

## 第七章 信号参量估计

### 内容提要

- ✓ 7.1 概述;
- ✓ 7.2 在白色高斯信道中单参量信号估计;
- ✓ 7.3 信号幅度估计
- ✓ 7.4 信号相位估计
- ✓ 7.5 信号频率估计
- ✓ 7.6 信号时延估计
- 7.7 多个信号参量的同时估计;
- 7.8 高斯色噪声情况下的估计

前面章节中已经讨论了几种重要的最佳估计准则,即几种构造估计量的基本方法。例如:

- ◆ 利用使平均风险为最小的准则,可以构造贝叶斯估计量;
- ◆ 利用使似然函数为最大的准则,可以构造极大似然估计量,等等。
- ◆ 其中最直观的一种,称为矩法或数字特征法,它是一种经典估计方法,我们以一个例子来说明。

**还有一个问题**,实际信号往往含有不止一个而是**多个未知参量**,并且要求同时估计出这些参量。

例如雷达回波信号,其幅度、频率、时延都可能是未知的。

回波幅度常常与目标的大小有关,回波频率包含目标径向速度的信息,而回波时延则含有目标距离的信息,要求同时估计出这些参量。

因此,除了讨论较为简单的单个未知参量的估计问题外,还要讨论**多个参量的联合估计**。

本章中,我们讨论在**加性高斯白噪声**中信号参量的估计,实际上,还有**高斯色噪声**中的信号参量估计。

### 7.1 概述

- 前面各章中,信号检测问题,即解决信号是否存在或者是几个信号中的哪一个信号存在的问题。
- 然而,在许多场合,信号参量的测量是至关重要的。因为所要传递的信息是调制在信号的某些参量上,而要获得这些信息就必须测定信号的参量。
- 雷达、通讯等系统就是如此。
- 在信号处理领域中,所谓信号参量的估计,就是利用接收到的混合波形(或者它的独立取样值)来确定信号的未知参量(可以是确定性的量,也可以是随机变量)。

**【例 7.1】** 假定接收波形是时间间隔(0, T)上存在的一个矩形脉冲信号和零均值高斯白噪声样本函数的混合,试利用矩法估计该脉冲的幅度。

**解** 这种情况下,接收波形可写为

$$x(t) = s(t, \alpha) + n(t) = a + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

其取样值可写为

$$x_k = a + n_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$x_k$  是  $x(t)$  的独立取样值,或称为**观测样本**,

$n_k$  为**噪声样本**, N 为样本数,噪声是零均值的。

### 7.2 在白色高斯信道中单参量信号估计

假定信号  $s(t, \alpha)$  在白色高斯信道内传输,则到达接收端的波形将被噪声污染后的信号,即

$$s(t) = s(t, \alpha) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7-1)$$

式中,  $s(t, \alpha)$  是参量  $\alpha$  随机变化或非随机但未知的单参量待估计信号,  $n(t)$  是功率频谱密度为  $N_0/2$  的白色高斯噪声。

具体说,接收到的信号和噪声的混合波形为

$$x(t) = s(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + n(t) = s(t, \alpha) + n(t)$$

式中,  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$  表示待估计的信号参量矢量。参量估计便是利用  $x(t)$  构造一个函数  $\hat{\alpha}(x)$  作为对参量  $\alpha$  的估计。

采用的**最佳估计准则不同**,函数  $\hat{\alpha}(x)$  的形式便可能不同,因此存在各种不同的估计量。

我们的任务,是利用  $x_k$  估计信号的幅度  $\alpha$ 。于是有

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

既然构造估计量的方法很多,并且对于同一个问题中的同一个未知信号参量,用不同的方法构造估计量,可能产生不同结果。

**自然提出一个问题**:在这些估计量中,究竟**哪一个更好**一些呢?或者说,我们如何评价一个估计量的好坏呢?这就涉及到我们前面章节中所讨论的评价估计量性能的标准。

现在采用**最大似然估计**的方法,由信号检测中**相关接收机**章节推导可知,给定  $\alpha$  时  $x(t)$  的似然函数为

$$p(X/\alpha) = F \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) - s(t, \alpha))^2 dt \right], F, N_0 \text{ 为常数}$$

对数似然函数为

$$\ln p(X/\alpha) = \ln F - \frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) - s(t, \alpha))^2 dt \quad (7-2)$$

对  $\alpha$  求导,得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p(X/\alpha) = \frac{2}{N_0} \int_0^T (x(t) - s(t, \alpha)) \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \quad (7-3)$$

于是  $\alpha$  的极大似然估计量  $\hat{\alpha}_{ML}$  是下面方程的解:

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{ML}(x)} = 0 \quad (7-4)$$

为了计算估计的克拉美-罗限, 将式(7-3)对  $\alpha$  再求导一次, 得

$$\frac{\partial^2 \ln p(X/\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{-2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial^2 s(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} dt$$

现在来求上式的期望。由于期望是关于  $x$  的积分运算, 而上式第一项与  $x$  无关, 故其期望等于本身; 考虑到  $x(t) - s(t, \alpha) = n(t)$ , 而  $n(t)$  是零均值的, 故第二项的数字期望为零, 于是

$$E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(X/\alpha)}{\partial \alpha^2} \right] = \frac{-2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt \quad (7-5)$$

若  $\hat{\alpha}_{ML}$  是无偏估计, 则克拉美-罗不等式为

$$E \left\{ \left[ \hat{\theta}_N - E(\theta_N) \right]^2 \right\} \geq \frac{[1 + b'_N(\theta)]^2}{I_N(\theta)}$$

$$I_N(\theta) = E \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X/\theta) \right\}^2 = -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X/\theta) \right\}$$

$$b'_N(\theta) = E \left\{ \left[ \hat{\theta}_N - E(\hat{\theta}_N) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln f(X/\theta)] \right\}$$

若  $\hat{\alpha}_{ML}$  是无偏估计  $b'_N(\theta) = E \left\{ \underbrace{\left[ \hat{\theta}_N - E(\hat{\theta}_N) \right]}_{=0} \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln f(X/\theta)] \right\} = 0$

$$\sigma_{\hat{\alpha}_{ML}}^2 \geq \frac{1}{E \left\{ \left( \frac{\partial \ln p(X/\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}} = \frac{1}{-E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(X/\alpha)}{\partial \alpha^2} \right]} = \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt} \quad (7-6)$$

利用此式可以确定零均值高斯白噪声下波形已知信号的未知参量估计量  $\hat{\alpha}_{ML}$  的克拉美-罗限。

当信号参量  $\alpha$  是已知先验概率的随机变量时, 我们可采用 Bayes 估计方法。在高斯信道中它等效于最大后验估计。可根据下式来求解  $\hat{\alpha}_{MAP}$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p(\alpha|x) = 0$$

