

Vĩnh thức  
Ngô Quang Hưng

Ma trận ngẫu nhiên  
Vũ Hà Văn

Thư của Kapitsa về  
khoa học  
Đàm Thanh Sơn (dịch)

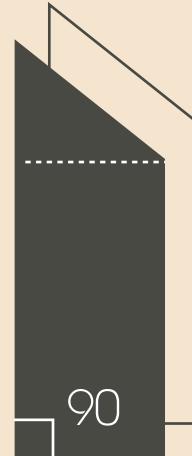
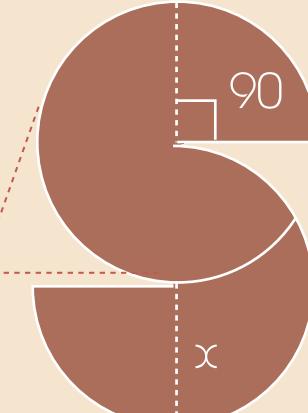
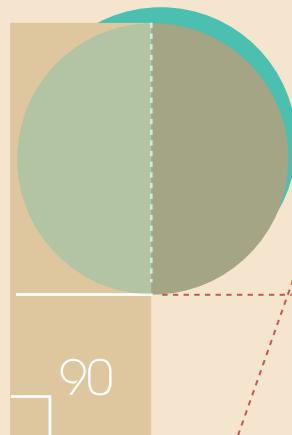
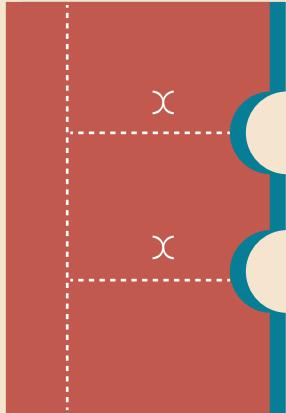
Cubic Rubik  
Trần Nam Dũng (dịch và tổng hợp)

Tự học là tốt nhưng có  
thầy tốt hơn  
Nguyễn Tiến Dũng

VÀ CÁC  
CHUYÊN MỤC  
KHÁC

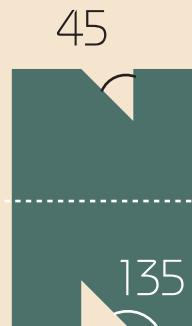
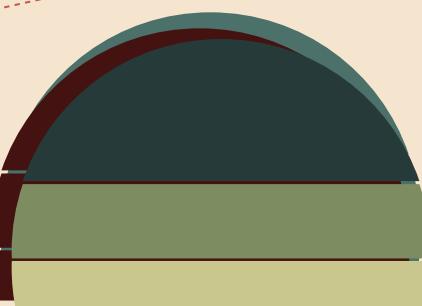
Định lí bướm kép đối  
với tứ giác.  
Nguyễn Ngọc Giang  
Trịnh Huy Vũ

**S**psilonlon  
Tạp chí online của cộng đồng  
những người yêu toán



### HENRYK MINC

ghi rằng hồi ông nộp  
một số bài báo về vĩnh  
thức giữa thế kỷ 20 thì  
có một bình duyệt viên  
nói rằng “chém ra cái  
tên gì lố bịch thế”?



MAGAZINE

Vĩnh thức -  
sách  
của  
Hàng



Nếu bạn muốn con bạn thông minh,  
hãy đọc cho chúng nghe truyện cổ  
tích. Nếu bạn muốn con bạn thông  
minh hơn, hãy đọc cho chúng nhiều  
truyện cổ tích hơn.

Albert Einstein

99





# epsilon

Tạp chí online  
của cộng đồng  
những người yêu Toán

Chủ biên: TRẦN NAM DŨNG  
Biên tập viên: VÕ QUỐC BÁ CÂN  
TRẦN QUANG HÙNG  
LÊ PHÚC LŨ  
NGUYỄN TẤT THU  
ĐẶNG NGUYỄN ĐỨC TIẾN

## LỜI NGỎ

Ban biên tập Epsilon

Epsilon số 2 ra mắt bạn đọc đúng hạn vào ngày 13/4 đã làm cho Epsilon không thuộc vào đội ngũ các Tạp chí 1 số. Tức là những tạp chí dồn công sức ra được số đầu rất hay, rất tốt nhưng cũng là duy nhất.

Có số 2 tức là sẽ hy vọng có số 3. Và bạn đọc đang đọc số 3 của tạp chí Epsilon – tạp chí online của những người yêu toán.

Qua 2 số đầu tiên, chúng ta vui mừng vì người đọc Epsilon đang nhiều lên, người biết đến và ủng hộ Epsilon nhiều lên, người viết bài cho Epsilon cũng nhiều lên. Trong buổi uống bia trưa 10/6 tại quán Hải Xồm gần Viện Toán học, chúng tôi cảm thấy vui vui khi mọi người nhắc đến Epsilon. “Hôm trước gặp hội anh Nguyễn Thành Nam, có nói chú vừa ra tờ Epsilon. Trước đó Ngô Bảo Châu cũng có nói anh rảnh thì viết bài cho Epsilon” – GS Phạm Hữu Tiệp, người vừa trình bày chuyên đề ở Viện Toán nói với tôi. “Anh rảnh viết cho em luôn bài Random walk đi anh”, “Chưa biết anh có viết được bài đó không, nhưng chắc sau trận bia này anh với chú đi ramdon walk về viện Toán”. Thấy mọi người bàn tán rôm rả về Epsilon, PGS trẻ Phạm Hoàng Hiệp, người vừa được giải thưởng Tạ Quang Bửu, còn nói đùa “Có khi anh Dũng phải đổi tên tạp chí thành 1/epsilon cũng nên”.

Nói vui là thế, chứ công việc của Epsilon thực sự là công việc đi gom những li ti để tạo nên một sản phẩm nhỏ mà ý nghĩa, để người đọc luôn có thể tìm được một điều gì đó cho mình qua một số tạp chí.

Với suy nghĩ như vậy, chúng tôi mong muốn, trân trọng và ghi nhận mọi sự đóng góp đến từ các tác giả. Epsilon hy vọng sự có mặt của mình sẽ làm cho mọi người chịu khó viết bài hơn. Các GS thì cố gắng nghiên cứu cách viết đơn giản, dễ hiểu để có thể đến với số đông. Các bạn học sinh, sinh viên cũng cố gắng viết bài có chất lượng hơn, có định hướng hơn, bước đầu làm quen

với phong cách nghiên cứu và trình bày bài báo khoa học. Các thầy giáo cũng có động lực hơn trong việc tổng kết các chuyên đề một cách hệ thống hơn, thay vì các bài viết nhỏ với các ý tưởng đơn lẻ.

Epsilon số 3 lần này quy tụ 14 bài viết chính với các chủ đề phong phú: Các bài viết của Vũ Hà Văn “Ma trận ngẫu nhiên” và Ngô Quang Hưng “Vĩnh thức và định thức Pfaff” sẽ giới thiệu với bạn đọc những vấn đề nóng hỏi của toán học hiện đại. Mục lịch sử toán học sẽ dành các trang viết của mình cho các nhà Vật lý qua bài “Những triết lý sống của Einstein” do BBT sưu tầm và “Thư của Kapitsa về khoa học” do GS Đàm Thanh Sơn dịch và giới thiệu. Mục Giảng dạy toán học lần này có bài của GS Nguyễn Tiến Dũng “Tự học là tốt nhưng có thầy tốt hơn”. Nguyễn Quốc Khánh tiếp tục chuyên mục điểm sách đầy hấp dẫn của mình qua bài “Đêm trước của những bản thảo sắp in”. Đặng Nguyễn Đức Tiến thì tạm gác chủ đề về những chiếc mũ để giới thiệu về một trong những nhà truyền bá toán học nổi tiếng nhất thế giới – Martin Gardner. Chuyên mục Các vấn đề cổ điển và hiện đại sẽ giới thiệu chuỗi bài toán đếm tam giác (dành cho học sinh tiểu học và THCS) và chuỗi bài toán về khối vuông Rubik (từ trò chơi đến lý thuyết nhóm).

Mảng toán sơ cấp, như thường lệ vẫn rất rôm rả với bài viết rất công phu “Cực trị tập hợp” của thầy Trần Minh Hiền, một tiểu phẩm xinh xinh của thầy Nguyễn Duy Liên xung quanh một bài toán thi IMO 2001. Các học sinh chuyên toán đang chuẩn bị cho các kỳ thi HSG của năm học sau chắc chắn sẽ tìm được nhiều điều bổ ích qua bài bình luận về 4 bài còn lại trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam 2015 của thầy Trần Nam Dũng.

Đặc biệt mảng hình học lần này sẽ giới thiệu một chùm hoa đẹp gồm ba bài viết do các thành viên của nhóm Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học (Vũ Thanh Tùng, Nguyễn Chương Chí, Nguyễn Ngọc Giang) phối hợp cùng biên tập viên Trần Quang Hùng và các học trò (Nguyễn Bảo Ngọc, Trịnh Huy Vũ). Những bài toán và định lý xinh xắn, những chứng minh như ảo thuật chắc chắn sẽ làm hài lòng những độc giả yêu thích hình học, còn những người chưa thích sẽ bắt đầu... thích. Làm cho những người đã thích toán thêm thích toán. Làm cho những người chưa thích toán bắt đầu thấy thích toán. Nếu hoàn

thành được 10% nhiệm vụ đó thì những người làm Epsilon quá đỗi vui mừng.

Và sẽ lại có năng lượng để bước tiếp.

Đi nhiều người, bạn sẽ đi rất xa ...

---

Tạp chí Epsilon, Số 03, 06/2015.

# MỤC LỤC

1	Lời ngỎ .....	3
2	Ma trận ngẫu nhiên .....	9
	<i>VŨ HÀ VĂN</i>	
3	VĨNH THỨC .....	29
	<i>NGÔ QUANG HƯNG</i>	
4	TỰ HỌC LÀ TỐT NHƯNG CÓ THẦY TỐT HƠN .....	61
	<i>NGUYỄN TIẾN ĐŨNG</i>	
5	THƯ CỦA KAPITSA VỀ KHOA HỌC .....	71
	<i>ĐÀM THANH SƠN</i>	
6	NHỮNG TRIẾT LÝ SỐNG CỦA EINSTEIN .....	81
	<i>BAN BIÊN TẬP EPSILON</i>	
7	LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI TST 2015 .....	89
	<i>TRẦN NAM ĐŨNG</i>	
8	MARTIN GARDNER - NGƯỜI LÀM VƯỜN CỦA TOÁN HỌC ...	105
	<i>ĐẶNG NGUYỄN ĐỨC TIẾN</i>	
9	CỰC TRỊ TẬP HỢP .....	123
	<i>TRẦN MINH HIỀN</i>	
10	MỘT BÀI TOÁN SỐ HỌC HAY VỚI NHIỀU CÁCH GIẢI .....	175
	<i>NGUYỄN DUY LIÊN</i>	

- 11 **Định lý Carnot và ứng dụng** ..... 181  
*Vũ Thanh Tùng, Nguyễn Chương Chí*
- 12 **Về một bài toán hình học từ diễn đàn AoPS** ..... 193  
*Trần Quang Hùng, Nguyễn Bảo Ngọc*
- 13 **Định lý bướm kép đối với tứ giác** ..... 205  
*Nguyễn Ngọc Giang (TP. Hồ Chí Minh)*  
*Trịnh Huy Vũ (THPT Chuyên KHTN Hà Nội)*
- 14 **Đêm trước những bản thảo sắp in** ..... 211  
*Nguyễn Quốc Khanh*
- 15 **Các vấn đề cổ điển và hiện đại** ..... 223  
*Trần Nam Dũng*

# MA TRẬN NGẦU NHIÊN

VŨ HÀ VĂN

(Đại học Yale, Mỹ)

## Lời giới thiệu

Lý thuyết ma trận ngẫu nhiên có mục tiêu chính là đưa ra những hiểu biết sâu sắc về các tính chất đa dạng của các ma trận mà các thành phần của chúng được chọn ngẫu nhiên từ các phân phối xác suất khác nhau.

Từ khi ra đời đến nay, lý thuyết ma trận ngẫu nhiên đã có những phát triển mạnh mẽ, thúc đẩy bởi những ứng dụng trong Thống kê và Giải tích số, Khoa học máy tính, Điều khiển tối ưu, và đặc biệt là các ứng dụng trong Vật lý hạt nhân.

Ở Việt Nam, lý thuyết ma trận ngẫu nhiên là một khái niệm tương đối mới. Năm 2009, người viết lời giới thiệu này, khi đang dạy cho đội tuyển Olympic Toán của Việt Nam chuẩn bị cho kỳ thi toán quốc tế IMO 2009, đã dẫn toàn bộ đội tuyển đến dự bài nói chuyện của GS Vũ Hà Văn về Ma trận ngẫu nhiên. Thú thực là mặc dù thầy và trò đều chỉ hiểu lõm bõm về những điều GS Văn nói, nhưng tất cả đều rất ấn tượng khi hàng loạt các giả thuyết đã được Vũ Hà Văn cùng Terence Tao chứng minh được với tốc độ chóng mặt.

Trong Epsilon số 3 này, được sự đồng ý của tác giả, chúng tôi trích giới thiệu nội dung 3 chương đầu trong bài báo cáo của GS Vũ Hà Văn tại Đại hội Toán học Thế giới 2014 (ICM 2014). Để giúp độc giả có thể nắm bắt được nội dung chính, chúng tôi cố gắng chú giải chi tiết nhất có thể, đồng thời đăng nguyên bản tiếng Anh để đối chiếu. Vì đây là lĩnh vực mới, ít có tài liệu tiếng Việt nên trong dịch thuật có thể có những chỗ chưa chuẩn, rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc để các phần sau được dịch tốt hơn.

Ban Biên tập.

## Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này, chúng ta sẽ trao đổi về một số bài toán trong lý thuyết ma trận ngẫu nhiên có bản chất tổ hợp.

### 1. Mở đầu

Lý thuyết ma trận ngẫu nhiên là một mảnh đất màu mỡ trong toán học. Bên cạnh những vấn đề nội tại thú vị, ma trận ngẫu nhiên đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực như Thống kê, Vật lý Toán, Tổ hợp, Khoa học Máy tính...

Trong khảo sát này, chúng tôi tập trung vào các bài toán có bản chất tổ hợp. Các bài toán này đặc biệt thú vị khi các ma trận được lấy mẫu từ một phân phối rời rạc. Các mô hình thông dụng nhất là:

- (Bernoulli)  $M_n$ : ma trận ngẫu nhiên bậc  $n$  mà các thành phần là các biến ngẫu nhiên độc lập đồng nhất theo phân phối Bernoulli (nhận các giá trị  $\pm 1$  với xác suất  $1/2$ ). Ma trận này đôi khi còn được gọi là ma trận dấu ngẫu nhiên<sup>1</sup>. Tổng cộng có tất cả  $N = 2^{n^2}$  ma trận với tất cả các thành phần là  $\pm 1$ , mỗi ma trận có xác suất  $1/N$ .
- (Bernoulli đối xứng<sup>2</sup>)  $M_n^{sym}$ : ma trận đối xứng ngẫu nhiên bậc  $n$  mà các thành phần trên và trong đường chéo là các biến ngẫu nhiên độc lập đồng nhất theo phân phối Bernoulli. Số ma trận đối xứng với thành phần  $\pm 1$  là  $M = 2^{n(n+1)/2}$  và mỗi ma trận có xác suất  $1/M$ .
- Ma trận kề của một đồ thị ngẫu nhiên. Với mỗi đồ thị ta có một ma trận kề định nghĩa như sau: Giả sử đồ thị  $G$  có  $n$  đỉnh  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ma trận kề của  $G$  là một ma trận đối xứng và tại vị trí  $ij$  ta viết 1 nếu  $ij$  là cạnh của  $G$  và 0 trong trường hợp ngược lại.

Về các mô hình đồ thị ngẫu nhiên. Trong bài viết này, chúng tôi xét trên hai mô hình: Erdős-Rényi và đồ thị đều ngẫu nhiên. Chi tiết hơn về các mô hình này, xem [6, 35].

<sup>1</sup>Random sign matrix. Toàn bộ chú thích trong bài này đều của Ban Biên tập.

<sup>2</sup>Symmetric Bernoulli.

- (Erdős-Rényi) Ta ký hiệu  $G(n, p)$  là đồ thị ngẫu nhiên trên  $n$  đỉnh, được sinh ra bằng cách vẽ cạnh nối hai điểm bất kỳ với xác suất  $p$  một cách độc lập.
- (Đồ thị đều ngẫu nhiên<sup>3</sup>) Đồ thị đều ngẫu nhiên có  $n$  đỉnh với bậc  $d$  thu được bằng cách chọn ngẫu nhiên với xác suất đều trên tập hợp tất cả các đơn đồ thị đều bậc  $d^4$  trên tập các đỉnh  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ta ký hiệu đồ thị này là  $G_{n,d}$ .

Có một chú ý quan trọng là các cạnh của  $G_{n,d}$  không độc lập<sup>5</sup>. Vì vậy, mô hình này thường khó nghiên cứu hơn mô hình  $G(n, p)$ . Ta ký hiệu  $A(n, p)$  là ma trận kề của đồ thị ngẫu nhiên Erdős-Rényi  $G(n, p)$ , và  $A_{n,d}$  là ma trận kề của  $G_{n,d}$  tương ứng.

Về ký hiệu: Trong suốt bài này,  $n$  luôn được giả sử là rất lớn. Các ký hiệu tiệm cận<sup>6</sup> như  $o, O, \Theta$  đều được hiểu khi  $n$  tiến tới vô cùng. Ta viết  $A \ll B$  nếu  $A = o(B)$ .  $c$  ký hiệu cho hằng số chung<sup>7</sup>. Tất cả các logarit đều là logarit tự nhiên nếu không nói khác đi.

## 2. Xác suất suy biến

Bài toán tổ hợp nổi tiếng nhất về ma trận ngẫu nhiên có lẽ là bài toán suy biến<sup>8</sup>. Gọi  $p_n$  là xác suất ma trận  $M_n$  suy biến (một ma trận vuông suy biến nếu định thức bằng 0). Hiển nhiên là:

$$p_n \geq 2^{-n}$$

vì vế phải là xác suất để hai dòng đầu của ma trận bằng nhau<sup>9</sup>.

Vì ta có thể chọn hai dòng (cột) bất kỳ (thay vì chỉ chọn 2 dòng đầu) và có thể thay dấu bằng bởi dấu bằng khi cùng nhân với

<sup>3</sup>Random regular graph.

<sup>4</sup>Đồ thị đều bậc  $d$  ( $d$ -regular graph) là đồ thị mà mọi đỉnh đều có bậc bằng  $d$ . Ví dụ đồ thị đều bậc 0 có mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập, đồ thị đầy đủ  $K_n$  là đồ thị đều bậc  $n - 1$ .

<sup>5</sup>Nghĩa là xác suất tồn tại của các cạnh của  $G_{n,d}$  không độc lập với nhau, trong khi xác suất ở các cạnh của  $G(n, p)$  là độc lập.

<sup>6</sup>Asymptotic notation.

<sup>7</sup>Universal constant. Đôi khi vẫn được dịch là hằng số phổ dụng hay hằng số độc lập.

<sup>8</sup>Singularity problem.

<sup>9</sup>Ma trận có 2 dòng bất kỳ bằng nhau có định thức bằng 0.

$\pm 1^{10}$ , ta có được cận dưới tốt hơn một chút:

$$p_n \geq (4 - o(1)) \binom{n}{2} 2^{-n} = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^n \quad (2.1)$$

Một giả thuyết được đặt ra là:

**Giả thuyết 2.1.** [Giả thuyết về suy biến]  $p_n = (\frac{1}{2} + o(1))^n$ .

Giả thuyết 2.1 vẫn là bài toán mở, nhưng ta có thể phát biểu những giả thuyết chính xác hơn (xem [4]), dựa vào những "niềm tin" sau:

**Hiện tượng I.**<sup>11</sup> *Lý do chủ yếu để một ma trận ngẫu nhiên suy biến là sự phụ thuộc của một số ít hàng/cột.*

Thực sự thì ngay cả việc chứng minh  $p_n = o(1)$  đã là không đơn giản. Kết quả này lần đầu tiên được chứng minh bởi Komlós [38] vào năm 1967 (trong phần 3 của bài này, chúng tôi sẽ đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho định lý Komlós). Sau đó Komlós (xem [6]) tìm được chứng minh mới cho cận trên:  $p_n = O(n^{-1/2})$ . Trong một bài báo quan trọng, Kahn, Komlós và Szemerédi [37] lần đầu tiên đã đưa ra được cận trên theo hàm mũ:

**Định lý 2.2.**  $p_n \leq .999^n$ .

Lập luận của Kahn, Komlós và Szemerédi đã được đơn giản hóa bởi Tao và Vũ trong bài báo [66] năm 2004, dẫn đến một cận trên tốt hơn 1 chút  $O(.958^n)$ . Sau đó ít lâu, các tác giả này [67] kết hợp cách tiếp cận trong [37] với ý tưởng của các định lý đảo (xem [71], chương 7) hay [53] đã đạt kết quả rất quan trọng:

**Định lý 2.3.**  $p_n \leq (3/4 + o(1))^n$ .

Không dừng lại ở đó, Bourgain, Vũ và Wood ở bài báo [9] đã dùng thêm một ý tưởng về không gian có chiều phân số để tiếp tục cải thiện cận trên:

**Định lý 2.4.**  $p_n \leq (\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1))^n$ .

---

<sup>10</sup>Nghĩa là ta có thể chọn 2 dòng (hoặc cột) bất kỳ có cùng trị tuyệt đối thay vì bằng nhau.

<sup>11</sup>Ở đây tác giả dùng "Phenomenon" nên chúng tôi đổi dịch là "Hiện tượng". Đây là một cách dùng lạ, vì nó mang tính trực giác nhiều cho vấn đề đang xét.

Hai phương pháp trên [67, 9] cho phép chúng ta thu được các cận trên của  $p_n$  trực tiếp từ các ước tính lượng giác đơn giản. Ví dụ cận trên  $3/4$  có được từ:

$$|\cos x| \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2x,$$

trong khi cận  $1/\sqrt{2}$  thu được từ

$$|\cos x|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Định lý 2.2 ở [9] đã đưa ra một mối liên hệ hình thức giữa các ước lượng suy biến và các ước lượng lượng giác. Các liên hệ này mặc dù chưa thể dùng để giải bài toán suy biến tổng quát, nhưng có thể sử dụng để ước tính khá chính xác các cận trên trong một số trường hợp, chẳng hạn như xác suất suy biến của ma trận ngẫu nhiên với các thành phần  $(0, \pm 1)$ .

Để kết thúc mục này, chúng tôi đề cập đến một công cụ rất hữu ích: định lý Littlewood-Offord-Erdős. Gọi  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  là tập hợp gồm  $n$  số thực khác 0 và  $\xi_1, \dots, \xi_n$  là các biến ngẫu nhiên Bernoulli độc lập phân bố đồng nhất. Định nghĩa  $S := \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$  và  $p_{\mathbf{v}}(a) = \mathbf{P}(S = a)$  và  $p_{\mathbf{v}} = \sup_{a \in \mathbf{Z}} p_{\mathbf{v}}(a)$ .

Vào những năm 1940, Littlewood và Offord đã đưa ra cách ước tính  $p_{\mathbf{v}}$  (ở [45]) như thành tố kỹ thuật chính trong các nghiên cứu của họ về nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên. Erdős, bằng cách cải thiện kết quả của Littlewood và Offord, đã chứng minh định lý sau mà chúng ta gọi là bất đẳng thức quả bóng nhỏ Erdős-Littlewood-Offord (xem [53] để rõ hơn về cái tên này).

**Định lý 2.5.** (Bất đẳng thức quả bóng nhỏ) Giả sử  $v_1, \dots, v_n$  là các số thực khác 0 và  $\xi_1, \dots, \xi_n$  là các biến ngẫu nhiên Bernoulli độc lập phân bố đồng nhất. Khi đó:

$$p_{\mathbf{v}} \leq \frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n} = O(n^{-1/2}).$$

Định lý 2.5 là một kết quả kinh điển trong tổ hợp và có rất nhiều những mở rộng và hệ quả sâu xa (xem [7, 34, 53], [71, Chương 7] và các tài liệu tham khảo ở đó).

Để độc giả có thể cảm nhận được làm sao bắt đằng thức quả bóng nhỏ có thể có ích trong việc đánh giá  $p_n$ , ta xếp các dòng của  $M_n$  từng dòng một từ trên xuống dưới. Giả sử rằng  $n - 1$  dòng đầu là độc lập và tạo thành một siêu phẳng với véc-tơ pháp tuyến  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Khi đó, xác suất để  $M_n$  suy biến là:

$$\mathbf{P}(X \cdot \mathbf{v} = 0) = \mathbf{P}(\xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n = 0),$$

trong đó  $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  là dòng cuối cùng.

Trong phần 3, độc giả sẽ thấy một ứng dụng của định lý 2.5 dẫn đến kết quả gốc của Komlós:  $p_n = o(1)$ . Để thu được các đánh giá mạnh hơn các kết quả ở định lý 2.3 và 2.4, ta cần thiết lập các định lý Littlewood-Offord đảo, dựa trên nguyên lý tổng quát sau:

**Hiện tượng II.** Nếu  $\mathbf{P}(X \cdot \mathbf{v} = 0)$  là tương đối lớn thì các hệ số  $v_1, \dots, v_n$  có một cấu trúc cộng tính mạnh.

Các định lý này được thúc đẩy bởi các định lý đảo kiểu Freiman trong tổ hợp cộng tính<sup>12</sup> mà việc thảo luận nằm ngoài phạm vi của khảo sát này. Độc giả quan tâm có thể xem chi tiết ở [53].

### 3. Một chứng minh đơn giản của định lý Komlós $p_n = o(1)$

Ta hãy bắt đầu từ một tính chất đơn giản. Từ đây về sau véc-tơ Bernoulli được hiểu là véc-tơ với tọa độ  $\pm 1$ .

