳过程  $X(t)$  的总平均功率。

## 性质 2 自相关函数

若  $X(n)$  是实信号，则  $\phi_X(m) = \phi_X(-m)$ ，即  $\phi_X(m)$  为实偶函数；  
若  $X(n)$  是复信号，则  $\phi_X(-m) = \phi_X^*(m)$ 。即  $\phi_X(m)$  是 Hermitian 对称的。

**性质 3 互相关函数**  $\phi_{XY}(-m) = \phi_{YX}^*(m)$ 。

若  $X(n), Y(n)$  是实信号，则  $\phi_{XY}(-m) = \phi_{YX}(m)$ ，该结果说明，即使  $X(n), Y(n)$  是实的， $\phi_{XY}(m)$  也不是偶对称的。

**性质 4**  $|\phi_{XY}(m)|^2 \leq \phi_X(0)\phi_Y(0)$

**性质 5** 由  $\phi_X(-M), \dots, \phi_X(0), \dots, \phi_X(M)$  这  $2M+1$  个自相关函数组成的矩阵

$$\bar{R}_M = \begin{bmatrix} \phi_X(0) & \phi_X(-1) & \dots & \phi_X(-M) \\ \phi_X(1) & \phi_X(0) & \dots & \phi_X(-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_X(M) & \phi_X(M-1) & \dots & \phi_X(0) \end{bmatrix}$$

是非负定的。

严(或狭义)平稳随机信号是指概率特性不随时间的平移而变化(或说与时间基准点无关)的随机信号。

只有当  $X(n)$  是高斯随机过程时，宽平稳才是严平稳。

随机信号  $\begin{cases} \text{平稳随机信号} \begin{cases} \text{弱平稳 (广义平稳)} & \text{均值和方差不随时间变化} \\ \text{强平稳 (严格平稳)} & \text{概率密度不随时间变化} \end{cases} \\ \text{非平稳随机信号} \end{cases}$

$\bar{R}_M$  称为 Hermitian 对称的 Toeplitz 矩阵。

若  $X(n)$  为实信号，那么  $\phi_X(m) = \phi_X(-m)$ ，则  $\bar{R}_M$  的主对角线及与主对角线平行的对角线上的元素都相等，而且各元素相对主对角线是对称的，这时  $\bar{R}_M$  称为实对称的 Toeplitz 矩阵。

由自相关函数和自协方差函数的定义可得:

$$\gamma_X(m) = \phi_X(m) - m_X^2$$

$$\gamma_{XY}(m) = \phi_{XY}(m) - m_X m_Y$$

当  $m_X = 0$  时，相关序列和协方差序列相等

$$\gamma_X(m) = \phi_X(m)$$

$$\gamma_{XY}(m) = \phi_{XY}(m)$$

即自相关函数和自协方差函数只差一个常数，其它特性相同。

对于实际上遇到的许多随机过程，当  $m$  愈大则相关性愈小， $m$  趋于无穷大时，可以认为不相关。因此有

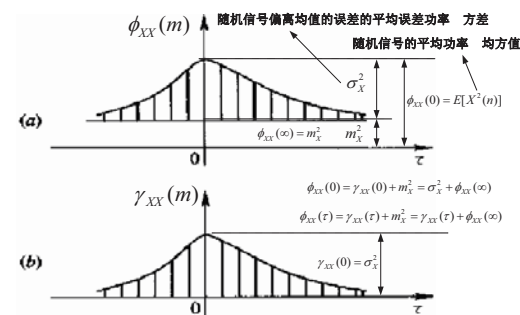
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_X(m) = E[X^*(n)X(n+m)] = E[X^*(n)]E[X(n+m)] = m_X^2$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_X(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_X(m) - m_X^2 = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{XY}(m) = m_X m_Y$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{XY}(m) = 0$$

由自相关函数和自协方差函数的性质可得到下图



(a)  $\phi_X(m)$  的特性

(b)  $\gamma_X(m)$  的特性



$\phi_X(m)$  是一个随机过程  $X(n)$  最主要的统计表征, 它不仅说明了相关性, 并且蕴涵其它主要特征量, 如

$$\text{均方值: } E[X(n)^2] = \phi_X(0)$$

$$\text{与均值关系: } m_X^2 = \phi_X(\infty)$$

$$\text{方差: } \sigma_X^2 = E[X(n)^2] - m_X^2 = \phi_X(0) - \phi_X(\infty) = \gamma_X(0)$$

**注: 雷达和通信中的信号处理主要基于相关函数, 匹配滤波器的本质也是相关函数**

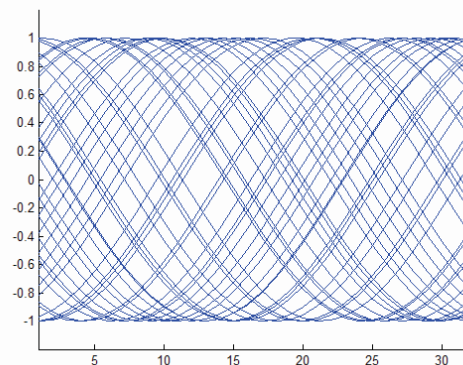
### 例 2.2.1 随机相位正弦序列

$$X(n) = A \sin(2\pi f n T_s + \Phi)$$

式中  $A, f$  均为常数,  $\Phi$  是一随机变量, 在  $0 \sim 2\pi$  内服从均匀分布, 即

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

显然, 对应  $\Phi$  的一个取值, 可得到一条正弦曲线 (因为  $\Phi$  在  $0 \sim 2\pi$  内的取值是随机的, 所以其每一个样本  $x(n)$  都是一条正弦信号)。求其均值及其自相关函数, 并判断其平稳性。