其中  $p(\alpha|x)$  为后验概率密度,  $p(\alpha|x) = \frac{p(x|\alpha)p(\alpha)}{p(x)}$ , 如果  $p(x)$  与  $\alpha$  无关时, 上式也可写成 **似然函数**

$$\frac{\partial \ln p(\alpha|x)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln p(x|\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (7-7)$$

将式(7-3)代入上式

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha = \hat{\alpha}_{MAP}} = 0 \quad (7-8)$$

当先验概率分布比较均匀时, 上式中第二项可以忽略, 即近似为

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \right\}_{\alpha = \hat{\alpha}_{MAP}} = 0 \quad (7-9)$$

这时, 最大后验概率估计就简化为式(7-4)的最大似然估计。

下面分别用  $\alpha$  代表信号幅度、相位、频率和时延等参量来分析具体的估计问题。

### 7.3 信号幅度估计

当随机或未知参量反映在幅度上时, 信号波形可写成

$$s(t, \alpha) = A s(t) \quad (7-10)$$

式中,  $s(t)$  是确知函数,  $\alpha = A$  是待估值的参量。

因此它相当于线性调制系统中的解调问题, 而  $s(t, \alpha)$  就是在信道中传输的已调制信号。

将式(7-10)代入式(7-4)后可得最大似然估计为下式的解, 即

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{ML}(x)} = 0$$

$$\int_0^T [x(t) - A s(t)] s(t) dt \Big|_{A = \hat{A}_{ML}(x)} = 0 \quad (7-11)$$

或者

$$\hat{A}_{ML}(x) = \frac{\int_0^T x(t) s(t) dt}{\int_0^T s^2(t) dt} \quad (7-12)$$

假定  $\int_0^T s^2(t) dt = 1$ , 则得归一化后的最大似然估计值为

$$\hat{A}_{ML}(x) = \int_0^T x(t) s(t) dt \quad (7-13)$$

它相当于信号检测问题中的统计检验量  $I_s$ 。

将  $x(t) = A s(t) + n(t)$  代入后得

$$\hat{A}_{ML}(x) = \int_0^T [A s(t) + n(t)] s(t) dt = A + \int_0^T n(t) s(t) dt \quad (7-14)$$

因为式中  $A$  在观测时间  $T$  内是不变的 (尽管它未知),  $s(t)$  是确知函数,  $n(t)$  是高斯分布, 因此  $\hat{A}_{ML}(x)$  一定也是高斯分布。

它的平均值为

$$E[\hat{A}_{ML}(x)] = E \left[ \int_0^T [A s(t) + n(t)] s(t) dt \right] = A \quad (7-15)$$

因此它是无偏估计。并且其估计方差为

$$\sigma_A^2 = E \left[ \left( \hat{A}_{ML}(x) - A \right)^2 \right] = E \left[ \left( \int_0^T n(t) s(t) dt \right)^2 \right] = \int_0^T \int_0^T E \{ n(t) n(\tau) \} s(t) s(\tau) dt d\tau \quad (7-16)$$

对于白噪声  $n(t)$ , 有  $E \{ n(t) n(\tau) \} = \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau)$ , 代入式(7-16)得

$$\sigma_A^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \quad (7-17)$$

另一方面, 由于  $\frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} = s(t)$ , 则由式(7-6)可得

$$\sigma_A^2 \geq \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt} = \frac{N_0}{2} \quad (7-18)$$

$\hat{A}_{ML}(x)$  的克拉美-罗限等于  $\frac{N_0}{2}$ 。故  $A$  的极大似然估计  $\hat{A}_{ML}(x)$  是达到最小方差限的无偏估计, 因而  $\hat{A}_{ML}(x)$  是信号振幅的有效估计。

由图 7.1 可见,其中图 7.1(a)就是一个相关器,而图 7.1(b)是对  $s(t)$  匹配的滤波器,它们在性能上是等效的。

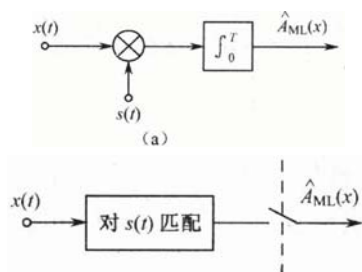


图 7.1 幅度估值最佳接收机

式(7-21)与式(7-13)相比就差一个系数  $\frac{2\sigma_A^2}{2\sigma_A^2 + N_0}$ , 因此  $\hat{A}_{ML}(x)$  所具有的性质对  $\hat{A}_{MAP}(x)$  也可适用。并且要根据式(7-21)画出最大后验幅度估计的接收机如图 7.2 所示。

由图 7.2 可见,它与图 7.1 基本相同,其区别就在于增益不一样,前者为  $(2\sigma_A^2)/(2\sigma_A^2 + N_0)$  后者为 1。

但是这两种估计方法的估计方差是不同的。在最大后验估计时其方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{MAP}(x) - kA] = k^2 \frac{N_0}{2} \quad (7-22)$$

式中,  $k = E\{\hat{A}_{MAP}(x)\} = 2\sigma_A^2/(2\sigma_A^2 + N_0)$ , 它小于 1。

相应的估计方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{ML}(x) - A] = \frac{N_0}{2E_s'} = \frac{N_0 A^2}{2E_s'} \quad (7-25)$$

如果 A 是 Gaussian 随机变量, 则由式(7-23b)得信号能量为

$$E_s = E\{A^2\}E_s' = \sigma_A^2 E_s' \quad (7-26)$$

因此式(7-21)将变成

$$\hat{A}_{MAP}(x) = \frac{2\sigma_A^2}{2\sigma_A^2 E_s' + N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (7-27)$$

相应的估值方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{MAP}(x) - kE_s' A] = \frac{k^2 N_0}{2E_s'} = \frac{k^2 N_0 A^2}{2E_s'} \quad (7-28)$$

由式(7-25)和式(7-28)可见,两种准则下估计方差均与信噪比

如果已知信号参数 A 的先验分布是 Gaussian 的, 它的方差为

$\sigma_A^2$ , 均值为零, 即

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right\} \quad (7-19)$$

采用最大后验估计:  $p(\alpha|x) = \frac{p(x|\alpha)p(\alpha)}{p(x)}$

$$\frac{\partial \ln p(\alpha|x)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln p(x|\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T (x(t) - s(t, \alpha)) \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=\hat{\alpha}_{MAP}} = 0 \quad (7-8)$$

$$\sigma_A^2 \geq \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt} = \frac{N_0}{2} \quad (7-18)$$