**Tính chất 3.1.** Cho  $H$  là không gian con  $1 \leq d \leq n$  chiều. Khi đó  $H$  chứa nhiều nhất  $2^d$  véc-tơ Bernoulli.

Để thấy điều này, ta chú ý rằng trong không gian con  $d$  chiều, tồn tại một tập hợp  $d$  tọa độ xác định các tọa độ còn lại<sup>13</sup>. Tính chất này suy ra:

$$p_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_{i+1} \in H_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-n} \leq 1 - \frac{2}{2^n}.$$

---

<sup>12</sup>Additive Combinatorics.

<sup>13</sup>Trong không gian  $d$  chiều, có thể dùng  $d$  véc-tơ cơ sở để biểu diễn mọi véc-tơ trong không gian đó.

Rất không hay là điều này đối nghịch với kết quả chúng ta muốn chứng minh, nhưng đừng vội nản chí, màn hay hãy còn ở phần sau! Để thu được cận trên  $o(1)$  mong muốn, ta cần chứng minh rằng tổng của một số hạng tử cuối, chẳng hạn  $\log \log n$ , không vượt quá (chẳng hạn)  $\frac{1}{\log^{1/3} n}$ . Để chứng minh điều này, ta sẽ sử dụng tính chất  $H_i$  được sinh bởi các véc-tơ ngẫu nhiên.

Bổ đề sau sẽ suy ra định lý Komlós thông qua định lý cận hợp<sup>14</sup>:

**Bổ đề 3.1.** Cho  $H$  là không gian con sinh bởi  $d$  véc-tơ ngẫu nhiên, trong đó  $d \geq n - \log \log n$ . Khi đó với xác suất ít nhất  $1 - \frac{1}{n}$ ,  $H$  chứa nhiều nhất  $\frac{2^n}{\log^{1/3} n}$  véc-tơ Bernoulli.

Ta nói rằng tập hợp  $S$  gồm  $d$  véc-tơ là *k-phổ dụng* nếu với bất kỳ tập  $k$  chỉ số khác nhau  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  và bất kỳ tập dấu  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  ( $\epsilon_i = \pm 1$ ) nào, tồn tại một véc-tơ  $v$  thuộc  $S$  sao cho dấu của tọa độ thứ  $i_j$  của  $v$  bằng  $\epsilon_j$ , với mọi  $1 \leq j \leq k$ .

**Tính chất 3.2.** Nếu  $d \geq n/2$  thì  $1 - \frac{1}{n}$  là xác suất thấp nhất cho tập hợp gồm  $d$  véc-tơ ngẫu nhiên là *k-phổ dụng* với  $k := \log n/10$ .

Để chứng minh điều này, ta chú ý rằng xác suất thất bại, theo định lý cận hợp, sẽ không vượt quá

$$\binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^d \leq n^k \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n/2} \leq n^{-1}.$$

Nếu  $S$  là *k-phổ dụng*, thì một véc-tơ  $v$  khác 0 trong phần bù trực giao của không gian con sinh bởi  $S$  sẽ có nhiều hơn  $k$  véc-tơ khác 0 (nếu không, sẽ có một véc-tơ trong  $S$  có tích trong<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Union bound. Còn được gọi là bất đẳng thức Boole, phát biểu rằng với mọi tập hữu hạn hoặc đếm được thì xác suất để ít nhất một sự kiện xảy ra nhỏ hơn tổng xác suất của tất cả các sự kiện, nghĩa là nếu  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  là các sự kiện thì:

$$P\{\exists i : E_i \text{ xảy ra}\} = P\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} P\{E_i\}$$

Ở một số tài liệu union bound còn được gọi là định lý tổng xác suất.

<sup>15</sup>Inner product.

dương với  $v$ ). Nếu ta cố định véc-tơ  $v$  này và giả sử  $X$  là véc-tơ ngẫu nhiên Bernoulli thì theo định lý **2.5**

$$\mathbf{P}(X \in \text{Span}(S)) \leq \mathbf{P}(X \cdot v = 0) = O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right) \leq \frac{1}{\log^{1/3} n},$$

và bổ đề **3.1** cùng định lý được chứng minh.

\* \* \*

Phần bài viết sẽ được tiếp tục giới thiệu ở các số Epsilon tiếp theo. Chúng tôi cũng đính kèm bản gốc tiếng Anh để bạn đọc tiện theo dõi ở phần sau.

(Van H. Vu)\*

**Keywords.** General mathematics, collection of articles.

**Abstract.** In this survey, we discuss several problems in Random Matrix theory of combinatorial nature.

## 1. Introduction

The theory of random matrices is a very rich topic in mathematics. Beside being interesting in its own right, random matrices play fundamental role in various areas such as statistics, mathematical physics, combinatorics, theoretical computer science, etc.

In this survey, we focus on problems of combinatorial nature. These problems are most interesting when the matrix is sampled from a discrete distribution. The most popular models are:

- (Bernoulli)  $M_n$ : random matrix of size  $n$  whose entries are i.i.d. Bernoulli random variables (taking values  $\pm 1$  with probability  $1/2$ ). This is sometimes referred to as the random sign matrix.
- (Symmetric Bernoulli)  $M_n^{sym}$ : random symmetric matrix of size  $n$  whose (upper triangular) entries are i.i.d. Bernoulli random variables.
- Adjacency matrix of a random graph. This matrix is symmetric and at position  $ij$  we write 1 if  $ij$  is an edge and zero otherwise.
- Laplacian of a random graph.

*Model of random graphs.* We consider two models: Erdős-Rényi and random regular graphs. For more information about these models, see [6, 35].

- (Erdős-Rényi) We denote by  $G(n, p)$  a random graph on  $n$  vertices, generated by drawing an edge between any two vertices with probability  $p$ , independently.

---

\*Yale University.

- (Random regular graph) A random regular graph on  $n$  vertices with degree  $d$  is obtained by sampling uniformly over the set of all simple  $d$ -regular graphs on the vertex set  $\{1, \dots, n\}$ . We denote this graph by  $G_{n,d}$ .

It is important to notice that the edges of  $G_{n,d}$  are not independent. Because of this, this model is usually harder to study, compared to  $G(n,p)$ .

We denote by  $A(n,p)$  ( $L(n,p)$ ) the adjacency (laplacian) matrix of the Erdős-Rényi random graph  $G(n,p)$  and by  $A_{n,d}$  ( $L_{n,d}$ ) the adjacency (laplacian) matrix of  $G_{n,d}$ , respectively.

*Notation.* In the whole paper, we assume that  $n$  is large. The asymptotic notation such as  $o, O, \Theta$  is used under the assumption that  $n \rightarrow \infty$ . We write  $A \ll B$  if  $A = o(B)$ .  $c$  denotes a universal constant. All logarithms have natural base, if not specified otherwise.

## 2. The singular probability

The most famous combinatorial problem concerning random matrices is perhaps the "singularity" problem. Let  $p_n$  be the probability that  $M_n$  is singular. Trivially,

$$p_n \geq 2^{-n},$$

as the RHS is the probability that the first two rows are equal.

By choosing any two rows (columns) and also replacing equal by equal up to sign, one can have a slightly better lower bound

$$p_n \geq (4 - o(1)) \binom{n}{2} 2^{-n} = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^n. \quad (1)$$

It has been conjectured, for quite sometime, that

**Conjecture 2.1.** [*Singularity Conjecture*]  $p_n = (\frac{1}{2} + o(1))^n$ .

Conjecture 2.1 is still open, but one can formulate even more precise conjectures (see [4]), based on the following belief

**Phenomenon I.** *The dominating reason for singularity is the dependency between a few rows/columns.*

It is already non-trivial to prove that  $p_n = o(1)$ . This was first done by Komlós [38] in 1967 and in Section 3, we will give a short proof of this fact. Later, Komlós

(see [6]) found a new proof which gave quantitative bound  $p_n = O(n^{-1/2})$ . In an important paper, Kahn, Komlós and Szemerédi [37] proved the first exponential bound.

**Theorem 2.2.**  $p(n) \leq .999^n$ .

Their arguments were simplified by Tao and Vu in 2004 [66], resulting in a slightly better bound  $O(.958^n)$ . Shortly afterwards, these authors [67] combined the approach from [37] with the idea of inverse theorems (see [71, Chapter 7] or [53] for surveys) to obtain a more significant improvement

**Theorem 2.3.**  $p(n) \leq (3/4 + o(1))^n$ .

With an additional twist, Bourgain, Vu and Wood [9] improved the bound further

**Theorem 2.4.**  $p(n) \leq (\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1))^n$ .

The method from [67, 9] enables one to deduce bounds on  $p_n$  directly from simple trigonometrical estimates. For instance, the  $3/4$ -bound comes from the fact that

$$|\cos x| \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2x,$$

while the  $1/\sqrt{2}$  bound come from

$$|\cos x|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

[9, Theorem 2.2] provides a formal connection between singularity estimates and trigonometrical estimates of this type, which, while not yet solve the Singularity Conjecture, does lead to sharp bounds in other situations, such as singularity of random matrices with  $(0, \pm 1)$  entries).

To conclude this section, let us mention a very useful tool, the Littlewood-Offord-Erdős theorem. Let  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  be a set of  $n$  non-zero real numbers and  $\xi_1, \dots, \xi_n$  be i.i.d random Bernoulli variables. Define  $S := \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$  and  $p_{\mathbf{v}}(a) = \mathbf{P}(S = a)$  and  $p_{\mathbf{v}} = \sup_{a \in \mathbf{Z}} p_{\mathbf{v}}(a)$ .

The problem of estimating  $p_{\mathbf{v}}$  came from a paper of Littlewood and Offord in the 1940s [45], as a key technical ingredient in their study of real roots of random polynomials. Erdős, improving a result of Littlewood and Offord, proved the following theorem, which we will refer to as the Erdős-Littlewood-Offord small ball inequality; see [53] for an explanation of this name.

**Theorem 2.5. (Small ball inequality)** *Let  $v_1, \dots, v_n$  be non-zero numbers and  $\xi_i$  be i.i.d Bernoulli random variables. Then*

$$p_{\mathbf{v}} \leq \frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n} = O(n^{-1/2}).$$

Theorem 2.5 is a classical result in combinatorics and have many non-trivial extensions with far reaching consequences (see [7, 34, 53], [71, Chapter 7] and the references therein).

To give the reader a feeling about how small ball estimates can be useful in estimating  $p_n$ , let us expose the rows of  $M_n$  one by one from top to bottom. Assume that the first  $n-1$  rows are independent and form a hyperplane with normal vector  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Conditioned on these rows, the probability that  $M_n$  is singular is

$$\mathbf{P}(X \cdot \mathbf{v} = 0) = \mathbf{P}(\xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n = 0),$$

where  $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  is the last row.

In Section 3, the reader will see an application of Theorem 2.5 that leads to Komlós' original result  $p_n = o(1)$ . In order to obtain the stronger estimates in Theorems 2.3 and 2.4, one needs to establish Inverse (or structural) Littlewood-Offord theorems, based on the following general principle

**Phenomenon II.** *If  $\mathbf{P}(X \cdot \mathbf{v} = 0)$  is relatively large, then the coefficients  $v_1, \dots, v_n$  possess a strong additive structure.*

These theorems are motivated by inverse theorems of Freiman type in Additive Combinatorics, the discussion of which is beyond the scope of this survey. The interested reader is referred to [53] for a detailed discussion.

### 3. A simple proof of Komlós' Theorem

Let us start with a simple fact. Here and later Bernoulli vectors mean vectors with coordinates  $\pm 1$ .

**Fact 3.1.** *Let  $H$  be a subspace of dimension  $1 \leq d \leq n$ . Then  $H$  contains at most  $2^d$  Bernoulli vectors.*

To see this, notice that in a subspace of dimension  $d$ , there is a set of  $d$  coordinates which determine the others. This fact implies

$$p_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_{i+1} \in H_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-n} \leq 1 - \frac{2}{2^n}.$$

While this bound is quite the opposite of what we want to proof, notice that the loss comes at the end. Thus, to obtain the desired upper bound  $o(1)$ , it suffices to

show that the sum of the last (say)  $\log \log n$  terms contribute at most (say)  $\frac{1}{\log^{1/3} n}$ . To do this, we will exploit the fact that the  $H_i$  are spanned by random vectors. The following lemma implies the theorem via the union bound.

**Lemma 3.1.** *Let  $H$  be the subspace spanned by  $d$  random vectors, where  $d \geq n - \log \log n$ . Then with probability at least  $1 - \frac{1}{n}$ ,  $H$  contains at most  $\frac{2^n}{\log^{1/3} n}$  Bernoulli vectors.*

We say that a set  $S$  of  $d$  vectors is  $k$ -universal if for any set of  $k$  different indices  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  and any set of signs  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  ( $\epsilon_i = \pm 1$ ), there is a vector  $v$  in  $S$  such that the sign of the  $i_j$ th coordinate of  $v$  matches  $\epsilon_j$ , for all  $1 \leq j \leq k$ .

**Fact 3.2.** *If  $d \geq n/2$ , then with probability at least  $1 - \frac{1}{n}$ , a set of  $d$  random vectors is  $k$ -universal, for  $k := \log n/10$ .*

To prove this, notice that the failure probability is, by the union bound, at most

$$\binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^d \leq n^k \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n/2} \leq n^{-1}.$$

If  $S$  is  $k$ -universal, then any non-zero vector  $v$  in the orthogonal complement of the subspace spanned by  $S$  should have more than  $k$  non-zero vectors (otherwise, there would be a vector in  $S$  having positive inner product with  $v$ ). If we fix such  $v$  and let  $X$  be a random Bernoulli vector, then by Theorem 2.5,

$$\mathbf{P}(X \in \text{Span}(S)) \leq \mathbf{P}(X \cdot v = 0) = O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right) \leq \frac{1}{\log^{1/3} n},$$

proving Lemma 3.1 and the theorem.

## Tài liệu tham khảo

- [1] N. Alon, Eigenvalues and expanders, *Combinatorica* 6(1986), no. 2, 83-96.
- [2] N. Alon and V. Milman,  $\lambda_1$ - isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators, *J. Combin. Theory Ser. B* 38 (1985), no. 1, 73-88.
- [3] N. Alon and J. Spencer, The probabilistic method, 3rd ed., *John Wiley & Sons Inc.*, Hoboken, NJ, 2008.
- [4] R. Arratia and S. DeSalvo, On the singularity of random Bernoulli matrices—novel integer partitions and lower bound expansions, *Ann. Comb.* 17 (2013), no. 2, 251-274.
- [5] Z. Bai and J. Silverstein, Spectral analysis of large dimensional random matrices. Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2010.
- [6] B. Bollobás, Random graphs. Second edition, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 73. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [7] B. Bollobás, Combinatorics. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [8] C. Bordenave, M. Lelarge, and J. Salez, The rank of diluted random graphs, *Ann. Probab.* 39 (2011), no. 3, 1097-1121.
- [9] J. Bourgain, V. Vu and P. M. Wood, On the singularity probability of discrete random matrices, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), no. 2, 559–603.
- [10] S. Brooks and E. Lindenstrauss, Non-localization of eigenfunctions on large regular graphs, *Israel J. Math.* 193 (2013), no. 1, 1-14
- [11] Chung, F. R. K.; Graham, R. L.; Wilson, R. M. Quasi-random graphs. *Combinatorica* 9 (1989), no. 4, 345–362.
- [12] F. Chung, Spectral graph theory, *CBMS series*, no. 92 (1997).

- [13] K. Costello, Bilinear and quadratic variants on the Littlewood-Offord problem, *Israel J. Math.* 194 (2013), no. 1, 359–394.
- [14] K. Costello and V. Vu, The ranks of random graphs. *Random Structures and Algorithm.* 33 (2008), 269–285
- [15] K. Costello and V. Vu, The rank of sparse random matrices, *Combin. Probab. Comput.* 19 (2010), no. 3, 321–342.
- [16] K. Costello, T. Tao and V. Vu, Random symmetric matrices are almost surely singular, *Duke Math. J.* 135 (2006), no. 2, 395–413.
- [17] Y. Dekel, J. Lee, and N. Linial. Eigenvectors of random graphs: Nodal domains. *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*, pages 436–448, 2008.
- [18] I. Dimitriu and S. Pal, Sparse regular random graphs: spectral density and eigenvectors, *Ann. Probab.* 40 (2012), no. 5, 2197–2235.
- [19] A. Edelman, E. Kostlan and M. Shub, How many eigenvalues of a random matrix are real? *J. Amer. Math. Soc.* 7 (1994), no. 1, 247–267.
- [20] A. Edelman, Eigenvalues and condition numbers of random matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 9 (1988), 543–560.
- [21] P. Erdős, On a lemma of Littlewood and Offord, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 898–902.
- [22] L. Erdős, A. Knowles, H-T. Yau and J. Yin, Spectral statistics of Erdős-Rényi graphs I: Local semicircle law, *Ann. Probab.* 41 (2013).
- [23] L. Erdős, A. Knowles, H-T. Yau and J. Yin, Spectral statistics of Erdős-Rényi Graphs II: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues, *Comm. Math. Phys.* 314 (2012), no. 3, 587–640.

- [24] L. Erdős, B. Schlein and H-T. Yau, Wegner estimate and level repulsion for Wigner random matrices, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2010, no. 3, 436–479.
- [25] L. Erdős and H-T. Yau, Universality of local spectral statistics of random matrices, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 49 (2012), no. 3, 377–414.
- [26] J. Friedman. On the second eigenvalue and random walks in random d-regular graphs. *Technical Report CX-TR-172-88*, Princeton University, August 1988.
- [27] J. Friedman, A proof of Alon's second eigenvalue conjecture and related problems. (English summary) *Mem. Amer. Math. Soc.* 195 (2008), no. 910, viii+100 pp.
- [28] J. Friedman and D-E. Kohler, The Relativized Second Eigenvalue Conjecture of Alon, *preprint*.
- [29] Z. Füredi and J. Komlós, The eigenvalues of random symmetric matrices, *Combinatorica* 1 (1981), no. 3, 233–241.
- [30] V. L. Girko, A refinement of the central limit theorem for random determinants. (Russian) *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 42 (1997), no. 1, 63–73; translation in *Theory Probab. Appl.* 42 (1997), no. 1, 121–129 (1998)
- [31] V. L. Girko, A central limit theorem for random determinants. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.* 21 (1979), 35–39, 164.
- [32] A. Guionnet and O. Zeitouni, Concentration of the spectral measure for large matrices, *Electron. Comm. Probab.* 5 (2000), 119–136.
- [33] H. Golstein and J. von Neumann, Numerical inverting of matrices of high order, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 1021–1099.
- [34] G. Halász, Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability, *Period. Math. Hungar.* 8 (1977), no. 3-4, 197–211.
- [35] S. Janson, T. Luczak and A. Rucinski, Random Graphs, *Wiley-Interscience* (2000)

- [36] J. Kahn and E. Szemerédi, STOC 1989.
- [37] J. Kahn, J. Komlós, E. Szemerédi, On the probability that a random  $\pm 1$  matrix is singular, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 223–240.
- [38] J. Komlós, On the determinant of  $(0, 1)$  matrices, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967) 7-22.
- [39] J. Komlós, On the determinant of random matrices, *Studia Sci. Math. Hungar.* **3** (1968) 387–399.
- [40] M. Krivelevich and B. Sudakov, Pseudo-random graphs. *More sets, graphs and numbers*, 199–262, Bolyai Soc. Math. Stud., 15, Springer, Berlin, 2006.
- [41] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs, *Combinatorica*, 8(3):261-277, 1988.
- [42] G.A. Margulis , Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and superconcentrators [in Russian] . *Problemy Peredachi Informatsii* 24 (1988), pp. 51-60.
- [43] B.D. McKay. The expected eigenvalue distribution of a large regular graph. *Linear Algebra and its Applications*, 40:203-216, 1981.
- [44] P. Mitra, Entrywise bounds for eigenvectors of random graphs. *Electron. J. Combin.* 16 (2009), no. 1, Research Paper 131,
- [45] J. E. Littlewood and A. C. Offord, On the number of real roots of a random algebraic equation. III. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* **12** , (1943). 277–286.
- [46] A. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson, N. Tomczak-Jaegermann, Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes, *Adv. Math.* **195** (2005), no. 2, 491–523.
- [47] A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastava, Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees, *preprint*.

- [48] K. Maples, Symmetric random matrices over finite fields announcement, April 15, 2013, *preprint*.
- [49] A. Nilli, On the second eigenvalue of a graph, *Discrete Mathematics* 91 (1991), 207-210.
- [50] A. Nilli, Tight estimates for eigenvalues of regular graphs, *Electronic J. Combinatorics* 11 (2004), N9, 4pp.
- [51] H. Nguyen, On the least singular value of random symmetric matrices, *Electron. J. Probab.* 17 (2012), no. 53.
- [52] H. Nguyen, Inverse Littlewood-Offord problems and the singularity of random symmetric matrices, *Duke Math. J.* 161 (2012), no. 4, 545–586.
- [53] H. Nguyen and V. Vu, Small probability, inverse theorems, and applications, Erdos' 100th Anniversary Proceeding, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. 25 (2013).
- [54] H. Nguyen and V. Vu, Random matrices: Law of the determinant, *Annals of Probability* (2014), Vol. 42, No. 1, 146-167.
- [55] M. Rudelson, Invertibility of random matrices: norm of the inverse, *Ann. of Math.* (2) 168 (2008), no. 2, 575–600.
- [56] M. Rudelson, Lecture notes on non-asymptotic random matrix theory, notes from the AMS Short Course on Random Matrices, 2013.
- [57] M. Rudelson and R. Vershynin, The Littlewood-Offord problem and invertibility of random matrices, *Adv. Math.* 218 (2008), no. 2, 600–633.
- [58] M. Rudelson and R. Vershynin, Delocalization of eigenvectors of random matrices with independent entries, *preprint*.
- [59] O. N. Feldheim and S. Sodin, A universality result for the smallest eigenvalues of certain sample covariance matrices, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), no. 1, 88–123.
- [60] A. Sárközy and E. Szemerédi, Über ein Problem von Erdős und Moser, *Acta Arithmetica*, 11 (1965) 205-208.

- [61] D. Spielman and S-H. Teng, D. Spielman, S.-H. Teng, *Smoothed analysis of algorithms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 597–606, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [62] B. Sudakov and V. Vu, Local resilience of graphs, *Random Structures Algorithms* 33 (2008), no. 4, 409–433.
- [63] T. Tao and V. Vu, A central limit theorem for the determinant of a Wigner matrix, *Adv. Math.* 231 (2012), no. 1, 74–101.
- [64] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universal properties of eigenvectors, *Random Matrices Theory Appl.* 1 (2012), no. 1.
- [65] T. Tao and V. Vu, Random matrices: Universality of the local eigenvalues statistics pdf file *Acta Math.* 206 (2011), no. 1, 127–204.
- [66] T. Tao and V. Vu, On random  $\pm 1$  matrices: Singularity Determinant, *Random Structures Algorithms* 28 (2006), no. 1, 1–23.
- [67] T. Tao and V. Vu, On the singularity probability of random Bernoulli matrices, *J. Amer. Math. Soc.* 20 (2007), no. 3, 603–628.
- [68] T. Tao and V. Vu, Inverse Littlewood-Offord theorems and the condition number of random matrices, *Annals of Math.* 169 (2009), 595–632
- [69] T. Tao and V. Vu, On the permanent of random Bernoulli matrices, *Advances in Mathematics* 220 (2009), 657–669.
- [70] T. Tao and V. Vu, Random matrices: Universality of local spectral statistics of non-Hermitian matrices, *to appear in Annals of Probability*.
- [71] T. Tao and V. Vu, Additive Combinatorics, *Cambridge Univ. Press*, 2006.
- [72] T. Tao and V. Vu, Random matrices: The Universality phenomenon for Wigner ensembles, *preprint, to appear in AMS lecture notes on Random Matrices, 2013.*

- [73] T. Tao and V. Vu, Random matrices: the distribution of the smallest singular values, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), no. 1, 260–297.
- [74] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universal properties of eigenvectors, *Random Matrices Theory Appl.* 1 (2012), no. 1.
- [75] L. Tran, V. Vu and K. Wang, Sparse random graphs: Eigenvalues and Eigenvectors, *Random Structures Algorithms* 42 (2013), no. 1, 110–134.
- [76] R. Vershynin, Invertibility of symmetric random matrices, *Random Structures and Algorithms* 44 (2014), 135–182
- [77] E.P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, 67(2):325-327, 1958.
- [78] N.C. Wormald, Models of random regular graphs, *In Surveys in Combinatorics*, 1999, J.D. Lamb and D.A. Preece, eds, pp. 239-298.
- [79] V. Vu and K. Wang, Random projection, random quadratic forms, and random eigenvectors, *to appear in Random Structures and Algorithms*.
- [80] M. Wood, The distribution of sandpile groups of random graphs, *preprint*.

# VĨNH THỨC

NGÔ QUANG HƯNG

(Đại học Buffalo, Mỹ)

## Tóm tắt nội dung

Vĩnh Thức, định thức, và định thức Pfaff là các đa thức đa biến trên các ma trận. Chúng có liên hệ mật thiết với nhau, và có ứng dụng trong Vật Lý thống kê, Kinh tế học, toán Tổ hợp, độ phức tạp tính toán, lý thuyết đồ thị, và thuật toán. Bài viết này điểm qua lịch sử và chứng minh của một số kết quả liên kết các đối tượng Tổ hợp kỳ thú này.

## 1. Vĩnh Thức

Gọi  $A = (a_{ij})$  là một ma trận vuông  $n \times n$ . *Vĩnh Thức*<sup>1</sup> của  $A$  được định nghĩa như sau:

$$\text{Perm}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)},$$

trong đó  $S_n$  là tập tất cả các hoán vị của  $[n]$ . Như vậy, công thức tính vĩnh thức rất giống công thức Leibniz để tính định thức của  $A$ , chỉ khác ở điểm duy nhất là ta không nhân  $\text{sgn}(\pi)$  vào mỗi số hạng trong tổng trên.

