

《随机信号处理》

第三章 信号检测

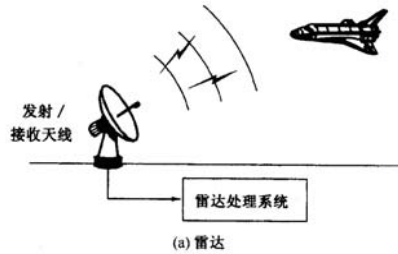
内容提要

- ✓ 3.1 概述;
- ✓ 3.2 经典检测理论;
- ✓ 3.3 多次观察检测;
- ✓ 3.4 多元假设检验;
- ✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测——相关接收机
- ✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——(匹配滤波器)
- ✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.1 概述

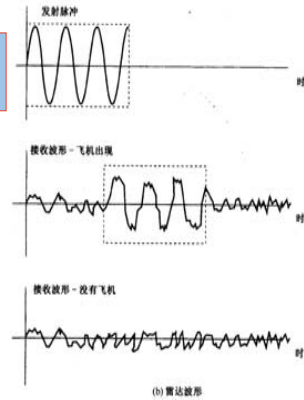
3.1.1 检测实例

雷达系统



回波由反射脉冲, 周围的辐射以及接收机中的电子噪声组成。

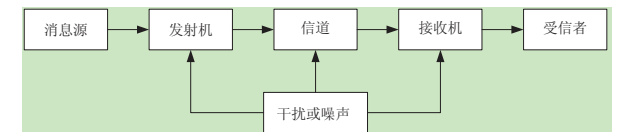
1. 先分析噪声背景特性
2. 后要检测到目标
3. 接着信息提取



3.1 概述

- 3.1.1 检测实例;
- 3.1.2 检测概念;
- 3.1.3 接收方法
- 3.1.4 假设检验与检测模型;
- 3.1.5 检测的判断准则;
- 3.1.6 常见的检测分类;

通信系统的一般组成模型



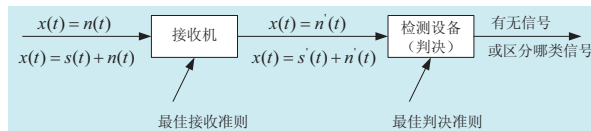
3.1.2 检测概念

就是利用概率与统计的工具来设计“最佳”接收机和“最佳”检测设备(判决), 在噪声背景条件下检测有用信号的有无, 或区分不同的信号。



这儿“最佳”是指在给定的假设条件下, 能够最佳地满足某种准则的接收机和判决器

最佳接收机再细化:



为了提高抗干扰性, 需要寻求在有干扰条件下, 对无线电信号的最佳接收方法。对于不同类型的信号和噪声干扰, 有不同的最佳接收方法, 其中就对应了不同的最佳接收准则。

例如当要求精确复现信号时, 可采用最小均方误差准则和最小总错误概率准则; 当要求最有利地从白噪声背景中发现信号时, 可采用最大信噪比准则。

接收机输出的混合波形需要送到最佳检测设备去作判决, 才能确定其中是否含有信号, 以及哪一个信号。根据使用条件和要求不同, 可以有各种不同的最佳准则及其相应的判决规则。

3.1.3 接收方法

为了能在噪声干扰条件下可靠地传输信息, 并从噪声中干扰背景中提取有用信号, 长期以来, 已经创立了许多抗干扰接收方法, 它们都是依据信号与干扰在时域和频域特性上的某种差别(如统计特性), 设法抑制干扰而顺利接收信号。([1]P209)

最佳接收机

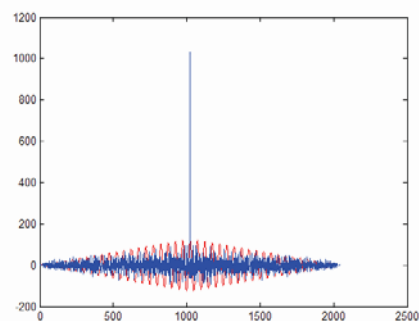
理想接收机

10
最佳接收机：只利用信号与噪声干扰在相关函数和概率谱密度等平均统计特性上的差别，即**只利用混合波形的二阶矩统计特性**，并未充分利用混合波形的精细统计特性-**多维概率分布**。

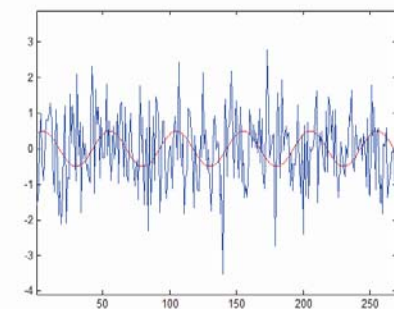
相关接收法、
积累接收法、
滤波接收法。

相关接收法：由于**周期性信号相关函数**仍为周期性函数，而**噪声干扰的相关函数**则随时刻间隔 τ 的增大而减小，因而人们很早根据这种差别，利用相关器来检测混在噪声干扰中的周期性信号。又分为

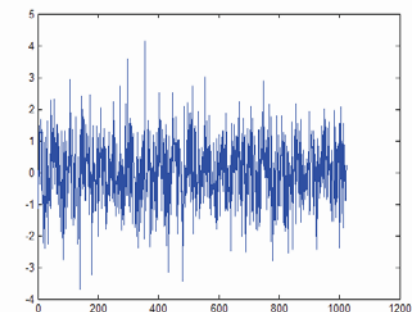
自相关接收
互相关接收；



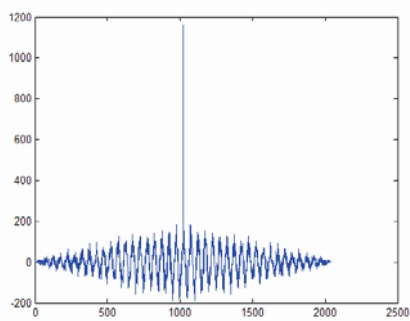
它们各自的相关函数 XCORR



两个信号：正弦波和高斯白噪声 $N(0, 1)$

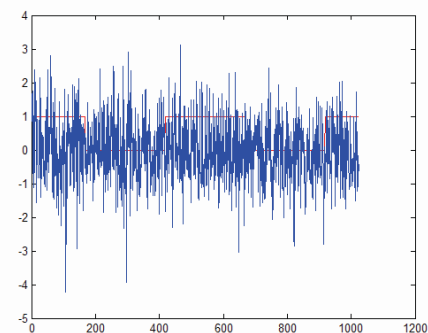


两个信号混合在一起，不能看到正弦波

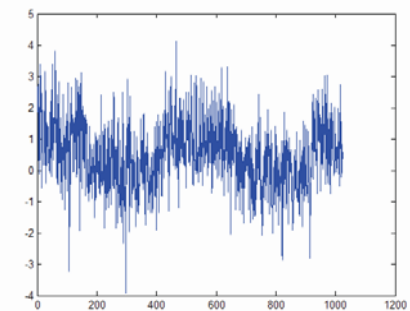


信号混合后的相关函数，还能看到正弦波信号

15
累积接收法：脉冲雷达采用周期性脉冲信号，因其信号周期长，当混合波形跨周期相加积累时，**跨周期的两个信号脉冲将有较强的相关性**，而**跨周期的两个噪声干扰却不相干**，因而相加积累之后可以改善信号噪声功率比；



两个信号：脉冲串和高斯白噪声 $N(0, 1)$



两个信号混合在一起，不能看到脉冲

18
滤波接收法：利用信号与噪声干扰的频谱特性不同，用滤波器抑制干扰而提取有用信号的接收，它是研究最早且至今仍被广泛运用。滤波器可以是线性的或非线性的。一般常用的是线性滤波器：

匹配滤波器，能输出最大的信噪比，利用最大信噪比准则。
维纳滤波器，利用最小均方误差准则
卡尔曼滤波器，利用最小均方误差准则
自适应滤波器，利用最小均方误差准则

最佳接收机的准则：以上三种接收方法都是利用信号与噪声在时域特性或频域特性上的某种差别来改善信噪比，都属于**能量准则**。

理想接收机：科捷尼可夫（Котельников）和伍德沃德（Woodward）等人运用概率统计方法，研究了信号的统计检测问题，并依据概率准则，提出了理想接收机的概念。

理想接收机：他们把检测信号时能使**错误概率最小**（或使**正确判决概率最大**）的接收机称为理想接收机。或者把能从信号加噪声的混合波形中**取得最多有用信息**的接收机称为理想接收机。

理想接收机准则：理想接收机使一个**计算后验概率最大**的接收机，是按**最大后验概率准则**来作判决。

3.1.4 假设检验和检测模型

假设检验是数理统计的主要分支；

假设：是关于统计判决可能的结果的陈述，产生这些陈述的机构称为“源”；

假设检验：就是在几个假设中作出应属于哪一个假设的判决。

对于一般电子系统：例如雷达所接收的信号检测问题，一般应有两种可能的判决结果。相应有两个假设，通常用 H_1 假设代表信号存在的情况，用 H_0 假设代表信号不存在的情况

$$\begin{cases} H_1: x(t) = s(t) + n(t) \\ H_0: x(t) = n(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

$x(t)$ 是雷达接收到的信号， $s(t)$ 是雷达目标回波信号， $n(t)$ 是干扰和噪声， T 是观测时间间隔。

从假设检验的观点出发，判决 $x(t)$ 中有无目标回波的问题，可以归结为判决 H_1 假设为真还是 H_0 假设为真的问题。

假设检验分类：

二元假设检验问题（双择一假设检验）：源有 H_1 和 H_0 两种假设，要根据观察结果作出属于哪一种假设的判决。

M 择一：源有 H_1 、 H_0 、...、 H_{M-1} 等 M 种假设，要根据观察结果作出属于哪一种假设的判决。

假设检验进行统计判决的步骤：

1. **作出合理的假设**，对要解决问题进行分析归纳，明确可能出现的结果类别，对每一类结果赋予一种假设。例雷达检测问题，统计判决的结果有两种可能，一种是存在来自目标反射形成的回波，一种是不存在目标回波；
2. **选择进行判决时所遵循的判决准则**，对于不同的统计判决问题，可以采用合适的判决准则，所谓**判决准则**是指衡量判决性能好坏的指标。

最佳准则是指按照选定的性能指标实施的判决就统计性能而言是最佳的。

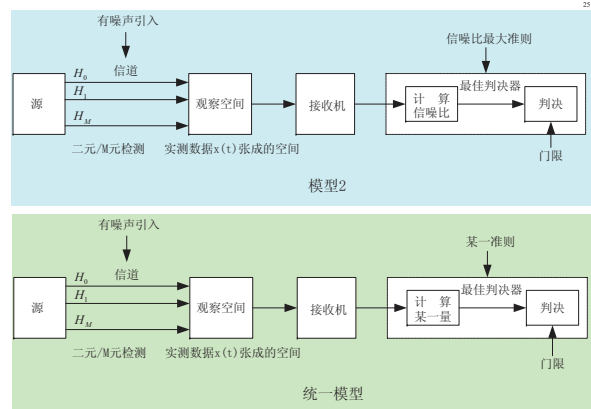
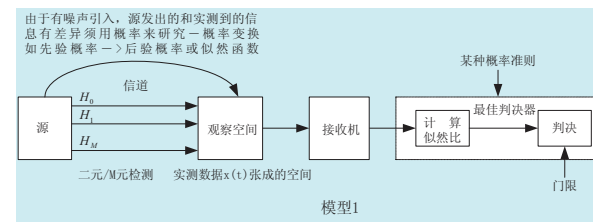
最佳判决是相对于选定的**最佳准则**而言的。

3. **获得观察样本**，进行试验，取得进行统计判决必要的数据 -

观察样本。除了样本外，根据选用的最佳准则，通过试验应获取**必要的先验知识**。例，对于双择一假设检验，假设出现的概率 $P(H_i) \quad i=0,1$ ，以及观察样本的条件概率密度函数 $f(x/H_i) \quad i=0,1$ 。因为不同的准则需要不同的先验知识。

4. **作出具体判决**，利用得到的**观察样本**，采用与判决准则相一致的**具体的判决规则**，作出判决。

检测设备的判决模型



3.1.5 检测的判断准则

• 概率准则：

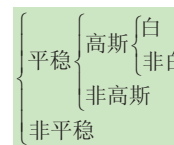
- 最大后验概率准则；
- 贝叶斯准则；
- 极大极小准则；
- 奈曼-皮尔逊准则

• 能量准则：最大信噪比准则

一般认为概率准则比能量准则更为合理

- 累积量准则；
- 时频准则；

总的规律：



3.1.6 常见的检测分类

- 噪声中确知信号的检测一简单的二元（或多元）假设检验
- 参量型；
- 波形型；

噪声中随机参量信号的检测—复合假设检验

随机相位信号；随机幅度+相位信号；

随机频率信号；随机信号

噪声中确知信号的检测和样本数：

	常值（参量型）		波形	
	二元	多元	二元	多元
单样本	✓	✓		
多样本	✓	✓	✓	✓

内容提要

✓ 3.1 概述；

✓ 3.2 经典检测理论；

✓ 3.3 多次观察检测；

✓ 3.4 多元假设检验；

✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测—相关接收机

✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——（匹配滤波器）

✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.2 经典检测理论

3.2.1 引言

3.2.2 最大后验概率准则（MAP）和最小错误概率准则

3.2.3 贝叶斯准则（平均风险最小准则）

3.2.4 极大极小准则（安全平均风险准则，等风险准则）

3.2.5 奈曼皮尔逊准则（NP 准则，检测概率最大准则）

3.1.6 小结；

3.2.1 引言

一、历史（刘有恒 p10）

- 经典检测理论的基础是假设检验理论（先假设后检验）
- 1923 年，T. Bayes 在条件概率方面作出了开创性的工作；
- 1933 年，J. Neyman, E. Pearson 提出了使错误概率极小化的检验；
- 1939 年，A. Wald 提出了代价和风险的概念；
- 第二次世界大战，这些概念已应用于雷达检测；
- 战后 40 年代—50 年代，经典检测理论蓬勃发展。这期间切尼可夫，P. W. Woodward 各自提出了理想接收机理论；密执安大学一研究小组提出了似然比检验接收机。

二、几个专用名字

信号模型：（以雷达检测为例）

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中， $x(t)$ 是雷达接收到的信号， $s(t)$ 是雷达目标回波信号， $n(t)$ 是信道或接收机内部引入的加性干扰和噪声， T 是观测时间间隔。

以二元假设检验为例：判决 $x(t)$ 中是否有目标回波的问题，可以归结为判决 H_1 假设为真时表示有目标； H_0 假设为真时表示无目标。

$$\begin{cases} H_1 : x(t) = s(t) + n(t) \\ H_0 : x(t) = n(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

（1）先验概率：检测前对源发出的信号所了解的信息为先验信息，先验信息的概率为先验概率，记 $P(H_i)$

（2）后验概率：进行一次测量得到 $x(t)$ 后，对 H_i 多了一份了解的信息为后验信息，后验信息的概率为后验概率，记 $P(H_i/x)$

（3）似然函数： $f(x/H_i)$ 为 H_i 真的条件下，观测样本 $x(t)$ 的概率密度。

$$P(H_i/x) = \frac{P(H_i)f(x/H_i)}{f(x)}$$

$\begin{matrix} P(H_0/x) = P(H_0)f(x/H_0)/f(x) \\ P(H_1/x) = P(H_1)f(x/H_1)/f(x) \end{matrix}$

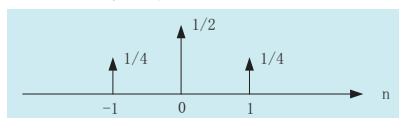
 后验概率 先验概率 似然函数 x 的概率密度

（4）似然比：

$$\frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} = \frac{P(H_1/x)}{P(H_0/x)} \cdot \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

似然比 后验概率之比 先验概率反比

例（王启才 p8）：源产生两种假设 H_1 ， H_0 ， $\begin{cases} H_1 : x(t) = 1 + n(t) \\ H_0 : x(t) = -1 + n(t) \end{cases}$ ， $n(t)$ 是与源独立的高斯噪声，其概率密度为：

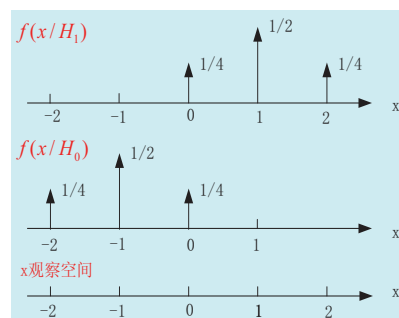


解：

假设 H_1 为真时 $x(t)$ 的概率密度，即 H_1 似然函数：

假设 H_0 为真时 $x(t)$ 的概率密度，即 H_0 似然函数：

$x(t)$ 的观察空间：



3.2.2 最大后验概率准则（MAP）和最小错误概率准则

一、最大后验准则和最小错误概率准则的使用条件

——源发出的先验概率 $P(H_i)$ 已知。

二、最大后验概率准则

1、基本思想：

$$\begin{matrix} P(H_1/x) > P(H_0/x) & \text{选 } H_1 \\ P(H_1/x) < P(H_0/x) & \text{选 } H_0 \end{matrix} \quad \frac{P(H_1/x)}{P(H_0/x)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

哪个后验概率大就选那个

2、准则的运用:

$$\frac{P(H_1/x)}{P(H_0/x)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$\begin{aligned} P(H_0/x) &= P(H_0) f(x/H_0) / f(x) \\ P(H_1/x) &= P(H_1) f(x/H_1) / f(x) \end{aligned}$$

判决准则:

$$\lambda(x) = \frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \lambda_0 = \frac{f(x_T/H_1)}{f(x_T/H_0)}$$

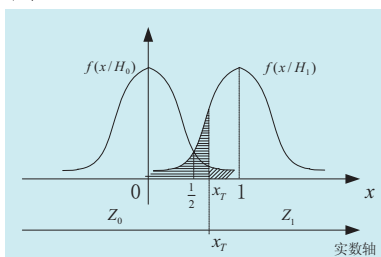
确定具体门限 x_T^*

判决的具体规则: $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} x_T^*$

解方程

$$\begin{aligned} x &> x_T^* && \text{选 } H_1 \\ x &< x_T^* && \text{选 } H_0 \end{aligned}$$