因此式(7-22)  $k^2 \frac{N_0}{2}$  要比式(7-18)  $\frac{N_0}{2}$  小得多, 并且  $N_0/\sigma_A^2$  (信噪比倒数) 值越大就越显著。只有在信噪比很大的情况下它们才比较接近。这说明最大后验估计是利用了信号参数的先验知识, 因此其估计质量有所提高。

$\text{SNR} = E_s/N_0$  成反比, 因此为了减小估计方差还必须提高信噪比。

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt - \frac{2}{N_0} A - \frac{A}{\sigma_A^2} \right\}_{A=\hat{A}_{MAP}(x)} = 0 \quad (7-20)$$

因此它的解

$$\hat{A}_{MAP}(x) = \frac{2\sigma_A^2}{2\sigma_A^2 + N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (7-21)$$

这就是最大后验估计量。

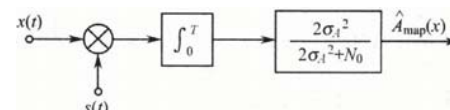


图 7.2 最大后验幅度估计接收机

另外, 以上都是在假定  $\int_0^T s^2(t)dt = 1$ , 即归一化的条件下推导的。考虑到接收到的信号能量为

$$E_s = E\{[s(t, A)]^2\} = E\{[As(t)]^2\} \quad (7-23a)$$

如果 A 是非随机未知参数, 则得

$$E_s = A^2 E\{s^2(t)\} = A^2 E_s' \quad (7-23b)$$

式中,  $E_s' = E\{s^2(t)\} = \int_0^T s^2(t)dt$  是单位幅度时的平均能量。

因此式(7-12)变成

$$\hat{A}_{ML}(x) = \frac{A^2}{E_s'} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (7-24)$$

【例 7.2】利用离散观测样本估计信号的振幅。

设观测样本为

$$x_k = As_k + n_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (7-29)$$

式中  $s_k$  是确知信号的样本,  $n_k$  是均值为零、方差为  $\sigma_n^2$  的高斯白噪声样本, A 为未知的非随机参数。要求根据观测样本  $x_k$  对系数 A 做出估计。

解 我们利用最大似然法构造估计。由题设条件, 给定 A 时 x 的概率密度即似然函数为

$$p(x|A) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{N/2} \exp\left[ -\sum_{k=1}^N \frac{(x_k - As_k)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

对数似然函数为

$$\ln p(x|A) = \ln \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{N/2} - \sum_{k=1}^N \frac{(x_k - As_k)^2}{2\sigma_n^2}$$

上式对 A 求导，并令结果等于零，得

$$\hat{A}_{ML} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k s_k}{\sum_{k=1}^N s_k^2} = C \sum_{k=1}^N x_k s_k$$

式中， $C = \left( \sum_{k=1}^N s_k^2 \right)^{-1}$  为一常数。显然，此时  $\hat{A}_{ML}$  的表达式与

式(7-13)中的振幅估计是一致的，因为和式  $\sum_{k=1}^N x_k s_k$  可以看做相积分的离散形式。

$$A \int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t + \hat{\theta}_{ML}) dt = 0 \quad (7-32)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos \hat{\theta}_{ML} \int_0^T x(t) \cos \omega_0 t dt = \sin \hat{\theta}_{ML} \int_0^T x(t) \sin \omega_0 t dt \quad (7-33)$$

因此相位估计量为

$$\hat{\theta}_{ML} = \arctan \left\{ \frac{\int_0^T x(t) \cos \omega_0 t dt}{\int_0^T x(t) \sin \omega_0 t dt} \right\} \quad (7-34)$$

我们可以分析相位估计的误差。根据式(7-35a)和(7-35b)可以求出它们的均值为

$$\bar{e}_1 = \frac{AT}{2} \sin \theta \quad \text{和} \quad \bar{e}_2 = \frac{AT}{2} \cos \theta$$

而其方差为

$$\sigma_{e_1}^2 = \sigma_{e_2}^2 = \frac{N_0 T}{4} = \sigma^2$$

式中， $\sigma^2$  是信道中的噪声功率(方差)。

不难证明估值  $\hat{A}_{ML}$  也是无偏和有效的。

## 7. 4 信号相位估计

假定在信道内传输的信号是

$$s(t, \theta) = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7-30)$$

式中，振幅 A 和角频率  $\omega_0$  为常数，但参考相位  $\theta$  是未知的或随机参量。此时最大似然相位估计可由式(7-4)来求解，即

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{ML}(x)} = 0 \quad (7-4)$$

(7-30)代入上式，并对  $\theta$  求导：

$$\left\{ \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \theta)] A \cos(\omega_0 t + \theta) dt \right\}_{\theta = \hat{\theta}_{ML}} = 0 \quad (7-31)$$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ，通常满足  $\omega_0 T \gg 1$   
容易计算上式左端第二个积分为零，

当然也可以用两路匹配滤波器来等效，它们的冲激响应分别为  $\cos \omega_0 (T - t)$  和  $\sin \omega_0 (T - t)$ 。因为反正切函数是多值函数，因此相位估计量也是多值的，但在  $-\pi \sim +\pi$  范围内只有一个数值。

图 7. 3 中两路相关器的输出分别为

$$e_1 = \int_0^T x(t) \cos \omega_0 t dt \quad (7-35a)$$

$$e_2 = \int_0^T x(t) \sin \omega_0 t dt \quad (7-35b)$$

它们是相互正交的高斯变量。

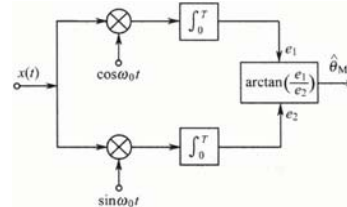


图 7. 3 最大似然相位估值接收机

由图 7. 3 可见，它由两路相关器组成，然后通过反正切函数输出。

相位估计器的第二种结构直接由式(7-32)得出，

$$A \int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t + \hat{\theta}_{ML}) dt = 0 \quad (7-32)$$

这就是图 7. 4 所示的锁相环。

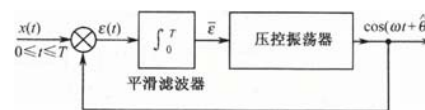


图 7. 4 锁相环

锁相环的作用是使压控振荡器的输出相位与混有噪声的接收信号的相位同步。压控振荡器的输出可以粗略看成是“干净的”或不含噪声的，因此它的输出相位便可以作为接收信号相位的估计，或者说，锁相环能够从噪声中提取接收信号的相位。下面对