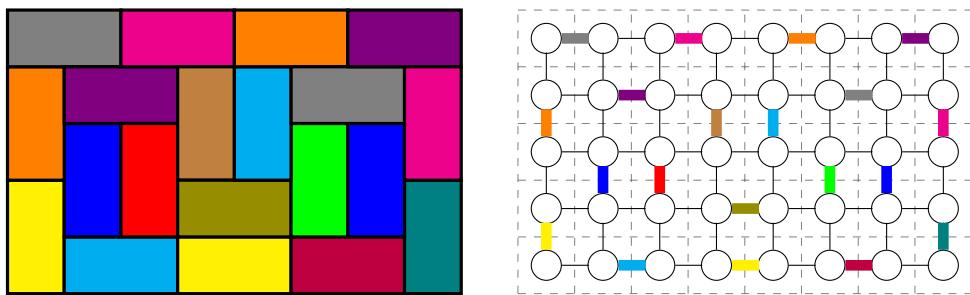
Hàm vĩnh thức có nhiều ứng dụng. Ví dụ, một vấn đề cơ bản trong toán Tổ hợp là tìm số cách lát một hình chữ nhật với các quân đố-mi-nô kích thước  $2 \times 1$ . Mỗi cách lát hoàn hảo tương ứng với một bắt cặp hoàn hảo<sup>2</sup> của đồ thị lưới tương ứng. (Xem hình 3.1.) Làm thế nào để ta đếm tổng số cách bắt cặp hoàn hảo của đồ thị lưới? Dễ thấy đồ thị lưới là đồ thị hai phần<sup>3</sup>. Giả

<sup>1</sup>Permanent. Sau thảo luận với các anh Phạm Hi Đức và Phùng Hồ Hải, tôi quyết định chọn từ vĩnh thức để dịch *permanent*.

<sup>2</sup>Perfect matching. Còn được gọi là *cặp ghép hoàn hảo* (ban Biên tập).

<sup>3</sup>Bipartite graph.

sử đồ thị hai phần này có  $n$  đỉnh bên trái và  $n$  đỉnh bên phải. (Nếu một bên có số đỉnh ít hơn thì ta thêm vào cách đỉnh đơn lẻ cho hai bên bằng nhau.) Sau đó, ta xây dựng ma trận  $A = (a_{ij})$  trong đó  $a_{ij} = 1$  nếu đỉnh  $i$  bên trái có cạnh đến đỉnh  $j$  bên phải; và  $a_{ij} = 0$  nếu không có cạnh  $ij$  trong đồ thị. Khi đó,  $\text{Perm}(A)$  bằng đúng tổng số các cách bắt cặp hoàn hảo của đồ thị – và nó cũng là số cách lát đô-mi-nô mà ta cần tìm.



Hình 3.1: Lợp hình chữ nhật  $8 \times 5$  bằng các hình đô-mi-nô  $2 \times 1$ , và bắt cặp hoàn hảo tương ứng của đồ thị lưới.

Vấn đề tìm số cách lát đô-mi-nô không phải là bài toán giải trí hoặc Tổ hợp thông thường. Đây là một vấn đề cơ bản trong Vật lý thống kê và Hóa học trạng thái rắn [17, 16, 18]. Chúng ta sẽ quay lại với mô hình dimer trong Vật lý dưới đây.

Vĩnh Thức **khởi nguyên** năm 1812, do các nhà Toán học người Pháp Jacques Philippe Marie Binet và Augustin-Louis Cauchy định nghĩa. Trong thế kỷ 19 đã có khoảng chục nhà toán học nghiên cứu các đẳng thức và bất đẳng thức liên quan đến vĩnh thức, bao gồm Arthur Cayley và Thomas Muir của Vương Quốc Anh. Cái tên “permanent” có lẽ bắt nguồn từ Cauchy (1812), nhưng người đầu tiên thật sự dùng và làm “chết tên” nó là Muir (1882). Tuy nhiên, các nghiên cứu về vĩnh thức chỉ thật sự “nóng” lên từ những năm 1960 do các đóng góp của toán học Hà Lan.

### 1.1. Giả định van der Waerden

Năm 1926, nhà Toán học người Hà Lan Bartel Leendert van der Waerden đặt một câu hỏi là vĩnh thức nhỏ nhất của một *ma*

*trận ngẫu nhiên kép*<sup>4</sup> là bao nhiêu [35]. Trực quan cho thấy ma trận  $J_n = \frac{1}{n}J$  có lẽ là ma trận có vĩnh thức cực tiểu. (Ma trận  $J$  là ma trận vuông  $n \times n$  gồm toàn các số 1.) Từ đó, bất đẳng thức sau đây được gọi là *giả định van der Waerden*<sup>5</sup>:

$$\text{Perm}(A) \geq \frac{n!}{n^n} \quad (3.1)$$

với mọi ma trận ngẫu nhiên kép  $A$  kích thước  $n \times n$ .

Van Lint [37] kể rằng, năm 1969 có một lần van der Waerden đến dự một buổi hội thảo về toán Tổ hợp. Ông vốn là dân Đại số, hầu như ít làm toán tổ hợp. Một diễn giả trẻ lên báo cáo một vấn đề liên quan đến giả định van der Waerden. Van der Waerden giơ tay lên hỏi “*giả định đó nói gì vậy?*” Cuối buổi diễn giả xuồng ... xem bảng tên người đặt câu hỏi.

Van Lint, vốn là một nhà toán học cù khỏi cũng người Hà Lan, đã truy vấn van der Waerden xem giả định này có xuất phát điểm từ đâu. Van der Waerden nhớ lại rằng hồi 1926, ông nói chuyện với O. Schreier, và Schreier cho ông biết G. A. Miller có chứng minh rằng có một *hệ đại diện chung*<sup>6</sup> cho các *lớp kề*<sup>7</sup> trái và các *lớp kề phải* của một nhóm con  $H$  của một nhóm hữu hạn  $G$ .

Van der Waerden quan sát rằng bộ các lớp kề trái là một phân hoạch  $(R_1, \dots, R_n)$  của  $G$ , trong đó  $R_1 \cup \dots \cup R_n = G$ , và  $|R_i| = |G|/n$  với mọi  $i \in [n]$ . Bộ các lớp kề phải là một phân hoạch  $(C_1, \dots, C_n)$  của  $G$ , cũng thỏa  $|C_j| = |G|/n$  với mọi  $j \in [n]$ . Hệ đại diện chung cho hai bộ phân hoạch này là một bộ các phần tử  $S = \{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G$  sao cho  $|R_i \cap S| = |C_j \cap S| = 1$ , với mọi  $i, j \in [n]$ . Bây giờ nếu ta xây dựng ma trận  $A = (a_{ij})$  trong đó  $a_{ij} = |R_i \cap C_j|$  thì sự tồn tại của hệ đại diện chung tương đương với phát biểu  $\text{Perm}(A) > 0$ . Do tổng của các hàng và các cột của  $A$  đều bằng  $|G|/n$ , ta “thường hoá”<sup>8</sup>  $A$  bằng cách đặt  $a_{ij} = \frac{|R_i \cap C_j|}{|G|/n}$ . Khi đó  $A$  là ma trận ngẫu nhiên kép. Ta có thể chứng minh  $\text{Perm}(A) > 0$  dễ dàng bằng định lý König-Hall. Nhưng một câu hỏi khác cũng

<sup>4</sup>Doubly stochastic matrix. Một ma trận vuông gọi là “ngẫu nhiên kép” nếu nó không âm, và tổng mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 1.

<sup>5</sup>Van der Waerden conjecture

<sup>6</sup>Common system of representatives.

<sup>7</sup>Coset.

<sup>8</sup>Normalize.

tự nhiên không kém là giá trị nhỏ nhất  $\text{Perm}(A)$  có thể đạt tới là bao nhiêu. Đây chính là nguồn gốc của giả định van der Waerden.

Trong quyển “Permanents” (1978 [23]), Henryk Minc ghi rằng hồi ông nộp một số bài báo về vĩnh thức giữa thế kỷ 20 thì có một bình duyệt viên nói rằng “chỗ ra cái tên gì lố bịch thế”? Giả thiết van der Waerden cuối cùng cũng được chứng minh, năm 1981, độc lập bởi hai bài báo khác nhau của G. P. Egorychev [8] và của D. I. Falikman [9]. Cả hai đều dùng một bất đẳng thức hình học gọi là bất đẳng thức Alexandroff-Fenchel [1]. Egorychev và Falikman được giải Fulkerson năm 1982 về bài này. Năm 2006, Leonid Gurvits [11] chứng minh **một bất đẳng thức rất tổng quát** với chứng minh ngắn gọn, bao gồm một hệ quả là Định lý van der Waerden.

## 1.2. Giả định Minc

Giả định van der Waerden nói về chặn dưới của vĩnh thức của một lớp các ma trận nhất định. Về chặn trên thì năm 1963 Minc [22] có một giả định như sau. Gọi  $A$  là một ma trận 01, nghĩa là  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  với mọi  $i, j \in [n]$ . Gọi  $m_i$  là số số 1 trên hàng  $i$  của ma trận, thì ta có  $\text{Perm}(A) \leq \prod_{i=1}^n (m_i!)^{1/m_i}$ . Năm 1973 Lev M. Brègman [4] chứng minh được giả định này, và bây giờ nó thường được gọi là *Định lý Brègman*.<sup>9</sup> Năm 1977, một nhà toán học lối lạc khác người Hà Lan, Alex Schrijver, trình bày một chứng minh cực gọn và thanh lịch [28]. Ngoài ra, Schrijver cũng tổng quát hoá định lý cho các ma trận nguyên không âm. Dưới đây chúng ta ghi lại chứng minh cho trường hợp ma trận 01 của Schrijver.

**Định lý 1.1** (Định lý Brègman). Gọi  $A$  là ma trận 01 kích thước  $n \times n$ . Gọi  $m_i$  là số các số 1 trên hàng  $i$  của  $A$ . Ta có,

$$\text{Perm}(A) \leq \prod_{i=1}^n (m_i!)^{1/m_i}. \quad (3.2)$$

*Chứng minh.* Cho một cặp  $i, j \in [n]$ , gọi  $A_{ij}$  là ma trận đạt được bằng cách bỏ hàng  $i$  và cột  $j$  ra khỏi  $A$ . Từ định nghĩa (và từ giả

---

<sup>9</sup>Đây cũng chính là Brègman của *phân kỳ Brègman* (Bregman divergence) trong xác suất thống kê.

thiết A là ma trận 01), dễ thấy

$$\text{Perm}(\mathbf{A}) = \sum_{j:a_{ij}=1} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij}), \text{ với mọi } i \in [n]. \quad (3.3)$$

(Khai triển này giống như khai triển Laplace tính định thức.) Do về phải của (3.2) là một cái tích, ta thử chặn  $\text{Perm}(\mathbf{A})$  bằng cách chuyển về phải của (3.3) thành một cái tích của các hàm của  $\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})$ , rồi sau đó áp dụng quy nạp. Cách tự nhiên nhất để chặn trên tổng bằng tích là dùng bất đẳng thức Jensen. Cụ thể hơn, từ tính lồi của hàm  $x \ln x$  trên miền  $x > 0$ , bất đẳng thức Jensen cho ta biết

$$\left( \frac{t_1 + \cdots + t_m}{m} \right) \ln \left( \frac{t_1 + \cdots + t_m}{m} \right) \leq \frac{t_1 \ln t_1 + \cdots + t_m \ln t_m}{m},$$

miễn là  $t_i > 0$  với mọi  $i \in [m]$ . Từ đó, ta chặn được tổng bằng tích:

$$(t_1 + \cdots + t_m)^{t_1 + \cdots + t_m} \leq m^{t_1 + \cdots + t_m} t_1^{t_1} \cdots t_m^{t_m}.$$

Và cũng dễ thấy rằng bất đẳng thức này đúng với mọi  $t_i \geq 0$ , chứ không cần  $t_i > 0$  như trước nữa. Áp dụng vào (3.3), ta được một chặn trên cho  $\text{Perm}(\mathbf{A})$  mà về phải là một tích:

$$\text{Perm}(\mathbf{A})^{\text{Perm}(\mathbf{A})} \leq m_i^{\text{Perm}(\mathbf{A})} \prod_{j:a_{ij}=1} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})}. \quad (3.4)$$

Bất đẳng thức (3.4) đúng với mọi  $i \in [n]$ . Bước tự nhiên kế tiếp là ta nhân chúng với nhau để có về phải đối xứng, và để cho các về phải “trung hoà” lẫn nhau khi kích thước chúng khác nhau. Nói cách khác, ta dùng trung bình nhân của các về phải:

$$\text{Perm}(\mathbf{A})^{n\text{Perm}(\mathbf{A})} \leq \left( \prod_{i=1}^n m_i^{\text{Perm}(\mathbf{A})} \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^n \prod_{j:a_{ij}=1} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})} \right). \quad (3.5)$$

Phát triển tự nhiên kế đến là áp dụng bất đẳng thức (3.2) cho  $\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})$  bên về phải. Tuy nhiên, điều phiền phức là có cả  $\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})$  trên số mũ – áp dụng vào sẽ làm loạn về phải. Cho nên, ta tìm cách viết lại thừa số thứ hai bên về phải của (3.5) một chút. Định nghĩa,

$$S = \{\pi \in S_n \mid a_{i\pi(i)} = 1\}$$

$$S_{ij} = \{\pi \in S \mid \pi(i) = j\}.$$

Từ định nghĩa của vĩnh thức, dễ thấy rằng  $|S| = \text{Perm}(\mathbf{A})$  và  $|S_{ij}| = \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})$  nếu  $a_{ij} = 1$ . Đây là một “diễn giải tổ hợp” của hàm vĩnh thức. Ngoài ra, nếu  $a_{ij} = 0$  thì  $|S_{ij}| = 0$ . Do đó, ta có thể viết lại thừa số thứ hai bên vế phải của (3.5) như sau:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \prod_{j:a_{ij}=1} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})} &= \prod_{i=1}^n \prod_{j:a_{ij}=1} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{|S_{ij}|} \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j:a_{ij}=1} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{|S_{ij}|} \prod_{j:a_{ij}=0} \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{|S_{ij}|} \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{|S_{ij}|} \end{aligned}$$

Đến đây ta dùng cái mèo “định trị một đại lượng bằng hai cách” *cực kỳ phổ dụng* trong toán Tổ hợp. Trong vế phải ở đẳng thức trên, với mỗi cặp  $(i, j)$  thì  $\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})$  xuất hiện  $|S_{ij}|$  lần. Bây giờ tưởng tượng ta xây dựng một đồ thị hai phần mà các đỉnh bên trái là các cặp  $(i, j)$ , và các đỉnh bên phải là các hoán vị  $\pi \in S$ . Sau đó, ta nối đỉnh  $(i, j)$  bên trái với đỉnh  $\pi$  bên phải nếu và chỉ nếu  $\pi(i) = j$ . Với mỗi cạnh như vậy ta cho “cân nặng” bằng  $\text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})$ , thì cái tích  $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{|S_{ij}|}$  chính là tích của cân nặng của các cạnh tưởng tượng nọ nhom theo các đỉnh bên trái của đồ thị hai phần. Thế thì, một cách khác để nhom cái tích các cân nặng này lại với nhau là nhom theo các đỉnh  $\pi \in S$  bên phải. Với mỗi đỉnh  $\pi$  ta lấy  $n$  cạnh kề với nó, đó là các cạnh nối  $\pi$  với cách đỉnh  $(i, \pi(i))$  bên trái. Như vậy ta suy ra

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \text{Perm}(\mathbf{A}_{ij})^{|S_{ij}|} = \prod_{\pi \in S} \prod_{i=1}^n \text{Perm}(\mathbf{A}_{i\pi(i)}).$$

Còn thừa số đầu tiên của vế phải của (3.5) thì dễ viết lại thành

$$\prod_{i=1}^n m_i^{\text{Perm}(\mathbf{A})} = \prod_{i=1}^n m_i^{|S|} = \prod_{\pi \in S} \prod_{i=1}^n m_i.$$

Đến đây, ta có thể viết lại toàn bộ bất đẳng thức (3.5) ở dạng dễ chịu hơn nhiều:

$$\text{Perm}(\mathbf{A})^{n \text{Perm}(\mathbf{A})} \leq \prod_{\pi \in S} \prod_{i=1}^n m_i \cdot \text{Perm}(\mathbf{A}_{i\pi(i)}). \quad (3.6)$$

Về phải của (3.6) đã rất cân đối, đến lúc ta áp dụng giả thiết quy nạp được rồi:

$$\prod_{i=1}^n \text{Perm}(\mathbf{A}_{i\pi(i)}) \leq \prod_{i=1}^n \left( \prod_{\substack{k \neq i \\ a_{k\pi(i)}=1}} ((m_k - 1)!)^{1/(m_k-1)} \prod_{\substack{k \neq i \\ a_{k\pi(i)}=0}} (m_k!)^{1/m_k} \right). \quad (3.7)$$

Về phải của bất đẳng thức này trông có vẻ kinh dị, nhưng lại có dạng rất đơn giản. Nó là tích “cân nặng” của các cặp  $i \neq k$ . Cân nặng này bằng  $((m_k - 1)!)^{1/(m_k-1)}$  nếu  $a_{k\pi(i)} = 1$ , và bằng  $(m_k!)^{1/m_k}$  nếu  $a_{k\pi(i)} = 0$ . Về phải của (3.7) nhóm các tích này theo  $i$ . Ta cũng có thể nhóm nó theo  $k$  (nhớ dùng cái đồ thị hai phần tưởng tượng – bên trái là  $i$ , bên phải là  $k$ , và nối  $(i, k)$  nếu  $i \neq k$ ). Nhóm theo  $k$  thì có cái lợi là cân nặng của một cặp  $i \neq k$  chỉ phụ thuộc vào  $k$ . Lưu ý rằng  $\pi \in S$ , do đó  $a_{k\pi(k)} = 1$ . Do đó, số các  $i$  sao cho  $i \neq k$  và  $a_{k\pi(i)} = 1$  chính là  $m_k - 1$ , và số các  $i$  sao cho  $i \neq k$  và  $a_{k\pi(i)} = 0$  chính là  $n - m_k$ . Do đó, về phải của (3.7) bằng

$$\prod_{k=1}^n \left( (m_k - 1)! \cdot (m_k!)^{\frac{n-m_k}{m_k}} \right).$$

Kết hợp với (3.6) nữa thì ta có

$$\begin{aligned} \text{Perm}(\mathbf{A})^{n \text{Perm}(\mathbf{A})} &\leq \prod_{\pi \in S} \left( \left[ \prod_{i=1}^n m_i \right] \cdot \left[ \prod_{k=1}^n \left( (m_k - 1)! \cdot (m_k!)^{\frac{n-m_k}{m_k}} \right) \right] \right) \\ &= \prod_{\pi \in S} \left( \prod_{k=1}^n (m_k!)^{n/m_k} \right) \\ &= \left( \prod_{k=1}^n (m_k!)^{1/m_k} \right)^{n \text{Perm}(\mathbf{A})}. \end{aligned}$$

Đó là chứng minh tuyệt vời của Alex Schrijver. □

### 1.3. Độ phức tạp tính toán

Từ thế kỷ 18, Gauss đã cho chúng ta biết cách tính định thức trong thời gian  $O(n^3)$ . Chỉ khác nhau ở cái đầu, nhưng vĩnh thức khó tính hơn định thức nhiều. Năm 1979, Leslie Valiant định nghĩa lớp độ phức tạp  $\#P$  và **chứng minh rằng** vẫn đề

tính  $\text{Perm}(A)$  của một ma trận 01 là vẫn đề  $\#P$ -khó [33]. Đây là một trong những công trình cột mốc mang đến giải Turing năm 2010 cho Valiant. Ông có hai con trai là Greg Valiant (giáo sư khoa Máy tính ở Stanford), và Paul Valiant (giáo sư khoa Máy tính ở Brown).

Ở đây chúng ta chỉ mô tả *rất nôm na* kết quả của Valiant. Một *vẫn đề quyết định*<sup>10</sup> là vẫn đề mà câu trả lời là *có* hoặc *không* tồn tại lời giải. Lớp P là lớp các vẫn đề quyết định mà ta có thể tìm lời giải hoặc trả lời không tồn tại lời giải trong thời gian đa thức. Ví dụ, cho một đồ thị  $G = (V, E)$ , vẫn đề *bắt cặp lớn nhất*<sup>11</sup> hỏi  $G$  có tập cạnh không giao nhau có kích thước ít nhất  $k$  hay không. Đây là vẫn đề quyết định, và *thuật toán trồng hoa*<sup>12</sup> của Edmonds năm 1965 giải nó trong thời gian  $O(|V|^4)$  [7]. Lớp NP là lớp các vẫn đề quyết định mà việc xác minh một lời giải có thật sự là lời giải hay không có thể làm nhanh được trong thời gian đa thức, nhưng việc tìm ra lời giải thì chưa chắc. Ví dụ, nếu ai đó tô màu một đồ thị  $G$  và nói “đây là một tô màu hợp lệ dùng 3 màu” thì ta dễ dàng kiểm tra được trong thời gian đa thức xem người đó có thành thật hay không. Nhưng nếu cho trước đồ thị  $G$  thì ta không biết cách nào để trả lời câu hỏi “có tồn tại cách tô  $G$  dùng 3 màu hay không?” trong thời gian đa thức. Để thấy rằng  $P \subseteq NP$ , nhưng chứng minh  $P \neq NP$  là một *câu hỏi triệu đồ*. Hiện nay, để chứng minh một vẫn đề quyết định nào đó là khó (nghĩa là khó có khả năng tồn tại thời gian đa thức để giải nó) thì thường là ta chứng minh rằng nó khó hơn tất cả các vẫn đề trong NP. Cụ thể hơn một chút, ta có thể chứng minh rằng nếu trả lời được câu hỏi “ $G$  có tô bằng 3 màu được không?” một cách hiệu quả thì *tất cả* các vẫn đề trong NP đều có thuật toán hiệu quả để giải. Vì thế, vẫn đề *tô 3 màu* là vẫn đề NP-khó.

Các vẫn đề quyết định là các vẫn đề tính toán 1 bit thông tin: bit 0 (trả lời *không*) hoặc bit 1 (trả lời *có*). Đây là giải pháp kỹ thuật để chứng minh độ khó. Nhưng tất nhiên các vẫn đề thực tế không chỉ là các vẫn đề mà output chỉ có 1 bit thông tin. Ví dụ ta cần tính xác suất mà một mạng máy tính là liên thông, cho biết trước xác suất lỗi của các kết nối. Bài toán này gọi là

---

<sup>10</sup>Decision problem.

<sup>11</sup>Maximum matching. Còn được gọi là *cặp ghép cực đại* (ban Biên tập).

<sup>12</sup>Blossom algorithm.

vẫn đề *độ tin cậy*<sup>13</sup> của một mạng. Hoặc, ta cần tính  $\text{Perm}(A)$  của một ma trận  $A$  cho trước. Rõ ràng là trên thực tế có hàng tỉ các vấn đề như vậy. Lớp  $\#P$  được Valiant định nghĩa để nắm bắt độ khó của việc tính một con số (thay vì chỉ một bit thông tin):  $\#P$  là lớp các vấn đề mà câu trả lời là *số lời giải* của một vấn đề NP. Ví dụ, vấn đề tìm số cách tô đồ thị dùng 3 màu hay vấn đề tìm số tập cạnh không giao nhau với kích thước  $n/2$  là các vấn đề trong lớp  $\#P$ .

Rõ ràng là nếu ta đếm được số lời giải, thì ta sẽ quyết định được là có lời giải hay không. Do đó, các vấn đề trong  $\#P$  khó hơn các vấn đề tương ứng trong NP. Đếm số cách tô 3 màu khó hơn xác minh xem có cách tô 3 màu hay không. Đếm số cách bắt cặp hoàn hảo khó hơn xác minh xem có cách bắt cặp hoàn hảo hay không. Tương tự như NP-khó,  $\#P\text{-khó}$  là lớp các vấn đề mà – nếu ta giải được bất kỳ vấn đề nào trong lớp này một cách hiệu quả, thì ta giải được *tất cả* các vấn đề trong lớp  $\#P$  một cách hiệu quả, và do đó ta cũng giải được *tất cả* các vấn đề trong NP một cách hiệu quả.

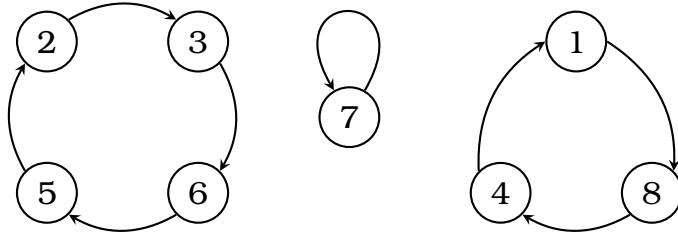
Tóm lại, một thuật toán thời gian đa thức cho bất kỳ vấn đề  $\#P\text{-khó}$  nào sẽ dẫn đến hệ quả là  $P = NP$ . Trong ngữ cảnh của bài viết này thì điều này có nghĩa là rất khó có khả năng tồn tại một thuật toán tính  $\text{Perm}(A)$  trong thời gian đa thức – cho dù ma trận  $A$  là ma trận 01. Không tính được hiệu quả thì ta có hai chọn lựa tự nhiên: một là tìm thuật toán xấp xỉ nó (trong thời gian đa thức), hai là tìm lớp các ma trận  $A$  mà vẫn tồn tại thuật toán hiệu quả. Chọn lựa thứ hai dẫn ta đến câu hỏi của Pólya và khái niệm định thức Pfaff. Tuy nhiên, trước khi thảo luận câu hỏi của Pólya và định thức Pfaff, ta cần chuẩn bị một ít kiến thức nền về hoán vị.

## 2. Vài quan sát cơ bản về hoán vị

Cho hoán vị  $\pi \in S_n$ . Ta có thể biểu diễn  $\pi$  thành dạng một đồ thị có hướng, với tập đỉnh  $[n]$ , và cạnh  $(i, \pi(i))$ . Đồ thị này là một tập hợp các chu trình không giao nhau, và các chu trình này phủ toàn bộ  $[n]$ . (Xem hình 3.2.)