**解** 由定义,  $X(n)$  的均值和自相关分别是:

$$m_X(n) = E[A \sin(2\pi f n T_s + \Phi)] = \int_0^{2\pi} A \sin(2\pi f n T_s + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_X(n_1, n_2) &= E[A^2 \sin(2\pi f n_1 T_s + \Phi) \sin(2\pi f n_2 T_s + \Phi)] \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f n_1 T_s + \varphi) \sin(2\pi f n_2 T_s + \varphi) d\varphi \\ &= \frac{A^2}{2} \cos[2\pi f (n_2 - n_1) T_s] \end{aligned}$$

由于  $m_X(n) = m_X = 0$

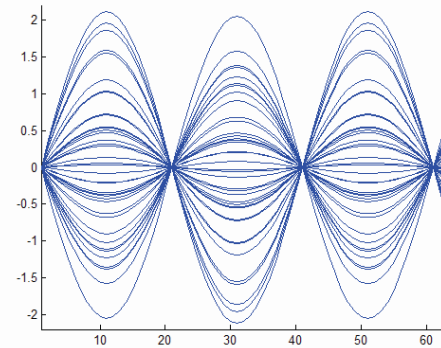
$$\text{及 } \phi_X(n_1, n_2) = \phi_X(n_2 - n_1) = \phi_X(m) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f m T_s)$$

所以随机相位正弦波是宽平稳的。

### 例 2.2.2 随机振幅正弦序列如下式所示:

$$X(n) = A \sin(2\pi f n T_s)$$

式中  $f$  中为常数,  $A$  为正态随机变量,  $A: N(0, \sigma^2)$ , 试求  $X(n)$  的均值、自相关函数, 并讨论其平稳性。



**解** 均值  $m_X(n) = E[X(n)] = E[A \sin(2\pi f n T_s)]$

对于给定的时刻  $n$ ,  $\sin(2\pi f n T_s)$  为一常数, 所以

$$m_X(n) = E[A \sin(2\pi f n T_s)] = \sin(2\pi f n T_s) E[A] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{自相关函数 } \phi_X(n_1, n_2) &= E[A^2 \sin(2\pi f n_1 T_s) \sin(2\pi f n_2 T_s)] \\ &= \sigma^2 \sin(2\pi f n_1 T_s) \sin(2\pi f n_2 T_s) \end{aligned}$$

由此可以看出, 虽然  $X(n)$  的均值和时间无关, 但其自相关函数不能写成  $\phi_X(n_2 - n_1)$  的形式, 也即  $\phi_X(n_1, n_2)$  和  $n_1, n_2$  的选取位置有关, 所以随机振幅正弦波不是宽平稳的。



图 1.4 相关性对随机过程的影响  
(a) 前后相关弱; (b) 前后相关强

**上图描述了随机信号相关性和信号带宽的关系**

### 随机过程的相关系数和相关时间

**复习: 随机变量 X 和 Y 的相关系数 = 随机变量 X 和 Y 归一化协方差**

$$\gamma_{XY} = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sqrt{E[(X - m_X)^2] E[(Y - m_Y)^2]}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

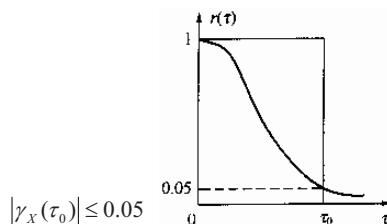
**(自) 相关系数作用: 描述对平稳过程两个不同时刻取值之间的内在联系**

**自相关系数定义 - 也称为归一化自相关函数或标准自协方差函数**

$$r_X(\tau) = \frac{R_X(\tau) - R_X(\infty)}{\sigma_X^2} = \frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2}$$

- 若存在  $\gamma_X(\infty) = 0$ ，则这两个不同时刻取值间的相关性几乎为零，即统计独立。
- 工程应用中，当  $\tau$  大到一定程度，如果  $\gamma_X(\tau)$  已经很小，则可近似认为  $X(t)$  和  $X(t+\tau)$  之间已不存在任何关联性。
- 有必要引入相关时间  $\tau_0$  这一概念，当  $\tau > \tau_0$  时，则可认为  $X(t)$  和  $X(t+\tau)$  之间已不相关。

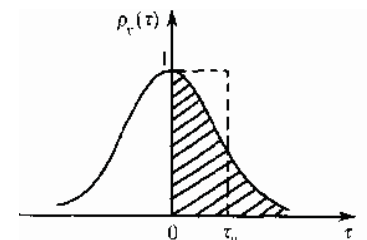
**相关时间定义：** **平稳过程** 的相关系数降至 5% 的时间间隔为相关时间



$$|\gamma_X(\tau_0)| \leq 0.05$$

**另一种定义：**有时也用下图的矩形(高为 1，底为  $\tau_0$  的矩形)面积等于阴影面来定义  $\tau_0$ ，即

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau$$



- 相关时间  $\tau_0$  的大小直接反映了平稳过程的变化程度。
- 相关时间越大，说明随机过程两个不同时刻取值之间的关联性越大，即过程变化越缓慢，该过程频率偏低频。
- 相关时间越小，说明随机过程两个不同时刻取值之间的关联程度越小，即过程变化越剧烈，该过程频率偏高频。

**【例 3.1.12】** 非周期平稳随机过程  $X(t)$  的自相关函数

$$R_X(\tau) = 16 + \frac{9}{1+3\tau^2}$$

求数学期望及方差。

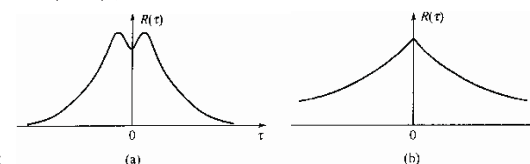
**解：** 随机过程  $X(t)$  的数学期望

$$\begin{aligned} m_X^2 &= R_X(\infty) = 16 \\ m_X &= \pm 4 \end{aligned}$$

注意这里无法确定数学期望的符号。方差

$$\sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty) = 25 - 16 = 9$$

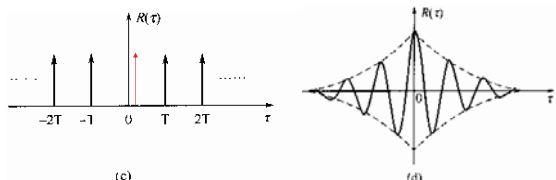
**【例 3.1.13】** 假设各个平稳随机过程的相关函数分别如下所示。试判断它们能否成立，并说明这些过程各有何特点(有无直流分量，有无周期性，波形起伏的快慢)。