用图来表示



x_T 将实数轴分为 $Z_0 = (-\infty, x_T)$, $Z_1 = (x_T, \infty)$

3、注意:

a. 以后别的准则中, 其判决规则也是**似然比与某门限**相比较的形式, 所不同的是 λ_0 的具体表达式不同而已。

b. 最大后验概率准则中**似然比门限 λ_0 为先验概率的反比**。

例: (常值二元单样本假设检验) 设源周期发射一个二元信号, “1” - 1V 脉冲, “0” - 0V 脉冲, $\begin{cases} H_1: x(t) = 1 + n(t) \\ H_0: x(t) = n(t) \end{cases}$, $n(t)$ 高斯白噪声 $N(0,1)$, 求似然比判决。

解: 似然函数:

$$\begin{aligned} f(x/H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ f(x/H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

c. 在上面两元假设检测中, 判决器的任务就是对所接收到的数据进行分析运算, 并根据不同的判决准则作出判决。用数理统计的术语来说, 就是接收机要对各种假设进行检验。

对于 $\begin{cases} H_1: x(t) = s_1(t) + n(t) \\ H_0: x(t) = s_0(t) + n(t) \end{cases}$ 二元假设, 根据不同的准则确定出一个判决门限 x_T , 然后将实测数据 x 与该门限做比较, 现将检验的结果用 D_0 和 D_1 来表示, 其中 $x \in Z_0$ 检验结果用 D_0 表示, 代表判决结果为 $s_0(t)$ 信号存在; $x \in Z_1$ 检验结果用 D_1 表示, 代表判决结果为 $s_1(t)$ 信号存在。

由于信道噪声的随机性质, 使得对于实测数据 $x(t)$ 的每一次假设检验都有可能产生四种不同的情况, 即有四种情况:

$$\text{似然比: } \lambda(x) = \frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} = \exp\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

最大后验概率准则的判决规则为:

$$\exp\left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \lambda_0$$

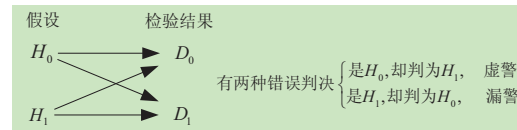
实测数据
比较门限

两边取对数:

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} x_T^* = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) = \frac{1}{2} + \ln \lambda_0$$

Note:

- 对数函数为**单调函数**, 所以对上式取对数后, 性能不变。
- 先验概率式 $P(H_1)$, $P(H_0)$ 已知的, 所以门限已知。



三、几种常用概率名称

1、**虚警概率 P_F** : 源发出是 H_0 , 检测时却判为 H_1 (D_1), 即无目标却判为有目标所对应的概率。虚警为**第一类错误概率**

$$P_F = P(D_1/H_0) = \int_{Z_1} f(x/H_0) dx = \int_{x_T}^{\infty} f(x/H_0) dx$$

发现概率

$$P_D = P(D_1/H_1) = 1 - P(D_0/H_1) = 1 - P_M$$

虚警概率

漏警概率

2、**漏警概率 P_M** : 源发出是 H_1 , 检测时却判为 H_0 (D_0), 即有目标却判为无目标所对应的概率。漏警为**第二类错误概率**

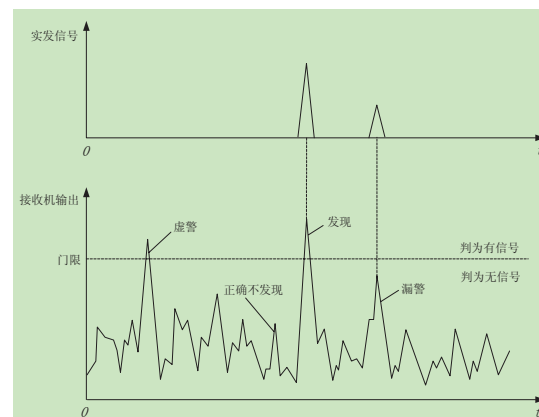
$$P_M = P(D_0/H_1) = \int_{Z_0} f(x/H_1) dx = \int_{-\infty}^{x_T} f(x/H_1) dx$$

3、**检测概率 P_D** : 源发出是 H_1 , 检测时判为 H_1 (D_1), 即有目标判为有目标所对应的概率, 也叫**发现概率**。

$$P_D = P(D_1/H_1) = 1 - P(D_0/H_1) = 1 - P_M$$

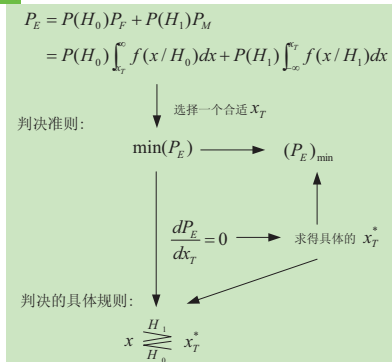
4、**平均错误概率 P_E** :

$$\begin{aligned} P_E &= P(H_0)P(D_1/H_0) + P(H_1)P(D_0/H_1) \\ &= P(H_0)P_F + P(H_1)P_M \end{aligned}$$

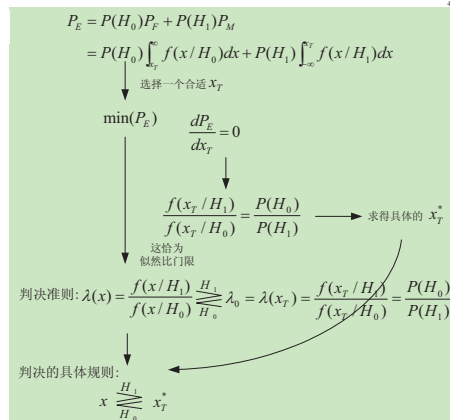


四、最小错误概率准则

1、基本思想:



2、准则的运用



3、注意:

- 从似然比判决时的门限可以看出, **最小错误概率准则和最大后验概率准则是等价的。**
- 这两个准则是在先验概率都已知的条件下使用的。
- 按**最大后验概率/最小错误概率准则**构成的接收机成为**理想接收机**, 这两个准则又称**理想观察者准则**

3.2.3 贝叶斯准则 (平均风险最小准则)

一、贝叶斯准则的使用条件

- 源发出的先验概率 $P(H_i)$ 已知。
- 已知每种判决的代价因子。

注意:

每一种判决的实际影响是不同的。

例: 对一个病人每一种错误判决的危害是不同的;

雷达检测中漏警比虚警危害更大, 一次漏警就有可能导致阵地的丢失和人员的重大伤亡。

二、代价因子和平均代价 (平均风险)

1、代价因子 C_{ij} : 表示 H_j 为真时, 却判为 H_i 的代价。

2、代价因子特点:

- $C_{ij} > 0$ 为正表示是一种损失;
- 总有: 错误判决的代价 > 正确判决的代价,

如: $\begin{cases} C_{10} - C_{00} > 0 \\ C_{01} - C_{11} > 0 \end{cases}$

3、平均代价 (平均风险)

以二元假设检验 **虚警比漏警** 观察为例:

假设 H_0 时, 判决输出为 D_0 或 D_1 得到的平均风险:

$$\begin{aligned} \bar{R}(H_0) &= P(H_0)[C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0)] \\ &= P(H_0)[C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F] \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P_F \end{aligned}$$

假设 H_1 时, 判决输出 (D_0 或 D_1) 得到的平均风险:

$$\begin{aligned} \bar{R}(H_1) &= P(H_1)[C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1)] \\ &= P(H_1)[C_{01}P_M + C_{11}(1 - P_M)] \\ &= P(H_1)C_{11} + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \end{aligned}$$

判决的平均风险:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}(H_0) + \bar{R}(H_1) \\ &= P(H_0)[C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1)] \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx \end{aligned}$$

以二元假设检验 **虚警比漏警** 观察为例:

以二元假设检验 **虚警比漏警** 观察为例:

判决的平均风险:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}(H_0) + \bar{R}(H_1) \\ &= P(H_0)[C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1)] \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx \end{aligned}$$

三、贝叶斯准则 (最小平均代价准则或最小平均风险准则)

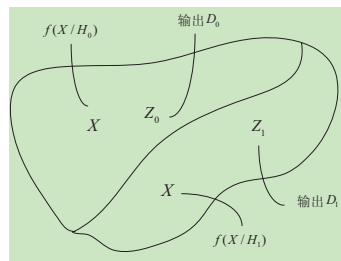
1、基本思想:

以二元假设检验 **虚警比漏警** 观察为例, 判决的平均风险:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}(H_0) + \bar{R}(H_1) \\ &= P(H_0)[C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1)] \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{-\infty}^{\infty} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx \end{aligned}$$

贝叶斯准则任务就是要在 N 维观察空间在内合理地划分出 2 个互斥判决区, 使得其平均风险达到最小。

如图所示。如果 X 落在 Z_j 判决区就输出 D_j ，判决为假设 H_j ，对于似然函数 $f(X/H_j)$ 来说，它属于正确的判决；否则就是错误的判决。

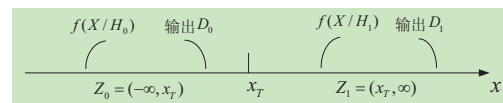


以二元假设检验单样本观察为例，判决的平均风险：

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{R}(H_0) + \bar{R}(H_1) \\ &= P(H_0)[C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1)] \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{Z_1} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{Z_0} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx \\ &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{Z_1} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{-\infty}^{x_T} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx\end{aligned}$$

贝叶斯准则任务就是要在 **一维观察空间** 在内合理地划分出 2 个互斥判决区，使得其平均风险达到最小。

如图所示。如果 X 落在 Z_j 判决区就输出 D_j ，判决为假设 H_j ，对于似然函数 $f(X/H_j)$ 来说，它属于正确的判决；否则就是错误的判决。



以二元假设检验单样本观察为例，贝叶斯准则区域：

$$\begin{aligned}\bar{R} &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{x_T}^{\infty} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dx + \int_{-\infty}^{x_T} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dx\end{aligned}$$

选择一个合适 x_T

$$\min(\bar{R}) \rightarrow (\bar{R})_{\min}$$

$$\frac{d\bar{R}}{dx_T} = 0 \rightarrow \text{求得具体的 } x_T^*$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} \frac{H_1}{H_0} \lambda_0$$

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} x_T^*$$

2. 准则的运用：

* 以二元假设检验单样本观察为例，讨论准则的运用：

$$\begin{aligned}\bar{R} &= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{11} \\ &\quad + \int_{Z_1} P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(x/H_0)dX + \int_{Z_0} P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(x/H_1)dX\end{aligned}$$

由于前两项与判决面划分无关，所以选择一个合适的判决面使上式后两项为最小。

第三项为 H_1 判决区域 Z_1 内的错误判决为 H_0 时所付的代价项；

第四项为 H_0 判决区域 Z_0 内的错误判决为 H_1 时所付的代价项；

这样：如果第三项比第四小，应判 H_1 假设成立

如果第四项比第三小，应判 H_0 假设成立

Z_1 区域内积分的被积函数： $I_1(X) = P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(X/H_0) \geq 0$

Z_0 区域内积分的被积函数： $I_0(X) = P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(X/H_1) \geq 0$

选择一个合适的判决面使上式 \bar{R} 后两项为最小。

等效于 $I_1(X)$ ， $I_0(X)$ 都最小。进一步： $I_1(X) \leq I_0(X)$ 应选 H_1
 $I_0(X) \leq I_1(X)$ 应选 H_0

$$\frac{P(H_1)(C_{01} - C_{11})f(X/H_1)}{P(H_0)(C_{10} - C_{00})f(X/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$\frac{f(X/H_1)}{f(X/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})}$$

* 以二元假设检验单样本观察为例，讨论准则的运用：

$$\begin{aligned}\bar{R} &= P(H_0)[C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F] + P(H_1)[C_{01}P_M + C_{11}(1 - P_M)] \\ &= P(H_0)[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T} f(x/H_0)dx + C_{10} \int_{x_T}^{\infty} f(x/H_0)dx] + P(H_1)[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T} f(x/H_1)dx + C_{11} \int_{x_T}^{\infty} f(x/H_1)dx]\end{aligned}$$

选择一个合适 x_T

$$\min(\bar{R}) \rightarrow \frac{d\bar{R}}{dx_T} \Big|_{x_T=x_T^*} = 0$$

这称为似然比门限

$$\lambda_0 = \lambda(x_T^*) = \frac{f(x_T^*/H_1)}{f(x_T^*/H_0)} = \frac{P(H_0)C_{10} - C_{00}}{P(H_1)C_{01} - C_{11}}$$

贝叶斯准则条件： $P(H_0)[C_{00}f(x_T^*/H_0) - C_{10}f(x_T^*/H_1)] + P(H_1)[C_{01}f(x_T^*/H_1) - C_{11}f(x_T^*/H_0)] = 0$

$$\lambda_0 = \lambda(x_T^*) = \frac{f(x_T^*/H_1)}{f(x_T^*/H_0)} = \frac{P(H_0)C_{10} - C_{00}}{P(H_1)C_{01} - C_{11}}$$

$$\frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0 = \lambda(x_T^*)$$

求得具体的 x_T^*

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} x_T^*$$

最小平均代价 $\bar{R}_{\min} = \bar{R}_B = P(H_0)[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0)dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0)dx] + P(H_1)[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1)dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1)dx]$

最小平均风险 贝叶斯风险

3. 注意：

- 贝叶斯准则是考虑错误判决代价的判决准则。
- 贝叶斯准则使用前提是各先验概率和代价因子已知。
- 当正确判决的代价为 0，错误判决的代价为 1 时，贝叶斯准则就化为最大后验概率准则（也就是最小错误概率准则）。

例 ([2]p14): 已知似然函数 $f(x/H_0)$ 和 $f(x/H_1)$ 的分布分别为 $N(x_0, \sigma^2)$, $N(x_1, \sigma^2)$, $x_1 > x_0$, C_{ij} , $P(H_i)$ 均为已知, $i, j=0, 1$, 求最佳门限 x_T^* 和贝叶斯风险

解: 似然函数:

$$f(x/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(x/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} = \frac{\exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

似然比:

$$= \exp\left(\frac{x(x_1-x_0)}{\sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{x_1^2-x_0^2}{2\sigma^2}\right)$$

因而上式 \bar{R}_{\min} 中相应积分可写为:

$$\int_{-\infty}^{x_T^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \text{erf}^*\left[\frac{(x_T^*-x_0)}{\sigma}\right]$$

$$\int_{x_T^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \text{erfc}^*\left[\frac{(x_T^*-x_0)}{\sigma}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{x_T^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \text{erf}^*\left[\frac{(x_T^*-x_1)}{\sigma}\right]$$

$$\int_{x_T^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \text{erfc}^*\left[\frac{(x_T^*-x_1)}{\sigma}\right]$$

那么贝叶斯风险为:

由贝叶斯准则中求门限的条件可知:

$$\begin{aligned} \lambda(x_T^*) &= \frac{f(x_T^*/H_1)}{f(x_T^*/H_0)} = \exp\left(\frac{x_T^*(x_1-x_0)}{\sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{x_1^2-x_0^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_0)(C_{01}-C_{11})} \end{aligned}$$

两边取对数求得最佳门限即贝叶斯门限:

$$x_T^* = \frac{\sigma^2}{x_1-x_0} \text{Ln}\left[\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \frac{C_{10}-C_{00}}{C_{01}-C_{11}}\right] + \frac{x_1+x_0}{2}$$

将 x_T^* 代入平均代价 \bar{R} 中得到贝叶斯风险:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\min} &= P(H_0) \left[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0) dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0) dx \right] \\ &\quad + P(H_1) \left[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1) dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1) dx \right] \end{aligned}$$

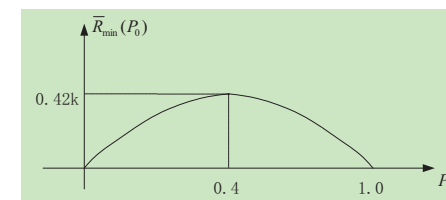
因为

$$f(x/H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma^2}\right] \quad i=0,1$$

所以可令:

$$\text{误差函数为} \quad \text{erf}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$\text{补误差函数为} \quad \text{erfc}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$



贝叶斯风险又是先验概率 $P(H_i)$ 的函数, 贝叶斯风险关于 $P(H_i)$ 存在极大点 (最小最好的风险中还存在极大点最坏情况)。

若设 $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $\sigma^2 = 4$, $C_{00} = C_{11} = 0$, $C_{10} = k$, $C_{01} = 2k$, 则

$$x_T^* = 2 \text{Ln}\left[\frac{P(H_0)}{2(1-P(H_0))}\right]$$

此时贝叶斯风险 \bar{R}_{\min} 仅是 $P(H_0) = P_0$ 的函数 $\bar{R}_{\min}(P_0)$, 可得如下曲线:

3.2.4 极小极大准则 (安全平均风险准则, 等风险准则)

一、极小极大准则的使用条件

1. 已知每种判决的代价因子。
2. 源发出的先验概率 $P(H_i)$ 未知。

二、极小极大准则

1、基本思想:

“极小”: 是指平均风险最小, 由前面贝叶斯准则可知贝叶斯风险是最小的;

“极大”: 由上例可知, 贝叶斯风险又是先验概率 $P(H_i)$ 的函数, 这儿“极大”就是指贝叶斯风险关于 $P(H_i)$ 曲线上的极大点。

该种检测类似我们日常所说的最好可能中的最差的一种。

以二元单样本为例:

$$\begin{aligned} \text{最小平均代价} \quad \bar{R}_{\min} &= P(H_0) \left[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0) dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0) dx \right] \\ &\quad + P(H_1) \left[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1) dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1) dx \right] \\ \text{最小平均风险:} \quad &\downarrow \\ \text{贝叶斯风险} \quad &\downarrow \\ P(H_0) + P(H_1) &= 1 \quad \text{选择一个合适 } P(H_0) = P_0 \\ \max(\bar{R}_{\min}(P_0)) &\longrightarrow (\bar{R}_{\min}(P_0))_{\max} \\ \downarrow &\quad \uparrow \\ \frac{d\bar{R}_{\min}(P_0)}{dP_0} = 0 &\longrightarrow \text{求得具体的 } x_T^* \\ \downarrow &\quad \uparrow \\ x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} x_T^* &\end{aligned}$$