---

<sup>13</sup>Reliability.



$$\pi = (8 \ 3 \ 6 \ 1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 4)$$

Hình 3.2: Hoán vị và cấu trúc chu trình của nó. Hoán vị này có một chu trình chẵn.

Một *nghịch thế*<sup>14</sup> của  $\pi$  là một cặp  $(i, j)$  sao cho  $i < j$  và  $\pi(i) > \pi(j)$ . Gọi  $\text{Inv}(\pi)$  là tổng số các nghịch thế của  $\pi$ . Dấu của  $\pi$  được định nghĩa là

$$\text{sgn}(\pi) = (-1)^{\text{Inv}(\pi)}.$$

Một *chuyển vị kề*<sup>15</sup> là hoán vị  $\pi = (1 \ \dots \ i-1 \ i+1 \ i \ i+2 \ \dots \ n)$  với  $i \in [n-1]$  nào đó; hoán vị này thường được viết là  $(i \ i+1)$ . Nếu ta hợp thành  $\pi$  và một chuyển vị kề  $(i \ i+1)$  thì ta được hoán vị

$$\sigma = \pi \circ (i \ i+1) = (\pi(1) \ \dots \ \pi(i-1) \ \pi(i+1) \ \pi(i) \ \pi(i+2) \ \dots \ \pi(n)).$$

Mọi hoán vị  $\sigma$  tuỳ ý đều có thể đạt đến từ một hoán vị  $\pi$  tuỳ ý bằng cách áp dụng nhiều chuyển vị kề. Điều này tương đương với thuật toán *sắp xếp bong bóng*<sup>16</sup>. Trong thuật toán sắp xếp bong bóng, ta dùng chuyển vị kề để phần tử nhỏ nhất trong một dãy số cho trước “nổi” lên đầu tiên, rồi phần tử nhỏ nhì nổi lên vị trí thứ nhì, vân vân. Nghĩa là mọi hoán vị đều chuyển về hoán vị đơn vị được bằng chuyển vị kề. Và như thế thì mọi hoán vị đều chuyển về hoán vị khác được dùng chuyển vị kề.

Dễ thấy rằng  $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\pi)$  nếu  $\sigma$  là hợp thành của  $\pi$  và một chuyển vị kề. Còn chuyển vị kề thay đổi cấu trúc chu trình của một giao hoán  $\pi$  như thế nào? Nếu  $i$  và  $i+1$  nằm trên cùng một chu trình của  $\pi$ , thì sau khi chuyển vị chu trình này sẽ bị bẻ thành hai chu trình. Nếu  $i$  và  $i+1$  nằm trên hai chu trình khác nhau thì hai chu trình này sẽ được trộn thành một chu trình.

<sup>14</sup>Inversion. Còn được dịch là *cặp trật tự ngược* (ban Biên tập).

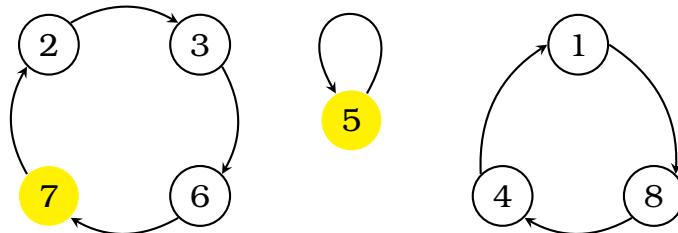
<sup>15</sup>Adjacent transposition.

<sup>16</sup>Bubble sort. Còn được gọi là *sắp xếp nổi bọt* (ban Biên tập).

Các khẳng định vừa rồi cũng đúng cho chuyển vị bất kỳ ( $i \ j$ ), không nhất thiết là chuyển vị kề. Từ đó, ta chứng minh được bài tập sau đây, là một bài tập cơ bản của toán Tổ hợp đếm.

**Bài tập 2.1.** Chứng minh rằng  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{e(\pi)}$ , trong đó  $e(\pi)$  là số các chu trình chẵn trong cấu trúc chu trình của  $\pi$ . (Chu trình chẵn là một chu trình có một số chẵn các đỉnh.)

Một tính chất thú vị nữa của các hoán vị là hai hoán vị liên hợp có cấu trúc chu trình giống nhau. Cụ thể hơn, hoán vị  $\pi$  và  $\sigma$  gọi là hai *hoán vị liên hợp*<sup>17</sup> nếu  $\pi = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$  với  $\tau$  là một hoán vị nào đó. Ví dụ, nếu  $\pi = (i \ i + 1) \circ \sigma \circ (i \ i + 1)^{-1}$  thì cấu trúc chu trình của  $\pi$  và cấu trúc chu trình của  $\sigma$  giống y nhau, chỉ đổi chỗ  $i$  và  $i + 1$ . Hình 3.3 minh họa điều này.



Hình 3.3: Cấu trúc chu trình của  $\sigma = (5 \ 7) \circ \pi \circ (5 \ 7)^{-1}$ ,  $\pi$  là hoán vị ở Hình 3.2

### 3. Câu hỏi của Pólya

Năm 1913, George Pólya [24] quan sát rằng

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \text{Perm} \begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix},$$

nghĩa là với mọi ma trận  $2 \times 2$  thì có cách đổi dấu một (và) phần tử của ma trận để biến vĩnh thức thành định thức. Pólya thắc mắc là điều này có đúng với mọi ma trận hay không? Cụ thể hơn, câu hỏi của Pólya như sau. Cho trước một ma trận  $A = (a_{ij})$ . Có tồn tại một ma trận  $B = (b_{ij})$  sao cho  $b_{ij} = \pm a_{ij}$ , với mọi  $i, j \in [n]$ , và, với mọi hoán vị  $\pi \in S_n$  ta có

$$\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n b_{i\pi(i)}. \quad (3.8)$$

<sup>17</sup>Conjugate permutations.

Trong đó,  $\text{sgn}(\pi) \in \{+1, -1\}$  là *dấu* của hoán vị  $\pi$ , đã định nghĩa trong phần trước. Theo khai triển Leibniz thì

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n b_{ij}.$$

Do đó, nếu tồn tại ma trận  $\mathbf{B}$  như trên thì  $\text{Perm}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ . Từ nay, ma trận  $\mathbf{B}$  thoả tính chất này sẽ được gọi là *ma trận Pólya* của ma trận  $\mathbf{A}$ .

Cũng trong năm đó, Gábor Szegő<sup>18</sup> [31] trả lời là *không*, vì với mọi  $n \geq 3$  luôn tồn tại một ma trận  $n \times n$  không có ma trận Pólya tương ứng.

**Bài tập 3.1.** Gọi  $J_3$  là ma trận  $3 \times 3$  gồm toàn các số 1. Chứng minh rằng  $J_3$  không có ma trận Pólya. Dựa vào đó, chứng minh rằng với mọi  $n \geq 3$ , tồn tại ma trận  $n \times n$  không có ma trận Pólya tương ứng.

Câu hỏi tự nhiên tiếp theo, cũng là câu hỏi chính của phần này của bài viết, như sau:

**Câu hỏi 3.2** (Câu hỏi của Pólya). Ma trận  $\mathbf{A}$  phải như thế nào thì mới có ma trận Pólya cho nó?

Giả sử  $\mathbf{A}$  có ma trận Pólya  $\mathbf{B}$ . Thì ta có thể viết  $\mathbf{B} = \mathbf{A} \circ \mathbf{L}$  là tích Hadamard của  $\mathbf{A}$  và một ma trận  $\mathbf{L} = (\ell_{ij})$ . Trong đó  $b_{ij} = a_{ij}\ell_{ij}$  với mọi  $i, j \in [n]$ ,  $\ell_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ , và  $\ell_{ij} \neq 0$  nếu  $a_{ij} \neq 0$ . Từ (3.8) ta suy ra ma trận  $\mathbf{L}$  phải thoả mãn tính chất sau đây. Nếu  $\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \neq 0$  thì

$$\text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n \ell_{i\pi(i)} = 1, \quad (3.9)$$

nghĩa là tất cả các số hạng khác 0 trong khai triển Leibniz của định thức của  $\mathbf{L}$  đều bằng 1.

Một ma trận  $\mathbf{L}$  với các phần tử trong tập  $\{-1, 0, 1\}$  được gọi là *ma trận không kỳ dị về dấu*<sup>19</sup> nếu nó thoả điều kiện là tất cả các số hạng khác 0 trong khai triển định thức của  $\mathbf{L}$  đều có cùng dấu, và tồn tại ít nhất một số hạng khác 0. Tập các cặp  $(i, j)$  sao cho  $a_{ij} \neq 0$  được gọi là *giàn tựa*<sup>20</sup> của  $\mathbf{A}$ . Phân tích vừa rồi cho thấy câu hỏi của Pólya tương đương với câu hỏi sau đây:

<sup>18</sup>Pólya thì không cần phải giới thiệu. Bản thân Szegő cũng là một nhà Toán học lớn người Hungary, đã từng kèm thêm cho John von Neumann.

<sup>19</sup>Sign nonsingular.

<sup>20</sup>Support.

**Câu hỏi 3.3.** Cho trước một ma trận A, khi nào thì tồn tại một ma trận L có cùng giàn tựa như A, và L là ma trận không kỳ dị về dấu.

Một điều rất thú vị là đây là câu hỏi có ứng dụng trong Kinh Tế học, được chính Paul Samuelson (Nobel Kinh tế, 1970) đặt ra trong quyển “Nền tảng của phân tích Kinh Tế” năm 1947 [27].

Để tìm cách trả lời câu hỏi 3.3, ta sắp xếp nó lại thành một bài toán Tổ hợp. Trước hết, xây dựng một đồ thị hai phần  $G = (R \cup C, E)$ , trong đó  $R = [n]$  là tập các hàng của A,  $C = [n]$  là tập các cột của A, và có một cạnh  $(i, j) \in E$  trong đồ thị G nếu và chỉ nếu  $a_{ij} \neq 0$ . Mỗi ma trận L có cùng giàn tựa như A tương ứng với một phép gán các hệ số  $\{-1, +1\}$  vào các cạnh của đồ thị G. Bất kể ta gán hệ số như thế nào, khai triển định thức của L có một số hạng khác 0 nếu và chỉ nếu tồn tại một bắt cặp hoàn hảo trong đồ thị G; tại vì mỗi số hạng khác 0 trong khai triển định thức tương ứng với một bắt cặp hoàn hảo. Như vậy, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là G có ít nhất một bắt cặp hoàn hảo. Bắt cặp hoàn hảo (nếu có) của một đồ thị hai phần G có thể tính được bằng nhiều thuật toán, ví dụ như thuật toán nổi dài đường dẫn<sup>21</sup> hoặc thuật toán Hopcroft-Karp [12] với thời gian chạy là  $O(\sqrt{|V(G)|}|E(G)|) = O(n^{5/2})$ .

Gọi  $\pi \in S_n$  là một bắt cặp hoàn hảo của G, nghĩa là các cạnh  $(i, \pi(i))$  thuộc về bắt cặp này. Nếu ta xáo trộn các hàng hoặc các cột của một ma trận L thì ta không thay đổi tính chất không kỳ dị về dấu của nó. Do đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử  $\pi(i) = i$  bằng cách đánh số lại các đỉnh trong tập R. Còn nữa, khi ta nhân một hàng hoặc một cột bất kỳ của L với giá trị  $-1$  thì ta cũng không thay đổi tính chất không kỳ dị về dấu của L. Do đó, ta có thể giả sử rằng phép gán hệ số vào các cạnh của G gán số 1 cho tất cả các cạnh  $(i, i)$  của G.

Tiếp tục với hành trình sắp xếp lại bài toán. Bây giờ ta xây dựng một đồ thị có hướng  $D = ([n], E(D))$  bằng hai bước: (1) định hướng tất cả các cạnh  $(i, j) \in E(G)$ ,  $i \in R$ ,  $j \in C$ , bằng cách đổi nó thành một mũi tên từ  $i$  đến  $j$ ; và (2) sau đó nhập đỉnh  $i \in R$  và đỉnh  $i \in C$  của G làm một. Sau khi làm điều này thì đồ thị D có  $n$  đỉnh, mỗi đỉnh  $i$  có một cái vòng<sup>22</sup> là một mũi tên trở

---

<sup>21</sup>Augmenting path algorithm. Còn được gọi là Thuật toán tìm đường tăng (luồng) (ban Biên tập).

<sup>22</sup>Loop

từ  $i$  đến  $i$ . Tại vì, ở trong  $G$  thì có mũi tên từ  $i \in R$  vào  $i \in C$ . Ngoài ra, mọi hoán vị  $\pi \in S_n$  sao cho  $(i, \pi(i)) \in E(G), \forall i \in [n]$ , tương ứng với một bộ các chu trình không giao nhau của đồ thị  $D$ , và các chu trình này phủ toàn bộ các đỉnh của  $D$ . Một tập các chu trình (có hướng) như vậy của  $D$  được gọi là một *phủ chu trình*<sup>23</sup> của  $D$ .

Tóm lại, bài toán của ta đã chuyển từ gán hệ số  $\{-1, 1\}$  vào các cạnh vô hướng của  $G$  thành việc gán hệ số  $w : E(D) \rightarrow \{-1, 1\}$  vào các cạnh có hướng của  $D$ . Với phủ chu trình  $\pi$ , định nghĩa “cân nặng” của nó là

$$w(\pi) = \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n w(i, \pi(i)).$$

(Ở đây ta lạm dụng ký hiệu, và dùng luôn  $w$  để ký hiệu hàm cân nặng của các phủ chu trình.) Và ta muốn tìm một phép gán hệ số sao cho  $w(\pi) = 1$ , với mọi phủ chu trình  $\pi$  của  $D$ . Thật ra bài toán chỉ đòi hỏi các số hạng này cùng dấu, nhưng vì  $\pi(i) = i$  là một trong các phủ chu trình, và cân nặng của nó bằng 1, nên ta biết tất cả các cân nặng của các phủ chu trình đều phải bằng 1.

Mặc dù đã chuyển vấn đề từ ma trận về vấn đề đồ thị phần nào dễ hình dung hơn, chúng ta vẫn tuyệt nhiên không biết cách nào để (bằng thuật toán) kiểm tra xem có phép gán hệ số như mong muốn hay không. Vazirani và Yannakakis [40] lại sắp xếp tiếp bài toán này.

**Bổ đề 3.4** (Vazirani-Yannakakis, 1988). Cho một đồ thị có hướng  $D = ([n], E)$  với  $n$  vòng  $(i, i) \in E$ . Tồn tại một phép gán hệ số  $w : E \rightarrow \{-1, 1\}$  sao cho tất cả các phủ chu trình của  $D$  đều có cân nặng bằng 1 nếu và chỉ nếu tồn tại một phép gán hệ số  $w : E \rightarrow \{-1, 1\}$  sao cho, với mỗi chu trình  $C$  của  $D$ , thì có một số lẻ các cạnh của  $C$  với hệ số bằng 1.

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại phép gán hệ số sao cho mỗi chu trình  $C$  của  $D$  đều có một số lẻ các cạnh với hệ số bằng 1. Như vậy, một chu trình lẻ có một số chẵn các hệ số  $-1$ ; và một chu trình chẵn có một số lẻ các hệ số  $-1$ . Gọi  $\pi$  là một phủ chu trình

---

<sup>23</sup>Cycle cover.

bất kỳ của  $D$ . Từ Bài tập 2.1, ta biết  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^c$  trong đó  $c$  là số các chu trình chẵn của  $\pi$ . Từ đó, dễ thấy  $w(\pi) = 1$ .

Ngược lại, giả sử tồn tại một phép gán hệ số sao cho tất cả các phủ chu trình đều có cân nặng là 1. Gọi  $C$  là một chu trình bất kỳ của  $D$ . Nếu ta lấy  $C$ , cùng với các vòng  $(i, i)$  với mọi  $i \notin C$ , thì ta có một phủ chu trình  $\pi$ . Nếu  $C$  là chu trình lẻ, thì  $\text{sgn}(\pi) = 1 - \text{do } \pi$  không có chu trình chẵn. Vì thế, phải có một số chẵn các hệ số  $-1$  trên chu trình  $C$ . Ngược lại, nếu  $C$  là chu trình chẵn thì  $\text{sgn}(\pi) = -1$ . Vì thế, phải có một số lẻ các hệ số  $-1$  trên  $C$ .  $\square$

Đến đây thì vẫn đề rõ ràng hơn một chút. Tuy nhiên, kể cả khi ai đó cho ta một phép gán hệ số thì ta cũng không biết cách nào để kiểm tra một cách hiệu quả xem phép gán hệ số đó có tốt hay không. Tại vì, tổng số các chu trình của một đồ thị cho trước có thể làm hàm mũ. Ta không thể đi kiểm tra từng chu trình một được. Đó là chưa nói đến chuyện phải đi qua tất cả các phép gán hệ số  $\{-1, 1\}$ .

**Định nghĩa 3.5.** Một đồ thị có hướng  $D$  được gọi là *đồ thị chẵn* nếu, với mọi phép gán hệ số  $\{-1, 1\}$  vào các cạnh của  $D$ , luôn tồn tại một chu trình của  $D$  có một số chẵn các hệ số 1.

Bổ đề Vazirani-Yannakakis ở trên đã cho ta biết câu hỏi của Pólya tương đương với câu hỏi kiểm tra xem một đồ thị có hướng có phải đồ thị chẵn hay không. Năm 1987, Paul Seymour và Carsten Thomassen [29] nghiên cứu các ma trận không kỳ dị về dấu, và đã chứng minh rằng, tồn tại một đồ thị có hướng  $H$  sao cho  $D$  là đồ thị chẵn nếu và chỉ nếu  $H$  có một chu trình với một số chẵn các cạnh. Và  $H$  có thể xây dựng được từ  $D$  trong thời gian đa thức. Như vậy, ta có

**Định lý 3.6.** Câu hỏi của Pólya tương đương về mặt thuật toán với bài toán xác minh xem một đồ thị có hướng  $H$  có một chu trình với số chẵn các cạnh hay không.

Chứng minh định lý trên không tầm thường, mặc dù cũng không phải quá khó. Xem thêm phần Chú Thích ở cuối bài và các tham khảo từ đó. Câu hỏi của Pólya đã trở thành một câu hỏi rất rõ ràng về mặt tổ hợp, nhưng ta vẫn hoàn toàn không biết cách trả lời câu hỏi trong thời gian đa thức.

Cuối cùng, đến năm 1999 thì Robertson, Seymour, và Thomas [26] thiết kế thuật toán trả lời câu hỏi này trong thời gian đa

thức. Bài báo này ở tờ *Annals of Mathematics*. Như vậy là sau 86 năm, câu hỏi của Pólya đã được trả lời thỏa đáng. Không những thế, như sẽ được đề cập ở phần tới của bài, câu hỏi này có liên quan mật thiết đến một đối tượng đại số tuyến tính khác – *định thức Pfaff* – quyền rũ không kém định thức và vĩnh thức.

## 4. Định thức Pfaff

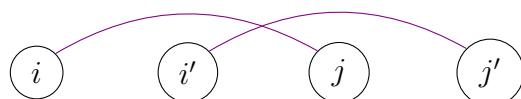
Cũng như vĩnh thức và định thức, định thức Pfaff là một đa thức đa biến, với các biến là các phần tử của một ma trận vuông. Trong phần này của bài viết, tôi sẽ giải thích tại sao Định thức Pfaff liên quan đến định thức, đến tổng số cách bắt cặp hoàn hảo của một đồ thị cho trước, và đó là liên đới đến vĩnh thức.

### 4.1. Định thức Pfaff

Gọi  $n$  là một số nguyên dương chẵn. Gọi  $\mathcal{F}_n$  là tập tất cả các phân hoạch của  $[n]$  thành  $n/2$  cặp số. Như vậy, mỗi thành viên  $F \in \mathcal{F}_n$  là một tập  $n/2$  cặp  $(i, j)$ ,  $i < j$ , sao cho tất cả các số trong  $[n]$  đều thuộc về một cặp nào đó của  $F$ . Hai cặp  $(i, j), (i', j') \in F$  được gọi là hai cặp *cắt nhau*<sup>24</sup> nếu

$$i < i' < j < j'.$$

Đơn giản là nếu ta vẽ hai cung từ  $i$  đến  $j$  và từ  $i'$  đến  $j'$  thì chúng cắt nhau, như hình sau đây.



Gọi  $\chi(F)$  là tổng số cặp cắt nhau trong  $F$ .

Định thức Pfaff được định nghĩa như sau. Gọi  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  là một ma trận *phản xứng*<sup>25</sup>, nghĩa là  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ , thì *định thức Pfaff* của  $\mathbf{A}$ , ký hiệu là  $\text{Pf}(\mathbf{A})$ , được định nghĩa là

$$\text{Pf}(\mathbf{A}) = \sum_{F \in \mathcal{F}_n} (-1)^{\chi(F)} \prod_{(i,j) \in F} a_{ij}. \quad (3.10)$$

<sup>24</sup>Crossing.

<sup>25</sup>Anti-symmetric, cũng gọi là skew-symmetric

**Bài tập 4.1.** Có một cách khác để định nghĩa “dấu” của một thành viên  $F \in \mathcal{F}_n$ . Giả sử  $F = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_{n/2}, j_{n/2}\}\}$ , trong đó  $i_\ell < j_\ell$  với mọi  $\ell \in [n/2]$ . Gọi  $\pi$  là hoán vị sau đây

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \cdots & i_{n/2} & j_{n/2} \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng  $(-1)^{\chi(F)} = \text{sgn}(\pi)$ . (Trong một số sách bạn đọc sẽ thấy họ dùng  $\text{sgn}(\pi)$  thay vì  $(-1)^{\chi(F)}$  để định nghĩa định thức Pfaff.)

Theo quyển “Chứng minh và khẳng định”<sup>26</sup> của David M. Bressoud [5] thì các tổng dạng định thức Pfaff xuất hiện đầu tiên từ một bài báo của Johann Friedrich Pfaff từ năm 1815. Ông mô tả một phương pháp giải một hệ  $2n$  phương trình vi phân bậc nhất bằng cách dùng biến và phương trình phụ trợ. Các phương trình phụ trợ này gồm tổng của một số tỉ lệ mà tử số là các định thức Pfaff. Lúc đó Pfaff đã gần 50 tuổi, và công trình của ông cũng không được đọc rộng rãi cho đến khi Carl Gustav Jacob Jacobi viết một bài về phương pháp của Pfaff. Định thức Pfaff liên hệ mật thiết đến các ma trận phản xứng. Các người không lồ Poisson, Lagrange, Laplace, và Monge đã làm việc với các ma trận này trong nửa đầu thế kỷ 18. Nhưng phải đến Jacobi mới nhận ra được liên hệ giữa định thức Pfaff và định thức của một ma trận. Mà kể cả như vậy, thì cũng phải chờ đến Arthur Cayley (1847) thì người ta mới biết đến đẳng thức quan trọng  $\det(A) = \text{Pf}(A)^2$ . Trên Wikipedia thì nói đẳng thức này do Thomas Muir chứng minh trong [quyển sách của ông](#) về định thức năm 1882. Nhưng tôi tin Bressoud đúng! Duyệt nhanh qua quyển sách của Muir thì hơi khó khẳng định vì ông không viết theo kiểu ai đã chứng minh cái gì.

Chúng ta chứng minh đẳng thức này ở đây dùng phương pháp tổ hợp của John Stembridge [30]; đây là một bài báo thật sự là tuyệt hảo trong toán tổ hợp đếm.

**Định lý 4.2** (Cayley, 1847). Gọi  $A$  là một ma trận phản xứng  $n \times n$  với  $n$  chẵn. Ta có,

$$\det(A) = \text{Pf}(A)^2.$$

---

<sup>26</sup>Proofs and confirmations

*Chứng minh của John Stembridge.* Trước hết, chúng ta viết lại về trái của đẳng thức trên dùng thêm kiến thức là A là ma trận phản xứng. Khi ta khai triển định thức

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$$

thì sẽ có nhiều cặp số hạng bù trừ lẫn nhau vì A là ma trận phản xứng. Cụ thể hơn, giả sử có một chu trình  $C$  của  $\pi$  là chu trình lẻ (như chu trình (1 8 4) trong Hình 3.2). Gọi  $\pi'$  là hoán vị có các chu trình giống hệt như  $\pi$ , ngoại trừ chu trình lẻ  $C$  bị đảo chiều. Khi đó,  $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi')$ , và  $\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = -\prod_{i=1}^n a_{i\pi'(i)}$ . Như vậy hai số hạng tương ứng với  $\pi$  và  $\pi'$  bù trừ lẫn nhau. Ta có thể bắt cặp các hoán vị trong  $S_n$  bằng cách này. Nếu  $\pi$  có một chu trình lẻ, thì ta lấy chu trình lẻ có chứa số bé nhất trong các chu trình lẻ, rồi đảo chiều chu trình lẻ này để lấy  $\pi'$ . Đây là một bắt cặp hoàn hảo giữa các hoán vị có (ít nhất một) chu trình lẻ. Do đó, gọi  $E_n \subseteq S_n$  là tập tất cả các hoán vị của  $[n]$  với toàn chu trình chẵn, ta có

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in E_n} (-1)^{e(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}. \quad (3.11)$$

(Nhớ rằng, như đã định nghĩa trong Bài tập 2.1,  $e(\pi)$  là số chu trình chẵn của  $\pi$ .) Nay giờ ta viết lại về phải của đẳng thức cần chứng minh.