**解：**

图(a)所示违反自相关函数性质  $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$ ，故不能成立。

图(b)所示能成立： $R_X(\infty) = m_X^2$  有直流分量，无周期性，过程的波形起伏较慢。



图(c)所示能成立，无直流分量，有周期性，过程的波形起伏极快(是宽度极窄的  $\delta$  函数)。

图(d)所示能成立，无直流分量和周期性，过程的波形起伏较快(指其载波波形，而包络波形的起伏较慢)，且振幅交替地变化。

**【例 2.1.14】** 已知随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  的协方差函数分别为

$$C_X(\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|\tau|}, \quad C_Y(\tau) = \frac{\sin \lambda \tau}{\lambda \tau}$$

①比较两个过程的起伏速度；②比较当  $\tau = \pi/\lambda$  时两个过程的相关程度；③比较过程  $Y(t)$  在  $\tau=0$  和  $\tau = \pi/\lambda$  时的相关程度。

**解：**

$$\textcircled{1} \quad \sigma_X^2 = C_X(0) = \frac{1}{4}$$

$$r_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2} = e^{-2\lambda|\tau|}$$

$$\tau_{0X} = \int_0^{\infty} r_X(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{2\lambda} \quad (\text{注：也是相关时间})$$

$$\sigma_Y^2 = C_Y(0) = 1$$

$$r_Y(\tau) = \frac{C_Y(\tau)}{\sigma_Y^2} = \frac{\sin \lambda \tau}{\lambda \tau}$$

$$\tau_{0Y} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \tau}{\lambda \tau} d\tau = \frac{\pi}{2\lambda} \quad (\text{注：也是相关时间})$$

由于  $\tau_{0X} < \tau_{0Y}$ ，故知过程  $X(t)$  比  $Y(t)$  的起伏速度快。

② 当  $\tau = \pi/\lambda$  时，有

$$r_X\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = e^{-2\lambda\left|\frac{\pi}{\lambda}\right|} = e^{-2\pi}$$

$$r_Y\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$$

可见过程  $X(t)$  是相关的，而过程  $Y(t)$  却不相关。



③当  $\tau=0$  时, 有  $r_Y(0)=1$ , 即这时过程  $Y(t)$  是完全相关的, 而当  $\tau=\pi/\lambda$  时却不相关。

其意义是, 单一样本函数随时间变化的过程可以包括该信号所有样本函数的取值经历。

这样, 我们就可以仿照确定性的功率信号那样来定义各态遍历信号的一阶和二阶数字特征。即用一具体样本的时间平均替代集合平均

例 2.2.3 讨论例 2.2.1 随机相位正弦序列的各态遍历性。

解 对  $X(n) = A \sin(2\pi f n T_s + \Phi)$ , 其单一的时间样本  $x(n) = A \sin(2\pi f n T_s + \varphi)$ ,  $\varphi$  为一常数, 对  $X(n)$  作时间平均, 显然

$$\begin{aligned} m_x(n) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M A \sin(2\pi f n T_s + \varphi) = 0 = m_x \\ \phi_x(m) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M A^2 \sin(2\pi f n T_s + \varphi) \sin[2\pi f (n+m) T_s + \varphi] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \frac{A^2}{2} [\cos(2\pi f m T_s) - \cos(2\pi f (n+n+m) T_s + 2\varphi)] \end{aligned}$$

由于上式是  $n$  对求和, 故求和号中的第一项与  $n$  无关, 而第二项

### 2.3.3 平稳随机信号的各态遍历性

集合平均:

一个随机信号  $X(n)$ , 其均值、方差、均方值及自相关函数等, 均是建立在集合平均的意义上的, 如自相关函数

$$\phi_X(m) = E[X^*(n)X(n+m)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^*(n, i)x(n+m, i)$$

为了要精确地求出  $\phi_X(m)$ , 需要知道  $x(n, i)$  的无穷多个样本, 即  $i=1, 2, \dots, \infty$ , 这在实际工作中显然是不现实的。因为我们在实际工作中能得到的往往是对  $X(n)$  的一次实验记录, 也即一个样本函数。如瞬间交会的导弹与飞机。

时间平均:

(1) 时间均值 设  $\langle x(t) \rangle$  表示对样本函数  $x(t)$  进行时间平均, 定义

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

如果, 上式极限存在, 则称  $\langle x(t) \rangle$  是  $x(t)$  的时间均值。

(2) 时间自相关函数 与各态历经过程有关的另一个概念是时间自相关函数, 定义为

$$\langle R_x(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt$$

同样, 时间自相关函数也是时间间隔  $\tau$  的函数。

应等于零, 所以

$$\phi_x(m) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f m T_s) = \phi_X(m)$$

这和例 2.2.1 按集合平均求出的结果一样, 所以随机相位正弦波既是平稳的, 也是各态遍历的。

问题:

既然平稳随机信号的均值和时间无关, 自相关函数又和时间选取的位置无关, 那么, 能否用一次的实验记录代替一族记录来计算  $X(n)$  的均值和自相关函数呢? 对一部分平稳信号, 答案是肯定的。

各态遍历信号:

对一平稳随机信号  $X(n)$ , 如果它的所有样本函数在某一固定时刻的一阶和二阶统计特性和单一样本函数在长时间内的统计特性一致, 我们则称  $X(n)$  为各态遍历信号。