此作简要说明。

参看图 7. 4，假定  $x(t)$  不含噪声(高信噪比情况接近这种理想模型)，即假定相乘器的输入为

$$x(t) \approx A \sin(\omega t + \theta)$$

相乘器的输出为

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= A \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \hat{\theta}) \\ &= \frac{A}{2} \sin(\theta - \hat{\theta}) + \frac{A}{2} \sin(2\omega t + \theta + \hat{\theta}) \end{aligned}$$

经积分器或平滑滤波器滤除  $\epsilon(t)$  的高频项以后，得

$$\bar{\epsilon} = \int_0^T \epsilon(t) dt \approx \sin(\theta - \hat{\theta})$$

对于小相位差，有



$$\bar{\varepsilon} \approx (\theta - \hat{\theta})$$

可见  $\bar{\varepsilon}$  代表误差信号。锁相环的作用就是要减小  $\bar{\varepsilon}$  并使  $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ ，即使得  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ 。使  $\bar{\varepsilon}$  趋于零也就是使积分  $\int_0^T \varepsilon(t) dt = \int_0^T x(t) \cos(\omega t + \theta) dt$  趋于零，这正好就是式 (7-32) 所表示的运算。

采用锁相环估计信号的未知相位，在电子系统中已得到广泛应用。图 7.4 的锁相环也可用图 7.5 来表示。

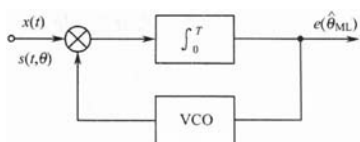


图 7.5 锁相环

## 7.5 信号频率估计

如果在信道内传输的信号是

$$s(t, \omega) = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7-40)$$

式中，幅度  $A$  和  $\theta$  初相为常数，且随机相位可以作为杂散参量被平均掉，但角频率  $\omega$  是未知常数或随机参量，那么我们要对  $\omega$  进行估计。

这种情况在雷达系统中经常遇到，例如在对运动目标进行搜索时由于多普勒效应的存在，使得收到的频率发生变化，我们可以对频率的偏差进行估计，用来确定运动目标的飞行速度是多少。在通信系统中采用角度调制方式，那么其解调器也属于对频

相位估计的克拉美-罗限可用式 (7-6) 计算。

$$\sigma_{\hat{\alpha}_{ML}}^2 \geq \frac{1}{E \left\{ \left( \frac{\partial \ln p(X/\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}} = \frac{1}{-E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(X/\alpha)}{\partial \alpha^2} \right]} = \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt} \quad (7-6)$$

由式 (7-30)， $\frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta} = A \cos(\omega t + \theta)$ ，则

$$\int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt = \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{A^2}{2} T = E \quad (7-36)$$

$E$  为信号能量。将此结果代入式 (7-6)，得

$$\sigma_{\hat{\theta}_{ML}}^2 \geq \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[ \frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt} = \frac{N_0}{2E} \quad (8-37)$$

即  $\hat{\theta}_{ML}$  的克拉美-罗限为  $N_0/2E$ 。

■ 以上都是假定信号相位  $\theta$  是非随机未知参量，因此采用最大似然估计方法。

■ 如果  $\theta$  是已知先验分布的随机变量，例如它的概率分布符合高斯型，并且其方差为  $\sigma_\theta^2$ ，那么也可以采用最大后验估计，它是 Bayes 估计的一种应用。

此时可根据式 (7-8) 求解

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=\hat{\alpha}_{MAP}} = 0 \quad (7-8)$$

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \theta)] A \cos(\omega_0 t + \theta) dt - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \right\}_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0 \quad (7-38)$$

率的估计器。

由随机相位信号检测章节分析已知，随相位信号对  $\theta$  求平均后的似然函数为

$$p(x|\omega) = \int_0^{2\pi} \text{Fexp} \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega t + \theta)]^2 dt \right\} \frac{d\theta}{2\pi} = k I_0 \left( \frac{2A}{N_0} M \right) \quad (7-41)$$

利用贝塞尔函数中的积分公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ x \cos(-\theta_0 + \theta) \} d\theta = I_0(|x|)$$

其中  $I_0(\cdot)$  为零阶虚宗量贝塞尔函数。为单调函数，(随机相位随机参量信号检测)

式中， $k$  是与  $M$  统计无关的常数，而  $M$  为充分统计量，

➤ 在高斯信噪比条件下，由于锁相环的作用是使  $\hat{\theta}_{ML} \rightarrow \theta$ ，因而相位估计量是无偏的。

➤ 还可证明  $\hat{\theta}_{ML}$  是有效的，其方差等于克拉美-罗限  $N_0/2E$ 。

或者

$$\frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t + \hat{\theta}_{MAP}) dt = \frac{\hat{\theta}_{MAP}}{\sigma_\theta^2} \quad (7-39)$$

这个模型建立起来比较复杂，因此实际上应用不多。

注意：

虽然用最大似然估值方法与最大后验估计方法相比会带来大一些估计误差，但前者实现起来容易，因此宁愿用牺牲先验知识的代价来换取技术和经济上的合理性。

它决定于

$$M^2 = \left[ \int_0^T x(t) \sin \omega t dt \right]^2 + \left[ \int_0^T x(t) \cos \omega t dt \right]^2 \quad (7-42)$$

显然式 (7-41) 是在给定  $\omega$  条件下的似然函数，它的大小与角频率有关。

$I_0(x)$  是  $x$  的单调函数

求  $p(x/\omega)$  对  $\omega$  为最大 等效于求  $M^2$  或  $M$  的最大值

故实现最大似然频率估值的接收机的单元可按式(7-42)来构成,如图7.6所示。

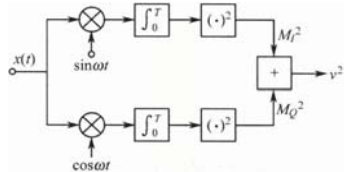


图 7.6 给定  $\omega$  时充分统计量

但是图 7.6 只给出一个频率下的充分统计量。为了寻求所有可能频率中的最大充分统计量,就必须由许多那样结构的单元来组成,然后将它们的输出进行比较,并择大输出。

显然这样组成的频率估计接收机结构比较复杂,比较实用的方案是用匹配滤波器来代替,如图 7.7 所示。

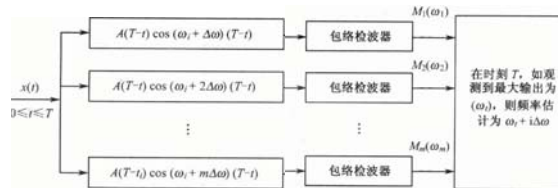


图 7.7 估计频率的最佳接收机

它是由一系列对不同频率匹配的滤波器并联所组成的,并且在各滤波器后面接有包络检波器(LDE)。每路匹配滤波器和包络检波器的功能是积分和取绝对值,它们的输出是充分统计量M。因