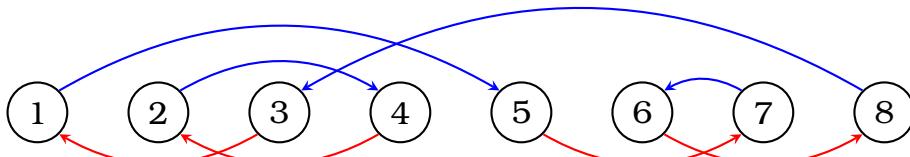
$$\begin{aligned} \operatorname{Pf}(\mathbf{A})^2 &= \left( \sum_{F \in \mathcal{F}_n} (-1)^{\chi(F)} \prod_{(i,j) \in F} a_{ij} \right) \cdot \left( \sum_{F' \in \mathcal{F}_n} (-1)^{\chi(F')} \prod_{(i',j') \in F'} a_{i'j'} \right) \\ &= \sum_{(F,F') \in \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n} (-1)^{\chi(F)+\chi(F')} \left[ \prod_{(i,j) \in F} a_{ij} \right] \cdot \left[ \prod_{(i',j') \in F'} a_{i'j'} \right] \\ &= \sum_{(F,F') \in \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n} (-1)^{\chi(F)+\chi(F')} \prod_{(i,j) \in F \cup F'} a_{ij}. \end{aligned}$$

Kế hoạch là tìm một song ánh giữa  $E_n$  và  $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$  sao cho, với mỗi  $\pi \in E_n$  có duy nhất một cặp  $(F, F')$  tương ứng (và ngược lại) để có đẳng thức sau đây là xong:

$$(-1)^{e(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = (-1)^{\chi(F)+\chi(F')} \prod_{(i,j) \in F \cup F'} a_{ij}. \quad (3.12)$$

Tìm một song ánh giữa  $E_n$  và  $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$  là điều rất dễ dàng. Một cặp  $(F, F') \in \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$  là một cặp (có thứ tự) bắt cặp hoàn hảo các số trong  $[n]$ . Ta gọi các cạnh của  $F$  là cạnh xanh và cạnh của  $F'$  là cạnh đỏ. Có tất cả  $n/2$  cạnh xanh,  $n/2$  cạnh đỏ, và tập các cạnh cùng màu là một bắt cặp hoàn hảo. Khi ta vẽ cả các cạnh xanh và đỏ vào cùng một đồ thị với  $[n]$  là tập đỉnh, thì mỗi đỉnh có bậc bằng đúng 2. Cụ thể hơn thì mỗi đỉnh kề với một cạnh xanh và một cạnh đỏ. Do đó, tập  $n$  cạnh này tạo thành một phủ chu trình của  $[n]$ . Mỗi chu trình trong phủ chu trình này có chiều dài chẵn, vì nếu ta đi vòng theo mỗi chu trình ta gặp các màu xanh và đỏ luân phiên nhau.

Cho đến đây thì ta vẫn chưa được một hoán vị vì phủ chu trình này chưa có hướng. Để định hướng cho mỗi chu trình thì ta bắt đầu từ đỉnh nhỏ nhất của chu trình, và đi theo cạnh xanh trước. Để thấy đây là song ánh, vì cho trước một phủ chu trình  $\pi \in E_n$ , ta làm ngược lại: đi từ đỉnh nhỏ nhất của mỗi chu trình, và tô màu xanh đỏ thay phiên nhau cho các cạnh. Hình 3.4 minh họa song ánh này. Ta gọi song ánh này là *song ánh Stembridge*.



Tương ứng với hoán vị  $\pi = (5\ 4\ 1\ 2\ 7\ 6\ 8\ 3)$

Hình 3.4: Song ánh giữa  $E_n$  và  $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$

Như vậy, điều duy nhất còn lại để chứng minh là chứng minh rằng  $\text{sgn}(\pi)$  có cùng “dấu” với cặp ảnh  $(F, F')$  của nó trong song ánh Stembridge. Với  $\pi \in E_n$ , gọi  $r(\pi) = \{i \mid \pi(i) < i\}$  thì đẳng thức cần chứng minh (3.12) tương đương với

$$e(\pi) + r(\pi) = \chi(F) + \chi(F') \pmod{2}. \quad (3.13)$$

Ví dụ, đẳng thức này tất nhiên là đúng với  $\pi = (2\ 1\ 4\ 3\ \dots\ n\ n-1)$  vì khi đó  $e(\pi) = n/2$  và  $r(\pi) = n/2$ .

Bây giờ giả sử (3.13) đúng với một hoán vị  $\pi$  nào đó, ta chứng minh là nó cũng đúng với hoán vị liên hợp  $\sigma = (i\ i+1) \circ \pi \circ (i\ i+1)^{-1}$ . Gọi  $(F, F')$  là ảnh của  $\pi$ . Ta phân biệt hai trường hợp:

- Nếu  $i$  và  $i+1$  nằm kề nhau trong cùng một chu trình của  $\pi$ , thì hoán chuyển  $i$  và  $i+1$  ta sẽ thay đổi  $r(\pi) \bmod 2$ , nhưng giữ nguyên  $e(\pi)$ . Không khó để thấy rằng ta cũng thay đổi hoặc là  $\chi(F) \bmod 2$  hoặc là  $\chi(F') \bmod 2$ , nhưng không thay đổi cả hai. Ví dụ, nếu giữa  $i$  và  $i+1$  có một cạnh màu xanh, thì hoán chuyển vị trí của  $i$  và  $i+1$  sẽ không thay đổi số điểm cắt nhau của các cạnh màu xanh. Còn  $i$  và  $i+1$  sẽ kề với hai cạnh màu đỏ khác nhau. Nếu chúng không cắt nhau thì sẽ cắt nhau sau khi hoán chuyển, và nếu chúng đã cắt nhau thì sẽ không cắt nhau sau khi hoán chuyển.
- Nếu  $i$  và  $i+1$  không nằm kề nhau trong cùng một chu trình của  $\pi$  thì hoán chuyển  $i$  và  $i+1$  sẽ giữ  $r(\pi)$  (và  $e(\pi)$ ) nguyên trạng; nhưng lần này cả  $\chi(F)$  và  $\chi(F')$  đều thay đổi.

Như vậy, để chứng minh (3.13) đúng cho  $\pi$ , ta chỉ cần chứng minh (3.13) đúng cho  $\sigma$  – miễn là ta có thể chuyển  $\pi$  thành  $\sigma$  bằng (nhiều lần) đổi chỗ hai số nguyên liên tiếp. Mà bằng cách đổi chỗ hai số nguyên liên tiếp thì ta có thể chuyển  $\pi$  thành một hoán vị mà chu trình thứ nhất  $C_1$  chứa các số nguyên nhỏ nhất  $\{1, 2, \dots, |C_1|\}$ , chu trình thứ hai chứa các số nguyên kế tiếp, theo cùng thứ tự, vân vân. Để thấy rằng (3.13) đúng với  $\sigma$  thỏa tính chất này.  $\square$

## 4.2. Định hướng Pfaff

Gọi  $A = (a_{ij})$  là ma trận kề<sup>27</sup> của một đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$ , nghĩa là  $a_{ij} = 1$  nếu  $ij$  là một cạnh. Mỗi số hạng  $(-1)^{\chi(F)} \prod_{ij \in F} a_{ij}$  của khai triển định thức Pfaff của  $A$  khác 0 nếu và chỉ nếu  $F$  là một bắt cặp hoàn hảo của  $G$ . Tiếc là  $A$  là ma trận đối xứng chứ không phải ma trận phản xứng. Năm 1961, các nhà Vật lý Pieter Kasteleyn [14, 15] (người Hà Lan), Harold Neville Vazeille Temperley và Michael Fisher [32] (người Anh) nhận ra một ý tưởng đơn giản. Giả sử ta định hướng các cạnh  $ij$  của  $G$ , và gán  $a_{ij} = 1$  nếu  $i \rightarrow j$  còn  $a_{ij} = -1$  nếu  $j \rightarrow i$ , thì ma trận  $A$  của định hướng của  $G$  là ma trận phản xứng. Khi đó, nếu tồn tại một định hướng của  $G$  sao cho tất cả các số hạng khác 0 của khai triển định thức Pfaff của  $A$  đều có cùng dấu, thì khi đó Định Lý 4.2 sẽ cho ta cách đếm nhanh số các bắt cặp hoàn hảo của đồ thị  $G$  dùng định thức! Một định hướng của  $G$  thỏa tính chất

<sup>27</sup>Adjacency matrix.

này gọi là *định hướng Pfaffian* của đồ thị. Và, thuật toán này bây giờ ta gọi là *thuật toán FKT*.

Hai câu hỏi ta cần trả lời là:

- Khi nào thì tồn tại một định hướng Pfaff cho  $G$ ?
- Nếu biết định hướng Pfaff tồn tại, thì làm thế nào để tìm nó một cách hiệu quả?

Để tìm cách trả lời các câu hỏi này, ta tìm một miêu tả mang tính tổ hợp hơn của định hướng Pfaff. Một chu trình  $C$  của  $G$  là một *chu trình tốt* nếu nó có số chẵn các đỉnh và có một bắt cặp hoàn hảo trong đồ thị  $G - C$ . Cho một định hướng  $\vec{G}$  của  $G$  thì chu trình  $C$  được gọi là chu trình *định hướng lẻ* nếu đi vòng quanh  $C$  theo một chiều nhất định thì số mũi tên xuôi chiều ta thấy là số lẻ. Tất nhiên, vì  $C$  chẵn nên khi ta đi theo chiều ngược lại thì số mũi tên xuôi chiều cũng là số lẻ.

**Bổ đề 4.3.** Cho  $\vec{G}$  là một định hướng của  $G$ , thì  $\vec{G}$  là định hướng Pfaff nếu và chỉ nếu tất cả các chu trình tốt của  $G$  đều được  $\vec{G}$  định hướng lẻ.

*Chứng minh.* Gọi  $A$  là ma trận kề của  $\vec{G}$ , nghĩa là  $a_{ij} = 1$  nếu  $(i, j) \in E(\vec{G})$ ,  $a_{ij} = -1$  nếu  $(j, i) \in E(\vec{G})$ , ngoài ra thì  $a_{ij} = 0$ . Gọi  $F$  và  $F'$  là hai bắt cặp hoàn hảo của  $G$ , thì  $\vec{G}$  là định hướng Pfaff nếu và chỉ nếu

$$(-1)^{\chi(F)} \prod_{(i,j) \in F} a_{ij} = (-1)^{\chi(F')} \prod_{(i',j') \in F'} a_{i'j'},$$

với mọi cặp  $(F, F')$ . Đẳng thức này tương đương với

$$(-1)^{\chi(F)+\chi(F')} \prod_{(i,j) \in F \cup F'} a_{ij} = 1. \quad (3.14)$$

Lưu ý rằng  $F, F' \in \mathcal{F}_n$ , và nếu  $(i, j) \in F \cup F'$  thì  $i < j$ . Gọi  $\pi$  là ảnh của  $(F, F')$  trong song ánh Stembridge. Từ đẳng thức (3.13), ta suy ra (3.14) tương đương với

$$(-1)^{e(\pi)+r(\pi)} \prod_{(i,j) \in F \cup F'} a_{ij} = 1. \quad (3.15)$$

Đến đây, ta bắt đầu chứng minh chiều thuận của bổ đề. Giả sử  $\vec{G}$  là một định hướng Pfaff của  $G$ . Gọi  $C$  là một chu trình

tốt. Gọi  $M$  là một bắc cắp hoàn hảo của  $G - C$ . Ta có thể tách  $C$  ra thành hai bắc cắp  $C_1$  và  $C_2$  bằng cách đi vòng theo  $C$ , bỏ một cạnh vào  $C_1$ , cạnh kế vào  $C_2$ , luân phiên nhau. Định nghĩa  $F = M \cup C_1$  và  $F' = M \cup C_2$ , thì  $F$  và  $F'$  là hai bắc cắp hoàn hảo của  $G$ . Gọi  $\pi$  là ảnh của cặp  $(F, F')$  qua song ảnh Stembridge, thì như phân tích ở trên đẳng thức (3.15) được thoả mãn. Gọi  $V(C)$  là tập các đỉnh của  $C$ , và  $E(C)$  là tập các cạnh. Định nghĩa

$$r(C) = |\{i \in V(C) \mid \pi(i) < i\}|.$$

Dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} e(\pi) &= |M| + 1 \\ r(\pi) &= |M| + r(C). \end{aligned}$$

Định nghĩa

$$s(i, j) = \begin{cases} 1 & i < j \\ -1 & j \geq i \end{cases}.$$

Do  $A$  là ma trận phản xứng, nếu  $i < j$  ta có  $a_{ij} = s(i, j)a_{ij}$  và nếu  $j < i$  ta có  $a_{ji} = s(i, j)a_{ij}$ . Vì thế,

$$\begin{aligned} \prod_{(i,j) \in F \cup F'} &= \prod_{\substack{ij \in E(C) \\ i < j}} a_{ij} \cdot \prod_{ij \in M} a_{ij}^2 \\ &= \prod_{i \in V(C)} s(i, \pi(i)) \cdot a_{i\pi(i)} \\ &= (-1)^{r(C)} \prod_{i \in V(C)} a_{i\pi(i)}. \end{aligned}$$

Các đẳng thức vừa rồi, cộng với đẳng thức (3.15) dẫn đến  $\prod_{i \in V(C)} a_{i\pi(i)} = -1$ , nghĩa là  $C$  được định hướng lẻ.

Cho chiều ngược lại, giả sử mọi chu trình tốt đều được định hướng lẻ. Ta chứng minh đẳng thức (3.15) đúng với mọi cặp bắc cắp hoàn hảo  $F$  và  $F'$ . Dễ thấy rằng  $F \cup F'$  là hội của  $k$  chu trình tốt  $C_1 \cup \dots \cup C_k$ . Tương tự như trên,

$$e(\pi) + r(\pi) \equiv \sum_{\ell=1}^k (r(C_\ell) + 1) \pmod{2}.$$

Và

$$\prod_{(i,j) \in F \cup F'} = \prod_{\ell=1}^k \left[ (-1)^{r(C_\ell)} \prod_{i \in V(C)} a_{i\pi(i)} \right] = \prod_{\ell=1}^k [(-1)^{r(C_\ell)} \cdot (-1)].$$

Do đó (3.15) đã được chứng minh. □

Bạn đọc hẳn đã nhận ra sự tương đồng giữa bài toán tìm định hướng Pfaff của một đồ thị và câu hỏi của Pólya. Điều này không phải là ngẫu nhiên. Hai bài toán này tương đương với nhau (về mặt thuật toán) nếu  $G$  là đồ thị hai phần; xem chứng minh trong bài của Vazirani và Yannakakis [40].

Tuy nhiên, kết quả của FKT đi một bước theo hướng khác, rất đẹp. Họ chứng minh rằng luôn tồn tại một định hướng Pfaff nếu  $G$  là *đồ thị phẳng*,<sup>28</sup> nghĩa là ta có thể vẽ  $G$  trên mặt phẳng sao cho không có cạnh nào giao cạnh nào.

**Định lý 4.4** (FKT, 1961). Nếu  $G$  là một đồ thị phẳng thì luôn tồn tại định hướng Pfaff cho nó.

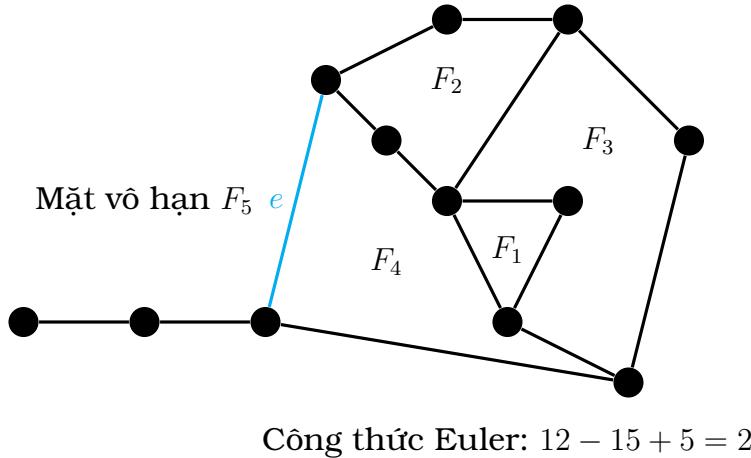
*Chứng minh.* Ta xét một cách vẽ  $G$  trên mặt phẳng tùy ý.<sup>29</sup> Không mất tính tổng quát ta giả sử  $G$  là đồ thị liên thông. Đồ thị  $G$  sẽ chia mặt phẳng ra thành nhiều *mặt*<sup>30</sup>, trong đó phần vô hạn ngoài  $G$  được gọi là *mặt vô hạn* của  $G$ . Các mặt còn lại là các *mặt hữu hạn*. Nếu  $G$  không phải là cây thì sẽ có ít nhất một *mặt hữu hạn*, và *mặt vô hạn* ráp gianh với một số *mặt hữu hạn*. Xem Hình 3.5

Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại cách định hướng các cạnh của  $G$  sao cho điều sau đây đúng: khi ta đi theo chiều kim đồng hồ vòng quanh một *mặt hữu hạn* bất kỳ, thì tổng số mũi tên xuôi chiều ta gặp là số lẻ. Tạm gọi tính chất này là *tính chất lẻ địa phương* của các mặt. Lưu ý rằng, do ta đang làm việc với một cách vẽ  $G$  cụ thể trên mặt phẳng, ta có thể dùng “thuận chiều kim đồng hồ” mà không ngượng mồm. Với một đồ thị chưa được vẽ trên mặt phẳng, khái niệm “thuận chiều kim đồng hồ” không có định nghĩa rõ ràng.

<sup>28</sup>Planar graph.

<sup>29</sup>Embedding of  $G$ .

<sup>30</sup>Face



Hình 3.5: Một đồ thị phẳng, 12 đỉnh, 15 cạnh, 5 mặt

Ta chứng minh khẳng định này bằng quy nạp. Nếu  $G$  là cây thì tất nhiên điều này đúng vì không có mặt hữu hạn nào. Nếu  $G$  không phải là cây. Gọi  $e$  là một cạnh nằm ở biên giới giữa một mặt vô hạn và một mặt hữu hạn (ví dụ cạnh  $e$  trong Hình 3.5). Theo quy nạp thì ta có thể định hướng tất cả các cạnh của  $G$  cho thoả tính chất “lẻ địa phương” ở trên. Bây giờ, ta ráp cạnh  $e$  vào lại và định hướng  $e$  sao cho mặt hữu hạn chứa  $e$  cũng lẻ địa phương.

Kế đến, ta chứng minh rằng một định hướng lẻ địa phương là định hướng Pfaff. Theo Bổ Đề 4.3, ta chỉ cần chứng minh rằng mọi chu trình tốt của  $\vec{G}$  đều được định hướng lẻ. Gọi  $C$  là một chu trình như thế. Giả sử  $C$  phủ  $f$  mặt hữu hạn bên trong nó. Gọi  $w_C$  là số cạnh thuận chiều kim đồng hồ vòng theo  $C$ . Với mỗi mặt hữu hạn  $F_i$ ,  $i \in [f]$ , bên trong  $C$ , gọi  $w_i$  là số cạnh thuận chiều kim đồng hồ trên mặt đó. Thì ta có  $w_i$  là lẻ với mọi  $i \in [f]$ ; do đó  $\sum_{i=1}^f w_i \equiv f \pmod{2}$ . Trong cái tổng  $\sum_i w_i$  thì mỗi cạnh bên trong  $C$  được đếm đúng một lần, vì nó thuận chiều với một mặt kề nó thì sẽ ngược chiều với mặt bên kia. Do đó, nếu ta gọi  $e_C$  là tổng số cạnh trên chu trình  $C$ , và  $e_I$  là tổng số cạnh bên trong  $C$ , thì ta có

$$\sum_{i=1}^f w_i \equiv w_C + e_I \equiv w_C + (e_I + e_C) \pmod{2}.$$

(Nhớ là  $C$  là chu trình tốt, nên nó là chu trình chẵn.) Gọi  $v$  là tổng số đỉnh nằm trên  $C$  hoặc nằm trong  $C$ , thì  $v$  là số chẵn

vì  $G - C$  có một bắt cặp hoàn hảo; nghĩa là các đỉnh bên trong  $C$  có thể bắt cặp hoàn hảo với nhau. Theo công thức Euler thì  $v - (e_C + e_I) + (f + 1) = 2$ . (Vì ta phải đếm cả mặt vô hạn trong công thức Euler.) Do đó

$$w_C \equiv \sum_{i=1}^f w_i - (e_I + e_C) \equiv f - (e_I + e_C) \equiv v - 1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

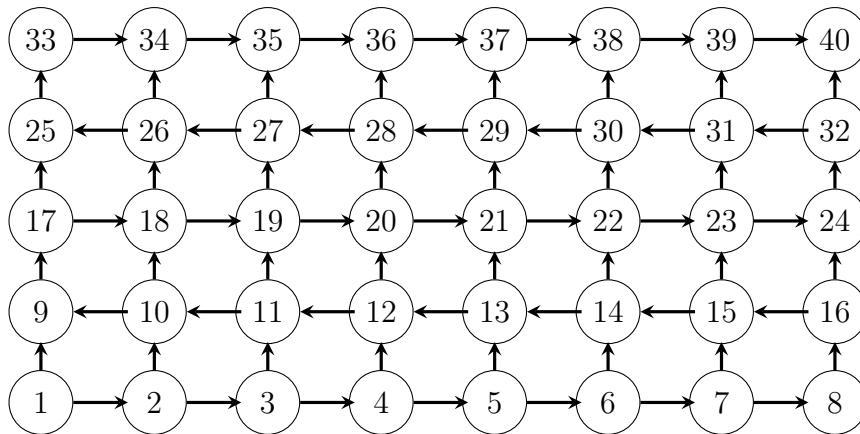
□

Công thức sau đây là một trong các công thức trong toán Tổ hợp đếm mà một số nguyên (mình cần đếm) lại biểu diễn thành hàm của các số vô tỉ. Công thức Fibonacci là một ví dụ khác. Nhưng công thức “ngầu” nhất có lẽ là công thức của Ramanujan đếm tổng số phân hoạch của một số nguyên – nó bao gồm tích phân Cauchy trên miền số phức.

**Định lý 4.5.** Gọi  $G$  là một đồ thị lưới  $m \times n$  với  $mn$  là số chẵn. Thì, tổng số cách bắt cặp hoàn hảo của  $G$  là

$$2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^m \prod_{\ell=1}^n \left( \cos^2 \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi \ell}{n+1} \right) \right)^{\frac{1}{4}}$$

*Chứng minh.* Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $n$  chẵn. Định hướng như trong Hình 3.6 thoả mãn tính chất là các mặt hữu hạn đều được định hướng lẻ. Do đó, đây cũng là định hướng Pfaff của đồ thị lưới. Ta sẽ đánh số các đỉnh như trong hình;



Hình 3.6: Định hướng Pfaff của đồ thị lưới  $5 \times 8$

mỗi hàng có  $n = 8$  đỉnh và mỗi cột có  $m = 5$  đỉnh. Ma trận kè của định hướng này có thể viết dưới dạng sau đây.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & -\mathbf{X} & \mathbf{I}_n \\ & -\mathbf{I}_n & \mathbf{X} & \mathbf{I}_n \\ & & -\mathbf{I}_n & -\mathbf{X} & \mathbf{I}_n \\ & & & \ddots & \mathbf{I}_n \\ & & & -\mathbf{I}_n & (-1)^{m-1}\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

trong đó,  $\mathbf{X}$  là ma trận  $n \times n$  có dạng:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận  $\mathbf{X}$  là ma trận kè của các hàng của đồ thị lưới. Hàng thứ nhất các mũi tên trỏ từ nhỏ đến lớn, ta có  $\mathbf{X}$ . Hàng thứ hai có các mũi tên trỏ ngược lại, ta có  $-\mathbf{X}$ , và luân phiên như vậy. Ma trận  $\mathbf{I}$  là ma trận đơn vị, chỉ ra sự kè nhau của các đỉnh của các hàng cạnh nhau trên ma trận lưới.

Chúng ta cần tính  $\det(\mathbf{A})$ . Để đơn giản hoá bài toán, ta viết lại  $\mathbf{A}$  một chút. Nếu ta nhân một hàng nào đó của  $\mathbf{A}$  với  $-1$  hoặc một cột nào đó với  $-1$  thì ta chỉ thay đổi dấu của  $\det(\mathbf{A})$  chứ không thay đổi trị tuyệt đối. Ta tìm cách nhân để cho ma trận  $\mathbf{A}$  đối xứng. Các ma trận đối xứng thì dễ tìm trị đặc trưng. Và định thức thì bằng tích của các trị đặc trưng.

Để biến  $\mathbf{A}$  thành ma trận đối xứng, ta đổi dấu khói  $n$  cột thứ nhất của  $\mathbf{A}$ , rồi đổi dấu khói  $n$  hàng thứ ba và thứ tư, rồi đổi dấu khói  $n$  cột thứ tư và thứ năm, rồi đổi dấu khói hàng thứ 7 và thứ 8, vân vân. Ta sẽ đạt được ma trận

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{I}_n & & & \\ \mathbf{I}_n & -\mathbf{X} & \mathbf{I}_n & & \\ & \mathbf{I}_n & -\mathbf{X} & \mathbf{I}_n & \\ & & \mathbf{I}_n & -\mathbf{X} & \mathbf{I}_n \\ & & & \ddots & \mathbf{I}_n \\ & & & \mathbf{I}_n & -\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa  $\mathbf{Y}$  là ma trận  $m \times m$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thì dễ thấy

$$\mathbf{M} = -\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{X} + \mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}_n.$$

trong đó  $\otimes$  là tích Kronecker của hai ma trận. Ma trận  $\mathbf{M}$  còn được gọi là tổng Kronecker của hai ma trận  $-\mathbf{X}$  và  $\mathbf{Y}$ . Nhờ Bài tập 4.6, tác vụ kế tiếp của ta là đi tìm bộ trị đặc trưng của  $\mathbf{X}$  và  $\mathbf{Y}$ .

Cả  $\mathbf{X}$  và  $\mathbf{Y}$  đều là các ma trận Toeplitz có ba đường chéo. Theo bài tập 4.7 thì  $\mathbf{Y}$  có bộ trị đặc trưng là  $2 \cos \frac{k\pi}{m+1}$ ,  $k \in [m]$ , và  $\mathbf{X}$  có bộ trị đặc trưng là  $2i \cos \frac{\ell\pi}{n+1}$ ,  $\ell \in [n]$ .