各态历经——指无限个样本在某时刻所历经的状态等同于某一样本在无限时间里所经历的状态

(3) 时间方差 由时间平均确定的一个样本函数  $x(t)$  的方差定义为

$$\langle \sigma_x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 dt$$

上面两式右边的计算都是使用单一样本函数  $x(n)$  求出和, 因此称为“时间平均”。

对各态遍历信号, 其一阶和二阶的集合平均等于相应的时间平均。

例 2.2.4 随机信号  $X(n)$  的取值在  $(-1, 1)$  之间均匀分布, 但对每一个样本  $x(n, i), i=1, 2, \dots, \infty$ , 其值不随时间变化, 如图 2.2.2 所示, 试讨论其平稳性和各态遍历性。

解 如图所示, 显然  $X(n)$  的集合均值始终等于零, 集合自相关也和  $n_1, n_2$  的选取位置无关, 因此它是宽平稳的。

但对单一的样本  $x(n, i)$ , 它的时间均值并不等于零, 因此,  $X(n)$  不是各态遍历的。

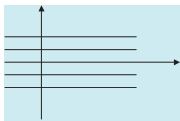


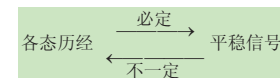
图 2.2.2 例 2.2.4 中的  $X(n)$

145

由上面的讨论可知，具有各态遍历性的随机信号，由于能使用单一的样本函数来做时间平均，以求其均值和自相关函数，所以在分析和处理信号时比较方便。

现实中，大部分可逼近各态遍历的平稳信号。在实际问题中，所观测的物理现象并不能保证是各态遍历。但是，在实际处理信号时，对已获得一个物理信号，往往首先假定它是平稳的，再假定它是各态遍历的。按此假定对信号处理后，可再用处理结果来检验假定的正确性。

146



在后面的讨论中，如不作特殊说明，我们都认为所讨论的对象是平稳的及各态遍历的，并将随机信号  $X(n)$  改记为  $x(n)$ 。

147

## 2.4 平稳随机信号的多域及频域的统计表达

由前面关于  $\phi_x(m)$  及  $\gamma_x(m)$  的讨论中，我们知道

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_x(m) = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_x(m) = m_x^2$$

当  $m_x = 0$  时，这说明虽然无限能量信号本身的  $z$  变换与傅氏变换不存在，但它的自协方差序列和自相关序列（当  $m_x = 0$  时）的  $z$  变换与傅氏变换却是存在的。

148

### 2.4.1 $\gamma_x(m)$ 与 $\phi_x(m)$ 的 $z$ 变换及其收敛域

记  $\gamma_x(m)$  的  $z$  变换为  $Z[\gamma_x(m)] = \Gamma_x(z)$

按  $z$  变换的定义有

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_x(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_x(m) z^{-m} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ \gamma_x(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Gamma_x(z) z^{m-1} dz \quad C \in (R_{x-}, R_{x+}) \end{array} \right.$$

其中  $C$  是一条在收敛域内反时针方向绕原点一周的围线。

当  $m_x = 0$  时， $\phi_x(m) = \gamma_x(m)$ 。

此时， $\phi_x(m)$  也存在  $z$  变换：

149

$$\Phi_x(z) = \Gamma_x(z)$$

对于实、平稳随机过程  $\gamma_x(m)$  和  $\phi_x(m)$  都是偶函数：

$$\gamma_x(m) = \gamma_x(-m) \quad \phi_x(m) = \phi_x(-m)$$

$$\Gamma_x(z) = \Gamma_x(z^{-1})$$

$$\Phi_x(z) = \Phi_x(z^{-1})$$

如  $z = z_1$  是  $\Gamma_x(z)$  一个极点，则  $z = 1/z_1$  也是  $\Gamma_x(z)$  一个极点。设在  $|z| = R_a$  ( $R_a < 1$ ) 的圆上有一个  $\Gamma_x(z)$  的极点是最接近单位圆的单位圆内的极点，则  $|z| = 1/R_a$  的圆上必有一对应的极点，且该极点一定是  $\Gamma_x(z)$  最接近单位圆的单位圆外的极点。

150

由此可见， $\Gamma_x(z)$  或  $\Phi_x(z)$ （当  $m_x = 0$  时）的收敛域有形式：

$$R_a < |z| < 1/R_a \quad 0 < R_a < 1$$

且当  $m \rightarrow \infty$  时， $\gamma_x(m)$  趋于零。

这说明  $\Gamma_x(z)$  或  $\Phi_x(z)$ （当  $m_x = 0$  时）的收敛域一定包括单位圆，因此  $\Gamma_x(e^{j\omega})$  或  $\Phi_x(e^{j\omega})$  存在。

151

### 2.4.2 功率谱

$P_x(\omega)$  的定义:  $\gamma_x(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Gamma_x(z) z^{m-1} dz \quad C \in (R_{x-}, R_{x+})$

既然  $\Gamma_x(z)$  的收敛域包括单位圆，

可以取单位圆作积分围线，并取  $z = e^{j\omega}$

$$\gamma_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_x(e^{j\omega}) e^{jm\omega} d\omega$$

令  $P_x(\omega) = \Gamma_x(e^{j\omega})$  则有

$$\gamma_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) e^{jm\omega} d\omega \quad (*****)$$

152

### $P_x(\omega)$ 的物理意义:

$$\gamma_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) d\omega$$

如  $m_x = 0$ ，则有

$$\phi_x(0) = \gamma_x(0) = \sigma_x^2 = E[|x(n)|^2] - m_x^2 = E[|x(n)|^2]$$

$E[|x(n)|^2]$  代表信号的平均功率

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) d\omega = E[|x(n)|^2]$$

153



说明  $P_x(\omega)$  在  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  频域内的积分面积正比于信号的平均功率，我们  $P_x(\omega)$  称为功率谱密度。