此只要将它们接在择大输出电路上就可以得到最大的充分统计量  $M_T$  输出,它等效于最大似然函数

$$p(x | \hat{\omega}_i) = \max p(x | \omega)$$

其中  $\omega_i = \omega_0 + i\Delta\omega$  即为最大似然频率估计量。式中  $\omega_0$  是中心角频率,  $\Delta\omega$  是频率间隔。

◆ 匹配滤波器的数目决定于预期的频率变化范围和相邻频率间隔  $\Delta\omega$ 。

◆ 显然  $\Delta\omega$  值越小,则频率估计的精度就越高,但是相应的匹配滤波器数目就越多。

◆ 同时,  $\Delta\omega$  亦不必小于频率估计的最小方差,即 C-R 下限。通常是取  $\Delta\omega = 2\pi/T$  或  $\pi/T$ , T 为信号持续时间,即观测时间。

现在来计算频率估计时的 C-R 下限(自己看)。首先可根据式(7-41)得

$$\ln p(x|\omega) = \ln k + \ln I_0 \left( \frac{2A}{N_0} M \right) \quad (7-43)$$

假定信噪比足够大,则  $D = \frac{2A}{N_0} M$  也就很大,此时可利用近似式  $\ln I_0(D) \approx D$ , 并代入式(7-43)

后得

$$\ln p(x|\omega) = \ln k + \frac{2A}{N_0} M \quad (7-44)$$

由图 7.7 可知,充分统计量 M 是匹配滤波器和包络检波后的输出,因此可以直接写成

$$M = \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (7-45)$$

式中,  $\tilde{x}(t)$  是  $x(t)$  的复包络,

$\tilde{a}^*(t)$  是归一化信号  $a(t) = s(t)/A$  的共轭复包络,它应与  $a(t)$  的复包络匹配。

在信噪比足够大的条件下  $\tilde{x}(t)$  可近似为

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{A}_x(t) = \tilde{A}_x(t) e^{j\gamma t} = A \tilde{a}(t) e^{j\gamma t} \quad (7-46)$$

式中,  $\tilde{A}_x$  是  $x(t)$  中信号部分的复包络,  $\gamma$  是频率偏差,即  $i\Delta\omega$ 。因此式(7-45)变成

$$M = \left| \int_0^T A \tilde{a}(t) \tilde{a}^*(t) de^{j\gamma t} dt \right| = A \left| \int_0^T \tilde{a}(t) | \tilde{a}(t) |^2 e^{j\gamma t} dt \right|$$

(7-47)

相应地式(7-44)可写成

$$\ln p(x|\omega) = \ln k + \frac{2A^2}{N_0} \left| \int_0^T \tilde{a}(t) | \tilde{a}(t) |^2 e^{j\gamma t} dt \right| \quad (7-48)$$

它是  $\gamma$  的函数。我们可将式(7-48)对  $\gamma$  求二次偏导后得到 C-R 下限。

现令  $z(\gamma) = \int_0^T | \tilde{a}(t) |^2 e^{j\gamma t} dt$ , 当  $\gamma = 0$  时,

$z(0) = \int | \tilde{a}(t) |^2 dt = 1$ , 其绝对值的一次导数是

$$\frac{\partial |z(\gamma)|}{\partial \gamma} = \frac{1}{2 |z(\gamma)|} [z(\gamma) z'^*(\gamma) + [z^*(\gamma) z'(\gamma)]] \quad (7-49)$$

而二次导数为

$$\frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{|z(\gamma)|} \text{Re}\{z(\gamma) z''^*(\gamma) + z'(\gamma) z'^*(\gamma)\} - \frac{1}{|z(\gamma)|^3} [\text{Re}\{z^*(\gamma) z'(\gamma)\}]^2 \quad (7-50)$$

C-R 界限是要在  $\gamma = 0$  处求二阶导数,故将此条件代入式(7-50)后得

$$\left[ \frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} \right]_{\gamma=0} = \text{Re}\{z''(0)\} + |z'(0)|^2 - [\text{Re}\{z'(0)\}]^2 \quad (7-51)$$

结合我们的情况是

$$z'(0) = j \int_0^T t | \tilde{a}(t) |^2 dt \quad (7-52)$$

和

$$z''(0) = - \int_0^T t^2 | \tilde{a}(t) |^2 dt \quad (7-53)$$

将它们代入式(7-51)得

$$\left[ \frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} \right]_{\gamma=0} = - \int_0^T t^2 | \tilde{a}(t) |^2 dt + \left[ \int_0^T t | \tilde{a}(t) |^2 dt \right]^2 \quad (7-54)$$

实际上,由式(7-40)可知,可取  $\tilde{a}(t) = 1$ , 故式(7-54)可简化为

$$\left[ \frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} \right]_{\gamma=0} = - \int_0^T t^2 dt + \left[ \int_0^T t dt \right]^2 = t_d^2 \quad (7-55)$$

式中

$$t_d^2 = - \int_0^T t^2 | \tilde{a}(t) |^2 dt + \left[ \int_0^T t | \tilde{a}(t) |^2 dt \right]^2 = - \int_0^T t^2 dt + \left[ \int_0^T t dt \right]^2 \quad (7-56)$$

注意,  $t_d$  与信号带宽的量度不同,  $t_d$  代表信号持续时间的量度,并且可以看做相对于信号平均时间的二阶中心矩。有些作者称  $t_d$  为信号的均方根时宽。

根据式(7-48)和式(7-55)可以确定最大似然频率估计时的C-R下限为

$$\left\{ - \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x|\omega)}{\partial \omega^2} \right] \right\}^{-1} = \left( \frac{2A_s^2}{N_0} \right)^{-1} \quad (7-57)$$

$$\sigma_{\omega}^2 \geq \left\{ - \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x|\omega)}{\partial \omega^2} \right] \right\}^{-1} = \frac{3N_0}{2A_s^2 T^3} = \frac{3N_0}{4E_s T^2} \quad (7-58)$$

式中,  $E_s = \frac{A_s^2 T}{2}$  是信号能量。

**结论** (由上式可见):

- 1) 频率估计的最小方差除了与信噪比  $2E_s/N_0$  成反比
- 2) 还与信号持续时间  $T$  的平方成反比。由于  $T$  与频率间隔  $\Delta\omega$  成反比, 因此  $\Delta\omega$  越小, 频率估计的最小方差就