2、准则的运用:

$$\begin{aligned} \text{最小平均代价} \quad \bar{R}_{\min} &= \bar{R}_B = P(H_0) \left[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0) dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0) dx \right] \\ &\quad + P(H_1) \left[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1) dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1) dx \right] \\ \text{最小平均风险:} \quad &\downarrow \\ \text{贝叶斯风险} \quad &\downarrow \\ \frac{d\bar{R}}{dx_T} \Big|_{x_T=x_T^*} &= 0 \\ &= P(H_0) [C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F] + P(H_1) [C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)] \\ &= P(H_0) [C_{00}f(x_T^*/H_0) - C_{10}f(x_T^*/H_0)] + P(H_1) [C_{01}f(x_T^*/H_1) - C_{11}f(x_T^*/H_1)] \\ &\downarrow \\ \max(\bar{R}_{\min}(P_0)) \quad \frac{d\bar{R}_{\min}(P_0)}{dP_0} = 0 &\downarrow \text{由贝叶斯风险条件} \\ &= \left\{ P_0 [C_{00}f(x_T^*/H_0) - C_{10}f(x_T^*/H_0)] + (1-P_0) [C_{01}f(x_T^*/H_1) - C_{11}f(x_T^*/H_1)] \right\} \frac{dx_T^*}{dP_0} \\ &\quad + \left[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0) dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0) dx \right] - \left[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1) dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1) dx \right] \end{aligned}$$

$$\left[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0) dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0) dx \right] = \left[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1) dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1) dx \right]$$

$$C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)$$

$$C_{10}P_F = C_{01}P_M \quad (C_{00} = C_{11} = 0)$$

$$P_F = P_M \quad (C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1)$$

类似于贝叶斯判决中的似然比判决门限

$$\lambda_0 = \lambda(x_T^*) = \frac{f(x_T^*/H_1)}{f(x_T^*/H_0)} = \frac{P^*(H_0)C_{10} - C_{00}}{P^*(H_1)C_{01} - C_{11}}$$

求得具体的 $P^*(H_0) = P^*(H_1)$

由极小极大准则条件

类似于贝叶斯判决，构成似然比判决

$$C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)$$

$$\lambda_0 = \lambda(x_T^*) = \frac{f(x_T^*/H_1)}{f(x_T^*/H_0)} = \frac{P^*(H_0)C_{10} - C_{00}}{P^*(H_1)C_{01} - C_{11}}$$

极小极大风险：

$$\bar{R}_{\min} = \bar{R}_B = P(H_0) \left[C_{00} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_0) dx + C_{10} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_0) dx \right]$$

$$+ P(H_1) \left[C_{01} \int_{-\infty}^{x_T^*} f(x/H_1) dx + C_{11} \int_{x_T^*}^{\infty} f(x/H_1) dx \right]$$

$$= P(H_0) [C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F] + P(H_1) [C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)]$$

$$= C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)$$

$$= C_{10}P_F = C_{01}P_M \quad (C_{00} = C_{11} = 0)$$

$$= P_F = P_M \quad (C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1)$$

等风险准则

两种假设等风险

3、注意：

a. 极小极大准则是考虑错误判决代价的判决准则。

b. 极小极大准则和贝叶斯准则有显著的差别：

贝叶斯准则是在给定先验概率的条件下对应于每一个

$P(H_0)$ 值都能获得最小平均风险，

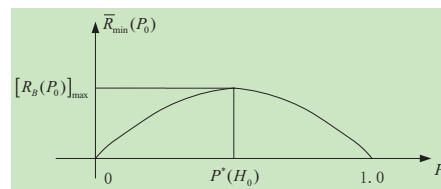
极小极大准则仅能获得最小平均风险的最大值，因为事先并没有给定先验概率。相应于极小极大风险的先验概率

$P^*(H_0)$ 仅是假定的，实际的先验概率可能偏离 $P^*(H_0)$ 。

c. 极小极大准则主要用于先验概率无法知道的信号检测系统中，例如地震预报、气象预测和射电天文等场合。

d. 由极小极大准则条件可知： $C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)$ ，而 $[\bar{R}_B(P_0)]_{\max} = C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)$ ，它说明假设 H_0 的风险和假设 H_1 的风险相等，所以 极小极大准则又叫 **风险准则**。

e. 在先验概率未知的条件下，将下图中 $P^*(H_0)$ 作为假设的先验概率，这时虽然取了最小平均风险的最大值，但是当实际的先验概率无论离开 $P^*(H_0)$ 多远，所得平均风险始终在上述最大值的限制内，不会离开贝叶斯风险太大，因此它是属于安全的情况，通常称它为 **“安全平均风险准则”**

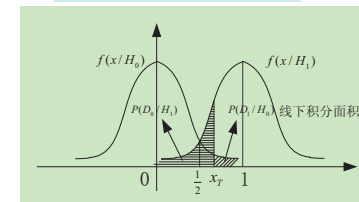


例：“常值二元单样本假设检验”， $\begin{cases} H_1: x(t) = 1 + n(t) \\ H_0: x(t) = n(t) \end{cases}$ ， $n(t)$ 高斯白噪声 $N(0,1)$ ， $C_{00} = C_{11} = 0$ ， $C_{10} = C_{01} = 1$ ，先验概率未知，采用极小极大准则时，极小极大风险是什么，相应的 $P^*(H_0)$ 为多少？

解：似然函数：

$$f(x/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$f(x/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$



极小极大准则条件（等风险）：

$$C_{00}(1-P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1-P_M)$$

$$P_F = P_M \quad (C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1)$$

由上图可知： $x_T^* = \frac{1}{2}$ ，

此时， $f(x_T^*/H_0) = f(x_T^*/H_1)$

因而，似然比门限为：

$$\lambda_0 = \frac{f(x_T^*/H_0)}{f(x_T^*/H_1)} = 1 = \frac{P^*(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P^*(H_1)(C_{01} - C_{11})} = \frac{P^*(H_0)}{P^*(H_1)}$$

而 $P^*(H_0) + P^*(H_1) = 1$ ， $\therefore P^*(H_0) = P^*(H_1) = \frac{1}{2}$

此时极小极大风险：

$$(\bar{R}_{\min})_{\max} = (\bar{R}_B)_{\max} = P_F\left(\frac{1}{2}\right) = P_M\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{查表可得})$$

3.2.5 奈曼-皮尔逊准则 (NP 准则，检测概率最大准则)

一、NP 准则的使用条件

无需知道先验概率和代价因子。

二、NP 准则

1、基本思想：

在虚警概率 $P_F (10^{-6})$ 一定条件下 (该代价是人们可承受的)，寻求漏警概率 P_M 最小，即检测概率 P_D 最大。

$$\begin{cases} P_F = \alpha (\text{常数}) \\ P_D = 1 - P_M = \text{最大值} \end{cases}$$

2、准则的运用：

$$P_F = \alpha \longrightarrow x_{NP}$$

$$\lambda_{NP} = \frac{f(x_{NP}/H_1)}{f(x_{NP}/H_0)}$$

$$\frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{NP} = \frac{f(x_{NP}/H_1)}{f(x_{NP}/H_0)}$$

$$x \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} x_{NP}$$

3、注意:

- 在单样本检测场合, 给定 P_F 后, x_{NP} 就确定了, 因而 P_D 和 P_M 也就唯一确定了, 不存在使 P_D 最大化的问题。
- NP 准则可应用在多样本检测的场合, 情况就不同了, 参见恒虚警检测章节。
- 两种极限情况:
当 $x_{NP} = -\infty$ 时, 则 $\lambda_{NP} = 0$, $P_F = \alpha = 1$, $P_D = 1 - P_M = 1$, 说明只可能发生虚警, 不会发生漏警, 检测概率为 1;
当 $x_{NP} = \infty$ 时, 则 $\lambda_{NP} = \infty$, $P_F = \alpha = 0$, $P_D = 1 - P_M = 0$, 说明只可能发生漏警, 不会发生虚警, 检测概率为 0。
- 说明 NP 准则和贝叶斯准则的关系:

在 NP 准则中,

$$P_F = \int_{x_{NP}}^{\infty} f(x/H_0)dx = \alpha \rightarrow \frac{d\alpha}{dx_{NP}} = -f(x_{NP}/H_0)$$

$$P_D = \int_{x_{NP}}^{\infty} f(x/H_1)dx \rightarrow \frac{dP_D}{dx_{NP}} = -f(x_{NP}/H_1)$$

这里取负号是因为门限后的似然函数具有负斜率, 由此可得:

$$\frac{dP_D}{d\alpha} = \frac{f(x_{NP}/H_1)}{f(x_{NP}/H_0)} = \lambda_{NP} = \tan \varphi_{NP}$$

例 ([1]p250): “常值二元单样本假设检验”, $\begin{cases} H_1: x(t) = 1 + n(t) \\ H_0: x(t) = n(t) \end{cases}$, $n(t)$ 高斯白噪声 $N(0,2)$, $\alpha = 0.1$, 求出最佳门限, 并写出判决规则?

解: 似然函数: $f(x/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{4})$

$$f(x/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-1)^2}{4})$$

$$\text{似然比: } \lambda(x) = \frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} = \exp(\frac{x}{2} - \frac{1}{4})$$

先求出 x_T , 由于 $P_F = \alpha = 0.1$

假设 NP 准则的似然比门限和贝叶斯准则的似然比门限相等, 有

$$\lambda_B = \lambda_{NP} = \frac{P(H_0)C_{10} - C_{00}}{P(H_1)C_{01} - C_{11}} \quad P(H_0)(C_{10} - C_{00}) = P(H_1)(C_{01} - C_{11})\lambda_{NP}$$

将上式代入平均风险公式:

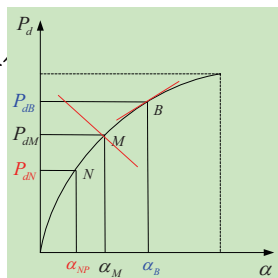
$$\begin{aligned} \bar{R}_{NP} &= \bar{R}_0 = P(H_0)[C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1)] \\ &= P(H_0)[C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F] + P(H_1)[C_{01}P_M + C_{11}(1 - P_M)] \\ &= C_{00}P(H_0) + C_{11}P(H_1) + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \\ &= C_{00}P(H_0) + C_{11}P(H_1) + P(H_1)(C_{01} - C_{11})\lambda_{NP}P_F + P(H_1)(C_{01} - C_{11})P_M \\ &= C_{00}P(H_0) + C_{11}P(H_1) + P(H_1)(C_{01} - C_{11})(\lambda_{NP}P_F + P_M) \\ &= \lambda_{NP}P_F + P_M \quad (C_{00} = C_{11} = 0, P(H_1)C_{01} = 1) \end{aligned}$$

由于 NP 准则中上式中 P_F 是给定的, 因此似然比门限也随之而定。 \bar{R}_{NP} 只与 P_M 有关。

对于 NP 准则的解, 则可以在给

定虚警概率 α_{NP} 的情况下直接在工特性上查询, 如图上的 N 点, 并由它确定检测概率 P_{dN} 。

对于贝叶斯准则, 如果贝叶斯准则中似然比门限 λ_B 已知后, 则可以作出角度 $\varphi_B = \arctan \lambda_B$ 的直线, 然后平移至与工作特性相切位置, 如图中 B 点。因此它就是贝叶斯准则的解, 由它可以确定虚警概率 α_B 和检测概率 P_{dB} 。



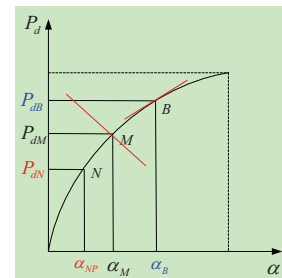
对于极小极大准则, 在极小极大准则中利用极小极大风险条件:

$$\text{等风险: } C_{00}P(D_0/H_0) + C_{10}P(D_1/H_0) = C_{01}P(D_0/H_1) + C_{11}P(D_1/H_1) \\ = C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F = C_{01}P_M + C_{11}(1 - P_M)$$

$$C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F = C_{01}(1 - P_D) + C_{11}P_D$$

$$P_D = \frac{C_{01} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}} - \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}} \alpha$$

由此可见, 它是一根具有负斜率的直线, 于工作特性的交点 M, 因此它就是极小极大准则的解, 由它可以确定虚警概率 α_M 和检测概率 P_{dM} 。



$$\int_{x_T}^{\infty} f(x/H_0)dx = 0.1 \quad \int_{x_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-\frac{x^2}{4})dx = 0.1$$

所以查表可得: $x_T = 1.8$

因而似然比门限: $\lambda(x_T) = \exp(\frac{x_T}{2} - \frac{1}{4}) = 1.9$

似然比判决有: $\lambda(x) = \exp(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1.9$

根据实测数据判决规则: $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1.8$

对于单个样本值作出判决时的检测概率为:

$$P_D = \int_{x_T}^{\infty} f(x/H_1)dx = \int_{1.8}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp[-\frac{(x-1)^2}{4}]dx = 0.285$$

例 ([1]p251): 题设和求问同上例, 但对虚警概率 α 不作限制, 且给定消息的先验概率为等概率分布, 求出最佳门限, 并写出判决规则?

解: 考虑到先验概率已知, 可采用最大后验概率准则 (也就是最小错误概率准则)。

$$\text{似然比: } \lambda(x) = \frac{f(x/H_1)}{f(x/H_0)} = \exp(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

判决规则: $x \geq 0.5$ 判为有信号

$x < 0.5$ 判为无信号;

虚警概率: $\alpha = \int_{0.5}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = 0.362$

漏警概率: $P_M = \int_{-\infty}^{0.5} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{4}} dx = 0.362$

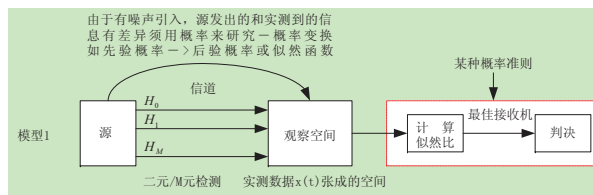
发现概率: $P_d = 1 - P_M = 0.638$

这儿发现概率高于前例，但虚警概率也高于前例。

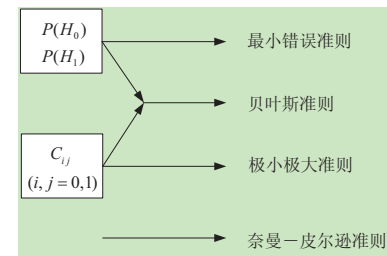
2.2.6 小结

以上讨论的四种经典的检测准则中，其相同点都是构成似然比，只是不同的准则其门限不同而已。

具有相同的检测模型，构成似然比：



四种使用前提不同，似然比门限不同：



内容提要

- ✓ 3.1 概述;
- ✓ 3.2 经典检测理论;
- ✓ 3.3 多次观察检测 (积累效应);
- ✓ 3.4 多元假设检验;
- ✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测—相关接收机
- ✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——(匹配滤波器)
- ✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.3 多次观察检测

3.3.1 引言;

3.3.2 多次观察所采用的判决准则;

3.3.1 引言

采用多次观察检测的前提条件：当单次的观察不能获得所需的质量时，就需要采用多次观察，以牺牲时间来换取检测质量的提高。如雷达信号处理后进行检测判决时，常采用 2/3 规则判决目标的存在与否。

3.3.2 多次观察所采用的判决准则

一、判决准则

仍将采用以往经典的判决准则，即需构成似然比与门限比较：

$$\lambda(x) = \frac{f(X/H_1)}{f(X/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

其中，N 次观察数据向量 $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$

相应的似然函数 $f(X/H_0) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N/H_0)$

$f(X/H_1) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N/H_1)$

二、判决区间

在单次观察中，判决时区域的分界是一个点；

两次观察时，区域的分界是一根直线；

一般而言，N 次观察时的 N 维空间中，两假设的分界面为 (N-1) 维平面。

下面将通过具体的例子来说明多次观察的特点。

例：(常值二元多样本假设检验) $\begin{cases} H_1: x_i = A + n_i & i = 1, 2, \dots, N \\ H_0: x_i = n_i \end{cases}$

n_i 每个噪声样本都是独立同分布高斯白噪声 $N(0, \sigma^2)$ 。

解：单样本的似然函数：

$$f(x_i/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad f(x_i/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

n_i 是统计独立的，所以 x_i 也是统计独立的。那么样本矢量的 N 维似然函数为：

$$f(X/H_0) = \prod_{i=1}^N f(x_i/H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(X/H_1) = \prod_{i=1}^N f(x_i/H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

似然比为：

$$\lambda(X) = \frac{f(X/H_1)}{f(X/H_0)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{(A^2 - 2Ax_i)}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

两边取对数，相应的判决规则为：

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{NA} \ln \lambda_0$$

其中， $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ 为观察样本的均值， λ_0 的求法同以前各准则下的

求法， $\lambda_0 = \frac{P(H_0) \cdot C_{10} - C_{00}}{P(H_1) \cdot C_{01} - C_{11}}$ 。

注意：

1、这种在高斯噪声中检测常值信号的最佳检测器有时称为线性检测器；

2、数理统计中的均值中心极限定理:

$$\text{趋近真值, } E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A = A$$

样本均值中噪声趋于正态化且方差减小为原来的 $\frac{1}{N}$ 。

- 可用来抑制噪声和旁瓣（相干和非相干积累）。

噪声相互抵消，而信号能积累，从而通过线性检测器能相对增强信号，抑制噪声，提高了检测的质量。

内容提要

- ✓ 3.1 概述;
- ✓ 3.2 经典检测理论;
- ✓ 3.3 多次观察检测;
- ✓ 3.4 多元假设检验;
- ✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测——相关接收机
- ✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——（匹配滤波器）
- ✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.4 多元假设检验

3.4.1 引言;

3.4.2 M 元检测中的贝叶斯准则;

3.4.3 M 元检测中的贝叶斯准则中的两个特例

3.4.1 引言

- 到目前为止，讨论都是“二择一”问题，即源发出两种可能，我们根据观察值，按各种准则判断以选择其中一种可能。
- 单如果源发出 M 种可能，这就称 M 源检测，即为“M 择一”问题。
- 二元检测中共有 4 种判决；M 元检测中共有 M^2 种判决。
- M 元检测种通常不使用 NP 准则，而是采用贝叶斯准则。