Như vậy, với mỗi  $k \in [m]$  và  $\ell \in [n]$  ta có một trị đặc trưng cho  $\mathbf{M}$  là  $2 \left( \cos \frac{k\pi}{m+1} - i \cos \frac{\ell\pi}{n+1} \right)$ . Do  $\cos \frac{\ell\pi}{n+1} = -\cos \frac{(n+1-\ell)\pi}{n+1}$ , khi nhân tất cả các trị đặc trưng này với nhau ta được

$$2^{mn} \prod_{k=1}^m \prod_{\ell=1}^n \left( \cos^2 \frac{k\pi}{m+1} + \cos^2 \frac{\ell\pi}{n+1} \right)^{1/2}$$

□

**Bài tập 4.6.** Gọi  $\mathbf{A}$  là ma trận  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$  là ma trận  $m \times m$ ,  $\alpha$  là một trị đặc trưng của  $\mathbf{A}$ , và  $\beta$  là một trị đặc trưng của  $\mathbf{B}$ . Chứng minh rằng  $\alpha + \beta$  là một trị đặc trưng của tổng Kronecker

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} := \mathbf{I}_m \oplus \mathbf{A} + \mathbf{B} \oplus \mathbf{I}_n.$$

Bội của trị đặc trưng  $(\alpha + \beta)$  là gì?

**Bài tập 4.7.** Chứng minh một kết quả cơ bản của đại số tuyến tính, được dùng rất phổ biến trong các phương trình vi phân và

phương trình sai phân. Ma trận  $n \times n$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & b & a & c & \\ & & b & a & c \\ & & & \ddots & c \\ & & & & b & a \end{bmatrix}$$

có bộ trị đặc trưng là  $a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . **Gợi ý:** giả sử  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  là một vector đặc trưng với trị đặc trưng  $\lambda$ . Từ phương trình  $\mathbf{Z}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , ta có phương trình sai phân

$$v_{k+1} + v_{k-1} = \lambda v_k, \text{ với } k \in [n],$$

trong đó các điều kiện biên là  $v_0 = 0, v_{n+1} = 0$ . Từ đó tìm được  $n$  nghiệm  $\lambda$ . **Hỏi:** các vectors đặc trưng là gì? Có phụ thuộc vào  $a, b, c$  không?

## 5. Chú thích

Nhiều bài báo và sách chú giải các chứng minh khác nhau của giả thiết van der Waerden [39, 19, 36, 37, 38]. Các chứng minh này đều khá ngắn gọn và dễ hiểu.

Có hai chứng minh khác của định lý Brègman, đều dựa trên chứng minh của Schrijver. Một chứng minh dùng phương pháp xác suất trong sách của Alon và Spencer [2]. Chứng minh kia dùng entropy có điều kiện của Radhakrishnan [25]. Tuy nhiên các chứng minh này không tự nhiên như chứng minh của Schrijver.

Quyển của Arora và Barak [3] là tham khảo hiện đại về độ phức tạp tính toán. Đọc thêm Mark Jerrum [13] để biết thêm về #P và các cách xấp xỉ các vấn đề #P-khó.

Quyển sách của Lovász và Plummer [20] vẫn là một trong những tham khảo tốt nhất về định thức Pfaff trong toán Tổ hợp.

William McCuaig [21] liệt kê khoảng 40 câu hỏi tương đương với câu hỏi của Pólya.

Quyển “Chứng minh và khẳng định” của David M. Bressoud [5] là một quyển sách tuyệt hảo về một bài toán nổi tiếng trong tổ hợp đếm. Trong đó có mô tả vai trò của định thức Pfaff trong một chứng minh một giả định gọi là giả định ma trận đảo dấu<sup>31</sup>.

<sup>31</sup>Alternating sign matrix conjecture.

Kasteleyn cũng là chữ K trong *bất đẳng thức FKG* có rất nhiều ứng dụng trong toán Tổ hợp mà chúng ta sẽ tìm dịp viếng thăm. Như đã viết, chúng ta biết cách kiểm tra trong thời gian đa thức xem một đồ thị hai phần có định hướng Pfaff hay không. Nhưng bài toán này vẫn là bài toán mở cho đồ thị tổng quát: chúng ta không biết vấn đề này nằm trong P hay nó là NP-khó.

Định thức Pfaff đóng vai trò quan trọng trong Holographic algorithms [34, 6], và trong các mô hình đồ thị xác suất phẳng trong học máy [10].

## Tài liệu tham khảo

- [1] ALEXANDROFF, A. Über die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers. (Bemerkung zur Arbeit “Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern”). *Rec. Math. N.S. [Mat. Sbornik]* 6(48) (1939), 167–174.
- [2] ALON, N., AND SPENCER, J. H. *The probabilistic method*, second ed. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000. With an appendix on the life and work of Paul Erdős.
- [3] ARORA, S., AND BARAK, B. *Computational complexity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. A modern approach.
- [4] BRÈGMAN, L. M. Certain properties of nonnegative matrices and their permanents. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 211 (1973), 27–30.
- [5] BRESSOUD, D. M. *Proofs and confirmations*. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 1999. The story of the alternating sign matrix conjecture.
- [6] CAI, J., AND LU, P. Holographic algorithms: From art to science. *J. Comput. Syst. Sci.* 77, 1 (2011), 41–61.
- [7] EDMONDS, J. Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.* 17 (1965), 449–467.

- [8] EGORYCHEV, G. P. The solution of van der Waerden's problem for permanents. *Adv. in Math.* 42, 3 (1981), 299–305.
- [9] FALIKMAN, D. I. Proof of the van der Waerden conjecture on the permanent of a doubly stochastic matrix. *Mat. Zametki* 29, 6 (1981), 931–938, 957.
- [10] GLOBERSON, A., AND JAAKKOLA, T. Approximate inference using planar graph decomposition. In *Advances in Neural Information Processing Systems 19, Proceedings of the Twentieth Annual Conference on Neural Information Processing Systems, Vancouver, British Columbia, Canada, December 4-7, 2006* (2006), B. Schölkopf, J. C. Platt, and T. Hoffman, Eds., MIT Press, pp. 473–480.
- [11] GURVITS, L. Hyperbolic polynomials approach to Van der Waerden/Schrijver-Valiant like conjectures: sharper bounds, simpler proofs and algorithmic applications. In *STOC'06: Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM, New York, 2006, pp. 417–426.
- [12] HOPCROFT, J. E., AND KARP, R. M. An  $n^{5/2}$  algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. Comput.* 2 (1973), 225–231.
- [13] JERRUM, M. *Counting, sampling and integrating: algorithms and complexity*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [14] KASTELEYN, P. W. The statistics of dimers on a lattice : I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica* 27 (Dec. 1961), 1209–1225.
- [15] KASTELEYN, P. W. Dimer statistics and phase transitions. *J. Mathematical Phys.* 4 (1963), 287–293.
- [16] KENYON, C., RANDALL, D., AND SINCLAIR, A. Approximating the number of monomer-dimer coverings of a lattice. *J. Statist. Phys.* 83, 3-4 (1996), 637–659.
- [17] KENYON, R. An introduction to the dimer model. In *School and Conference on Probability Theory*, ICTP Lect. Notes,

- XVII. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, pp. 267–304 (electronic).
- [18] KENYON, R. The dimer model. In *Exact methods in low-dimensional statistical physics and quantum computing*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, pp. 341–361.
  - [19] KNUTH, D. E. A permanent inequality. *Amer. Math. Monthly* 88, 10 (1981), 731–740, 798.
  - [20] LOVÁSZ, L., AND PLUMMER, M. D. *Matching theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Annals of Discrete Mathematics, 29.
  - [21] McCUAIG, W. Pólya’s permanent problem. *Electron. J. Combin.* 11, 1 (2004), Research Paper 79, 83 pp. (electronic).
  - [22] MINC, H. Upper bounds for permanents of  $(0, 1)$ -matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), 789–791.
  - [23] MINC, H. *Permanents*, vol. 6 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978. With a foreword by Marvin Marcus.
  - [24] PÓLYA, G. Aufgabe 424. *Arch. Math. Phys.* 20 (1913), 271.
  - [25] RADHAKRISHNAN, J. Entropy and counting. *Computational Mathematics, Modelling and Algorithms* (2003).
  - [26] ROBERTSON, N., SEYMOUR, P. D., AND THOMAS, R. Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits. *Ann. of Math.* (2) 150, 3 (1999), 929–975.
  - [27] SAMUELSON, P. A. *Foundations of Economic Analysis*, first edition ed. Harvard University Press Cambridge, Mass. ; London, England, 1947.
  - [28] SCHRIJVER, A. A short proof of Minc’s conjecture. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 25, 1 (1978), 80–83.
  - [29] SEYMOUR, P., AND THOMASSEN, C. Characterization of even directed graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 42, 1 (1987), 36–45.
  - [30] STEMBRIDGE, J. R. Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions. *Adv. Math.* 83, 1 (1990), 96–131.

- [31] SZEGHO, G. Lösung zu 424. *Arch. Math. Phys.* 21 (1913), 291–292.
- [32] TEMPERLEY, H. N. V., AND FISHER, M. Dimer problem in statistical mechanics—an exact result. *Philosophical Magazine* 6 (Aug. 1961), 1061–1063.
- [33] VALIANT, L. G. The complexity of computing the permanent. *Theoret. Comput. Sci.* 8, 2 (1979), 189–201.
- [34] VALIANT, L. G. Holographic algorithms. *SIAM J. Comput.* 37, 5 (2008), 1565–1594.
- [35] VAN DER WAERDEN, B. B. Aufgabe 45. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver* 35 (1926), 117.
- [36] VAN LINT, J. H. Notes on Egoritsjev's proof of the van der Waerden conjecture. *Linear Algebra Appl.* 39 (1981), 1–8.
- [37] VAN LINT, J. H. The van der Waerden conjecture: two proofs in one year. *Math. Intelligencer* 4, 2 (1982), 72–77.
- [38] VAN LINT, J. H. The van der Waerden conjecture. In *Combinatorics '81 (Rome, 1981)*, vol. 18 of *Ann. Discrete Math.* North-Holland, Amsterdam-New York, 1983, pp. 575–580.
- [39] VAN LINT, J. H., AND WILSON, R. M. *A course in combinatorics*, second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [40] VAZIRANI, V. V., AND YANNAKAKIS, M. Pfaffian orientations, 0-1 permanents, and even cycles in directed graphs. *Discrete Appl. Math.* 25, 1-2 (1989), 179–190. Combinatorics and complexity (Chicago, IL, 1987).

# TỰ HỌC LÀ TỐT NHƯNG CÓ THẦY TỐT HƠN

NGUYỄN TIỀN DŨNG  
(Đại học Toulouse, Pháp)

## Giới thiệu

Nguyễn Tiên Dũng là giáo sư Đại học Toulouse, Pháp. Thời còn học sinh, Nguyễn Tiên Dũng đã từng tham gia kỳ thi Olympic Toán học quốc tế dành cho học sinh phổ thông (IMO) năm 1985 và đạt huy chương vàng khi mới 15 tuổi. GS Nguyễn Tiên Dũng có nhiều bài viết về toán học và giảng dạy toán học đăng trên trang web cá nhân [zung.zetamu.net](http://zung.zetamu.net). Vừa rồi, thông qua công ty Sputnik, Nguyễn Tiên Dũng đã phát hành miễn phí bản điện tử của cuốn sách “Học toán và dạy toán như thế nào?” để chia sẻ những quan điểm của anh về vấn đề rất thực tế này.

Được sự đồng ý của GS Nguyễn Tiên Dũng, chúng tôi xin trích đăng 2 mục trong chương 1 của cuốn sách. Toàn văn cuốn sách với nhiều quan điểm rất thẳng thắn và thú vị này bạn đọc có thể tải tại các địa chỉ sau:

- Trang bán hàng trên mạng của [Sputnik Education](#).
- Tại <http://sputnikedu.com/>.

## 1. Toán học có nghĩa và toán học vô nghĩa

Vì sao có những người, khi ở trường học toán toàn bị điểm kém, nhưng khi đi chợ hay bán hàng lại tính nhẩm nhanh như gió, xác định rất giỏi các thứ làm ăn sẽ lỗ lãi ra sao, v.v.? Đó là bởi vì, cái thứ toán mà họ phải dùng là “toán có nghĩa”, và một khi nó có nghĩa với họ, thì họ trở nên quen thuộc với nó. Còn thứ toán ở trường học đối với họ nhiều khi là toán “vô nghĩa”, “thừa”, “không dùng vào đâu cả”, và do đó học không vào.

Một ví dụ là phép tính tích phân (có trong chương trình toán PTTH). Trong cuộc thăm dò ý kiến trên trang facebook của **Sputnik Education** vào đầu năm 2014, hầu hết những người trả lời nói rằng họ chẳng cần dùng đến tích phân khi nào cả. Câu hỏi đặt ra là: dạy tích phân, số phức, v.v. trong chương trình phổ thông làm gì, nếu như chẳng mấy ai sau này dùng đến chúng? Trong thảo luận về cải cách giáo dục, đã có nhiều người nêu ra ý kiến nên bỏ những thứ này đi.

Không chỉ ở Việt Nam, mà trên thế giới có nhiều người, kể cả những bộ trưởng giáo dục, cho rằng chương trình toán phổ thông ở nước họ hiện nay quá nặng, quá thừa. Họ muốn cắt giảm bớt chương trình và số giờ học toán phổ thông đi, thậm chí đến một nửa, và thay vào đó là những môn học khác, ví dụ như môn chăn ngựa. Trong số các lý do họ đưa ra, ngoài chuyện nhiều thứ toán dạy ở phổ thông là không cần thiết, còn có thêm một lý do nữa là thời đại máy tính, các tính toán đã có máy tính là cho rồi, cần học toán nhiều làm gì nữa.

Cả hai lý do trên (đã có máy tính làm toán thay, và chương trình toán chứa nhiều thứ “vô dụng”), tuy thoạt nhìn có vẻ có lý, nhưng thực ra đều không hợp lý.

Học toán không chỉ đơn thuần là học máy phép tính, mà còn là học nhiều kiến thức và kỹ năng quan trọng khác, như là khả năng suy luận lô-gích, chiến lược, phân biệt đúng sai, mô hình hóa các vấn đề, v.v. như đã bàn phía trên. Máy tính có thể giúp chúng ta tính toán, tra cứu, v.v., nhưng không thể hiểu thay chúng ta. Chúng ta vẫn cần phải hiểu toán, để giao được đúng đầu bài cho máy tính thực hiện, và hiểu được đúng ý nghĩa của kết quả mà máy tính đưa ra. Và nếu lúc nào cũng phải ý lại vào máy tính thì con người sẽ ngày càng ngu dần đi, trở thành một thứ nô lệ mới.

Các khái niệm toán học trong chương trình phổ thông hiện tại nói chung thực ra đều là những khái niệm kinh điển, cơ bản và vạn năng, chứ không hề “vô nghĩa” tẹo nào. Việc chúng trở nên “vô nghĩa” không phải do lỗi của bản thân các khái niệm đó, mà là do cách dạy và cách học quá hình thức hoặc thiên về mẹo mực tính toán, mà không chú ý đến bản chất và ứng dụng của các khái niệm. Thậm chí, theo tôi biết, có cả những

người học toán đến bậc tiến sĩ rồi vẫn chưa hiểu bản chất của khái niệm tích phân.

Việc dạy và học toán theo lối “toán vô nghĩa” (không thấy công dụng đâu) có tác hại là làm cho nhiều người trở nên chán ghét môn toán, còn những người mà “thích nghi” được với lối học đó thì lại dễ bị tự kỷ hoặc hình thức chủ nghĩa.

Bởi vậy, cần tăng cường tìm hiểu về bản chất và ý nghĩa của các khái niệm khi học toán, về sự hình thành của chúng và các ứng dụng của chúng, lý do vì sao chúng tồn tại. Câu hỏi “nó dùng để làm gì” quan trọng hơn là câu hỏi “nó được định nghĩa thế nào”. Có như vậy thì các kiến thức toán học mới trở nên có nghĩa và hữu dụng.

Quay lại ví dụ về khái niệm tích phân. Einstein có nói: “Chúa không quan tâm đến các khó khăn toán học của con người, bởi vì Chúa tính tích phân một cách thực nghiệm”. Trong cuộc sống hàng ngày, nhiều khi chúng ta cũng “tính tích phân theo cách của Chúa”, không phải là dùng công thức toán học được viết ra một cách chi li hình thức, mà là bằng quan sát, ước lượng trực giác, v.v. Ví dụ như, khi chúng ta ước lượng diện tích của một cái nhà, thể tích của một thùng rượu, thời gian để làm việc gì đó, v.v., là chúng ta cũng “tính tích phân”. Tích phân chẳng qua là tổng của nhiều thành phần lại với nhau, với số thành phần có thể là vô hạn (chia nhỏ ra thành tổng của các thành phần “nhỏ li ti”), và là công cụ để tính toán hay ước lượng độ lớn của vạn vật: thể tích, diện tích, độ dài, vận tốc, trọng lượng, thời gian, tiền bạc, tăng trưởng dân số, bệnh dịch, v.v. Bản thân cái ký hiệu của phép lấy tích phân chính là chữ S kéo dài ra, mà S ở đây có nghĩa là summa (tổng).

Khi học tích phân, quan trọng nhất là hiểu được ý tưởng tích phân chẳng qua là tổng và là công cụ để tính toán ước lượng các thứ qua các phép biến đổi. Đây là một ý tưởng rất trong sáng, chẳng có gì khó khăn để hiểu nó. Nắm được ý tưởng đó, và biết được vài nguyên tắc cơ bản để biến đổi tích phân, là có thể coi là hiểu tích phân, chứ không cần phải học hàng trăm công thức tính các tích phân rầm rộ loằng ngoằng (như có trong một số sách cho học sinh phổ thông ở Việt Nam). Những công thức quá phức tạp đó rất hiếm khi dùng, và lúc nào cần dùng có thể tra

cứu, nếu cứ phải học chúng thì đúng là sẽ dễ có cảm giác học phải cái vô dụng.

Khi mà không nắm được ý nghĩa của việc lấy tích phân, thì việc tính tích phân các phân thức như là cái máy, nhớ một đồng các công thức tính tích phân sẽ hoàn toàn là phí thời gian vô ích. Đây chính là một điều không may mà nhiều người gặp phải: học về phép tính tích phân như là một thứ “thánh bảo vật” thì nó phải vậy”, rất giáo điều mà không dùng được vào đâu. Trong khi đó, ngay ngành tài chính trên thế giới cũng dùng tích phân “như cơm bữa”.

Các mô hình tài chính hiện đại dùng toán hiện đại, không những chỉ là tính tích phân theo nghĩa thông thường nhiều người biết, mà là còn tính các tích phân ngẫu nhiên, là thứ toán học phát triển từ giữa thế kỷ 20. Chính vì vậy mà nhiều người gốc toán trở thành các “át chủ bài” của thị trường tài chính, và chương trình cao học tài chính ở các nơi có toán khá nặng. Có những sinh viên Việt Nam sau khi tốt nghiệp xuất sắc ở các trường kinh tế hay tài chính, được học bổng sang Pháp học cao học, bị “gãy cầu” không theo được, một phần chính vì không thể nhai nổi phép tính tích phân ngẫu nhiên này, do không được chuẩn bị tốt kiến thức về toán.

## 2. **Tự học là tốt nhưng có thầy tốt hơn**

Ở Việt Nam có tình trạng học sinh phải đi học quá nhiều, từ sáng đến đêm, hết học chính thức trên lớp lại đi học thêm. Việc đến lớp quá nhiều như vậy phản tác dụng: nó có nguy cơ làm cho trẻ trở nên mụ mẫm, thụ động, không có thời gian để tự suy nghĩ và tiêu hóa kiến thức, và cũng không có thời gian cho các hoạt động khác như ngủ, vui chơi, thể thao, âm nhạc, học làm việc nhà, v.v. cũng quan trọng cho sự phát triển. Một phần chính vì để tránh vẫn nạn học thêm mà nhiều người muốn cho con vào trường quốc tế hay đi “tị nạn giáo dục”.

Ở một thái cực khác, thay vì xu hướng “nghe giảng quá nhiều, tự học quá ít” là xu hướng “để học sinh tự học là chính” mà một số người muốn đưa ra cho cải cách giáo dục. Theo xu hướng này thì giáo viên cũng không còn vai trò giảng bài nữa, mà chỉ còn vai trò “hướng dẫn học sinh tự sáng tạo khám phá tìm ra

các kiến thức". Xu hướng này tuy tương đối mới ở Việt Nam nhưng đã xâm nhập vào các chương trình cải cách giáo dục ở các nước tiên tiến trên thế giới như Anh, Pháp từ nửa thế kỷ nay, dựa trên chủ thuyết "constructivisme" ("tự xây dựng kiến thức") của Jean Piaget, một người từng "làm mưa làm gió" trong giáo dục.

Theo chủ thuyết "constructivisme" của Piaget, thì học trò "tự xây dựng" các kiến thức của mình, thày nói chung không giảng kiến thức mà chỉ gợi ý cách tìm. Chủ thuyết này, cùng với những câu nghe bùi tai như "lấy học trò làm trung tâm", và khoác chiếc áo "khoa học, đổi mới", đã nhanh chóng làm "mủi lòng" các quan chức giáo dục và các chuyên gia giáo dục của nhiều nước. Tuy nhiên, kết quả nó đem lại hoàn toàn trái ngược với mong đợi: đầu tư cho giáo dục nhiều lên nhưng trình độ của học sinh giảm đi.

Ví dụ, ở Pháp, theo một báo cáo của Viện Hàn lâm Khoa học năm 2004 do 7 nhà bác học lớn ký tên (xem [tại đây](#)), trong 30 năm kể từ thời điểm bắt đầu cải cách giáo dục ở Pháp theo hướng "constructivisme" vào những năm 1970, chương trình môn toán đã bị thụt đi 1,5 năm, tức là tính trung bình thì học sinh học đến lớp 12 ngày nay chỉ còn trình độ về môn toán bằng học sinh học lớp 10 thời những năm 1970! Trong khi đó thì sự phát triển của khoa học và công nghệ ngày càng đòi hỏi nhiều hiểu biết về toán.

Nhà toán học nổi tiếng Laurent Lafforgue cùng các tác giả khác có viết cả một quyển sách về bi kịch của nền giáo dục Pháp vào năm 2007: Laurent Lafforgue, Liliane Lurçat et Collectif, La débâcle de l'école: une tragédie incomprise, 09/2007. (Sự "đổ vỡ" của trường học: một bi kịch không được thấu hiểu).

Một trong các nguyên nhân chủ chốt mà Lafforgue đưa ra để giải thích tình trạng suy sút của nền giáo dục Pháp chính là: chủ thuyết "constructivisme" của Jean Piaget khi được các nhà chức trách ép sử dụng đã phá hoại hệ thống giáo dục. Những người theo "constructivisme" quá chú trọng khía cạnh "tìm tòi sáng tạo" mà coi nhẹ khía cạnh "truyền đạt, luyện tập, tiếp thu bằng cách bắt chước làm theo", dẫn đến hậu quả là học sinh bị hỏng kiến thức, thiếu nền tảng, và những kiến thức đơn giản nay bỗng biến thành phức tạp.

Không chỉ môn toán, mà các môn học khác ở Pháp cũng hứng chịu hậu quả nghiêm trọng của chủ thuyết Piaget, người mà một thời được nhiều nơi tung hô như là một nhà cải cách giáo dục lớn của thế giới. Ví dụ, trong môn tiếng Pháp, thay vì dạy chia động từ như ngày ưa, với chủ thuyết “constructivisme” người ta bắt học sinh “quan sát những sự thay đổi trong dạng động từ”. Hệ quả: một tỷ lệ khá lớn học sinh Pháp đến khi vào đại học cũng không biết chia động từ cho đúng. Trong môn lịch sử, kiến thức lịch sử trang bị cho học sinh thì hạn chế, nhưng lại đòi hỏi học sinh bình luận về các tài liệu cứ y như là các học sinh đó là các nhà sử học. Kết quả là các “bình luận tư do” đó thực ra là các câu giáo điều đã được viết trước (bởi học sinh có biết gì đâu để mà bình luận). Môn lịch sử được dạy hời hợt đến mức học sinh lẩn lộn về thứ tự thời gian (chronology) của các sự kiện, kể cả các học sinh “khá” PTTH cũng không biết các hoàng đế Napoleon và Louis XIV ai sinh trước ai sinh sau.

Ở các nước khác chịu ảnh hưởng của Piaget, tình hình cũng tồi tương tự. Một nghiên cứu thống kê ở Canada (xem [tại đây](#)) cho thấy trong các phương pháp giảng dạy khác nhau thì phương pháp theo “constructivisme” là phương pháp luôn cho kết quả tồi tệ nhất. Ở Thụy Sĩ, quê hương của Piaget, người ta phải kêu trời rằng, nền giáo dục phổ thông của Thụy Sĩ trước những năm 1970 được coi là mẫu mực thế, mà từ khi bị nhiễm “constructivisme” đã trở nên suy sút nặng.

Ở Việt Nam, có một số người muốn cải cách giáo dục theo hướng “constructivisme” của Piaget, coi nó như là “kinh thánh”, tô điểm thêm cho nó thành những lý thuyết với những cái tên rất kêu như là “công nghệ giáo dục”, nhưng về cơ bản thì tương tự như là những cái mà ở các nước khác người ta đã trải qua và đã và đang phải hứng chịu hậu quả. Các bậc phụ huynh và những người làm trong ngành giáo dục nên hết sức đề phòng chuyện này, không phải cái gì khoác áo “khoa học, công nghệ” cũng là khoa học, công nghệ, kể cả trong giáo dục.

Vì sao học theo kiểu “tự xây dựng kiến thức” lại chậm hơn nhiều so với có được nghe thầy giảng? Thực ra đây là một điều cơ bản mà từ xưa người ta đã biết, có điều một số học thuyết “lang băm” đã làm nhiều người quên đi mất điều cơ bản này.