越低, 亦即估计精度越高。

- 3) 频率估计的方差取决于信号的时宽。显然, 信噪比越大, 信号时宽越大, 则频率估计的精度越高。下面将讨论的时延估计的方差取决于信号带宽。

## 7.6 信号时延估计

我们知道, 雷达回波相对于它的发射脉冲有一段时间延迟, 时延的大小与目标距离有关。利用接收波形估计出这个时延, 就可以知道目标的距离。

为了分析方便, 假定估计是在高信噪比条件下进行的。在此, 我们先讨论基带信号, 这时信号的傅里叶变换只在零频附近存在, 相当于在超外差雷达接收机的包络检波器之后, 利用视频信号来估计时延(参看图7.8)。这样做可以避免考虑相位。

然后再讨论在中频上估计时延, 即在雷达接收机包络检波器之前, 利用中频信号来估计时延。



图 7.8 超外差雷达接收机原理框图

关于噪声的情况需要做一点说明。由图7.8容易看出, 雷达接收机包络检波器之后, 加性噪声显然不再是高斯白噪声。但是为了计算简单, 我们仍然采用高斯白噪声模型进行计算。当然, 这样得到的结果是近似的。

### 1. 在雷达视频上估计时延(基带信号)

这时信号形式为

$$s(t, \tau) = s(t - \tau) \quad \left( -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \right) \quad (7-59)$$

式中,  $\tau$  为待估计的时延。同前, 由式(7-4),  $\tau$  的极大似然估计是下述方程的解:

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{ML}(x)} = 0 \quad (7-4)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - s(t - \tau)] \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt = 0 \quad (7-60)$$

式(7-60)可以写成

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt - \int_{-T/2}^{T/2} s(t - \tau) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt = 0$$

令上式中第二个积分为  $I$ , 则

$$I = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t - \tau) dt$$

而积分  $\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t - \tau) dt$  等于信号  $s(t - \tau)$  (也就是信号  $s(t)$ ) 的能量, 为一常数, 故  $I$  恒等于零。于是时延  $\tau$  的极大似然估计是如下方程的解:

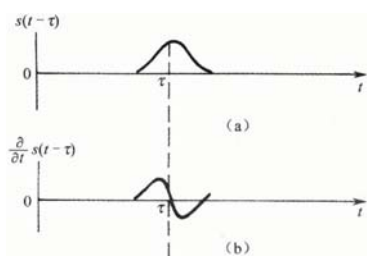
$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt = 0 \quad (7-61)$$

考虑到

$$\frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial t} \quad (7-62)$$

则  $\hat{\tau}$  为下列方程的解:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial t} dt = 0 \quad (7-63)$$



由式(7-63)可见, 对时延  $\tau$  做极大似然估计的估计器, 应使接收波形  $x(t)$  同信号的导数  $\partial s(t - \tau) / \partial \tau$  之相关积分为零, 而这正好是雷达自动跟踪环路所要完成的任务。

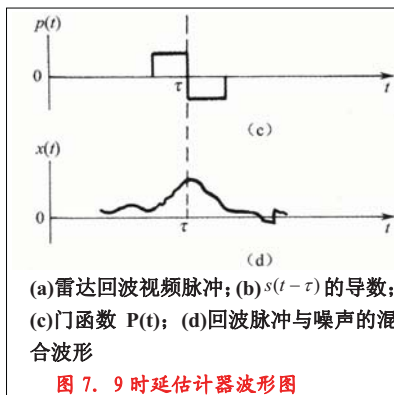


图 7.9 时延估计器波形图

参看图7.9。雷达回波视频脉冲如图7.9(a)所示。其导数  $\partial s(t - \tau) / \partial \tau$  如图7.9(b)所示, 这个导数可以用图7.9(c)所示的门函数来近似。这个门函数在雷达系统中称为距离波门。

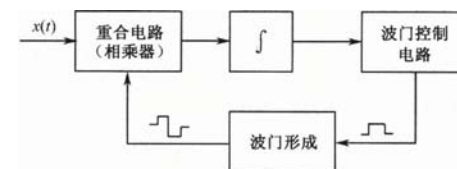


图 7.10 雷达距离跟踪环路框图

如图7.10所示。在环路中本地产生一个距离波门, 波门中心在时间轴上可以移动。

- 1) 将波门与接收波形(示于图7.9(d)中)进行时间互相关运算, 如果波门中心没有对准回波脉冲的中心, 则相关器将输出一个误差信号去控制波门形成器, 使之调节波门中心对准回波

脉冲的中心。

- 2) 对准时的波门中心就是回波视频脉冲时延的估计。显然，这也就是式(7-63)所表示的运算。

下面分析计算估计量 $\hat{\tau}$ 的克拉美-罗限(自己看)。

由式(7-6)，对于无偏估计 $\hat{\tau}$ ，我们有

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{\partial s(t-\tau)}{\partial \tau} \right]^2 dt \right\}^{-1} \quad (7-64)$$

考虑到式(7-62)，上式变为

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{\partial s(t-\tau)}{\partial t} \right]^2 dt \right\}^{-1} \quad (7-65)$$

因为是计算 $\hat{\tau}$ 的方差下限，不妨令 $\tau=0$ ，于是

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{\partial s(t)}{\partial t} \right]^2 dt \right\}^{-1} \quad (7-66)$$

已知信号波形 $s(t)$ ，由式(7-66)即可算出时延估计 $\hat{\tau}$ 的克拉美

一罗限。

为了看出 $\hat{\tau}$ 的克拉美-罗限与信噪比和信号带宽的关系，可将式(7-66)做进一步的变换。

为此，设 $s(t)$ 的傅里叶变换为 $S(j\omega)$ ，则

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

容易看出， $ds(t)/dt$ 的傅里叶变换是 $j\omega S(j\omega)$ ，由巴塞瓦定理得

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{\partial s(t)}{\partial t} \right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega$$

于是式(7-66)变为

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \left\{ \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega \right\}^{-1} \quad (7-67)$$

由于信号能量是

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$$

代入式(7-67)中，最后得

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \left( \frac{2E}{N_0} W_s^2 \right)^{-1} \quad (7-68)$$

式中， $W_s$ 是信号带宽的一种量度(以弧度为单位)，定义为

$$W_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega} \quad (7-69)$$

由此可见， $W_s^2$ 是信号频谱 $|S(j\omega)|^2$ 的归一化二阶原点矩，则称 $W_s$ 为信号 $s(t)$ 的均方根带宽。

结论：

为了减小时延估计的方差，必须提高信噪比和增加信号的带宽。

## 2. 在雷达中频上估计时延(窄带信号) (自己看)

在雷达中频上估计时延，待估信号为时延未知的随机相位信号，其相位 $\theta$ 在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布。

在窄带信号情况下，接收的混合信号 $x(t)$ 可用复包络 $\tilde{x}(t)$ 表示为

$$x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j\omega_0 t}\} \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-71)$$

而复包络 $\tilde{x}(t)$ 由两部分组成：

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}(t)e^{j\theta} + \tilde{n}(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-72)$$