3.4.2 M 元检测中的贝叶斯准则

M 元检测的平均风险为:

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(D_i / H_j) P(H_j)$$

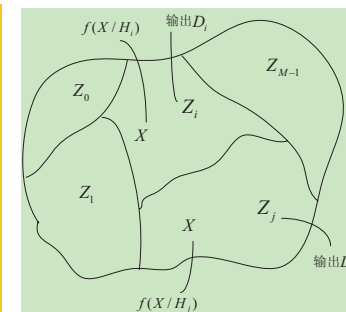
其中 $P(D_i / H_j)$ 表示原假设 H_j ，检验后的结果却判为 H_i 的概率， C_{ij} 为此判决的代价， $P(H_j)$ 是 H_j 的先验概率。

且有 $P(D_i / H_j) = \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$ ，X 为 N 维的随机变量。

所以上式又可写为: $\bar{R} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_j) \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$

贝叶斯准则的任务就是要在 M 维观察空间在内合理地划分出 (M-1) 个互斥判决区，使得其平均风险达到最小。

如图所示，显然这是二元假设检验的推广。如果 X 落在 Z_i 判决区就输出 D_i ，判决为假设 H_i ，对于似然函数 $f(X / H_j)$ 来说，它属于正确的判决；否则就是错误的判决。



分析上式:

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_j) \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} C_{jj} P(H_j) \int_{Z_j} f(X / H_j) dx + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_j) \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$$

正确判断
的风险

由于 $Z_j = Z - \bigcup_{i=0, i \neq j}^{M-1} Z_i$ ，则

$$\int_{Z_j} f(X / H_j) dx = \int_Z f(X / H_j) dx - \sum_{i=0, i \neq j}^{M-1} \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$$

$$= 1 - \sum_{i=0, i \neq j}^{M-1} \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$$

$$\bar{R} = \sum_{j=0}^{M-1} C_{jj} P(H_j) \left(1 - \sum_{i=0, i \neq j}^{M-1} \int_{Z_i} f(X / H_j) dx \right) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_j) \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} C_{jj} P(H_j) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (C_{ij} - C_{jj}) P(H_j) \int_{Z_i} f(X / H_j) dx$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} C_{jj} P(H_j) + \sum_{j=0}^{M-1} \int_{Z_j} \left\{ \sum_{i=0, i \neq j}^{M-1} [P(H_j) (C_{ij} - C_{jj}) f(X / H_j)] \right\} dx$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} C_{jj} P(H_j) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{Z_i} \left\{ \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} [P(H_j) (C_{ij} - C_{jj}) f(X / H_j)] \right\} dx$$

第一项与判决面划分无关

由于第一项与判决面划分无关，所以选择一个合适的判决面使上式后项为最小。

第二项又有 M 项组成:

$i=0$, 为 H_0 判决区域 Z_0 内的其他错误判决积分所对应的代价项
 $i=1$, 为 H_1 判决区域 Z_1 内的其他错误判决积分所对应的代价项

这样: M 项代价项哪项最小就判该判决区域所对应的假设成立

第 i 项, H_i 判决区域 Z_i 内的其他错误判决积分的被积函数

$$I_i(X) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} [P(H_j) (C_{ij} - C_{jj}) f(X / H_j)] \geq 0$$

所有 $I_i(X)$, $i=0, 1, \dots, M-1$ 中哪项最小就判该判决区域所对应的

假设成立

$$\begin{aligned}
 I_i(X) &= \sum_{j=0}^{M-1} \left[P(H_j) (C_{ij} - C_{ji}) f(X/H_j) \right] + \underbrace{P(H_i) (C_{ii} - C_{ii}) f(X/H_i)}_{\text{增加 } j=i \text{ 的项, 该项}=0} \\
 &= \sum_{j=0}^{M-1} \left[P(H_j) (C_{ij} - C_{ji}) f(X/H_j) \right] \\
 &= \underbrace{\sum_{j=0}^{M-1} P(H_j) C_{ij} f(X/H_j)}_{\Lambda_i(X)} - \underbrace{\sum_{j=0}^{M-1} P(H_j) C_{ji} f(X/H_j)}_{\text{与 } i \text{ 无关, 就是说每个 } I_i(X) \text{ 中都含此项}} \\
 \Lambda_i(X) &= \sum_{j=0}^{M-1} \left[P(H_j) C_{ij} f(X/H_j) \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\Lambda_k(X) - \Lambda_i(X) = P(H_i/X)f(X) - P(H_k/X)f(X) > 0$$

$$P(H_i/X) > P(H_k/X),$$

即 $P(H_i/X)$ 最大时, 则判决该假设 H_i 成立, 即输出 D_i

结论: 在 $C_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ 下, M 元检测中贝叶斯准则便化为最大后验概率准则。

显然, 当第一积分的被积函数 $I_0(X)$ 同时小于第二积分的被积函数 $I_1(X)$ 和第三积分的被积函数 $I_2(X)$ 时, 应该判决为假设 H_0 , 即输出 D_0 , 此时由其他假设所产生的似然函数在 Z_0 判决区内的风险最小。另外两个判决区的情况也是如此。因而就有:

当 $I_0(X) < I_1(X)$ 且 $I_0(X) < I_2(X)$ 时, 输出 D_0 ;

当 $I_1(X) < I_0(X)$ 且 $I_1(X) < I_2(X)$ 时, 输出 D_1 ;

当 $I_2(X) < I_0(X)$ 且 $I_2(X) < I_1(X)$ 时, 输出 D_2 ;

现设定两个似然比: $\lambda_1(X) = \frac{f(X/H_1)}{f(X/H_0)}$ 和 $\lambda_2(X) = \frac{f(X/H_2)}{f(X/H_0)}$, 则可得如下判决规则:

所有 $\Lambda_i(X)$, $i=0,1,\dots,M-1$ 中哪项最小就判该判决区域所对应的假设成立

即计算 $\{\Lambda_i(X): i=0,1,\dots,M-1\}$, 若某一个 i 的 $\Lambda_i(X)$ 最小, 则判决该假设 H_i 成立, 即输出 D_i 。

二、对于多数数字通信系统来说,

可以假定代价函数为 $C_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$,

且等先验概率,

$$P(H_i/X) = \frac{P(H_i)f(X/H_i)}{f(X)},$$

因此在上特例中最大后验概率准则又可化为似然函数最大准则。

结论: 在 $C_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ 且等先验概率下, M 元检测中贝叶斯准则化为似然函数最大准则。

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(X) &\underset{H_0, H_2}{\overset{H_1, H_2}{>}} \frac{(C_{12} - C_{02})P(H_2)}{(C_{01} - C_{11})P(H_1)} \lambda_2(X) + \frac{(C_{10} - C_{00})P(H_0)}{(C_{01} - C_{11})P(H_1)} \\
 \lambda_2(X) &\underset{H_0, H_1}{\overset{H_1, H_2}{>}} \frac{(C_{21} - C_{01})P(H_1)}{(C_{02} - C_{22})P(H_2)} \lambda_1(X) + \frac{(C_{20} - C_{00})P(H_0)}{(C_{02} - C_{22})P(H_2)} \\
 \lambda_2(X) &\underset{H_0, H_1}{\overset{H_0, H_2}{>}} \frac{(C_{21} - C_{11})P(H_1)}{(C_{12} - C_{22})P(H_2)} \lambda_1(X) + \frac{(C_{20} - C_{10})P(H_0)}{(C_{12} - C_{22})P(H_2)}
 \end{aligned}$$

上式可以画在 $\lambda_1(X)$ 和 $\lambda_2(X)$ 所组成的二维平面上, 同时划分出三个判决区 Z_0 , Z_1 和 Z_2 来。图中 $a = \frac{(C_{10} - C_{00})P(H_0)}{(C_{01} - C_{11})P(H_1)}$,

$$b = \frac{(C_{20} - C_{00})P(H_0)}{(C_{02} - C_{22})P(H_2)}.$$

3.4.3 M 元检测中的贝叶斯准则中的两个特例

一、对于多数数字通信系统来说,

可以假定代价函数为 $C_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$,

贝叶斯准则要求:

$$\Lambda_i(X) = \sum_{j=0}^{M-1} P(H_j) f(X/H_j) = \sum_{j=0}^{M-1} P(H_j/X) f(X), \quad i=0,1,\dots,M-1$$

设其中 $\Lambda_i(X)$ 最小, 则判决该假设 H_i 成立, 即输出 D_i 。

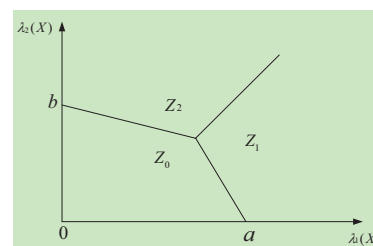
设 $\Lambda_i(X)$ 为最小, 同时发现 $\Lambda_i(X)$ 恰好缺少 $P(H_i/X)f(X)$ 项, 再设任一项 $\Lambda_k(X)$, 则有:

3.4.4 三元检测说明 (自己看!)

为了进一步理解贝叶斯准则在多元假设检验时的应用, 下面以 $M=3$ 为例来加以说明, 此时上面 (*) 式可以写成:

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= C_{00}P(H_0) + C_{11}P(H_1) + C_{22}P(H_2) \\
 &+ \int_{Z_0} [(C_{01} - C_{11})P(H_1)f(X/H_1) + (C_{02} - C_{22})P(H_2)f(X/H_2)] dX \\
 &+ \int_{Z_1} [(C_{10} - C_{00})P(H_0)f(X/H_0) + (C_{12} - C_{22})P(H_2)f(X/H_2)] dX \\
 &+ \int_{Z_2} [(C_{20} - C_{00})P(H_0)f(X/H_0) + (C_{21} - C_{11})P(H_1)f(X/H_1)] dX
 \end{aligned}$$

上式中前三项为常数, 与判决面的划分无关。而后三个积分决定于 Z_0 , Z_1 和 Z_2 的合理分配, 以保证所得的平均风险最小。



由图可见, 对于三元假设来说, 其判决空间是二维的, 其中三根直线相交于一点, 因此它们唯一划定了三个判决面。同样, 对于 M 元假设来说, 其判决空间最多是 $(M-1)$ 维的, 尽管其观察空间可能是 N 维的。

对于多数数字通信系统来说，可以假定代价函数为

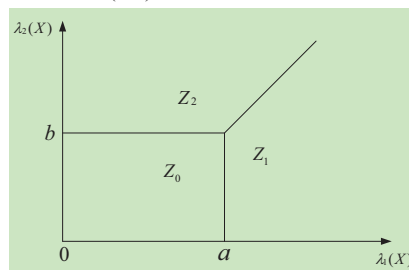
$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}, \text{代入上式后有:}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(X) & \begin{cases} > \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \\ < \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \end{cases} \\ \lambda_2(X) & \begin{cases} > \frac{P(H_2)}{P(H_1)} \\ < \frac{P(H_2)}{P(H_0)} \end{cases} \\ \lambda_2(X) & \begin{cases} > \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \\ < \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \end{cases} \lambda_1(X) \end{aligned}$$

上式可以画在 $\lambda_1(X)$ 和 $\lambda_2(X)$ 所组成的二维平面上，同时划

分出三个判决区 Z_0 , Z_1 和 Z_2 来。图中 $a = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$, $b = \frac{P(H_0)}{P(H_2)}$,

而第三直线的斜率为 $\frac{P(H_1)}{P(H_2)}$ 。



例：常值 4 元多样本假设检验， $\begin{cases} H_1: x_i = 1 + n_i \\ H_2: x_i = 2 + n_i \\ H_3: x_i = 3 + n_i \\ H_4: x_i = 4 + n_i \end{cases} \quad i=1,2,\dots,N, \quad n_i \text{ 是统计独立的高斯变量 } N(0, \sigma^2),$

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4)$, 且 $C_{ii} = 0$, $C_{ij} = 1 (i \neq j)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, 求判决规则。

解：这种情况下，贝叶斯准则化为最大似然准则，各假设下 $H_k (k=1, 2, 3, 4)$ 的似然函数为：

$$\begin{aligned} f(X/H_k) &= \prod_{i=1}^N f(x_i/H_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - k}{\sigma} \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \frac{1}{\exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{2\sigma^2} \left[\frac{2k}{N} \sum_{i=1}^N x_i - k^2 \right] \right\}} \end{aligned}$$

判决规则为：应选择使似然函数 $f(X/H_k)$ 最大时 k 所对应的 H_k , 即

应选择使似然函数 $f(X/H_k)$ 最大时 k 所对应的 H_k

$$\text{应使 } \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{2\sigma^2} \left[\frac{2k}{N} \sum_{i=1}^N x_i - k^2 \right] \right\} \text{ 最小}$$

$$\text{应使 } \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{2\sigma^2} \left[\frac{2k}{N} \sum_{i=1}^N x_i - k^2 \right] \right\} \text{ 最小}$$

$$\text{应使 } \left[\frac{2k}{N} \sum_{i=1}^N x_i - k^2 \right] = 2k\bar{m}_x - k^2 \text{ 最大, } \bar{m}_x \text{ 样本均值}$$

应选择使 $2k\bar{m}_x - k^2$ 最大时 k 所对应的 H_k

其中, $2k\bar{m}_x - k^2$ 分别为 $2\bar{m}_x - 1 (k=1)$, $4\bar{m}_x - 4 (k=2)$, $6\bar{m}_x - 9 (k=3)$, $8\bar{m}_x - 16 (k=4)$ 。因而

选择 H_1 的判决规则：

$$\begin{cases} 2\bar{m}_x - 1 \geq 4\bar{m}_x - 4 & \text{得 } \bar{m}_x \leq 1.5 \\ 2\bar{m}_x - 1 > 6\bar{m}_x - 9 & \text{得 } \bar{m}_x < 2 \rightarrow \bar{m}_x \leq 1.5 \\ 2\bar{m}_x - 1 > 8\bar{m}_x - 16 & \text{得 } \bar{m}_x < 2.5 \end{cases}$$

选择 H_2 的判决规则：

$$\begin{cases} 4\bar{m}_x - 4 > 2\bar{m}_x - 1 & \text{得 } \bar{m}_x > 1.5 \\ 4\bar{m}_x - 4 \geq 6\bar{m}_x - 9 & \text{得 } \bar{m}_x \leq 2.5 \rightarrow 1.5 < \bar{m}_x \leq 2.5 \\ 4\bar{m}_x - 4 > 8\bar{m}_x - 16 & \text{得 } \bar{m}_x < 3 \end{cases}$$

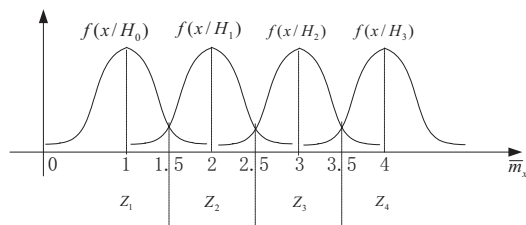
选择 H_3 的判决规则：

$$\begin{cases} 6\bar{m}_x - 9 > 2\bar{m}_x - 1 & \text{得 } \bar{m}_x > 2 \\ 6\bar{m}_x - 9 > 4\bar{m}_x - 4 & \text{得 } \bar{m}_x > 2.5 \rightarrow 2.5 < \bar{m}_x \leq 3.5 \\ 6\bar{m}_x - 9 \geq 8\bar{m}_x - 16 & \text{得 } \bar{m}_x \leq 3.5 \end{cases}$$

选择 H_4 的判决规则：

$$\begin{cases} 8\bar{m}_x - 16 > 2\bar{m}_x - 1 & \text{得 } \bar{m}_x > 2.5 \\ 8\bar{m}_x - 16 > 4\bar{m}_x - 4 & \text{得 } \bar{m}_x > 3 \rightarrow \bar{m}_x > 3.5 \\ 8\bar{m}_x - 16 > 6\bar{m}_x - 9 & \text{得 } \bar{m}_x > 3.5 \end{cases}$$

本例选择了样本均值 \bar{m}_x 为检验统计量，分别同三个门限 (1.5, 2.5, 3.5) 相比较而作出判决，这三个门限将 \bar{m}_x 空间分为四个区域。如图所示：



内容提要

- ✓ 3.1 概述;
- ✓ 3.2 经典检测理论;
- ✓ 3.3 多次观察检测;
- ✓ 3.4 多元假设检验;
- ✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测——相关接收机
- ✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——(匹配滤波器)
- ✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测——相关接收机

3.5.1 引言;

3.5.2 高斯白噪声中二元已知波形概率准则下的检测——相关接收机

3.5.3 相关接收机的性能

3.5.4 自相关接收机

3.5.5 互相关接收机

3.5.6 两种相关接收机比较

3.5.1 引言

以前讲的都是噪声中常值信号的检测:

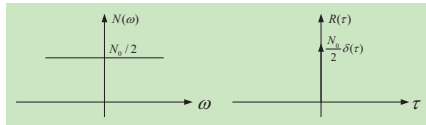
$$\text{典型: } \begin{cases} H_0: x(t) = n(t) \\ H_1: x(t) = A + n(t) \end{cases}$$

二元通信系统中当用 $A \sin(\omega_1 t)$ 表示 1;
 $A \sin(\omega_0 t)$ 表示 0 时

$$\begin{cases} H_0: x(t) = A \sin(\omega_0 t) + n(t) \\ H_1: x(t) = A \sin(\omega_1 t) + n(t) \end{cases}$$

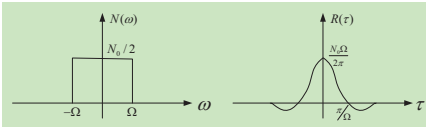
变成“噪声中已知波形的检测”。当波形中部分参数未知时,
即为噪声中随机参量的检测。

白噪声:



通过一个实际系统后 (如天线, 雷达和通信接收机, 再
简单就是放大器等都是有限带宽)

限带白噪声:



$$\begin{aligned} f(X/H_0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \right)^M \exp \left[-\sum_{k=1}^M \frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2} \right] \\ f(X/H_1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \right)^M \exp \left[-\sum_{k=1}^M \frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\sigma_n^2} \right] \end{aligned}$$