另一方面， $m_x = 0$  时， $\phi_x(m) = \gamma_x(m)$ ，因此当  $m_x = 0$  时，自相关函数  $\phi_x(m)$  与功率谱密度  $P_x(\omega)$  为一对傅氏变换对：

$$P_{xy}(\omega) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega})$$

$$\gamma_{xy}(m) = \gamma_{yx}(-m)$$



$$\Gamma_{xy}(z) = \Gamma_{yx}(z^{-1})$$

$$P_{xy}(\omega) = P_{yx}(-\omega)$$

一个无限长的信号过程的功率谱密度函数的概念可以这样理解：它是无限多个无限长信号样本函数的功率谱密度函数的集合平均。

考虑到如果各态历经假设成立（集合平均可以用时间平均代替）以及考虑到功率谱密度函数不含相位信息，因而不含信号的时间轴位置信息，所以，一个平稳随机信号的一个

白噪声是一种理想化的噪声模型，实际上并不存在。由于它是信号处理中最具代表性的噪声信号，因此人们提出了很多近似产生白噪声的方法。

### 线谱

若  $x(n)$  有  $L$  个正弦组成，即

$$x(n) = \sum_{k=1}^L A_k \sin(\omega_k n + \varphi_k)$$

式中  $A_k$ ， $\omega_k$  是常数， $\varphi_k$  是均匀分布的随机变量，可以求出

$$\phi_x(m) = \sum_{k=1}^L \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k m)$$

$$\begin{cases} P_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_x(m) e^{-j\omega m} \\ \phi_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) e^{j\omega m} d\omega \end{cases}$$

如果  $m_x \neq 0$ ，当  $m \rightarrow \infty$  时， $\phi_x(m) \rightarrow m_x$ 。严格说此时  $\phi_x(m)$  的傅立叶变换不存在，除非把傅立叶变换的定义推广，允许在功率谱上  $\omega=0$  处有一个冲激。因为按照终值定理：

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \Phi_x(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_x(m) = m_x$$

样本功率谱密度函数蕴涵着集合统计平均的实质。从而，一个随机信号功率谱密度函数和自相关函数（作为一对傅氏变换对）都表达了随机信号的统计平均特性。

### 功率谱的类型：

在工程实际中所遇到的功率谱可分为三种：

第一种是平的谱，即白噪声谱，

第二种是“线谱”，即由一个或多个正弦信号所组成的信号的功率谱，

第三种介于二者之间，即既有峰点又有谷点的谱，这种谱称为“ARMA 谱”。

白噪声谱

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^L \frac{\pi A_k^2}{2} [\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k)]$$

此即为线谱，它是相对与平谱的另一个极端情况。

### ARMA 谱

显然，介于二者之间的应是又有峰点又有谷点的连续谱。这样的谱可以由一个 ARMA 模型来表征。后面介绍。

这说明  $\Phi_x(z)$  在  $z=1$  处有一极点或  $\Phi_x(e^{j\omega})$  在  $\omega=0$  处有一冲激。

### $P_x(\omega)$ 的性质：

$$\Gamma_x(e^{j\omega}) = \Gamma_x(e^{-j\omega}) \longrightarrow P_x(\omega) = P_x(-\omega)$$

这说明功率谱密度是  $\omega$  的偶函数，且必是实的。

功率谱密度  $P_x(\omega)$  的另一个重要性质是非负的

### $x(n)$ 与 $y(n)$ 的互功率谱密度：

一个平稳的随机序列  $w(n)$ ，如果其功率谱  $P_w(e^{j\omega})$  在  $|\omega| \leq \pi$  的范围内始终为一常数，如  $\sigma_w^2$ ，我们称该序列为白噪声序列。其自相关函数

$$\phi_w(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_w(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega = \sigma_w^2 \delta(m)$$

是在  $m=0$  处的  $\delta$  函数。由自相关函数的定义， $\phi_w(m) = E[w(n)w(n+m)]$ ，它说明白噪声序列在任意两个不同的时刻是不相关的，即  $E[w(n+i)w(n+j)] = 0$ ，对所有的  $i \neq j$ 。

白噪声序列是最随机的，也即由  $w(n)$  无法预测  $w(n+1)$ 。

“白噪声”的名称来源于牛顿，他指出，白光包括了所有频率的光波。

## 2.5 线性系统对随机信号的响应

### 问题描述：

$x(n)$ ：广义平稳输入随机序列

$h(n)$ ：系统冲激响应（稳定系统）

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

①  $x(n)$  有界， $y(n)$  亦有界；

②  $x(n)$  平稳， $y(n)$  亦平稳；

③ 若  $x(n)$  是确定性信号，则  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ ；

④ 由于随机信号不存在傅立叶变换，因此，我们需要从

相关函数和功率谱的角度来研究随机信号通过线性系统的行为。

⑤ 为了讨论方便起见, 现假设  $x(n)$  是实信号, 这样,  $y(n)$  也是实的。

我们现在要解决的是这样的问题: 如果已知随机信号  $x(n)$  的特征量包括  $m_x, \sigma_x^2, \phi_x(m), P_x(\omega)$ , 那么  $y(n)$  的这些特征量如何求得? 它与  $x(n)$  的这些量有何关系?

$$\phi_y(n, n+m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r) \phi_x(m+k-r) \triangleq \phi_y(m)$$

$$\text{令 } l = r - k, \quad v(l) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h(l+k) = h(l) * h(-l)$$

$$\phi_y(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_x(m-l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h(l+k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_x(m-l) v(l)$$

$v(l)$  可称之为  $h(\cdot)$  的自相关序列, 它是一个时间卷积的结果。 $h(n)$  是一个确定的 (而不是随机的) 序列, 它并无统计平均的含义可言, 它是  $h(n)$  与  $h(-n)$  的卷积, 具有相关函数的形式, 说明着系统特性  $h(\cdot)$  的前后波及性。

$$P_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 P_x(\omega) \longrightarrow \text{称为维纳-辛钦定理}$$