式中， $\tilde{A}(t)e^{j\theta}$ 是有用信号成分的复包络， $\tilde{A}(t)$ 可以是随时间变化的复数，即允许有频率或相位调制。 $\tilde{n}(t)$ 是噪声的复包络。

为了讨论的方便，把信号振幅归一化。信号能量为

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T |\tilde{A}(t)|^2 dt \quad (7-73a)$$

引入归一化复包络 $\tilde{a}(t)$ ，它与 $\tilde{A}(t)$ 的关系为

$$\tilde{A}(t) = (2E)^{1/2} \tilde{a}(t) \quad (7-73b)$$

代入式(7-73a)，就得到归一化表达式

$$\int_0^T |\tilde{a}(t)|^2 dt = 1 \quad (7-74)$$

从前面章中，可知式(7-72)的复包络 $\tilde{x}(t)$ 的K-L展开为

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k(t)$$

式中，复本征函数 $f_k(t)$ 是如下复积分方程的解

$$\int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) f_k(\tau) d\tau = \lambda_k f_k(t)$$

核 $\tilde{R}_n(\tau)$ 为噪声自相关函数的复包络。K-L系数由下式给出

$$x_k = a_k + j\beta_k = \int_0^T \tilde{x}(t) f_k^*(t) dt$$

可以证明，窄带随机相位信号的似然函数可表示为

$$p_{\theta}(x) = C \exp \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2 + |a_k|^2}{2\lambda_k} \right] \cdot I_0(D) = k I_0(D) \quad (8-75)$$

式中， $k$ 是与待估计参量无关的量，其具体形式无需涉及。引用

下标 $\theta$ 是为了提醒我们，似然函数已经对相位进行了平均。

其统计量 $D = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k a_k}{\lambda_k} \right| = \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^* f_k^*(t)}{\lambda_k} \right] dt \right|$ 即

$$D = \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{g}^*(t) dt \right| \quad (7-76)$$

式中， $\tilde{g}(t)$ 满足积分方程

$$\int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) \tilde{g}(\tau) d\tau = \tilde{A}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7-77)$$

与上面讨论基带信号时一样，在估计时延 $\tau$ 时，我们假定观测时间 $T'$ 远大于 $\tau+T$ ， $T$ 为信号的持续时间。

上述式子是在色噪声的普遍情况下导出的。对于我们限于讨论白噪声的情况，自相关函数的复包络为



$$\tilde{R}_n(\tau) = N_0 \delta(\tau) \quad (7-78)$$

将上式代入式(7-77), 解得

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{N_0} \tilde{A}(t) = \frac{(2E)^{1/2}}{N_0} \tilde{a}(t) \quad (7-79)$$

于是式(7-76)成为

$$D = \frac{(2E)^{1/2}}{N_0} \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (7-80)$$

在估计诸如时延和频率这类信号参量时, 往往在较大的  $B/N$  条件下进行, 这样才能得到足够精确的估计。在高信噪比条件下,  $D$  值很大, 因此近似有

$$\ln I_0(D) \approx D \quad (7-81)$$

上式中的积分

$$\chi = \int_0^T \tilde{a}_x(t) \tilde{a}^*(t) dt \quad (7-87)$$

称为模糊度函数。 $|\chi|^2$  称为模糊曲面。以上所述是在窄带信号情况下讨论信号参量的最大似然估计的基础。

对数似然函数近似为

$$\ln p_\theta(x) \approx \ln k + D \quad (7-82)$$

为了进行参量估计, 需要构成统计量  $D$ 。然而由于信号参量未知, 在式(7-80)的相关积分中, 我们无法让原始信号包络  $\tilde{a}(t)$  与接收信号中的有用信号包络  $\tilde{a}_x(t)$  完全一样。

由于  $\tilde{a}_x(t)$  中含有待估计的未知参量, 与  $\tilde{a}(t)$  有差别。现在, 接收信号可以重新表示为

$$\tilde{x}(t) = (2E)^{1/2} \tilde{a}_x(t) e^{j\theta} + \tilde{n}(t) \quad (7-83)$$

把上式代入式(7-80), 可得  $D$  的表示式为

$$D = \frac{2E}{N_0} \left| \int_0^T \tilde{a}_x(t) \tilde{a}^*(t) dt + \frac{e^{j\theta}}{(2E)^{1/2}} \int_0^T \tilde{n}(t) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (8-84)$$

式中, 第二个积分代表有用信号与噪声的互相关部分, 可以合理地假定信号与噪声是统计独立或接近于统计独立的, 这样在  $2E/N$  大的情况下, 第二项可以忽略。

式中, 第一个积分与信号特性有关。包含有待估计的参量, 在高信噪比条件下,  $\tilde{a}_x(t) = \tilde{a}(t)$ , 又计及式(7-74) (即  $\int_0^T |\tilde{a}(t)|^2 dt = 1$ )。故有

$$D \approx \frac{2E}{N_0} \left| \int_0^T \tilde{a}_x(t) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (8-85)$$

于是, 在高信噪比条件下, 对数似然函数非常接近于

$$\ln p_\theta(x) \approx \ln k + \frac{2E}{N_0} \left| \int_0^T \tilde{a}_x(t) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (8-86)$$

下面就来讨论时延的最大似然估计。

对于时延估计, 接收波形可写为  $\tilde{x}(t-\tau)$ , 在高信噪比条件下, 由式(7-80)和式(7-82)可知, 对数平均似然函数正比于  $D$ , 即有

$$\ln p_\theta(x|\tau) \propto \left| \int_0^T \tilde{x}(t-\tau) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (7-88)$$

显然, 使上式取最大值的  $\tau$ , 就是  $\tau$  的极大似然估计。

因此, 时延估计器应将接收波形的复包络和随机相位信号复包络的共轭进行互相关计算, 并测量此互相关函数的包络达到峰值的时间。

下面着重讨论时延估计的克拉美—罗限。

将式(7-87)代入式(7-86), 得

$$\ln p_\theta(x|\tau) \approx \ln k + \frac{2E}{N_0} |\chi(\tau)| \quad (7-89)$$

将式(7-89)对  $\tau$  求导两次得

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln p_\theta(x|\tau) \approx \frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2} \quad (8-90)$$

将上式代入式(7-6), 得

$$\sigma_\tau^2 \geq \frac{-1}{\frac{2E}{N_0} E \left\{ \frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2} \right\}}$$

考虑到  $\chi(\tau)$  不是接收样本的函数, 可将期望算符去掉, 于是得

$$\sigma_\tau^2 \geq \frac{-1}{\frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2}} \quad (7-91)$$