再考虑连续的情况: $M \rightarrow \infty$, 采样间隔 $\Delta t \rightarrow 0$, 信号处理
时间 $M\Delta t = T$ 保持不变, 则上式变为:

$$\begin{aligned} f(X/H_0) &= F \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) - s_0(t))^2 dt \right] \\ f(X/H_1) &= F \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) - s_1(t))^2 dt \right] \end{aligned}, F, N_0 \text{ 为常数}$$

样本矢量的似然比判决规则为:

检测的分类	确知信号的检测	常值信号	波形二元多样本检测
		已知信号	波形M元多样本检测
	随机参量信号检测		

利用信号和噪声的相关时间长短不同, 用相关器来实现接收
的方法 - 相关接收机

人们早就提出用自相关器来实现自相关接收, 从宽带强噪声
背景中提取弱周期性的信号;

随后又出现了用互相关器来实现互相关接收, 并发现它与匹
配滤波器有等效关系, 只是用了不同的接收方法来实现最佳接
收。

有限白噪声有:

$$\begin{cases} N(\omega) = \begin{cases} N_0/2 & |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0\Omega}{2\pi} \frac{\sin(\pi\Omega\tau)}{\pi\Omega\tau} \\ \text{Var}[n(t)] = \sigma_n^2 \end{cases}$$

先考虑离散的情况 (刘有恒 p60):

$$\begin{cases} H_1: x_k = s_{1k} + n_k \\ H_0: x_k = s_{0k} + n_k \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, M$$

对于观察样本矢量: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$

单样本 (x_k) 的均值和方差为:

$$\begin{aligned} \lambda(X) &= \frac{f(X/H_1)}{f(X/H_0)} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [(x(t) - s_1(t))^2 - (x(t) - s_0(t))^2] dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t)s_1(t) - x(t)s_0(t)] dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T [s_1^2(t) - s_0^2(t)] dt \right\} \end{aligned}$$

两边取对数得:

$$\int_0^T x(t)s_1(t) dt - \int_0^T x(t)s_0(t) dt \gtrless_{H_0}^{H_1} V_T = \frac{N_0}{2} \ln \lambda_0 + \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_1^2(t) dt - \int_0^T s_0^2(t) dt \right]$$

其中 $\lambda_0 = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}}$, $\int_0^T s_1^2(t) dt$ 和 $\int_0^T s_0^2(t) dt$ 分别 $s_1(t)$ 和
 $s_0(t)$ 为信号的能量。该判决规则可用下面框图来实现。

3.5.2 高斯白噪声中二元已知波形概率准则下的检测 - 相关接收机

(这是高斯白噪声中检测两个确知信号之一的最佳接收机)

假设加性高斯白噪声中检测两个确知信号中一个, 有

$$\begin{cases} H_1: x(t) = s_1(t) + n(t) \\ H_0: x(t) = s_0(t) + n(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

$n(t)$ 为限带高斯白噪声, $s_0(t)$, $s_1(t)$ 为已知波形, T 为观察
时间, 要求设计一个接收机最佳地区分两种假设中的一种。

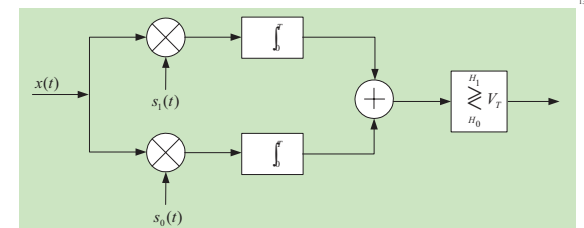
$$E(x_k) = s_{ik} \quad (i=0, 1)$$

$$\text{Var}(x_k) = E[x_k - E(x_k)]^2 = E[n_k^2] = \sigma_n^2$$

某一个样本 x_k 的似然函数:

$$\begin{aligned} f(x_k/H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left(-\frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2} \right) \\ f(x_k/H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left(-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\sigma_n^2} \right) \end{aligned}$$

设样本矢量中各样本是相互独立的, 所以样本矢量的似然函
数为:



注意:

- 1、这是我们熟知的相关接收机;
- 2、这是高斯白噪声下概率准则下检测两个确知信号之一的最佳接收机。

(性能分析见刘有恒 p63-70)

3.5.3 相关接收机的性能

检测的判决式:

$$\int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} V_\lambda = \frac{N_0}{2} \ln \lambda_0 + \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_1^2(t)dt - \int_0^T s_0^2(t)dt \right]$$

变换为:

$$I = \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt + \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_0^2(t)dt - \int_0^T s_1^2(t)dt \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} V_T = \frac{N_0}{2} \ln \lambda_0$$

上式左边为高斯过程的积分, I 应为高斯变量, 只要知道他的均值和方差就可以此高斯变量的统计特性了。

定义一个归一化 **互相关系数**:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt}{\frac{1}{2} \int_0^T [s_0^2(t) + s_1^2(t)]dt} \\ &= \frac{\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt}{\frac{1}{2} [E_0 + E_1]} = \frac{\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt}{E} \\ (E &= \frac{1}{2} [E_0 + E_1]) \end{aligned}$$

此时 **第一类错误概率**, 即虚警概率为

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{V_T}^{\infty} f(I/H_0)dI \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E(1-\rho)}} \int_{V_T}^{\infty} \exp \left[-\frac{(I + E(1-\rho))^2}{2N_0 E(1-\rho)} \right] dI \\ &\underset{u = \frac{I + E(1-\rho)}{\sqrt{N_0 E(1-\rho)}}}{=} \int_{V_T^+}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du \quad \left(V_T^+ = \frac{V_T + E(1-\rho)}{\sqrt{N_0 E(1-\rho)}} \right) \end{aligned}$$

若 H_0 为真时, 则实测数据为: $x(t) = s_0(t) + n(t)$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T [s_0(t) + n(t)]s_1(t)dt - \int_0^T [s_0(t) + n(t)]s_0(t)dt + \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_0^2(t)dt - \int_0^T s_1^2(t)dt \right] \\ &= \int_0^T s_0(t)s_1(t)dt + \int_0^T s_1(t)n(t)dt - \int_0^T s_0(t)n(t)dt - \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_0^2(t)dt + \int_0^T s_1^2(t)dt \right] \end{aligned}$$

I/H_0 的均值为 ($E[n(t)] = 0$, $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 为已知信号)

$$\begin{aligned} E[I/H_0] &= \int_0^T s_0(t)s_1(t)dt - \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_0^2(t)dt + \int_0^T s_1^2(t)dt \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt \end{aligned}$$

因而 I/H_0 的均值为

$$\begin{aligned} E[I/H_0] &= -\frac{1}{2} \int_0^T [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T s_0(t)s_1(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^T [s_0^2(t) + s_1^2(t)]dt \\ &= E\rho - E \\ &= -E(1-\rho) \end{aligned}$$

I/H_0 的方差为:

$$\begin{aligned} Var[I/H_0] &= E\{I - E[I/H_0]\}^2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt \\ &= N_0 E(1-\rho) \end{aligned}$$

同理, **第二类错误概率**, 即漏警概率为

$$\begin{aligned} P_M &= \int_{-\infty}^{V_T} f(I/H_1)dI \\ &= \int_{-\infty}^{V_T^-} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du \quad \left(V_T^- = \frac{V_T - E(1-\rho)}{\sqrt{N_0 E(1-\rho)}} \right) \end{aligned}$$

可以看出, 接收机的性能只取决于三个参数:

- 1) 信号能量 E ;
- 2) 噪声功率谱密度 $N_0/2$;
- 3) 两种信号的互相关系数 ρ ;

I/H_0 的方差为:

$$\begin{aligned} Var[I/H_0] &= E\{I - E[I/H_0]\}^2 \\ &= E\left\{ \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]n(t)dt \right\}^2 \\ &= E\left\{ \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]n(t)dt \int_0^T [s_1(\tau) - s_0(\tau)]n(\tau)d\tau \right\} \\ &= E\left\{ \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]n(t)[s_1(\tau) - s_0(\tau)]n(\tau)dtd\tau \right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)][s_1(\tau) - s_0(\tau)] E[n(t)n(\tau)]dtd\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)][s_1(\tau) - s_0(\tau)] \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt \end{aligned}$$

同理 I/H_1 的均值为

$$E[I/H_1] = E(1-\rho)$$

I/H_1 的方差为:

$$\begin{aligned} Var[I/H_1] &= E\{I - E[I/H_1]\}^2 \\ &= N_0 E(1-\rho) \end{aligned}$$

相应的似然函数为:

$$\begin{aligned} f(I/H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E(1-\rho)}} \exp \left[-\frac{(I + E(1-\rho))^2}{2N_0 E(1-\rho)} \right] \\ f(I/H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E(1-\rho)}} \exp \left[-\frac{(I - E(1-\rho))^2}{2N_0 E(1-\rho)} \right] \end{aligned}$$

当采用 **最大后验概率准则** (即错误概率最小准则) 时

$$P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}, \text{ 似然比门限 } \lambda_0 = 1, \ln(\lambda_0) = 0$$

$$V_T = \frac{N_0}{2} \ln(\lambda_0) = 0$$

$$V_T^+ = -V_T^- = \frac{E(1-\rho)}{\sqrt{N_0 E(1-\rho)}} = \sqrt{(1-\rho)} \frac{E}{N_0}$$

$$P_F = P_M$$

总错误概率为:

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_0)P(D_1/H_0) + P(H_1)P(D_0/H_1) \\ &= P(H_0)P_F + P(H_1)P_M \\ &= P_F \\ &= P_M \\ &= \int_{\sqrt{\frac{E}{2(1-\rho)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \\ &= \int_{\sqrt{\frac{(1-\rho)E}{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \end{aligned}$$

结论:

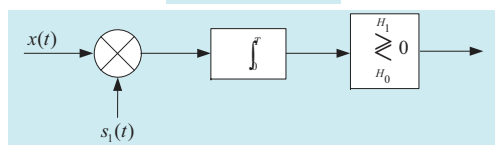
- 1) 白高斯噪声中已知信号检测的性能只取决于三个参数, 独立于波形, 且 $\sqrt{(1-\rho)\frac{E}{N_0}}$ 增大时, 总错误概率 P_e 减小;
- 2) 当信噪比 $\frac{E}{N_0}$ 固定时, $\rho = -1$, 即 $s_0(t) = -s_1(t)$, 此时总错误概率 P_e 最小, 此系统称为理想二进制检测系统

例: $\begin{cases} H_1: x(t) = -A \sin(\omega_c t) + n(t) \\ H_0: x(t) = A \sin(\omega_c t) + n(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$, $n(t)$ 为高斯白噪声, 两类先验概率 $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$, 正确判决无代价, 错误判决付出相等代价。

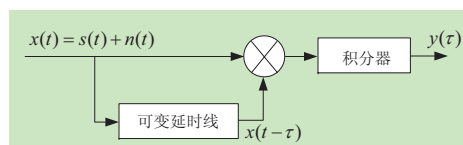
解: $\lambda_0 = \frac{P(H_0)C_{10} - C_{00}}{P(H_1)C_{01} - C_{11}} = 1$, $\int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_0^2(t) dt$
判决规则为:

$$\int_0^T x(t)s_1(t) dt - \int_0^T x(t)s_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2} \ln \lambda_0 + \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_1^2(t) dt - \int_0^T s_0^2(t) dt \right] = 0$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T x(t)s_1(t) dt &\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \\ \int_0^T x(t)s_1(t) dt &\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \end{aligned}$$



3.5.4 自相关接收机



设输入的混合波形为:

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中 $s(t)$ 是信号, $n(t)$ 是遍历过程噪声

自相关器输出: $y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$

由于 $R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau)dt$

故有

$$y(\tau) = c' R_x(\tau)$$

c' 是与时刻间隔 τ 无关的常量, 令 $c' = 1$, 有

$$\begin{aligned} y(\tau) &= R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)} \\ &= \overline{[s(t) + n(t)][s(t-\tau) + n(t-\tau)]} \\ &= R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) \end{aligned}$$

其中 $R_s(\tau)$ 和 $R_n(\tau)$ 分别是信号和噪声的自相关函数, $R_{sn}(\tau)$ 和 $R_{ns}(\tau)$ 为信号与噪声的互相关函数。

当信号和噪声不相关时 (一般均属于此种情况), 上式种后两项等于零, 故得

$$y(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau)$$

如果 $s(t)$ 为周期性的随机初相信号, 则其相关函数为

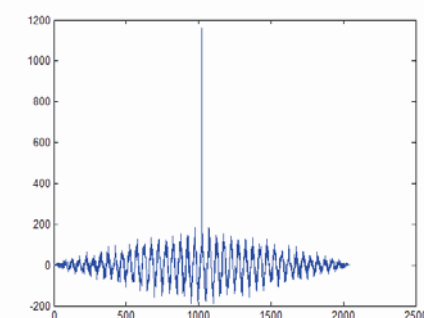
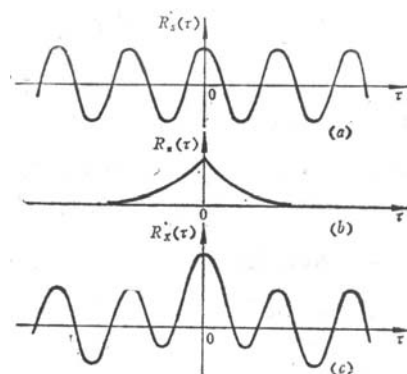
$$R_s(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

如图 (a) 所示, 它仍是周期性函数, 具有很长的相关时间。

设 $n(t)$ 为宽带噪声, 例如其相关函数为:

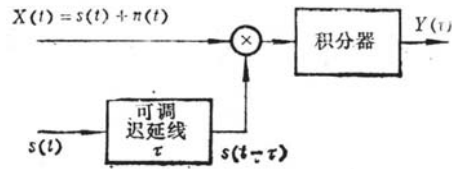
$$R_n(\tau) = \sigma^2 \exp(-a|\tau|)$$

随变量 τ 增大而单调下降, 因为是宽带, 所以相关时间较小。



信号混合后的相关函数, 还能看到正弦波信号

3.5.5 互相关接收机



设输入的混合波形为:

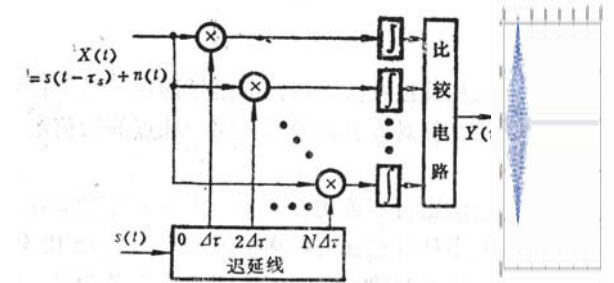
$$x(t) = s(t) + n(t)$$

互相关器输出:

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t-\tau)dt = R_s(\tau) + R_{sn}(\tau) \\ = R_s(\tau) \quad (n(t) \text{ 为白噪声时, } R_{sn}(\tau) = 0)$$

当信号与噪声不相关时, 上式第二项为零。

实际上常用固定抽头延时线来代替可调延时线, 如下图, 相邻两个抽头之间延时时间 $\Delta\tau$ 。



3.5.6 两种相关接收法的比较

1、自相关接收法无需知道信号的形式, 而互相关接收法则需知道信号形式。对雷达易办到, 但对通信系统需有复杂的同步系统。

2、从改善信噪比来看, 互相关接收法比自相关接收法更有效, 因前者参考信号无噪声。但当噪声不大是应采用自相关接收法, 简单

内容提要

- ✓ 3.1 概述;
- ✓ 3.2 经典检测理论;
- ✓ 3.3 多次观察检测;
- ✓ 3.4 多元假设检验;
- ✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测—相关接收机
- ✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——(匹配滤波器)
- ✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——(匹配滤波器)

3.6.1 引言;

3.6.2 线性滤波器输出信噪比的定义

3.6.3 匹配滤波器的传输函数和冲激响应

3.6.4 匹配滤波器的性质

3.6.5 匹配滤波器和互相关器异同

3.6.1 引言

通常用信号噪声功率比 S/N 来表征噪声对无线电接收机影响。

接收机输出 S/N , 则越有利于检测信号和估计。SNR

↓

人们用 S/N 来衡量接收机的抗干扰性能

1943 年 诺思 D.O. North 从线性滤波器输出最大 S/R (SNR)

↓

推导了该滤波器的传递函数

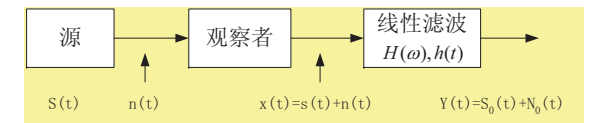
↓

创立了匹配滤波器理论

W.W. Peterson 彼得逊 将匹配滤波器用于似然比检验

1960 年 G.L. Turin 图林 作了一次总结系统化

3.6.2 线性滤波器输出信噪比的定义



注意: $s(t)$ 的波形确知的, 但何时有 $s(t)$ 是未知的

$n(t)$ 是零均值的平稳白噪声, 其功率谱密度为常量。

输入噪声谱密度:

$$G_n(\omega) = N_0 / 2 \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$S(t) \leftrightarrow S(\omega) \quad R_n(\tau) \leftrightarrow G_n(\omega)$$

输入信号频谱:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

输入噪声自相关:

$$R_n(\tau) = E[n(t_1)n(t_2)] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

设线性滤波器的传递函数

$$H(\omega)$$

输出信号频谱:

$$S_0(\omega) = S(\omega)H(\omega)$$

输出的信号:

$$s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

输出噪声谱密度:

$$G_{n0}(\omega) = G_n(\omega)|H(\omega)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2$$

输出噪声的平均功率 (即均方值, 零均值时也是方差) 为:

$$\overline{n_0^2(t)} = \sigma_{n0}^2 = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

输出信号的瞬时功率为:

$$|s_0(t)|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right|^2$$

滤波器输出端的信噪比 (SNR) 为:

$$SNR = \frac{\text{输出信号的瞬时功率}}{\text{输出噪声平均功率}} = \frac{|S_0(t)|^2}{n_0^2(t)} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