Người Việt Nam có câu “Không thầy đỗ mà làm nê”. Người

Trung Quốc có câu “Nghe thầy một giờ hơn tự mày mò cả tháng”. Theo ước tính, trung bình học có thầy giảng giải nhanh gấp 3 lần là tự học. Đặc biệt là đối với các học sinh có học lực trung bình, việc được nghe giải thích kiến thức một cách rõ ràng là rất cần thiết, trong khi chỉ có một tỷ lệ nhỏ các học sinh thông minh đặc biệt là có thể dễ dàng tự tìm ra các qui luật.

Có những người lầm tưởng rằng, kiến thức đã có sẵn trong sách vở hết rồi, thì cần gì thầy giảng cho nữa, cứ đọc là xong. Kiến thức ở trong sách không có nghĩa là nó có thể nhảy vào đầu mình một cách dễ dàng. Nếu không có người hướng dẫn, thì hoàn toàn có thể đọc mà không hiểu, hoặc là tưởng mình đã hiểu tuy thực sự chưa hiểu gì, dẫn đến tẩu hoả nhập ma. tệ hơn nữa, thì có thể đọc phải những sách nhảm nhí, sách viết sai, v.v.

Quá trình tự đi tìm ra kiến thức, tìm ra chân lý bao giờ cũng khó khăn lâu dài hơn là quá trình tiếp thu lại từ những người đã nắm được nó. Những kiến thức mà học sinh được học bấy giờ là những thứ mà các nhà bác học của những thế kỷ trước phải mất cả đời người để tìm ra. Không thể bắt học sinh đi lại con đường khám phá đó, vì như thế sẽ mất quá nhiều thời gian. Và tất nhiên khi lãng phí quá nhiều thời gian tâm trí vào việc “phát minh lại cái bánh xe”, học sinh sẽ không còn đủ thời gian để tiếp cận các kiến thức cần thiết khác.

Điều trên không có nghĩa là học sinh không nên nghiên cứu và sáng tạo. Nghiên cứu và sáng tạo cũng là cần thiết, nhưng phải dựa trên một nền tảng cơ sở đã có chứ không thể rỗng ruột mà nghiên cứu sáng tạo được cái hay ho. Để học nghiên cứu sáng tạo, thì những người thầy tốt nhất cho việc đó chính là những người đã nghiên cứu và sáng tạo: các nhà khoa học, nhà sáng chế, nghệ sĩ, v.v. (chứ không phải là những người dạy nghiên cứu mà bản thân chưa có công trình nghiên cứu quan trọng nào). Cũng chính bởi vậy mà để học văn và học tiếng, thì học sinh nên đọc các bài thơ, mẫu truyện hay của các nhà văn để nhờ đó mà thích học đọc, thầy được cái hay cái đẹp sự sáng tạo của ngôn ngữ chứ không phải ngay từ lớp một đã học các khái niệm ngôn ngữ phức tạp nhưng trên các ví dụ nhạt nhẽo vô nghĩa.

“Constructivisme” là kiểu “tự học là chính tuy có thầy đứng

bên cạnh”. Còn một kiểu tự học “oách hơn”, là tự học không cần thầy. Ở đây tôi không nói đến việc ôn bài hay làm bài tập về nhà, vì đó là những lúc tự học nhưng vẫn theo một chương trình có thầy hướng dẫn. Tôi muốn nói đến việc tự học mà không có thầy hướng dẫn, thì kết quả sẽ ra sao?

Có một vị giáo sư ở Việt Nam rất tự hào về việc mình “tự học thành tài”, viết sách dày cả ngàn trang về việc tự học, với ví dụ chính là bản thân vị ấy. Tôi không nghi ngờ gì về sự thông minh của vị giáo sư này, và ngoài ra vị giáo sư này còn từng là một nhà quản lý khá thành công. Chỉ có điều đáng tiếc rằng, vị này hoàn toàn ảo tưởng về mình trong khoa học: vị tự coi mình là thiên tài khoa học, một trong mấy trăm bộ óc vĩ đại nhất của thế giới, sánh ngang tầm với các nhân vật lừng danh toàn cầu, trong khi công trình của vị chẳng được ai trên thế giới quan tâm trích dẫn. Đây chính là một ví dụ về sự rủi ro của việc tự học mà không có người hướng dẫn: dễ bị “đâm vào ngõ cụt”, dễ bị hoang tưởng về mình.

Bản thân tôi cũng từng tự học nhiều thứ, với các mức độ thành công hay thất bại khác nhau: từ học bơi, cho đến học thiên văn, tiếng Tàu, tiếng Anh, v.v. đều chủ yếu là tự học, không có thầy. Khi mới sang Pháp làm việc, tôi chẳng hề nói được một câu tiếng Pháp nào, và từ đó đến nay cũng chẳng đi học một giờ tiếng Pháp nào có người dạy, toàn tự học. Cả luận án tiến sĩ của tôi cũng là tự làm, không có người hướng dẫn. Nói thế không phải để khoe, mà để làm ví dụ cho thấy khả năng tự học của con người cũng không nhỏ.

Càng nhiều tuổi hay càng học lên cao chúng ta càng cần đến khả năng tự học, vì điều kiện để học có thầy có lớp càng ít đi, trong khi nhu cầu và niềm vui học tập ở tuổi nào cũng có. Nói thế không có nghĩa là tự học thì tốt hơn là học có thầy hướng dẫn. Tôi đến lúc đi dạy học cho sinh viên vẫn thỉnh thoảng nói sai tiếng Pháp. Nếu có điều kiện về thời gian và tiền bạc để học tử tế thì chắc là tiếng Pháp của tôi đã tốt hơn nhiều chứ không “ngọng” như hiện tại.

Vậy, nếu không có được thầy, thì ta có thể làm thế nào để tự học cho hiệu quả? Sau đây là một số biện pháp tốt mà tôi biết:

**Tìm thầy ở xa, ở trên mạng.**

Ngày nay, trong thời đại internet, ngày càng có nhiều bài giảng hay của đủ các môn, của những người thầy giỏi nhất, có thể tìm đến mà xem. Đừng ngại tiếp cận trao đổi qua thư từ với những thầy ở xa có thể chỉ bảo cho mình. Các thầy giỏi thường là rất bận, nhưng nếu mình tỏ ra thành tâm thì cũng có những lúc sẽ dành được chút thời gian cho mình. Đôi với một số môn học, có thể tìm thầy dạy trực tiếp qua mạng với giá cả phải chăng. Ví dụ, có thể học tiếng Tây Ban Nha một thầy (có tiếng mẹ đẻ là Tây Ban Nha) một trò qua skype với giá 10\$/tiếng.

### **Tìm bạn thay thầy.**

Tiếng Việt có câu “học thầy không tày học bạn”. Bạn bè, đồng nghiệp tương trợ được cho nhau rất nhiều trong chuyện học. Có những khi bạn giải thích lại dễ hiểu hơn thầy giải thích. Có thể kết bạn trên internet cho việc cùng học một cái gì đó cũng được. Việc đó càng ngày càng trở nên dễ dàng. Trong việc học tiếng, thì kết bạn, nói chuyện với những người bản xứ là một phương pháp rất hiệu quả.

### **Nhúng mình trong môi trường thuận lợi.**

Học cái gì, mà xung quanh mình có nhiều thứ liên quan về cái đó, thì sẽ vào hơn: sách vở, phim ảnh, đồ thí nghiệm, v.v. đều tốt

### **Không sợ sai.**

“Ai không làm gì thì mới không bao giờ sai”. Cứ làm đi, đừng sợ sai, trừ khi cái sai đó là cái sai gây tai họa cho người khác. Tất nhiên, cần phải quan sát kiểm tra để biết mình sai ở đâu mà còn sửa.

### **Làm từ từ, vừa làm vừa quan sát cảm nhận và suy nghĩ.**

Khi học một cái gì mới, không nên vội vàng đòi kết quả nhanh. Nên làm từ từ (không có nghĩa là lười ít làm, mà là làm với tốc độ chậm), vừa làm vừa quan sát nghĩ ngợi để cảm nhận xem mình làm hư thế có đúng không, sai ở đâu, v.v. Ví dụ như khi tự học bơi: có thể quan sát những người xung quanh bơi thế nào, rồi khi mình bơi thì làm các động tác thật từ từ, thử nhiều kiểu khác nhau, để cảm nhận và suy nghĩ xem động tác nào

làm như thế nào thì bơi được, các cử động phải ăn khớp với nhau như thế nào, v.v. Sau khi đã làm chậm nhưng mà đúng rồi thì mới làm nhanh dần lên.

## THƯ CỦA KAPITSA VỀ KHOA HỌC

ĐÀM THANH SƠN

(*Đại học Chicago, Hoa Kỳ*)

### Lời giới thiệu

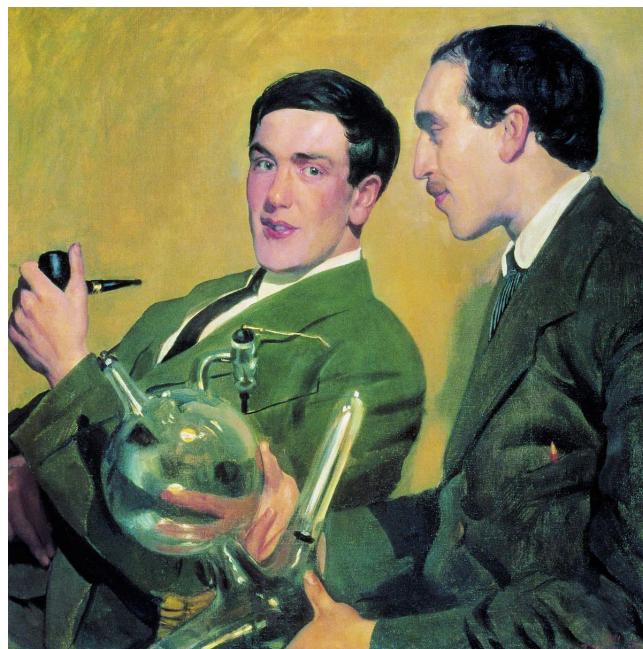
GS. Đàm Thanh Sơn hiện là GS Vật lý lý thuyết tại trường Đại học Chicago, Hoa Kỳ. Ông từng đoạt huy chương vàng toán quốc tế với số điểm tuyệt đối 42/42 khi mới 15 tuổi. Đàm Thanh Sơn rất quan tâm đến việc truyền bá niềm đam mê khoa học cho thế hệ trẻ. Blog của ông <https://damtson.wordpress.com> luôn cập nhật những bài viết hay, những bài toán (vật lý) thú vị ở dạng thường thức phổ thông hay những gợi mở cho các nhà khoa học tương lai. Được sự cho phép của GS Đàm Thanh Sơn, chúng tôi chọn đăng loạt thư của Pyotr Kapitsa về khoa học do ông chọn dịch và giới thiệu trên blog của mình.

Nguồn của các bức thư:

Капица П.Л., Письма о науке, 1930-1980 – М.: Моск. рабочий, 1989.

Ban Biên tập.

## Tóm tắt nội dung



Pyotr Kapitsa (trái) và Nikolay Semyonov, hai nhà vật lý đạt giải thưởng Nobel vật lý ( tranh chân dung của Boris Kustodiev, 1921).

Pyotr Kapitsa (1894-1984) là một nhà vật lý rất nổi tiếng của Nga. Ông làm việc dưới sự hướng dẫn của Rutherford ở Cambridge, Anh, trong nhiều năm. Năm 1933 ông trở thành giám đốc đầu tiên của phòng thí nghiệm Mond. Năm 1934 ông bị giữ lại Nga trong một chuyến đi về Nga. Nhà nước Nga Xôviết mua lại toàn bộ thiết bị của phòng thí nghiệm của ông ở Anh và xây cho ông một Viện nghiên cứu mới, Viện các vấn đề vật lý, ở đó ông là giám đốc đầu tiên. Năm 1937 ông phát hiện ra tính siêu chảy của hêli lỏng, công trình sẽ được giải thưởng Nobel năm 1978. Trong những năm 1937-1938 đen tối ông là người cứu Fok và Landau ra khỏi tù. Trong chiến tranh thế giới thứ 2 ông phát hiện ra và đưa vào sản xuất một loại máy mới để chế tạo ôxy lỏng, và được trao danh hiệu Anh hùng lao động Liên Xô năm 1945. Do mâu thuẫn với Beria ông bị mất tất cả các chức vụ năm 1946. Ông được phục hồi chức giám đốc Viện các vấn đề Vật lý năm 1955.

Ông là người đầu tiên đưa ra ý tưởng thành lập một tạp chí chuyên về khoa học cho thế hệ trẻ, sau này chính là tạp chí Kvant.

Rất nhiều thư của ông đã được công bố. Nhiều bức thư liên quan đến khoa học, giáo dục rất đáng đọc và vẫn còn giữ tính thời sự. Tôi sẽ dịch một số bức thư của ông và đăng trên blog này.

## 1. Trích thư Kapitsa gửi vợ, A.A.Kapitsa

13 tháng 12 năm 1935, Moskva

Hôm qua anh đánh cờ với Aleksei Nikolaevich Bakh<sup>1</sup>. Cụ rất dễ mến, nhưng anh không đồng ý với cụ ở một điểm ... Anh nói với cụ là tình trạng khoa học ở nước ta đang rất xấu, thì cụ bảo: "Đúng thế, nhưng làm gì được, bây giờ có nhiều thứ quan trọng hơn là khoa học ..." Đây là một ví dụ điển hình của một nhà khoa học tự nguyện đẩy mình xuống hạng ưu tiên thứ nhì, thậm chí thứ ba. Anh cho rằng phải coi khoa học là một việc hết sức quan trọng và lớn lao, và cái inferiority complex này (tiếng Anh trong nguyên bản – mặc cảm tự ti, tự cho mình là không quan trọng) đang giết chết nền khoa học ở nước ta. Các nhà khoa học phải cố gắng chiếm vị trí hàng đầu trong việc phát triển văn hóa nước nhà và không lầm bẩm "ở nước ta có những thứ quan trọng hơn". Đánh giá cái gì là quan trọng nhất, và cần phải chú ý đến khoa học kỹ thuật đến mức nào là công việc của các nhà lãnh đạo. Còn công việc của các nhà khoa học là tự tìm chỗ đứng của mình trong đất nước và trong chế độ mới, và không đợi người khác chỉ cho mình phải làm gì. Cái thái độ như vậy rất khó hiểu và xa lạ đối với anh ...

Khi anh nói chuyện với nhiều nhà khoa học, anh rất ngạc nhiên khi họ tuyên bố "Cậu được nhiều như thế thì cậu làm gì chả dễ dàng ..." Và cứ như thế. Họ cứ làm như là khi mới bắt đầu sự nghiệp, những cơ hội ban đầu của anh và của họ không giống nhau. Họ cứ làm như là những gì anh có là rơi từ trời xuống, không phải là do anh đã bỏ ra bao nhiêu công sức, bao nhiêu nỗ lực kinh mới đạt được. Về khía cạnh này con

---

<sup>1</sup>A.N. Bakh (1857-1946) là một nhà hóa sinh lớn của Nga, bạn thân của Kapitsa.

người thật hèn hạ, họ cho rằng cuộc đời không công bằng, rằng xung quanh ai cũng có lỗi trừ họ. Nhưng đấu tranh làm gì, nếu không phải chính là để ta lợi dụng hoàn cảnh sẵn có quanh ta cho việc phát triển tài năng của mình và tạo điều kiện làm việc cho mình? Nếu chấp nhận quan điểm của Bakh và Co. thì không đi xa được ...

## 2. **Bức thư cứu Landau**

6 tháng 4 năm 1939<sup>2</sup>

Đồng chí Molotov,

Trong thời gian gần đây, khi nghiên cứu hêli lỏng ở gần độ không tuyệt đối, tôi đã tìm ra một loạt các hiện tượng mới có thể sẽ làm sáng tỏ một trong những lĩnh vực bí ẩn nhất của vật lý hiện đại. Trong những tháng tới tôi định công bố một phần những công trình đó. Nhưng để làm được việc này, tôi cần được một nhà lý thuyết giúp đỡ. Ở Liên Xô, người hoàn toàn làm chủ lĩnh vực lý thuyết mà tôi cần là Landau, nhưng hiềm một nỗi là anh ta đã bị bắt từ một năm nay.

Tôi vẫn hy vọng là anh ta sẽ được thả, vì tôi phải nói thẳng ra rằng tôi không thể tin Landau lại là một tên tội phạm quốc gia. Tôi không thể tin được điều đó vì một nhà khoa học trẻ, tài năng và chói lọi như Landau, mới 30 tuổi đã nổi tiếng châu Âu, ngoài ra lại rất háo danh, và có đầy những chiến tích khoa học đến mức đó thì không thể có sức lực, cảm hứng và thời gian cho những công việc khác. Đúng là Landau có một cái miệng rất độc, và vì lạm dụng nó anh đã tạo ra nhiều kẻ thù luôn săn sàng gây khó dễ cho mình. Nhưng dù có tính cách khá xấu mà tôi buộc phải lưu ý đến, tôi chưa bao giờ thấy anh ta làm điều gì khuất tất.

Tất nhiên, nói ra tất cả những điều đó, tôi đang can thiệp vào những việc không phải của mình, vì lĩnh vực này là thẩm quyền

---

<sup>2</sup>Landau bị bắt ngày 28/4/1938. Ngay hôm đó Kapitsa viết một bức thư cho Stalin, nhưng không có tác dụng. Sau bức thư trên đây, ngày 26/4/1939 Kapitsa được mời đến NKVD để viết đơn bảo lãnh cho Landau ra tù. Các hiện tượng mới được nhắc đến ở đầu bức thư trên là các hiện tượng liên quan đến tính siêu chảy. Landau xây dựng lý thuyết siêu chảy của hêli trong hai bài báo năm 1941 và 1947.

của NKVD (Bộ Nội vụ). Nhưng dù sao tôi vẫn nghĩ là tôi phải nêu lên những điểm bất thường sau:

1. Landau đã ngồi tù một năm, mà việc điều tra vẫn chưa kết thúc, thời gian điều tra lâu một cách không bình thường.
2. Tôi, với tư cách giám đốc cơ quan của anh ta, hoàn toàn không được biết anh ta bị cáo buộc tội gì.
3. Quan trọng là đã một năm nay, không biết vì lý do gì mà khoa học, cả Xô-viết lẫn thế giới, không được có cái đầu của Landau.
4. Landau rất ôm yếu, nếu anh ta bị bức hại một cách không cần thiết thì rất đáng xấu hổ cho những người Xô-viết chúng ta.

Vì vậy tôi muốn gửi tới đồng chí những yêu cầu sau đây:

1. Có thể đề nghị NKVD đặc biệt chú ý xúc tiến vụ Landau không;
2. Nếu không được, thì liệu có thể sử dụng cái đầu của Landau cho công việc khoa học trong lúc anh ta bị giam ở Butyrki [trại giam cách ly để điều tra] được không. Tôi nghe nói các kỹ sư được đối xử như vậy.

P. Kapitsa

### **3. Về việc trả lương cho những người làm khoa học**

Sau khi trở thành giám đốc Viện các vấn đề Vật lý, Kapitsa đã viết nhiều thư cho lãnh đạo Xô-viết than phiền về cơ chế tài chính quá cồng kềnh và cứng nhắc ở Nga. Trong một thư Kapitsa có viết là công việc kế toán mà thư ký của ông ở Anh làm chưa đến 2 tiếng một ngày thì ở Nga phải 5 người làm mới hết. Trong đoạn sau ông đề nghị áp dụng một cơ chế trả lương ở Viện ông giống như ở Anh.

**Trích thư của Kapitsa gửi cho V.I.Mezhlauk, phó chủ tịch Hội đồng Dân ủy Liên Xô, 26/10/1936**

... Nguyên tắc cơ bản để đánh giá lao động ở Liên Xô được quy định rất rõ ràng và chính xác trong Hiến pháp Stalin<sup>3</sup> hướng theo lao động và năng lực<sup>4</sup>. Nguyên tắc này được áp dụng hết sức nhất quán trong phong trào Stakhanov và đưa đến những thành quả chói lọi. Nó cho mỗi cá nhân một khoảng không rộng lớn để phát triển; một người công nhân xuất sắc, biết tổ chức lao động và vượt mức khoán nhiều lần, sẽ được trả công theo lao động đúng như năng lực người đó thể hiện trong công việc.

Cách trả lương theo thang lương nhà nước như hiện hành mâu thuẫn với nguyên tắc này. Các cơ quan hành chính quan liêu thường hay tuyển những người thích làm việc yên ổn, không thích có sáng kiến, thậm chí trái lại chỉ cố gắng làm càng chính xác chỉ thị từ trên càng tốt. Với những người này, hệ thống trả lương theo thang nhà nước có lẽ là hoàn toàn bình thường. Hệ thống này được áp dụng ở ta trước đây và các nước Tây Âu hiện nay và dẫn đến một tệ quan liêu được [Guy de] Maupassant mô tả sống động mà chưa nước nào tránh được.

Đáng tiếc là chưa ai tìm được cách nào để áp dụng được phương pháp Stakhanov cho các nhân viên hành chính văn phòng, tức là căn cứ vào năng suất lao động để tăng lương.

Áp dụng thang bậc lương nhà nước cứng nhắc đối với các viện khoa học là hoàn toàn sai. Chúng tôi không chấp nhận được kiểu làm việc công chức: công việc của chúng tôi mở ra không gian rộng lớn cho việc hoàn thiện lao động, phát triển cá nhân và phát huy năng lực riêng của từng con người. Hệ thống trả lương cứng nhắc theo thang lương nhà nước hoàn toàn không phù hợp ở đây. Nhưng áp dụng hệ thống trả lương kiểu Stakhanov trong các cơ quan nghiên cứu khoa học cũng không thể được. Trở ngại chính là ở chỗ công việc của chúng tôi không phải là sản xuất, nên không đưa ra được những chuẩn mực cứng để đánh giá công việc theo sản phẩm. Vì thế cần tìm những phương pháp khác. Đó là điều cơ bản.

Phương pháp đáng tin cậy duy nhất để đánh giá công việc trong một viện khoa học là dựa vào ý kiến của ban giám đốc viện, ý kiến mà theo tôi là duy nhất có thẩm quyền để định mức lương,

---

<sup>3</sup>Hiến pháp Liên Xô năm 1936.

<sup>4</sup>Đúng ra phải là: làm theo năng lực, hưởng theo lao động.

bởi vì ban giám đốc là người giao nhiệm vụ, biết mức độ khó khăn của nhiệm vụ, và chỉ đạo công việc cho nên có thể đánh giá công việc tốt hơn bất cứ ai. Không có lối thoát nào khác.

Hệ thống thang lương nhà nước như hiện nay không thích hợp, và bằng chứng ngay trước mắt là tất cả các cơ quan khoa học đang tìm mọi cách để lách khỏi hệ thống này. Các mức lương được xào xáo, thổi phồng bằng một kiểu toán tổ hợp rất phức tạp để làm rối và trốn khỏi con mắt thanh tra của cơ quan tài chính. Phương pháp này đang được chào đón như một công cụ tự vệ tốt nhất để khỏi phải tuân theo kỷ luật ngân sách nghiêm ngặt, cái kỷ luật đi ngược lại các nhu cầu cơ bản của nền khoa học. Kiểu tự lừa dối như thế làm tôi vô cùng ghê tởm ...

#### **4. Về việc đối xử với các nhà khoa học bất đồng quan điểm**

**Trích thư gửi Yuri V. Andropov, chủ tịch Ủy ban An ninh Quốc gia (KGB)**

*Ngày 11 tháng 11 năm 1980, Moskva*

Yuri Vladimirovich kính mến,

Cũng như nhiều nhà khoa học khác, tôi vô cùng lo lắng về tình cảnh và số phận của hai nhà vật lý lớn ở nước ta — A. D. Sakharov và Yu. F. Orlov. Tình hình hiện nay có thể được mô tả đơn giản như sau: Sakharov và Orlov đã đem lại những công hiến to lớn bằng hoạt động khoa học, nhưng những hoạt động của họ như những người bất đồng quan điểm bị coi là có hại. Hiện nay họ đang bị đặt vào hoàn cảnh không thể có bất kỳ một hoạt động gì. Tóm lại, họ không thể mang lại lợi ích cũng như tác hại. Thủ hỏi làm như thế có lợi cho đất nước hay không? Trong bức thư, này tôi sẽ thử phân tích thật khách quan câu hỏi đã nêu.

Nếu hỏi các nhà khoa học, thì họ sẽ trả lời dứt khoát là việc những nhà khoa học lớn như Sakharov và Orlov bị tước mất khả năng nghiên cứu khoa học bình thường đang đem lại thiệt hại cho loài người. Nếu hỏi các nhà hoạt động xã hội, những

người thường ít khi biết đến hoạt động khoa học của các nhà bác học này, thì họ sẽ đưa ra nhận định ngược lại về tình trạng hiện nay.

Trong lịch sử văn hoá loài người, từ thời Socrate đến nay, có không ít trường hợp người ta kịch liệt chống những người bất đồng quan điểm. Để giải quyết khách quan vẫn đề đặt ra tất nhiên cần cân nhắc nó trong bối cảnh xã hội cụ thể của đất nước. Trong hoàn cảnh chúng ta đang xây dựng một chế độ xã hội mới, tôi nghĩ đúng đắn nhất là căn cứ vào quan điểm của Lênin, vì đó là quan điểm toàn diện của một người không những là một nhà tư tưởng nổi tiếng, một nhà khoa học, mà còn là một nhà hoạt động xã hội lớn. Cách đối xử của Lênin với các nhà khoa học trong những trường hợp tương tự được nhiều người biết đến. Điều này được thể hiện rõ ràng và đầy đủ nhất qua cách Lênin đối xử với I. P. Pavlov.