余下的问题, 是求出上式分母中  $|\chi(\tau)|$  对  $\tau$  的二阶导数, 上述导数是在参量的真值处求值的。

由于是计算  $\hat{\tau}$  的方差的下限, 我们假定时延  $\tau=0$  不会失去一致性, 因此式(7-91)分母中的导数应理解为在未知参量  $\tau=0$  处求导。令

$$\chi'(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\tau), \quad \chi'(0) = \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\tau) \Big|_{\tau=0}$$

$$\chi''(\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi(\tau), \quad \chi''(0) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi(\tau) \Big|_{\tau=0}$$

考虑到

$$|\chi(\tau)| = [\chi(\tau) \chi^*(\tau)]^{1/2} \quad (7-92)$$

式中,  $\chi^*(\tau)$  代表  $\chi(\tau)$  的共轭, 将式(7-92)对  $\tau$  求导, 得

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |\chi(\tau)| = \frac{1}{2 |\chi(\tau)|} [\chi(\tau) \chi'^*(\tau) + \chi^*(\tau) \chi'(\tau)] \quad (7-93)$$

再求导一次得

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} |\chi(\tau)| = \frac{1}{|\chi(\tau)|} \text{Re} \{ \chi(\tau) \chi''^*(\tau) + \chi'^*(\tau) \chi'(\tau) \} - \frac{1}{|\chi(\tau)|^3} [\text{Re} \{ \chi^*(\tau) \chi'(\tau) \}]^2 \quad (7-94)$$

推导上式时, 利用了下列公式: 设  $\tilde{n}(t)$  为复数, 则

$$\text{Re} \{ \tilde{n}(t) \} = \frac{1}{2} [\tilde{n}(t) + \tilde{n}^*(t)]$$

当  $\tau=0$  时, 有  $\chi(0) = \chi'(0) = 1$ , 于是式(7-94)变为

$$\frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} = \text{Re} \{ \chi''(0) \} + |\chi'(0)|^2 - [\text{Re} \{ \chi'(0) \}]^2 \quad (7-95)$$

现在利用式(7-95)和式(7-91)计算时延估计的方差下限。为此, 只需算出  $\chi'(0)$  和  $\chi''(0)$ 。

对于时延未知的随机相位信号, 接收波形复包络为

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}(t-\tau) e^{j\theta} + \tilde{n}(t-\tau)$$

$\tilde{A}(t-\tau)$  又可写为

$$\tilde{A}(t-\tau) = (2E)^{1/2} \tilde{a}(t-\tau)$$

式中,  $\tilde{a}(t-\tau)$  为信号的归一化复包络。于是模糊函数写成

$$\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(t-\tau) \tilde{a}^*(t) dt \quad (7-96)$$

可以算得

$$\chi'(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}^*(t) \frac{\partial \tilde{a}(t-\tau)}{\partial \tau} dt$$

考虑到式(7-62), 上式变为

$$\chi'(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}^*(t) \frac{\partial \tilde{a}(t-\tau)}{\partial t} dt$$

于是

$$\chi''(0) = \chi'(\tau) \big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}^*(t) \tilde{a}''(t) dt \quad (7-97)$$

式中,  $\tilde{a}'(t)$  是  $\tilde{a}(t)$  对  $t$  的一阶导数。完全类似地可得

$$\chi''(0) = \chi'(\tau) \big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}^*(t) \tilde{a}''(t) dt \quad (7-98)$$

式中,  $\tilde{a}''(t)$  是  $\tilde{a}(t)$  对  $t$  的二阶导数。利用分部积分, 并设  $\tilde{a}(t)$

及其导数在时间间隔的端点处为零, 可将上式化为

$$\chi''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{a}'(t)|^2 dt \quad (7-99)$$

与基带信号时一样, 我们将用频域量表示估计  $\hat{t}$  的最小方差。设

$\tilde{a}(t)$  的傅里叶变换为  $A(j\omega)$ , 则  $\tilde{a}'(t)$  的傅里叶变换为

$$W^2 = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |A(j\omega)|^2 d\omega - \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |A(j\omega)|^2 d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega}$$

是**信号带宽的一种量度**, 为频谱  $|A(j\omega)|^2$  的归一化二阶中心矩。

利用式(7-101)可以确定窄带信号情况下时延估计的克拉美-罗限。

将窄带情况和基带情况相比较可以看出, **两者克拉美-罗限的形式完全相同**, 只是  $W$  和  $W_s$  的表达式不同。具体地说, 窄带情况下  $W^2$  表达式的分子要多出一项(第二项), 这是因为频谱  $|A(j\omega)|^2$  的均值不一定为零。

## 7. 7 多个信号参量的同时估计

## 7. 8 高斯色噪声情况下的估计

$j\omega A(j\omega)$ 。于是

$$\chi'(0) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \omega |A(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\chi''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |A(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (7-100)$$

注意到  $\chi'(0)$  为纯虚数, 故  $\text{Re}[\chi'(0)] = 0$ 。

将以上两式代入式(7-95)中, 再利用式(7-91)最后得

$$\sigma_{\hat{t}}^2 \geq \left( \frac{2E}{N_0} W^2 \right)^{-1} \quad (7-101)$$

式中

## 本章小结

1. 信号估计也是统计信号处理的一个重要内容, 它与信号检测不同, 它的功能是要在接收到的含噪信号中尽可能正确地提取随机参量或未知参量, 亦即**实现估计方差最小的有效估计**。实现信号估计的算法称为**估计器**, 它在雷达、通讯等有关应用系统中都有重要用途。

2. **最大似然估计**也是用于对信号参量的先验概率未知情况下, 但它是将似然函数最大处的参量作为估计量, 因此**不仅对未知先验概率的随机参量估计适用**, 同时对**非随机的未知参量**同样适用。采用最大似然估计的估计量与极大极小估计量相似, 由于无法利用信号参量的先验知识, 因此其**估计质量都不如贝叶斯估计那样好**, 亦即它们的平均风险要比贝叶斯估计大。

3. **克拉美-罗(C-R)下限**是代表估计质量的**理论最佳值**, 亦即估计方差的理论最小值。**可以证明**, 在具有高斯型后验概率密度的情况下, 其估计方差可以达到 C-R 下限, 这就**说明在高斯信道中采用贝叶斯估计信号参量可以实现有效估计**, 而采用极大极小估计或最大似然估计则可以**实现渐近的有效估计**。

4. 本章以随机信号**幅度、相位、频率和时延**为例, 分析计算在**白色高斯信道中单参量信号估计的方法**, 并获得实现上述**不同算法的估计器**(或称最佳接收机)。在不同的应用系统中不仅要考虑估计器的估计质量, 同时还应考虑实现这些估计器的复杂性和其他因素。