匹配滤波器基本思想: 是寻求线性滤波器的最佳 $h(t)$, 白噪声中含已知波形的混合波形作为滤波器输入时滤波器输出的波形在某时刻可达最大信噪比。

设 $t = t_0$ 时, 获得最大信噪比, 定义 **峰值信噪比** 为:

$$SNR = SNR_{\max} = \frac{|S_0(t_0)|^2}{n_0^2(t)} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

3.6.3 匹配滤波器的传输函数和冲激响应

上式表示 SNR_{\max} 随 $H(\omega)$ 而变化, 求 SNR_{\max} 时最佳 $H(\omega)$

利用 Schwartz 不等式:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} P^*(\omega)Q(\omega)d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |P(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(\omega)|^2 d\omega$$

当且仅当 $Q(\omega) = CP(\omega)$ 时, 等式成立

设 $P^*(\omega) = S(\omega)e^{j\omega t_0}$, $Q(\omega) = H(\omega)$

$$|P(\omega)|^2 = P^*(\omega)P(\omega) = |S(\omega)|^2 \quad |Q(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2$$

$$\left(\text{输入信号能量} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = E$$

匹配滤波器传递函数:

$$\text{即 } SNR_{\max} = \frac{2E}{N_0} \text{ 其条件: } Q(\omega) = CP(\omega);$$

此时, 滤波器最佳传输函数:

$$H(\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}; \quad e^{-j\omega t_0} \text{ 为线性延时相位.}$$

(最佳传输函数为输入信号频谱复共轭, 且各频谱分量都延时 t_0 时间)

类似于阻抗匹配: 电子学中, 当负载阻抗为电源内阻复共轭时, 负载上可得到最大输出功率。

不同: 一个为最大输出功率, 一个为最大输出 SNR。

匹配滤波器的冲激响应:

$$H(\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0},$$

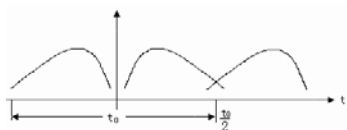
实际存在的信号都是实信号

$$H(\omega) = CS(-\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} CS(-\omega)e^{-j\omega(t_0-t)} d\omega \\ &= Cs(t_0 - t) \end{aligned}$$

如果是复数时, 则匹配滤波器冲激响应即为复共轭

匹配滤波器的冲激响应是输入实信号波形对纵轴作镜像函数，并沿时间轴向右平移 t_0 。



更一般匹配滤波器的冲激响应：

$$H(\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$h(t) = Cs^*(t_0 - t)$$

2. 匹配滤波器的幅频和相频特性

设输入信号频谱 $S(\omega) = |S(\omega)|e^{j\varphi_s(\omega)}$

匹配滤波器最佳传递函数：

$$\begin{aligned} H(\omega) &= |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \\ &= CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \\ &= C[|S(\omega)|e^{j\varphi_s(\omega)}]^*e^{-j\omega t_0} \\ &= C|S(\omega)|e^{-j\varphi_s(\omega)}e^{-j\omega t_0} \\ &= C|S(\omega)|e^{-j[\varphi_s(\omega) + \omega t_0]} \end{aligned}$$

- 信号振幅谱中起主要作用的大振幅分量处衰减小（增益大）；
- 起次要作用的小振幅分量处衰减大（增益小）。噪声功率谱中，主瓣之外收到极大的衰减。
- 输出信号相对增强，噪声相对减弱 → 使滤波器输出端 SNR_{\max}

2° 输入信号的相移 $\theta_i(t) = \omega t + \varphi_s(\omega)$

经滤波器后产生相移 $\varphi(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0$

输出信号的相移 $\theta_o(t) = \theta_i(t) + \varphi(\omega) = \omega(t - t_0)$

一般匹配滤波器的冲激响应是输入信号波形的时间反转平移及取复共轭。

所以 $|H(\omega)| = C|S(\omega)|$ ，幅频特性

$$\varphi(\omega) = -[\varphi_s(\omega) + \omega t_0]$$
，相频特性

结论：

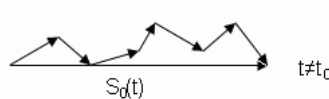
1° 匹配滤波器的幅频特性与输入信号的振幅谱一样，只差常数倍 C。

2° 匹配滤波器的相频特性与输入信号的相位频谱反相，且有附加相移量 $-\omega t_0$

当 $t = t_0$ 时， $\theta_o(t) = 0$ 输出信号的各个频率分量相量均为 0，它们同相相加而形成最大峰：



当 $t \neq t_0$ 时， $\theta_o(t) \neq 0$ 输出信号的各个分量相角不同它们合成的信号峰较小



3.6.4 匹配滤波器的性质

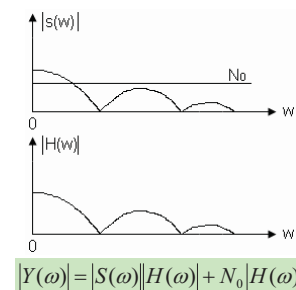
1. 在所有线性滤波器中，匹配滤波器能给出最大信噪比

◆ $SNR_{\max} = \frac{2E}{N_0}$ 只取决于 E (输入信号) 和 $N_0/2$ (白噪声功率谱密度) 而与输入信号形状和噪声分布率无关，

◆ 为了提高 SNR 以利于信号检测，当 $N_0/2$ 一定时，为让 $SNR \uparrow$ ，唯一让 $E \uparrow$

◆ $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = E$ 一是增大信号的功率，如雷达增大发射功率；另一增大信号的时间，如雷达由窄脉冲 → 宽脉冲 → 连续波；前者不利于低截获，后者有利于雷达的低截获。

解释：1°



3 匹配滤波器的物理可实现性

匹配滤波器要能物理实现，其冲激响应必须满足：

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

1° $h(t) = 0 \quad t < 0 \rightarrow (t \geq 0 \text{ 可实现})$

2°

$$\begin{aligned} h(t) &= Cs(t_0 - t) \\ \xrightarrow{t=t_0-t'} &h(t_0 - t') = Cs(t') \\ \text{而} &\Rightarrow h(t_0 - t) = Cs(t) \end{aligned}$$

也要求当 $t_0 - t < 0$ ，即 $t > t_0$ 时 $h(t) = 0 \rightarrow t \leq t_0$ 可实现

∴ 因而物理可实现的匹配滤波器冲激响应为:

$$h(t) = \begin{cases} Cs(t_0 - t) & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t < 0, t > t_0 \end{cases}$$

说明 $h(t)$ 只能存在于时刻的间隔 $[0, t_0]$ 内。

物理解释: 匹配滤波器 (MF) 的输入信号必须在 t_0 时刻前结束 MF 获得 SNR_{\max} 只能在输入信号全部结束之时。

只有充分利用输入信号的能量才 $\rightarrow SNR_{\max}$ 。

4 输出信号与噪声

$$s_0(t) = h(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$(h(t) = Cs(t_0 - t))$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)Cs(t_0 - \tau)d\tau$$

输出信号:

$$\underline{t_0 - \tau = \alpha} \quad C \int_{-\infty}^{+\infty} s[\alpha - (t_0 - t)]s(\alpha)d\alpha$$

而输入信号相关函数:

$$R_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t-\tau)s(t)dt$$

$$\therefore \text{有} \quad s_0(t) = C R_s(t_0 - t)$$

结论: MF 可看成计算输入信号自相关函数的相关器。

Note: 一般 $h(t)$ 和 $H(\omega)$ 无量纲, $\therefore s_0(t)$ 的量纲仍为电流或电压, 并非功率。

当 $t = t_0$ 时 MF 输出信号为:

$$s_0(t) = C \int_{-\infty}^{+\infty} s[\alpha - (t_0 - t)]s(\alpha)d\alpha$$

$$\underline{t = t_0} \quad C \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(\alpha)d\alpha = CE$$

(信号平方 = 功率) (\int 信号平方 = 能量)

MF 输出噪声的平均功率为:

$$\overline{n_0^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 G_n(\omega)d\omega$$

$$= \frac{N_0 C^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S^*(\omega)e^{-j\omega t_0}|^2 d\omega$$

$$= \frac{N_0 C^2}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \right] = \frac{N_0}{2} C^2 E$$

∴ MF 最大峰值信噪比

$$SNR_{\max} = \frac{t_0 \text{时刻输出信号瞬时功率}}{\text{噪声平均功率}} = \frac{|S_0(t_0)|^2}{n_0^2(t)}$$

$$= \frac{(CE)^2}{\frac{N_0}{2} C^2 E} = \frac{2E}{N_0}$$

5 MF 对时延信号具有适应性, 对频移信号没有适应性

(a) 时延信号

设原输入信号 $s(t)$: 其谱 $S(\omega)$

$$\text{MF: } H(\omega) = CS^*(\omega)e^{j\omega t_0}$$

现输入信号改为: $s_r(t) = as(t-\tau)$, 频谱为 $S_r(\omega) = aS(\omega)e^{-j\omega\tau}$

现输入信号的 MF 的传递函数:

$$H_r(\omega) = CS_r^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$= C[aS(\omega)e^{-j\omega\tau}]^* e^{-j\omega t_0}$$

$$= a[CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}][e^{j\omega t_0} e^{-j\omega\tau}]$$

$$= aH(\omega)e^{-j\omega[t_0 - (t_0 + \tau)]}$$

设 t_0 为输入信号 $s(t)$ 时, MF $(SNR)_{\max}$ 出现时刻

t'_0 为输入信号 $s_r(t)$ 时, MF $(SNR)_{\max}$ 出现时刻

如果观察时刻都选在输入信号的结束时刻, 则

$S_r(t)$ 比 $S(t)$ 迟后 $\tau \rightarrow t'_0$ 比 t_0 也迟后 τ

↓ $t'_0 = t_0 + \tau$ 代入上式

$$H_r(\omega) = aH(\omega)$$

结论: 对于时延信号来说, 原信号的 MF 能对时延信号进行匹配滤波, 只是 $(SNR)_{\max}$ 的发生时刻自动相应迟后 τ 。即 MF 对时延信号具有适应性。

(b) 频移信号

设频移信号的频谱为:

$$S_f(\omega) = S(\omega + \nu)$$

则相应 MF 的传递函数为:

$$H_f(\omega) = CS_f^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$= CS^*(\omega + \nu)e^{-j\omega t_0}$$

$$\text{而 } H(\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \neq H_f(\omega)$$

结论: MF 对频移信号没有适应性

例: 设输入信号 $S(t)$ 为单一矩形视频脉冲, 求其 MF

$$S(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0, t > T \end{cases}$$

解: 信号频谱:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T})$$

$$\text{MF: } H(\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$= \frac{CA}{j\omega} (-1 + e^{j\omega T}) e^{-j\omega t_0}$$

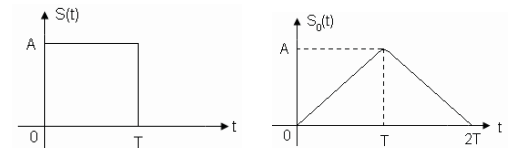
选观察时间为信号末尾

$$\underline{t_0 = T} \quad \frac{CA}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T})$$

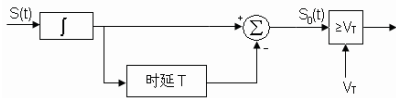
$$h(t) = \begin{cases} CA & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0, t > T \end{cases}$$

MF 的输出: $S_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t-\tau)h(\tau)d\tau = S(t) \otimes h(t)$

$$= \begin{cases} CA^2 t & 0 \leq t \leq T \\ CA^2 (2T - t) & T < t \leq 2T, t > 2T \end{cases}$$



$$H(\omega) = \frac{CA}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T})$$



190

例：FFT 的基于匹配滤波器或相关器的理解

解：

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{j\omega_0 t} \times e^{-j\omega t} dt$$

变化频率 ω ，当 $\omega = \omega_0$ 时

该频率通道上输出最大

191

N 点的 FFT 就相当于 N 个匹配滤波器

第一个匹配于 $e^{j2\pi \frac{0^* f_s}{N} n}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$)

第二个匹配于 $e^{j2\pi \frac{1^* f_s}{N} n}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$)

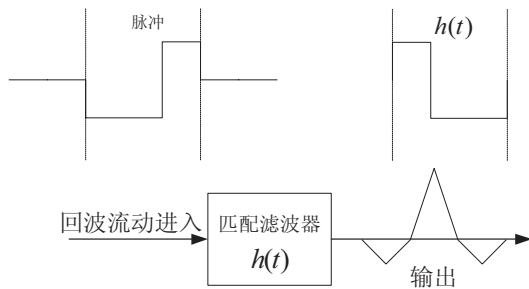
第 N 个匹配于 $e^{j2\pi \frac{(N-1) f_s}{N} n}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$)

N 点的 FFT 就相当于构建了 N 个频率相邻不同的正弦波匹配滤波器，来匹配一个频率未知的正弦波，看哪一个滤波器输出最大，那么该滤波器中心频率即为输入正弦波的频率。

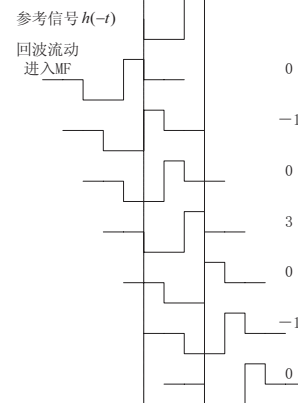
192

例：伪随机码 -m 序列 (-1 -1 1) 组成的脉冲和连续波信号时的匹配滤波器，及其输出波形。

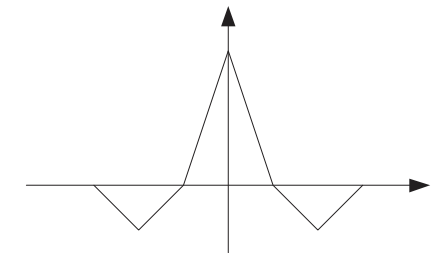
解：h(n) = (1 -1 -1)



193

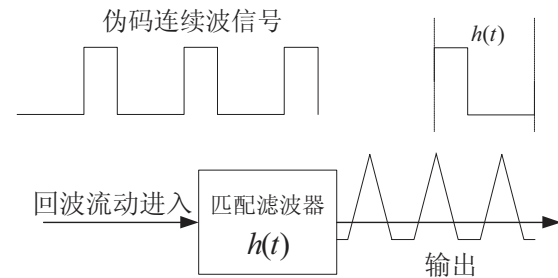


194

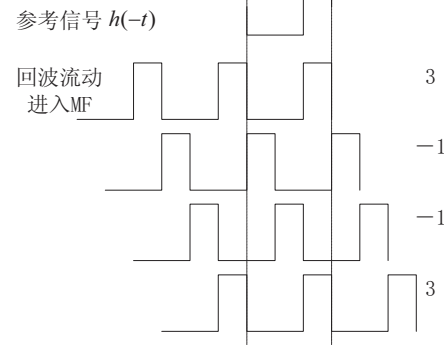


匹配滤波器输出波形
该信号的自相关函数

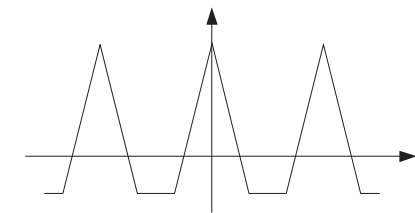
195



196



197



匹配滤波器输出波形
伪码连续波信号的自相关函数

198

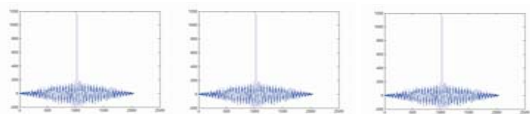
3.6.5 匹配滤波器和互相关器异同

由于匹配滤波器的冲激响应为 $h(t) = Cs(t_0 - t)$ ，故当输入混合波形为 $x(t) = s(t) + n(t)$ 时，匹配滤波器的输出混合波形为

$$\begin{aligned} s_0(t) &= h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t-\tau) + n(t-\tau)] h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t-\tau) + n(t-\tau)] Cs(t_0 - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [s(\alpha - (t_0 - t)) + n(\alpha - (t_0 - t))] s(\alpha) d\alpha \\ &= CR_s(t_0 - t) + R_{sn}(t_0 - t) \\ &\quad n(t) \text{ 为白噪声时, } R_{sn}(t_0 - t) = 0 \\ &= CR_s(t_0 - t) \end{aligned}$$

延，匹配滤波接收法中需在脉冲串的结束时间上来作观测，也需时延。

匹配滤波器采用横向滤波器结构（FIR），“系数等待回波，如果要匹配波形时变时，要定时换系数”，波形周期性时，主峰交替出现，需数据重排。



互相关器输出：

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t-\tau)dt = R_s(\tau) + R_{sn}(\tau) \\ n(t) \text{ 为白噪声时, } R_{sn}(\tau) &= 0 \\ &= R_s(\tau) \end{aligned}$$

不同点

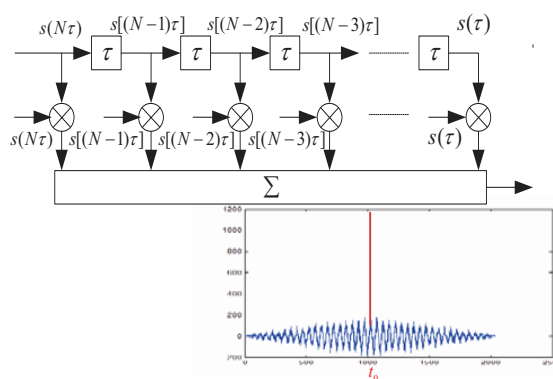
两者在考虑问题的出发点和实现方法上是有所不同的，因而使用的场合也有差别。他们的差别如下。

① 出发点：

匹配滤波接收法利用的是频域特性（信号与噪声的频谱特性不同），是采用频域分析方法，当然也可采用时域特性法；

而互相关接收法利用的是时域特性（信号与噪声的相关时间不同），是采用时域分析方法。

② 应用：故在实际采用中，应根据输入信号在时间函数或频谱密度上的不同特点，来考虑选用哪一种方法。



相同点

① 在白噪声条件下，匹配滤波器等效于互相关器。但需注意，这种等效只是对输入混合波形的响应而言，

② 综合上述两节的分析可知，接收方法（匹配滤波、相关接收）都是利用信号与噪声在时域特性或频域特性上的某种差别来改善信噪比的，由于时域特性与频域特性之间具有对应关系，因而它们相互之间具有一定的等效关系，绝非同时运用则效果直接叠加，故应根据输入信号的形势和实现的难易程度等具体条件，灵活而合理的选用。