功率谱密度的非负性质。

结论: 一个随机信号通过系统  $H(z)$ , 从频域看其输出功率谱密度等于输入功率谱密度与  $H(e^{j\omega})$  的模平方的乘积。这里  $|H(e^{j\omega})|^2$  是  $\omega$  的非负、实、偶函数。

应用: 利用输入和输出的功率谱密度求系统传递函数

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{P_y(e^{j\omega})}{P_x(e^{j\omega})}}$$

只有幅度信息, 无相位信息

### 2.5.1 均值 $m_y$

$$m_y = E[y(n)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[h(k)x(n-k)]$$

这里  $h(\cdot)$  是确定的系统特性

$x(n)$  平稳随机过程,  $E[x(n)] = E[x(n-k)] = m_x$

$$m_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)m_x = m_x H(e^{j0}), \quad H(e^{j0}): \text{系统的直流频响}$$

结论: ①  $x(n)$  平稳,  $m_x$  为常值, 则  $y(n)$  平稳,  $m_y$  为常值;

②  $m_y = m_x * \text{系统的直流频响}$ ;

$$\phi_y(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_x(m-l)v(l) = \phi_x(m) * v(m)$$

这个公式与求确知信号的响应的卷积公式十分相似:

输出 = 输入 \* 系统的冲激响应

输出的自相关函数 = 输入的自相关函数 \* 系统冲激响应的自相关序列

结论: 随机过程—线性系统理论中极为有用和重要的一个基本

关系式:  $x(n)$  与  $h(n)$  的卷积的自相关, 等于  $x(n)$  的自相关和  $h(n)$  的自相关的卷积。这可推广为: 卷积的相关, 等于相关的相关。

### 2.5.3 互相关函数 $\phi_{xy}(m)$ 和互功率谱密度 $P_{xy}(\omega)$

互相关函数:

输入-输出互相关定理

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(m) &= E[x(n)y(n+m)] = E\left[x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+m-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \phi_x(m-k) = \phi_x(m) * h(m) \end{aligned}$$

$$\phi_y(m) = \phi_x(m) * h(m) * h(-m) = \phi_{xy}(m) * h(-m)$$

线性非时变系统的输入与输出间的互相关函数  $\phi_{xy}(m)$  与输入自相关函数  $\phi_x(m)$  及输出自相关函数  $\phi_y(m)$  间的关系:

### 2.5.2 自相关函数 $\phi_y(m)$ 及功率谱 $P_y(\omega)$

自相关函数:

$$\begin{aligned} \phi_y(n, n+m) &= E[y(n)y(n+m)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)x(n+m-r)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r) E[x(n-k)x(n+m-r)] \end{aligned}$$

$x(n)$  是平稳的,  $E[x(n-k)x(n+m-r)] = \phi_x(m+k-r)$

求和结果与  $n$  无关, 输出自相关序列也只与时间差  $m$  有关。

结论: 对于一个线性非时变系统, 激励为一个平稳随机信号, 则输出信号也将是一个平稳随机信号。

进一步推广, 得到相关-卷积定理

$$\begin{aligned} e(n) &= a(n) * b(n) \\ f(n) &= c(n) * d(n) \end{aligned} \longrightarrow \phi_{ef}(m) = \phi_{ac}(m) * \phi_{bd}(m)$$

它在许多信号处理问题的求解中十分有用。

功率谱:

$$\phi_y(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_x(m-l)v(l) = \phi_x(m) * v(m)$$

进行  $z$  变换有

$$\Phi_y(z) = \Phi_x(z) \cdot V(z) = \Phi_x(z) H(z) H(z^{-1})$$

将  $z = e^{j\omega}$  代入, 并用功率谱密度表示

$\phi_{xy}(m)$  等于  $\phi_x(m)$  与  $h(m)$  的卷积;  
 $\phi_y(m)$  等于  $\phi_{xy}(m)$  与  $h(-m)$  的卷积。

$$\phi_y(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_x(m-l)v(l) = \phi_x(m) * v(m)$$

应用:

例如, 当  $\phi_x(m) = \delta(m)$  时, 就可以从  $\phi_{xy}(m)$  求得  $h(m)$ 。

互功率谱:

$$\phi_{xy}(m) = \phi_x(m) * h(m)$$

$$\phi_y(m) = \phi_{xy}(m) * h(-m)$$

设  $m_x = 0$  (自相关函数的  $z$  变换存在)

$$\Phi_{xy}(z) = H(z)\Phi_x(z)$$

$$\Phi_y(z) = H(z^{-1})\Phi_{xy}(z)$$

将  $z = e^{j\omega}$  代入, 并用功率谱密度表示

$$P_{xy}(\omega) = H(e^{j\omega})P_x(\omega) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{P_{xy}(e^{j\omega})}{P_x(e^{j\omega})}$$

$$P_y(\omega) = H(e^{-j\omega})P_{xy}(\omega)$$

当输入为白噪声时, 其功率谱密度  $P_x(\omega)$  为常数:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) d\omega = P_x(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = P_x(\omega)$$

$$P_x(\omega) = \sigma_x^2 = E[x^2(n)] = \text{平均功率} \quad (\text{当 } m_x = 0)$$

$$\phi_x(m) = F^{-1}[P_x(\omega)] = \sigma_x^2 \delta(m)$$

$$\phi_{xy}(m) = \phi_x(m) * h(m) = \sigma_x^2 h(m)$$

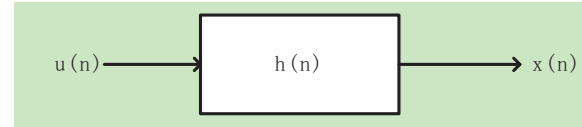
$$P_{xy}(\omega) = H(e^{j\omega})P_x(\omega) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega})$$