③ 利用上述方法接收（周期性脉冲串）信号时，虽然都能改善输出信噪比，但均需以增长检测时间为代价。相关接收法中有时

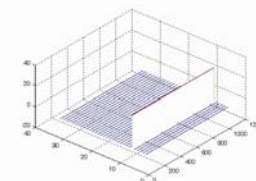
当输入信号为矩形等简单时间函数时，匹配滤波器比较容易实现。

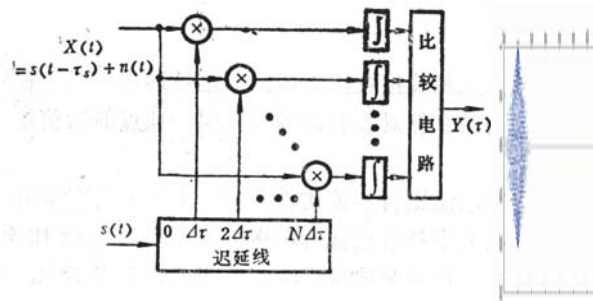
若输入信号是不确知的波形，例如在所谓“噪声雷达”中，采用的信号形式为随机噪声，这是难以求其振幅频谱，就无法制作匹配滤波器，但可以采用互相关接收法。

NOTE：以前模拟实现时是这样。现在数字实现时，这两种实现同样容易。如雷达中将要发射的波形先放到匹配滤波器的系数上，然后再将该段波形发射出去。

③ 实现上：

互相关器采用一个乘法器和一个加法器结构，“系数和回波一起流动”，用互相关器组来等效实现匹配滤波器。一个距离门一旦出现峰值信号，那么该距离门上会出现持续的峰值信号，直到目标移动进入另一个距离门。





⑤ 主瓣与旁瓣 - 大目标的大旁瓣掩盖小目标的主瓣

- 最好信号的自相关函数应是 δ 函数, 这样就没有了旁瓣, 就不会出现大目标的大旁瓣掩盖小目标的主瓣
- MIMO 雷达中多个发射天线, 希望每个发射信号要相互正交, 也就是互相关函数为零。
- 实际上很难找到这样相关函数的信号。m 系列伪码是准正交信号, 自相关函数为双值电平函数。
- 失配滤波器, 加权脉压出现抑制旁瓣, 但结果主旁比提高, 但信噪比有损失。文章较多。

举例说明匹配滤波器和互相关器组

回波信号:

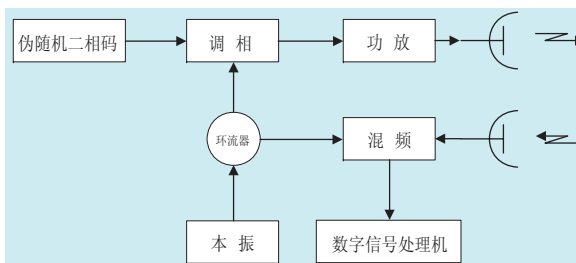
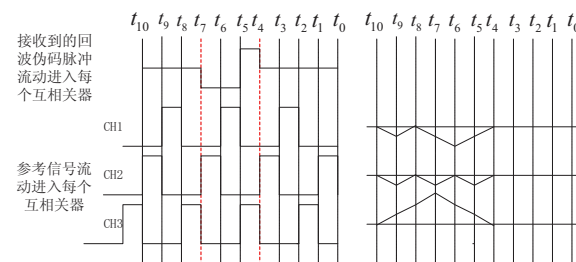
$$s_r(t) = Ac(t - \tau) \cos[2\pi f_0(t - \tau) + 2\pi f_d t]$$

混频用的本振信号:

$$s_0(t) = B \cos(2\pi f_0 t)$$

混频后:

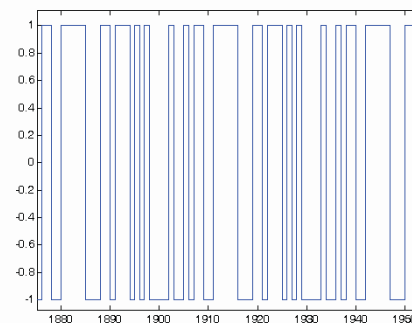
$$s(t) = Dc(t - \tau) \cos(2\pi f_d t)$$



发射信号:

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta(t)) \quad c(t) \text{ 中 } +1 \text{ 和 } -1 \text{ 对应于 } \theta(t) = 0 \text{ 或 } \pi$$

$$= Ac(t) \cos(2\pi f_0 t)$$



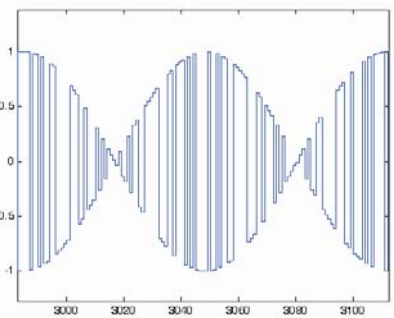
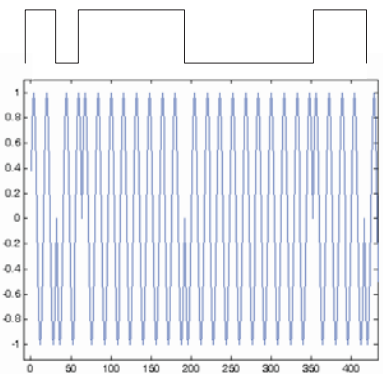
多卜勒频率为零回波, 31 位伪码

④ 输出效果:

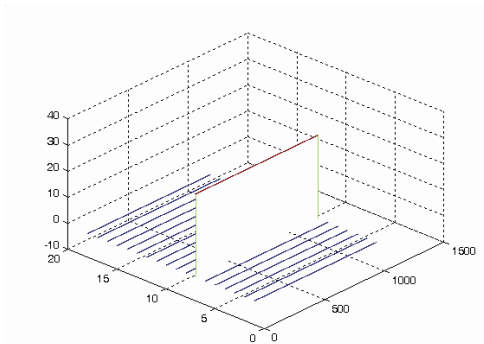
匹配滤波器能连续的给出实时输出, 能自动的给出互相关函数的全景图形。

而互相关器中的时延 τ 不便于实现连续的取值, 一路互相关器每次只能计算出对应于一个时延 τ 值的互相关函数, 若要得到互相关函数的全景图形, 则需进行多次测量, 或者采用多路并联形式 - 互相关器组, 这就带来了分析时间长或使用设备复杂的缺点。

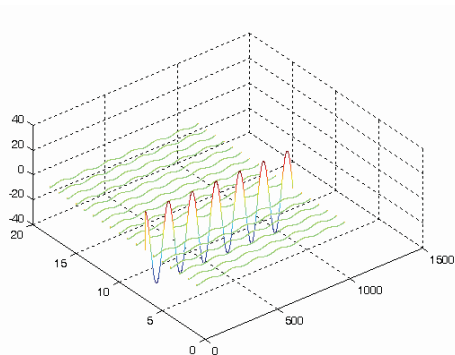
不过, 随着数字技术和集成电路的发展, 这些缺点已不难克服。



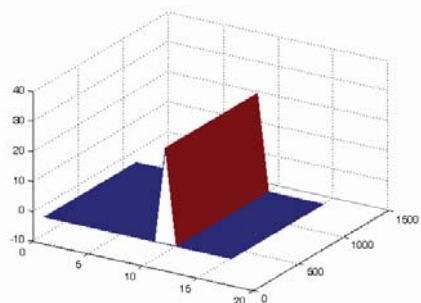
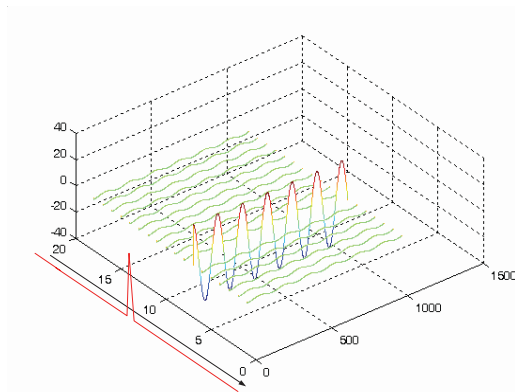
多卜勒频率不为零回波, 31 位伪码



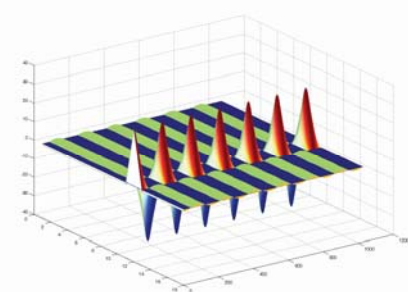
多卜勒频率为零时并行互相关器组输出，一条曲线对一个相关器



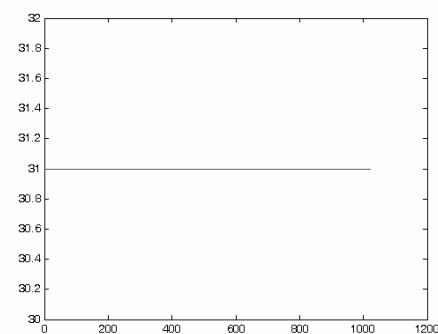
多卜勒频率不为零并行互相关器组输出，一条曲线对一个相关器



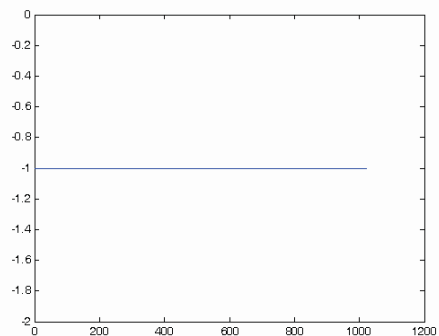
多卜勒频率为零，一条曲线对应一时刻所有相关器的输出
即并行相关器组每个时刻都能输出信号相关函数的全景图



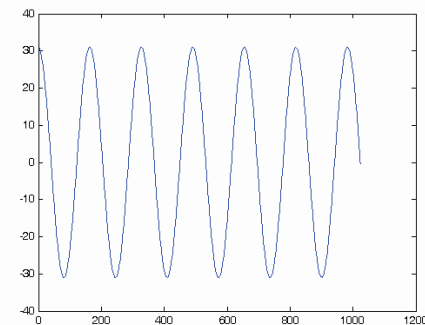
多卜勒频率不为零，一条曲线对应一时刻所有相关器的输出
即并行相关器组每个时刻都能输出信号相关函数的全景图



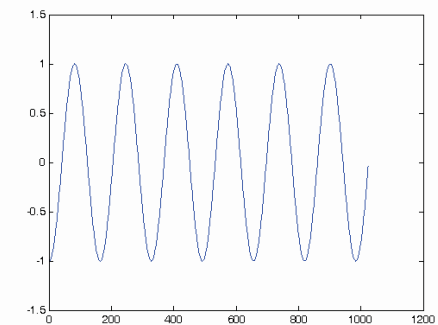
多卜勒频率为零时出主峰的互相关器输出，幅度为 31



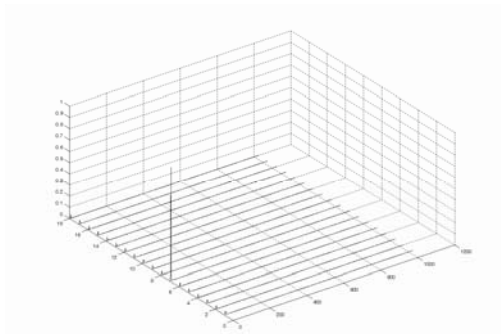
多卜勒频率为零时没出主峰的互相关器输出，幅度为 -1



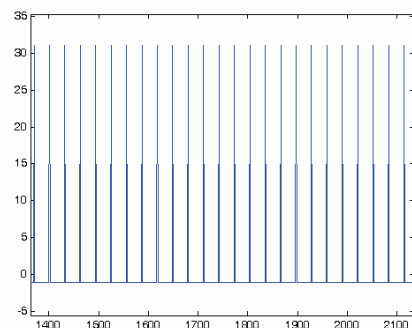
多卜勒频率不为零时出主峰的互相关器输出，幅度为 31



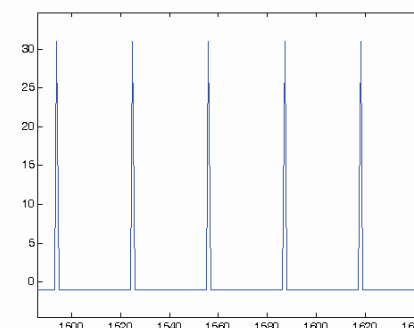
多卜勒频率不为零时没出主峰的互相关器输出，幅度为 -1



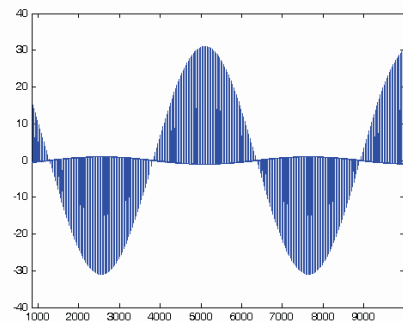
多卜勒频率不为零时,按距离门进行 FFT 输出



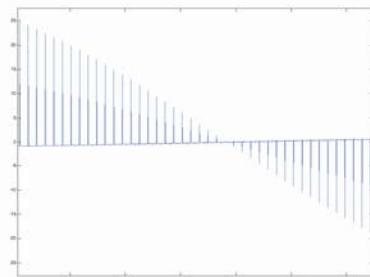
多卜勒频率为零时,一个匹配滤波器输出



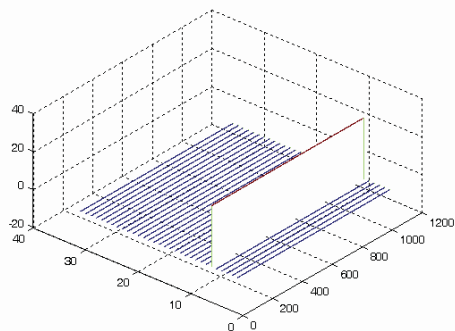
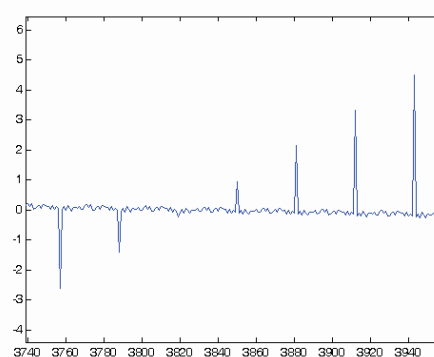
多卜勒频率为零时,一个匹配滤波器输出,峰与峰间隔 31



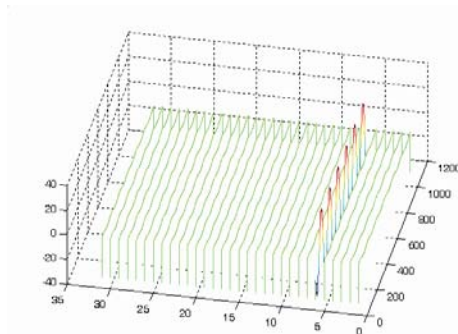
多卜勒频率不为零时,一个匹配滤波器输出,



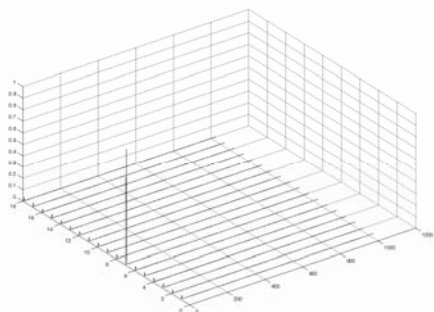
多卜勒频率不为零时,一个匹配滤波器输出,峰与峰间隔 31
又受到多卜勒的调制



多卜勒频率为零时,一个匹配滤波器输出,数据以 31 为周期重排



多卜勒频率不为零时,匹配滤波器输出,数据以 31 为周期重排



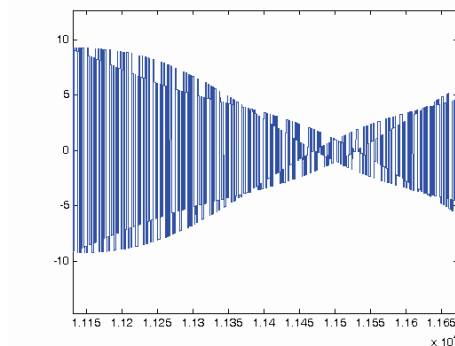
按距离门进行 FFT

需要特别关注:

(1) 匹配滤波器不仅能提升信噪比用来检测, 而且可提升信噪比以利于后续进一步信号处理。如上例中利用两次的匹配滤波后才进行检测。第一个距离门匹配, 第二是速度门即多卜勒频率进行匹配。

(2) 主瓣与旁瓣-多目标时, 大目标的大旁瓣掩盖小目标的主瓣。

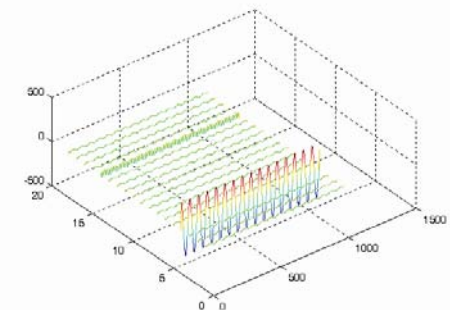
235



236

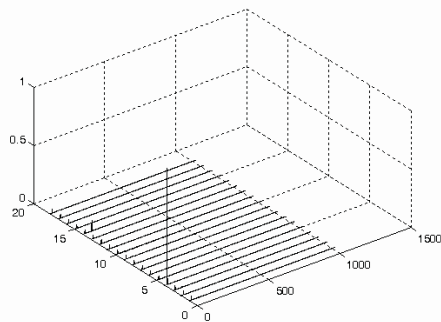
幅度差 10 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (400, 100) m/s