## 2.6 随机信号的模型

“模型”一词常用表示一些假设, 这些假设可用于解释或描述组织或约束物理数据产生的内在规律。

随机过程用模型表示可回溯到 Yule(1972)的一种思想, 就是强相关时间序列  $u(n)$  可用独立的随机序列作用于一个线性滤波器产生。

实际的随机过程可用白噪声激励一个线性系统产生



$$S_x(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma^2, \sigma^2 \text{ 为 } u(n) \text{ 的平均功率}$$

地指出分子分母的阶数, 我们叫这样的随机过程为 ARMA(p,q)。这个系统的传递函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}$$

这里假定  $A(z)$  的收敛域是在单位圆内, 以保证  $H(z)$  是稳定的和因果的。这个假定是保证输出序列  $x(k)$  是平稳的必要条件。利用维纳辛钦定理给出其功率谱密度为

$$\Phi_x(z) = H(z)H(z^{-1})\Phi_w(z)$$

且又因为  $\Phi_w(z) = \sigma_w^2$ , 我们有

$$\Phi_x(z) = \sigma_w^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}$$

类似地, 功率谱为

$$P_x(\omega) = \sigma_w^2 \left| \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right|^2$$

不失一般性, 我们可以假定多项式的分子、分母的首项系数为 1, 因为横向滤波器的增益可以被噪声功率  $\sigma_w^2$  “吸收”。下图表明 ARMA 过程是如何通过一个白噪声的输入产生。

应用:

$$h(m) = \frac{\phi_{xy}(m)}{\sigma_x^2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_{xy}(\omega)}{\sigma_x^2}$$

对于白噪声激励的线性非时变系统:

- 其输入、输出互相关函数正比于系统的冲激响应  $h(m)$ ,
- 而其输入、输出的互功率谱正比于系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$ 。
- 常常用来通过估计  $\phi_{xy}(m)$  或  $P_{xy}(\omega)$  来估计线性非时变系统的冲激响应或频率响应。

### 2.6.1 ARMA 模型

一类很重要的随机过程可以用有理传递函数建模。这类随机信号在实践中经常会出现。

用有理传递函数表示的随机过程可以通过白噪声驱动具有有理传递函数的系统产生。输入和输出的关系是:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

这里  $w(n)$  是零均值, 功率为  $\sigma_w^2$  的白噪声。这样的随机过程叫做自回归滑动平均 (autoregressive moving average-ARMA)。 $a_i$  就是自回归参数,  $b_i$  叫做动平均参数。为了明

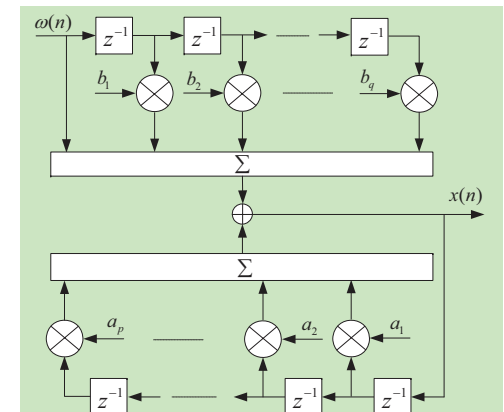


图 ARMA(p,q) 随机过程模型 (这里 p=q)

习惯上将用于产生 ARMA 过程的系统  $H(z)$  叫做 ARMA 的“**综合滤波器**”。

有趣的是, 如果 ARMA 过程  $x(n)$  作为滤波器  $H^{-1}(z)$  的输入, 我们就可将驱动噪声  $w(n)$  恢复出来。这个逆滤波器是 ARMA 的“**分析滤波器**”。

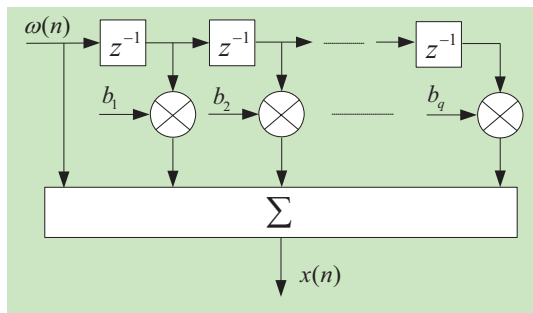


图 MA(q) 随机过程模型

## 2.6.2 MA 模型

如果去掉滤波器的自回归部分, 即除  $a_0 = 1$  外, 其它所有  $a_k$  的都等于 0, 并且假设  $b_0 = 1$ , 则输入和输出的关系为

$$x(n) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k w(n-k)$$

这叫做**滑动平均模型**, 记作 MA(q), 则产生 MA(q) 过程的系统的传递函数为

$$H(z) = B(z) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}$$

则功率谱密度为

$$\Phi_x(z) = \sigma_w^2 B(z) B(z^{-1})$$

这意味着功率谱可简记为

$$P_x(\omega) = \sigma_w^2 |B(e^{j\omega})|^2$$

传递函数  $B(z)$  称为 MA 过程的“**综合滤波器**”。它是一个 q 阶全零点滤波器。驱动噪声可以用时间序列  $x(k)$  作用于全零点滤波器  $B^{-1}(z)$ , 即分析滤波器恢复出来。

## 2.6.3 AR 模型

最后, 如果去掉 ARMA 模型的滑动平均部分, 即除  $b_0 = 1$  外, 所有  $b_i$  的全为零, 剩余部分叫做自回归模型, 记为 AR(p)。对于 AR(p) 过程有

$$x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + w(n)$$

产生 AR(p) 过程的系统传递函数为

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}$$

则功率谱密度为

$$\Phi_x(z) = \frac{\sigma_w^2}{A(z)A(z^{-1})}$$

这意味着功率谱可简记为

$$P_x(\omega) = \sigma_w^2 \left| \frac{1}{A(e^{j\omega})} \right|^2$$

传递函数  $1/A(z)$  即为 AR 过程的综合滤波器, 可以看出它是一个 P 阶的**全极点滤波器**。则可以利用时间序列  $x(n)$  作用于滤波器  $A^{-1}(z)$  来恢复驱动噪声, 这个滤波器被称为分析滤波器。

## 2.6.4 三种模型系数间关系

**模型间可转化的理论基础:** 柯尔莫哥洛夫

任何  $\begin{pmatrix} ARMA(p,q) \\ MA(q) \end{pmatrix}$  过程, 都能用  $AR(\infty)$  过程表示

或  $\begin{pmatrix} ARMA(p,q) \\ AR(p) \end{pmatrix}$  过程, 都能用  $MA(\infty)$  过程表示

**实际意义:** 即使对于待研究的过程选用了不太合适的模型, 只要它的阶数足够高, 就可以作为过程很好的近似。

关于 ARMA、AR、MA 模型的功率谱, 我们可以做一个**定性的描述**。

由于 MA 模型是通过一个全零点滤波器产生, 当有零点接近单位圆时, MA 谱可能是一个**深谷**。

类似地, 当极点接近单位圆时, AR 谱对应的频率处是一个**尖峰**。

ARMA 谱有**尖峰和深谷**。

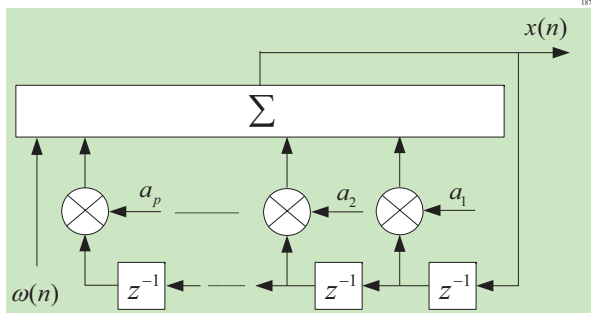


图 AR(p) 随机过程模型



### 2.6.5 三种模型选定

1. **节俭原理**: 理想模型的选定, 其参数必须尽可能少, 因为可用的实测数据有限, 一般待估计参数愈多, 估计精度也就愈差。
2. 选定模型要考虑模型**能表示谱峰, 谱谷的能力**  
ARMA 模型适合于既有谱峰又有谱谷的过程  
MA 模型适合于仅有谱谷的过程  
AR 模型适合于仅有谱峰的过程
3. AR 参数估计是**线性问题**, 因此 AR 估计发展最快最完善, 着重 AR 谱估计。

#### 注意:

- ① M 较小时, 上式计算量不大;
- ② 1822 年 FT 出现, 1965 年 FFT 出现, FFT 出现前, 该方法常用;
- ③ 理论上 M 为  $\infty$ , 事实上  $M \leq N-1$ , 我们知道  $M \rightarrow N-1$ ,  $R_N(m)$  与  $R_x(m)$  误差大, 所以有时 M 取相对 N-1 小些。

#### 传统谱估计方法的优缺点

##### 优点:

- (1) 计算高效 (周期图采用 FFT)
- (2) 功率谱估计幅度值正比于正弦波信号的功率  
信号频谱估计幅度值正比于正弦波信号的幅度
- (3) 许多场合适用

##### 缺点:

- (1) 加窗  $\rightarrow$  卷积  $\rightarrow$  展宽  $\rightarrow$  泄漏



弱信号的主瓣被强信号的旁瓣所淹没

### 2.6.6 模型应用

1. **随机信号的建模**: 白噪声通过一个准确模型来产生与实际样本数据非常接近的数据, 并且利用采样数据和先验信息来确定该模型的参数。  
**步骤**: a. 选择合适模型;  
b. 利用采样数据和先验信息来确定该模型参数;  
c. 利用该模型可产生我们所需的与实际随机过程统计特性一致的随机信号
2. **利用模型进行功率谱估计**:

#### b. 直接法 (周期图, 1898 年, 舒斯特提出)

$x(n) \rightarrow \text{FFT} \rightarrow$  取模平方除 N

$$x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{FT} \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2$$

- (2) 频率分辨率是约为数据长度的倒数, 与数据特征或其信噪比无关

### 2.6.7 传统谱估计

#### a. 间接法 (自相关法, 1858, Blackman&Tukey 提出, BT 法):

$x(n) \rightarrow$  估计出自相关函数  $\rightarrow$  FFT

$$x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$R_N(m) \text{ 渐进无偏一致估计}$$

利用维纳-辛欣 th

$$\hat{S}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-M}^{m=M} R_N(m) e^{-j\omega m} (M \leq N-1)$$

#### 注意:

- ① 1965 年, FFT 出现后, 广泛采用;
- ② 之称 “周期图”
  - a. 用该方法寻找数据中周期性规律而起名
  - b.  $I_N(\omega)$  本身是  $\omega$  的周期为  $2\pi$  的周期函数;
- ③  $\frac{1}{N}$  解释,  $N \rightarrow$  大,  $|X(e^{j\omega})|^2$  增大, 因而  $\frac{1}{N}$  可使  $N \rightarrow \infty$ ,  $I_N(\omega)$  收敛, 这正好与随机过程能量无限, 而功率有限一致。

#### 模型谱估计方法

- 选择合适模型极为重要  $\rightarrow$  系统误差
- 由样本数据  $\rightarrow$  估计模型参数
- 利用公式求出功率谱估计值

##### 特点:

- ① 比经典法作出的谱估计要平滑得多, 因为它是由有理分式计算出来的。
- ② 由于认为  $x(n)$  是由白噪声通过模型产生的, 因此不必像经典法那样认为 N 个以外数据全为 0, 这就有可能得到较好的估计



③分辨率高（经典法，数据长度倒数）

④全极点模型（AR），表示谱峰能力强。

全零点模型（MA），表示谱谷能力强。

ARMA 模型表示谱峰和谱谷能力强

⑤AR 参数估计是线性问题，因此 AR 估计发展最快最完善，AR 谱估计用得最多。