237



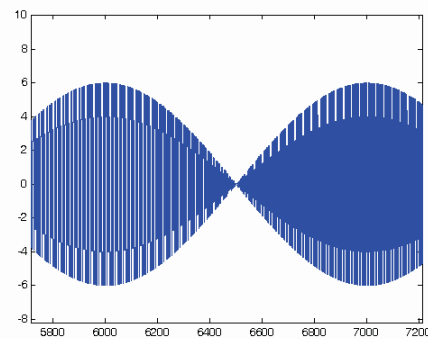
幅度差 10 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (400, 100) m/s

238



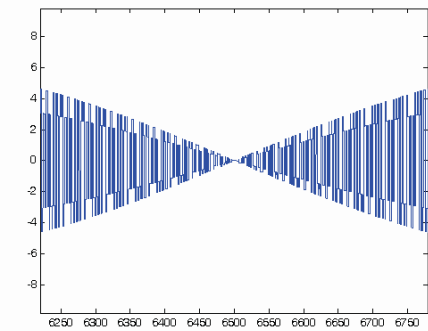
幅度差 10 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (400, 100) m/s

239



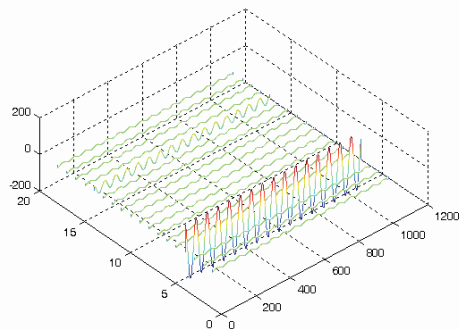
幅度差 5 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s

240



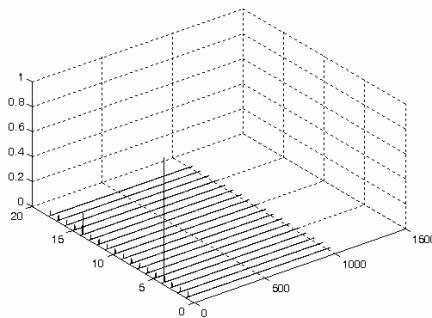
幅度差 5 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s

241



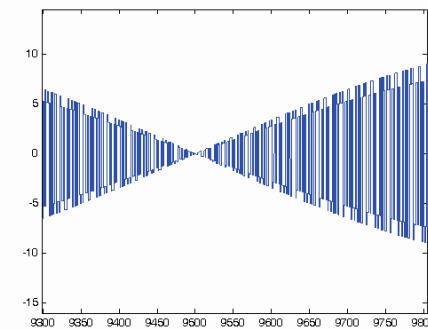
幅度差 5 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s

242

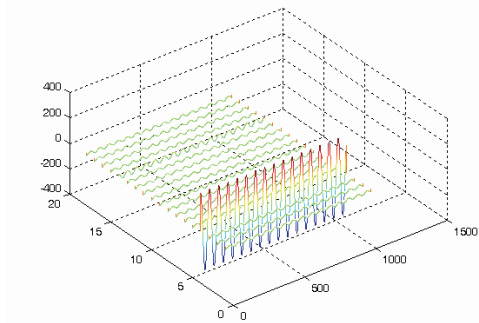


幅度差 5 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s

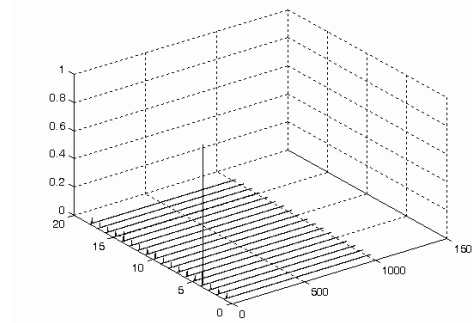
243



幅度差 10 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s



幅度差 10 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s



幅度差 10 倍, 距离 (100, 30) km, 速度 (100, 100) m/s

注意: 多卜勒敏感和多卜勒容限的概念

内容提要

- ✓ 3.1 概述;
- ✓ 3.2 经典检测理论;
- ✓ 3.3 多次观察检测;
- ✓ 3.4 多元假设检验;
- ✓ 3.5 高斯白噪声中二元已知波形多样本概率准则下的检测
- ✓ 3.6 任意噪声分布律的白噪声中二元已知波形多样本能量准则下的检测——(匹配滤波器)
- ✓ 3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.7 有色噪声中已知信号的检测

3.7.1 引言;

3.7.2 检测概念;

3.7.3 假设检验;

3.7.4 检测模型;

3.7.5 检测的判断准则;

3.7.1 引言

一、产生有色噪声的原因

a. 实际噪声源————>接收机的检测器

存在一个或几个具有某种形状的通带器件如天线, 射频频滤波器使白噪声通过之后产生频谱再分布形成有色噪声

b. 干扰

二、以往讲的是白噪声中已知波形的检测

白噪声中已知波形检测: 相关接收机 (高斯白噪声) 和匹配滤波器 (白噪声)

有色噪声中 (噪声谱密度不均匀) 已知波形检测: K-L 级数展开法和白化处理

三、K-L 展开法思想

传统方法:

高斯白噪声下信号检测

↓
均匀间隔上采样的幅度样本统计独立

↓
单样本的似然函数

↓
样本矢量的似然函数

↓
构成似然比检测

级数展开法:

由于不是白噪声, 均匀采样的实际数据样点间并不统计独立 (具有相关性)。

人们试图寻找观察信号的其他级数展开式, 对这个级数的基本要求是级数的系数不相关——>系数为不相关的白噪声——>然后进行白噪声中的信号检测。

首先人们考虑付氏级数展开, 但它只有在 $T \rightarrow \infty$ 时系数才不相

关。实际上时办不到, 因为信号的观察时间总是有限的, 故付氏级数不合适。

真正适用的是卡亨南-洛维 (K-L) 展开, 它能在 $[0, T]$ 时间内把观察信号展开成一个特殊级数。

高斯有色噪声下信号的检测

↓
通过 K-L 级数展开

↓
幅度样本非统计独立

→ 构成系数样本

↓
高斯统计独立白噪声

↓
单样本的似然函数

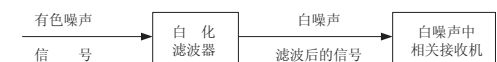
↓
单样本的似然函数

↓
难以写出样本矢量似然函数

↓
样本矢量的似然函数

↓
构成似然比检测

四、白化滤波器



3.7.2 K-L 展开法(去相关的最经典方法)

一、随机信号的级数展开

1、付氏级数展开

如果平稳随机过程 $x(t)$ 在均方意义下周期的 ($R_x(\tau) = R_x(T + \tau)$) 则它可以展开成付氏级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ 是基频}$$

其中 b_n (谱域上的) 是不相关的随机变量, $b_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(u) e^{-jn\omega_0 u} du$

2、卡赫南-洛夫 (Karhunen-Loeve) [K-L 展开]

如果平稳随机过程 $x(t)$ 在均方意义下非周期的则它可以 K-L 展开

$$\int_0^T R_x(t_1, t_2) g_n(t_2) dt_2 = \lambda_n g_n(t_1)$$

此方程是一个齐次积分方程, $R_x(t_1, t_2)$ 是核, $g_n(t_1)$ 为本征函数, 而 λ_n 是本征值, 且随机量的系数 β_n 的方差等于 λ_n

$$E[\beta_n^2] = \lambda_n$$

(3) 逆定理: 函数 $g_n(t)$ 满足积分方程, 则 $x(t)$ 的 K-L 展开式系数 β_n 与 β_m 必正交

结论: 用满足上式积分方程的函数集 $g_n(t), n=1, 2, \dots$, 来对观察数据 $x(t)$ 进行 K-L 级数展开, 那么该级数的系数方差等于本征值 λ_n , 且其系数不相关。

$$\begin{aligned} x_k/H_1 &= \int_0^T (s_1(t) + n(t)) g_k^*(t) dt \\ &= \int_0^T s_1(t) g_k^*(t) dt + \int_0^T n(t) g_k^*(t) dt \\ &= s_{1k} + n_k \end{aligned}$$

$$E[x_k/H_1] = s_{1k}$$

$$Var[x_k/H_1] = E\left\{[x_k - E[x_k/H_1]]^2\right\} = E[n_k^2/H_1] = \lambda_k$$

所以变换域上的 x_k/H_1 服从均值为 s_{1k} , 方差为 λ_k 的高斯分布, 变换域上观察样本矢量 X_K/H_1 似然函数为

$$f(X_K/H_1) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left[-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\lambda_k}\right] \right)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n(t)$$

$$\beta_n = \int_0^T x(t) g_n^*(t) dt$$

$g_n(t)$ 是基函数。

对于实测中的非白噪声

$$\begin{cases} n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k g_k(t) \\ n_k = \int_0^T n(t) g_k^*(t) dt \end{cases}$$

二、有色噪声中已知波形检测方法——K-L 展开法

$$\begin{cases} H_0: X(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_1: X(t) = s_1(t) + n(t) \end{cases} \quad t \in (t_0, t_f)$$

其中 $s_0(t), s_1(t)$ 为已知信号, $n(t)$ 为均值为零, 相关函数为 $R(\tau)$ 的正态噪声 (非白)。

$$\begin{aligned} n(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} n_k g_k(t) && \text{(时域上)} \\ n_k &= \int_0^T n(t) g_k^*(t) dt && \text{(变换域上)} \end{aligned}$$

解: K-L 展开:

其中 $g_k(t)$ 是积分方程的解,

H_0 为真时

$$\begin{aligned} x_k/H_0 &= s_{0k} + n_k \\ E[x_k/H_0] &= s_{0k} \\ Var[x_k/H_0] &= \lambda_k \end{aligned}$$

所以变换域上的 x_k/H_0 服从均值为 s_{0k} , 方差为 λ_k 的高斯分布, 变换域上观察样本矢量 X_K/H_0 似然函数为

$$f(X_K/H_0) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left[-\frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\lambda_k}\right] \right)$$

变换域上由系数组成观察样本矢量 X_K 的似然比检测为:

(1) $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t), \dots\}$ 它们在 (t_0, t_f) 上为已知完备的正交规范即

$$\int_0^T g_n(t) g_m^*(t) dt = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

实际非白噪声 $n(t)$ 展开: $n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k g_k(t)$, 希望 n_k 为白噪声, 然后转为白噪声中信号检测, **条件是什么?**

(2) 定理: 若展开系数 β_n 是正交的 $E[\beta_n, \beta_m^*] = \lambda_n \delta_{n,m}$ 则函数 $g_n(t)$ 必须满足积分方程

$$\int_0^T R_n(t, u) g_k(u) du = \lambda_k g_k(t)$$

且 $E[n_k] = 0$ $E[n_j n_k] = \lambda_k \delta_{kj} \Rightarrow Var[n_k] = \lambda_k$ 所以变换域上的 n_k 服从均值为零方差为 λ_k 的高斯分布且 $E[n_j n_k] = \lambda_k \delta_{kj}$ (正交), 相关函数为 δ 函数, 即变换域的频谱密度为均匀, 即为白噪声。

同样 $x(t)$ 可展开为:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k(t) && \text{(时域上)} \\ x_k &= \int_0^T x(t) g_k^*(t) dt && \text{(变换域上)} \end{aligned}$$

H_1 为真时,

$$\lambda(X_K) = \frac{f(X_K/H_1)}{f(X_K/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

上式两边取对数且 $N \rightarrow \infty$

$$\ln \lambda(X_K) = \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\lambda_k} (s_{1k} - s_{0k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} (s_{0k}^2 - s_{1k}^2) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \eta$$

其中

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\lambda_k} (s_{1k} - s_{0k}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \frac{x(u)}{\lambda_k} g_k^*(u) du \int_0^T [s_1(v) - s_0(v)] g_k^*(v) dv \\
&= \int_0^T \int_0^T x(u) [s_1(v) - s_0(v)] \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^*(u) g_k^*(v)}{\lambda_k} \right] dudv \\
&= \int_0^T x(u) \int_0^T [s_1(v) - s_0(v)] \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^*(u) g_k^*(v)}{\lambda_k} \right] dv du \\
&= \int_0^T x(u) h(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(u) &= \int_0^T [s_1(v) - s_0(v)] \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^*(u) g_k^*(v)}{\lambda_k} \right] dv \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{1k} - s_{0k}}{\lambda_k} g_k^*(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (s_{0k}^2 - s_{1k}^2) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \underbrace{[s_1(u) s_1(v) - s_0(u) s_0(v)] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^*(u) g_k^*(v)}{\lambda_k}}_{\text{全已知}} dudv \\
&= \eta_0
\end{aligned}$$

所以似然检测的判决规则为：

$$\int_0^T x(u) h(u) du \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} Ln\eta - \eta_0 = \gamma$$

另外：

$$\begin{aligned}
& \int_0^T R_n(t, u) h(u) du \\
&= \int_0^T R_n(t, u) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{1k} - s_{0k}}{\lambda_k} g_k^*(u) \right] du \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (s_{1k} - s_{0k}) g_k^*(t) \\
&= s_1(t) - s_0(t)
\end{aligned}$$

其中 $\left(\int_0^T R_n(t, u) g_k(u) du = \lambda_k g_k(t) \right)$

故 $h(n)$ 可以从上述积分方程求解

结论： 时域上幅度样本有色噪声 正态

K-L 展开

变换域上系数样本白噪声 正态

常规的似然比检测

实现：

实测数据

协方差函数矩阵

求特征值和特征矢量

特征矢量作为正交基函数

K-L 展开 信号检测

3.7.3 白化滤波器

一、白化处理

有色噪声中的已知信号 $\rightarrow h_w(t) \rightarrow$ 白噪声和变化后的已知信号



二、白化后检测

$$\begin{cases} H_0: & x(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_1: & x(t) = s_1(t) + n(t) \end{cases} \quad t \in (t_0, t_f)$$

$$x(t) = s_i(t) + n(t) \quad i = 0, 1$$

其中, $s_0(t), s_1(t)$ 为已知信号,

$n(t)$ 均值为零、相关函数为 $R(\tau)$ 的正态噪声

$$x(t) = s_i(t) + n(t) \xrightarrow{h_w(t)} x_w(t)$$

$$\begin{aligned}
x_w(t) &= \int_0^T h_w(t-\tau) x(\tau) d\tau \\
&= \int_0^T h_w(t-\tau) [s_i(\tau) + n(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^T h_w(t-\tau) s_i(\tau) d\tau + \int_0^T h_w(t-\tau) n(\tau) d\tau \\
&= s_{wi}(t) + n_w(t)
\end{aligned}$$

其中 $h_w(t)$ 为白化滤波器的冲激响应

$$s_{wi}(t) = \int_0^T h_w(t-\tau) s_i(\tau) d\tau \quad \text{白化滤波器输出信号}$$

$$n_w(t) = \int_0^T h_w(t-\tau) n(\tau) d\tau \quad \text{白化滤波器的噪声}$$

$$\text{要求} \quad R_{nw} = E[n_w(t) n_w(\tau)] = \delta(t-\tau)$$

$$\begin{cases} H_0: & x_w = s_{w0}(t) + n_w(t) \\ H_1: & x_w = s_{w1}(t) + n_w(t) \end{cases}$$

$n_w(t)$ 为均值零的正态白噪声

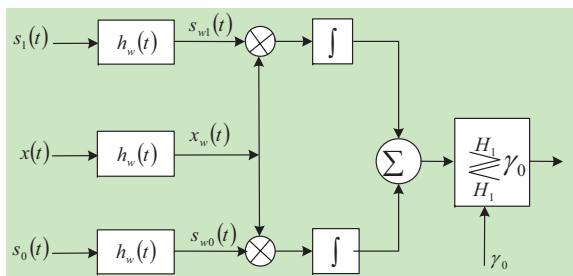
采用相关接收机检测：

$$\int_0^T x_w(t) s_{w1}(t) dt - \int_0^T x_w(t) s_{w0}(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma_0$$

$$\gamma_0 = \frac{N_0}{2} Ln\lambda_0 + \frac{1}{2} \int_0^T [s_{w1}^2(t) - s_{w0}^2(t)] dt$$

其中: N_0 为白化后白噪声的谱密度

$$\lambda_0 = \frac{p(H_0) C_{10} - C_{00}}{p(H_1) C_{01} - C_{11}}$$



三、白化滤波器的构造

设实平稳噪声的功率谱密度 (有理函数): $S_n(\omega)$

满足: 佩利-维纳条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|Ln S_n(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty \quad (\text{连续时间})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Ln S_n(\omega)| d\omega < \infty \quad (\text{离散时间})$$

根据谱分解定理:

$$S_n(s) = S_n^-(s) S_n^+(s) \quad (\text{连续时间})$$

$$S_n(z) = S_n^-(z) S_n^+(z) \quad (\text{离散时间})$$

$S_n^-(s)$ 极点在左半平面, 零点在左半平面, 或虚轴上

$S_n^-(z)$ 极点在单位圆内, 零点在单位圆内或单位圆上,

作为白化滤波器的传递函数为:

$$H_w(s) = \frac{1}{S_n^-(s)} \quad \text{连续时间}$$

$$H_w(z) = \frac{1}{S_n^-(z)} \quad \text{离散时间}$$

例: 设一个有色噪声的功率谱为

$$S_n(\omega) = \frac{1.04 + 0.4 \cos \omega}{1.25 + \cos \omega}$$

设计一个可实现的白化滤波器。

解:

$$S_n(\omega) = \frac{1.04 + 0.4 \cos \omega}{1.25 + \cos \omega} = \frac{1.04 + 0.2(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1.25 + 0.5(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}$$

所以

$$S'_n(z) = \frac{1.04 + 0.2(z + z^{-1})}{1.25 + 0.5(z + z^{-1})}$$

将 $S'_n(z)$ 进行谱分解有

$$S'_n(z) = \frac{[z + 0.2][z^{-1} + 0.2]}{[z + 0.5][z^{-1} + 0.5]}$$

单位圆内的零点、极点分别为 $z_1 = -0.2$, $z_1 = -0.5$, 则有

$$S_n^-(z) = \frac{[z + 0.2]}{[z + 0.5]}$$

于是, 白化滤波器的传递函数为:

$$H(z) = \frac{1}{S_n^-(z)} = \frac{z + 0.5}{z + 0.2}$$