Sau cách mạng, ai cũng biết về sự bất đồng quan điểm của Pavlov, không chỉ ở nước ta mà cả ở nước ngoài. Ông cố tình phơi bày công khai thái độ không tán thành chủ nghĩa xã hội của mình. Ông đã phê phán, thậm chí chửi lanh đạo không e dè bằng những lời phát biểu rất gay gắt; ông làm dấu thánh khi đi qua nhà thờ, đeo các huy chương của Nga Hoàng trao tặng, những huy chương mà trước cách mạng ông không thèm để ý đến, v.v. Nhưng Lênin không mấy may để ý đến những biểu hiện bất đồng quan điểm của Pavlov. Đối với Lênin, Pavlov là một nhà khoa học lớn, và Lênin đã làm tất cả những gì có thể để đảm bảo điều kiện làm việc tốt cho công việc khoa học của Pavlov. Ví dụ, mọi người đều biết, các thí nghiệm quan trọng về phản xạ có điều kiện được Pavlov tiến hành trên chó. Vào những năm 1920, thực phẩm ở Petrograd thiếu trầm trọng, nhưng theo chỉ thị của Lênin, thức ăn để nuôi các con chó thí nghiệm của Pavlov vẫn được cung cấp bình thường ...

Tôi còn biết hàng loạt những trường hợp khác mà Lênin quan tâm đặc biệt tới các nhà khoa học. Điều này được biết qua những thư Lênin gửi K. A. Timiryazev, A. A. Bogdanov, Carl Steinmetz v.v.

... Cần phải đối xử với những người bất đồng chính kiến một cách trân trọng và thận trọng như Lênin đã làm. Sự bất đồng quan điểm liên quan chặt chẽ đến hoạt động sáng tạo của con

người, mà hoạt động sáng tạo trong mọi lĩnh vực văn hoá lại đảm bảo sự tiến bộ của nhân loại.

Có thể nhận ra dễ dàng là nguồn gốc của tất cả các lĩnh vực hoạt động sáng tạo của con người chính là sự bất mãn với hiện trạng. Ví dụ, nhà khoa học không thoả mãn với trình độ nhận thức hiện tại trong lĩnh vực khoa học mà anh ta quan tâm, và anh ta đi tìm những phương pháp nghiên cứu mới. Nhà văn không hài lòng với mối quan hệ giữa người với người trong xã hội hiện tại, và anh ta cố gắng dùng nghệ thuật để tác động lên cấu trúc xã hội và đến hành vi của con người. Người kỹ sư không thoả mãn với giải pháp kỹ thuật đang có và đi tìm những dạng kết cấu mới để giải quyết vấn đề. Nhà hoạt động xã hội không bằng lòng với các văn bản luật và ước lệ đang được sử dụng để xây dựng nhà nước, và đi tìm những hình thức mới để vận hành xã hội, v.v.

Tóm lại, để xuất hiện ước muốn sáng tạo, thì cơ bản là phải có sự bất mãn với hiện trạng, nghĩa là cần trở thành người bất đồng ý kiến. Điều này đúng trong mọi lĩnh vực hoạt động của con người. Tất nhiên, người bất mãn thì nhiều, nhưng để có thể thể hiện mình một cách có hiệu quả trong hoạt động sáng tạo thì còn cần có tài năng. Cuộc sống cho thấy là có rất ít tài năng lớn, và vì thế cần tôn trọng và nâng niu bảo vệ họ. Kể cả khi có lanh đao tốt thì điều này cũng khó thực hiện. Khả năng sáng tạo lớn còn đòi hỏi tính cách mạnh, và điều đó dẫn đến những cách thể hiện bất mãn gay gắt, vì thế người tài thường là "ngang". Ví dụ, hiện tượng này hay thấy ở các nhà văn lớn, vì họ rất thích tranh cãi và thích phản kháng. Trên thực tế, hoạt động sáng tạo thường không được tiếp đón nhiệt tình lắm, vì đa số mọi người là bảo thủ và ưa một cuộc sống phẳng lặng.

Kết quả là biện chứng phát triển văn hoá của loài người bị kẹt trong mâu thuẫn giữa sự bảo thủ và sự bất đồng quan điểm, và điều này xảy ra ở mọi thời đại và trong mọi lĩnh vực hoạt động văn hoá của con người ...

... Công việc sáng tạo lớn thường mang tính chất tư tưởng và không bị lung lay bởi những biện pháp hành chính hay bạo lực. Lênin đã chỉ rõ phải xử lý thế nào trong những trường hợp như thế qua cách ông đối xử với Pavlov. Lịch sử chứng minh rằng Lênin đúng khi đã lờ đi những biểu hiện bất đồng

quan điểm gay gắt của Pavlov trong các vấn đề xã hội, trong khi vẫn rất trân trọng cá nhân cũng như hoạt động khoa học của Pavlov. Điều đó dẫn đến kết quả là trong thời Xôviết, Pavlov với tư cách là nhà sinh lý học đã không hề gián đoạn những nghiên cứu xuất sắc của mình về phản xạ có điều kiện, những nghiên cứu cho đến nay vẫn còn vai trò dẫn dắt trong khoa học thế giới. Còn về những vấn đề liên quan đến xã hội thì tất cả những gì Pavlov nói đã bị lãng quên từ lâu.

Không biết tại sao bây giờ chúng ta lại quên những di huấn của Lênin trong cách đối xử với các nhà khoa học...

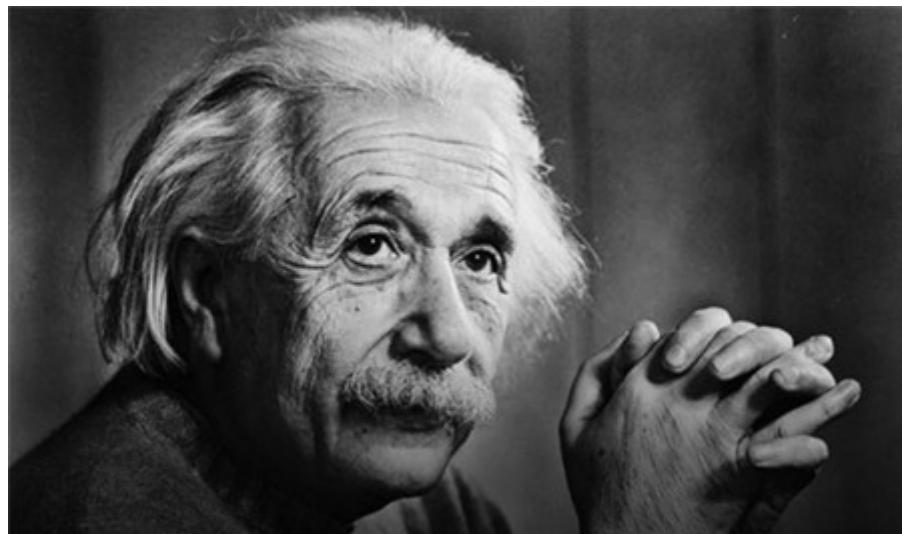
# NHỮNG TRIẾT LÝ SỐNG CỦA EINSTEIN

BAN BIÊN TẬP EPSILON

## Lời giới thiệu

Albert Einstein không chỉ nổi danh với thuyết tương đối mà ông còn để lại cho nhân loại những triết lý sống vô cùng thâm thúy. Tất cả mọi người đều có thể học được điều gì đó từ những triết lý này, cho dù họ là học sinh, sinh viên, phụ huynh, thầy cô giáo, nhà khoa học hay doanh nhân. Chúng tôi trích đăng một số câu nói của Einstein và các bình luận được các báo Tuổi trẻ và Doanh nhân Sài Gòn giới thiệu.

Một số câu nói khác của Einstein cũng được Nguyễn Tiến Dũng trích dẫn trong bài viết của tác giả này trên cùng số báo này.



## 1. Theo đuổi trí tö mò

"Tôi chẳng có tài năng đặc biệt nào cả. Tôi chỉ ham thích tö mò".

Tö mò giúp cung cấp trí tưởng tượng cho chúng ta. Khi chúng ta đặt câu hỏi về những thứ khác, chúng ta có thể tìm được thông tin quan trọng giúp giải quyết vấn đề, mở ra những cánh cửa mới và hình thành các mối liên kết. Khi chúng ta đặt câu hỏi về chính bản thân, chúng ta có thể đánh thức niềm tin, tiết lộ những ham muốn sâu thẳm nhất của mình và tạo nên sự thay đổi tích cực. Những câu hỏi chưa có lời giải nào đang xuất hiện trong đầu bạn ?

## 2. Sự kiên trì là vô giá

"Không phải tôi quá thông minh, chỉ là tôi dành thời gian lâu hơn để nghiên ngẫm các vấn đề."

Nếu bạn có một giấc mơ, bạn sẽ phải đổi mới với những trở ngại; nhưng bằng việc kiên trì với nó, như Einstein nói, có thể mang ý nghĩa là sự khác biệt giữa thất bại và thành công. Một số cách để bắt đầu luyện tập kiên trì là cam kết giấc mơ của bạn, giữ thái độ tích cực, luôn tập trung vào những gì bạn muốn mỗi ngày và trở lại từ nghịch cảnh.

## 3. Tập trung vào hiện tại

"Người đàn ông nào lái xe an toàn trong khi đang hôn một cô gái xinh đẹp thì đơn giản là người đó không trao cho nụ hôn sự tập trung xứng đáng".

Einstein đã sử dụng một ví dụ thật tuyệt vời để minh họa cho tầm quan trọng của việc tập trung vào hiện tại. Chúng ta có thể bỏ lỡ những niềm vui hiện tại bằng việc quá bận tâm tới quá khứ và/hoặc tương lai. Nhắc nhở bản thân mỗi ngày rằng hiện tại sẽ mang đến cho chúng ta sự bình an và niềm vui nhiều hơn cũng như biết珍惜 cuộc sống hơn.

## 4. Trí tưởng tượng là quyền năng

"Trí tưởng tượng là tất cả. Trí tưởng tượng là bản xem thử của những địa điểm tham quan sắp đến trong cuộc sống. Trí tưởng tượng còn quan trọng hơn cả kiến thức".

Với một ý tưởng, một đế chế có thể được hình thành. Lấy ví dụ, Walt Disney, một chuyên gia đích thực trong việc tưởng tượng. Ông lấy cảm hứng cho nhân vật chuột Mickey từ một con chuột thú cưng đã già trong nông trại của ông. Chú chuột trắng đen đó trở thành huyền thoại hoạt hình. Trí tưởng tượng sẽ mở cánh cửa đến với vương quốc của những khả năng.

## 5. Hãy mắc sai lầm

"Một người chưa bao giờ mắc sai lầm sẽ không bao giờ làm những điều mới lạ".

Sai lầm là điều chắc chắn xảy ra đặc biệt khi bạn theo đuổi điều gì đó đáng giá. Chúng có thể gây thất vọng và khó khăn cho sự tự tin, nhưng thường cần thiết để kiểm tra cam kết thực sự của chúng ta với mục tiêu cuối cùng. Làm gì có những điều tuyệt vời nào được hoàn thành mà không gặp thất bại lúc đầu theo cách nào đó. Thất bại thật sự là khi không bắt đầu hoặc không hoàn thành.

## 6. Sống cho khoảnh khắc

"Tôi chẳng bao giờ nghĩ về tương lai, nó sẽ đến sớm thôi".

Như họ nói, khoảnh khắc này là tất cả những gì chúng ta thực sự nắm giữ, một khái niệm khó nắm bắt. Eckhart Tolle từng nói trong quyển sách của ông, **Power of Now (Quyền năng của Hiện tại)**, rằng sự thành công của một người trong khoảnh khắc hiện tại có thể thực sự được đo bằng sự bình an mà anh/cô ấy cảm nhận được. Bằng việc trở nên ý thức được thời điểm, chúng ta có thể tập trung vào vấn đề quan trọng nhất.

Bạn chỉ có thể chắc chắn về những gì đang diễn ra trong hiện tại. Bạn có quyền lo lắng cho tương lai và xây dựng một kế

hoạch, nhưng hầu như mọi thứ sẽ không diễn ra như bạn dự tính. Vấn đề quan trọng nhất là sống hết mình ngày hôm nay. Làm mọi thứ tốt nhất trong khả năng và sẽ không phải lo lắng gì về ngày mai.

## 7. Tạo ra giá trị

"Nỗ lực không chỉ để thành công, nhưng đúng hơn là để có giá trị".

Bạn định nghĩa thành công như thế nào? Làm gì để có cuộc sống thành công? Những câu hỏi này có thể là những câu rất hay để bạn tự chất vấn bản thân. Đó có thể là nuôi dạy những đứa con khỏe mạnh và hạnh phúc, có những mối quan hệ ý nghĩa và trọn vẹn, chính xác trong các cuộc hội thoại , viết một cuốn sách, yêu công việc, cảm thấy khỏe mỗi ngày – bất cứ điều gì giành cho bạn, đó là nơi để đặt hoặc tiếp tục trọng tâm. Những gì chúng ta tập trung vào sẽ phát triển thực sự.

## 8. Đừng lặp đi lặp lại

"Điên rồ : làm cùng một việc lặp đi lặp lại nhiều lần và mong đợi kết quả khác nhau".

Nếu bạn không hạnh phúc trong bất cứ lĩnh vực nào trong cuộc sống như tài chính hay các mối quan hệ, hãy chọn làm một việc khác vào ngày hôm sau. ý tưởng này nhằm đánh thức thói quen. Nếu bạn có một công việc không trọn vẹn hoặc làm nản lòng ở mức độ nào đó, hãy suy nghĩ bạn có thể làm gì để thay đổi tình hình. Đôi khi một cái nhìn mới về cùng vấn đề là tất cả những gì cần thiết để nhận ra những gì có thể xảy ra. Bước đầu tiên là nhận ra sự bất mãn và sau đó chỉ việc hướng tới mục tiêu duy nhất đó là sự hài lòng.

## 9. Kiến thức đến từ kinh nghiệm

"Thông tin không phải là kiến thức. Nguồn kiến thức duy nhất là kinh nghiệm".

Kinh nghiệm thực tế tạo ra kiến thức sẽ được tôn trọng và đánh giá cao bởi người khác. Chúng ta có thể đọc sách, nghe băng, và đi học nhưng những kinh nghiệm chúng ta có trong cuộc sống có thể mang lại bài học tốt nhất cho người khác. Câu chuyện cuộc sống của bạn chứa đựng nhiều kiến thức và mọi người sẵn sàng lắng nghe bởi vì đó là cách hấp dẫn và đáng tin cậy nhất để tạo sự khác biệt với một ai đó.

## 10. Biết nguyên tắc và làm tốt hơn

"Bạn phải biết quy luật của trò chơi. Và sau đó bạn phải chơi tốt hơn bất cứ ai".

Để trở thành chuyên gia ở một lĩnh vực nào đó, cần tìm hiểu tất cả những gì có thể về vấn đề đó, nghiên cứu thành công của người khác và đặt mục tiêu làm tốt hơn họ. Sự cam kết và niềm đam mê với nỗ lực càng mạnh mẽ thì sự quyết tâm đến với thành công càng lớn.

## 11. Hãy đơn giản mọi thứ

"Nếu bạn không thể giải thích cho đứa trẻ 6 tuổi hiểu được, thì chính bạn cũng không hiểu gì cả".

Cố làm cho mọi thứ phức tạp đồng nghĩa với việc bạn không hiểu bản chất của vấn đề. Hãy nhớ đến những thầy cô giáo đã từng dạy bạn. Họ đã giải thích tất cả những trang sách đầy chữ cho bạn bằng những lời lẽ giản dị và dễ hiểu nhất. Bạn cũng nên ghi nhớ điều này khi giao tiếp hoặc huấn luyện nhân viên.

## 12. Hãy sáng tạo

"Sáng tạo có tính lây lan, hãy truyền nó đi!".

Hãy khơi nguồn cảm hứng cho mọi người làm điều mà họ yêu thích. Hãy sử dụng khả năng sáng tạo để tạo ra những công việc và niềm vui. Đã đến lúc bạn dành tâm trí cho các ý tưởng và tạo ra hiệu ứng domino đến mọi người xung quanh.

## 13. Dám mắc sai lầm

"Cách duy nhất để tránh sai lầm là đừng có ý tưởng mới".

Sai lầm là thứ xảy ra hằng ngày hằng giờ với bất kỳ ai. Và thứ thực sự làm thay đổi thế giới, không phải là một quy trình hoàn hảo mà là những ý tưởng mới. Do đó, học cách chấp nhận sai lầm và mạo hiểm với sáng tạo là điều cần thiết để tạo ra sự thay đổi tích cực trong bất kỳ tổ chức nào.

## 14. Hãy luôn chăm chỉ

"Bạn không bao giờ thất bại cho đến khi bạn ngừng nỗ lực".

Einstein dành cả đời để nghiên cứu các lý thuyết vật lý và nhiều nghiên cứu trong số đó không đi đến kết quả nào. Chúng ta không thể chắc chắn về kết quả của mọi việc chúng ta làm, nhưng kiên trì chính là chìa khóa. Tất cả những gì chúng ta có thể làm là chăm chỉ theo đuổi mục tiêu. Thất bại chỉ tồn tại khi ta dừng lại ở ngay đó mà không cố gắng bước những bước tiếp theo để đến thành công.

## 15. Nghĩ khác

"Tôi chưa bao giờ khám phá ra điều gì bằng cách tư duy hợp lý".

Những thứ tuyệt vời nhất đến luôn đến từ việc nghĩ "ngoài chiếc hộp" và làm những việc khác thường. Mọi người thường khó chịu với những kẻ nghĩ khác, nhưng đó cũng là lý do vì sao chỉ có rất ít người kiệt xuất. Khi gặp vấn đề nan giải, hãy cố gắng nghĩ theo hướng khác, biết đâu bạn sẽ có câu trả lời.

## 16. Phát huy trí tưởng tượng

"Tưởng tượng là dạng thức tối cao của nghiên cứu". "Tôi có khả năng để vẽ thoải mái như một họa sĩ chỉ nhò vào trí tưởng tượng của mình. Trí tưởng tượng quan trọng hơn kiến thức. Kiến thức thì có giới hạn. Trí tưởng tượng bao trùm thế giới".

Sau khi tưởng tượng về một điều gì đó khác, bạn bắt đầu chia sẻ nó với mọi người. Sau đó, mọi người sẽ có thể nhìn thấy thế giới mà bạn tưởng tượng và họ sẽ liên kết và hỗ trợ bạn. Hãy dành thời gian để mơ mộng, tưởng tượng và nhớ chia sẻ ý tưởng của bạn với những người xung quanh.

## 17. Làm những điều không thể

"Chỉ những ai nỗ lực hết mình mới có thể đạt được những điều tưởng chừng không thể".

Nếu bạn sẵn sàng đổi mới với khó khăn thì bạn mới tiến gần hơn đến điều không thể. "Điều không thể" cũng chỉ là một khái niệm tương đối. Bạn sẽ ngạc nhiên khi dám vượt qua những điều hợp lý mà mọi người vẫn nghĩ.

## 18. Tôn trọng mọi người

"Từ cuộc sống thường ngày, chúng ta biết rằng sống - trước hết là cho những người xung quanh, cho những người luôn nở nụ cười và khiến ta hạnh phúc".

"Cuộc đời sẽ chẳng đáng sống, trừ khi ta sống vì những người khác".

Hãy quan tâm đến mọi người trước tiên. Dành ít nhất một vài phút mỗi ngày để tập trung kết nối, trò chuyện với người khác. Hãy cho họ biết rằng bạn trân trọng họ. Cảm ơn và gửi tặng họ những lời khen mà họ xứng đáng được nhận. Điều này không chỉ giúp tâm trạng của họ tốt hơn mà cả tâm trạng của bạn nữa.

## 19. Luôn sẵn sàng học hỏi

"Học hỏi chính là kinh nghiệm. Những thứ khác chỉ là thông tin".

Học là một hành trình chứ không phải là việc đắm mình trong tất cả các thông tin. Hãy "lặn tìm kho báu" và luôn ghi nhớ rằng chỉ có một số điều hữu ích cho bạn, còn số khác thì không. Việc học không phải là thứ có thể phù hợp với tất cả mọi người, hãy tìm ra cách riêng của bạn.

## 20. Làm những điều đúng

"*Luôn làm điều đúng. Việc này sẽ làm hài lòng một số người và làm những người còn lại ngạc nhiên*".

Khi bạn đứng giữa một ngã ba đường, hãy chọn việc đúng đắn mà làm. Các lựa chọn khác có thể dễ dàng thực hiện hơn hoặc mang đến cho bạn nhiều tiền hơn. Nhưng nếu bạn nghĩ lựa chọn còn lại tuy khó khăn sẽ cho bạn nhiều cơ hội trong tương lai, hoặc chỉ đơn giản đó là điều đúng đắn cần làm thì bạn hãy chọn nó.

Đôi khi những con đường khó khăn gấp ghênh sẽ tốt hơn con đường mòn nhiều người đã đi. Hãy dành thời gian để theo dõi những giá trị đạt được và làm những điều đúng đắn để giúp bạn nổi trội trong đám đông.

# LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN 4 BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM 2015

TRẦN NAM DŨNG

(Đại học KHTN, Tp. Hồ Chí Minh)

## Tóm tắt nội dung

Trong số trước, bạn Trần Quang Hùng đã đưa ra lời giải cho hai bài toán hình học trong đề chọn đội tuyển Việt Nam năm 2015 cùng với những phân tích bình luận thú vị liên quan. Ở đây, trong số này, chúng tôi sẽ tiếp tục giới thiệu cùng bạn đọc lời giải cho 4 bài toán còn lại của đề thi.

**Bài toán 1.** Gọi  $\alpha$  là nghiệm dương của phương trình  $x^2 + x = 5$ . Giả sử  $n$  là số nguyên dương và các số nguyên không âm  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  thỏa mãn đẳng thức

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_n\alpha^n = 2015. \quad (*)$$

- a) Chứng minh rằng  $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \equiv 2 \pmod{3}$ .
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng  $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ .

**Lời giải.** a) *Cách 1.* Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $n$ . Với  $n = 0$ , ta có  $c_0 = 2015$ , như vậy mệnh đề đúng. Với  $n = 1$ , do  $\alpha$  là số vô tỷ nên đẳng thức  $c_0 + c_1\alpha = 2015$  chỉ có thể xảy ra khi  $c_1 = 0$ ,  $c_0 = 2015$ , mệnh đề vẫn đúng.

Giả sử mệnh đề đã đúng đến  $n \geq 2$ . Xét các số nguyên không âm  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$  thỏa mãn đẳng thức

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_n\alpha^n + c_{n+1}\alpha^{n+1} = 2015.$$

Sử dụng đẳng thức  $\alpha^2 = 5 - \alpha$ , ta có  $c_{n+1}\alpha^{n+1} = c_{n+1}\alpha^{n-1}(5 - \alpha)$ .  
Suy ra

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + (c_{n-1} + 5c_{n+1})\alpha^{n-1} + (c_n - c_{n+1})\alpha^n = 2015.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + (c_{n-1} + 5c_{n+1}) + (c_n - c_{n+1}) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Nhưng đây cũng có nghĩa là

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1} + c_n + c_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}.$$

Vậy mệnh đề đúng với  $n + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

**Cách 2.** Xét đa thức  $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n - 2015$  thì  $P(\alpha) = 0$ . Ta chứng minh rằng  $P(x)$  chia hết cho  $Q(x) = x^2 + x - 5$ , tức là  $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$  với  $S(x)$  là đa thức với hệ số nguyên. Thật vậy, giả sử  $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + Ax + B$ , với  $A, B$  nguyên. Thay  $x = \alpha$  vào ta được  $A\alpha + B = 0$ . Do  $\alpha$  là số vô tỷ nên điều này chỉ có thể xảy ra khi  $A = B = 0$ . Vậy  $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ . Thay  $x = 1$  vào ta được  $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n - 2015 = -3 \cdot S(1)$ , suy ra

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \equiv 2 \pmod{3}.$$

**b)** Với mỗi bộ số nguyên không âm  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$  thỏa mãn (\*), ta gọi  $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n$  là giá của bộ số đó. Do tính sắp thứ tự tốt của tập các số tự nhiên, tồn tại bộ số  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$  thỏa mãn (\*) với giá nhỏ nhất.

Ta chứng minh nhận xét quan trọng sau:

**Nhận xét.** Nếu  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$  là bộ có giá nhỏ nhất thì  $c_i < 5$  với mọi  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**Chứng minh.** Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại  $i$  sao cho  $c_i \geq 5$ . Khi đó dựa vào đẳng thức  $5 = \alpha^2 + \alpha$ , ta có

$$c_i\alpha^i = (c_i - 5)\alpha^i + (\alpha^2 + \alpha)\alpha^i = (c_i - 5)\alpha^i + \alpha^{i+1} + \alpha^{i+2}.$$

Như vậy, bộ số  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_i - 5, c_{i+1} + 1, c_{i+2} + 1, \dots, c_n)$  cũng thỏa mãn (\*) và có giá

$$c_0 + c_1 + \cdots + (c_i - 5) + (c_{i+1} + 1) + (c_{i+2} + 1) + \cdots + c_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n - 3$$

nhỏ hơn giá của bộ  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ . Điều này mâu thuẫn với cách chọn  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$  ở trên. ■

Bây giờ, giống như phần a) ta đặt:

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n - 2015$$

và  $Q(x) = x^2 + x - 5$  thì theo a),  $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ . Đặt:

$$S(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}.$$

So sánh hệ số hai vế, ta được

$$\begin{aligned}c_0 - 2015 &= -5b_0, \\c_1 &= b_0 - 5b_1, \\c_2 &= b_0 + b_1 - 5b_2, \\c_3 &= b_1 + b_2 - 5b_3, \\\dots, \\c_n &= b_{n-2}.\end{aligned}$$

Từ điều kiện  $0 \leq c_0 \leq 4$ , ta suy ra được ngay  $c_0 = 0$  và  $b_0 = 403$ . Tiếp tục sang dòng thứ hai, ta tìm được  $c_1 = 3$  và  $b_1 = 80$ . Nói chung dây  $(c_i, b_i)$  được xác định một cách duy nhất theo công thức  $c_i = b_{i-2} + b_{i-1} \bmod 5$  và  $b_i = \frac{b_{i-2} + b_{i-1} - c_i}{5}$ .

Sử dụng công thức này, ta lần lượt tính được

<b>I</b>	0											
<b>C</b>	0	3	3	1	1	1	3	4	0	0	3	1
<b>B</b>	403	80	96	35	26	12	7	3	2	1	0	0

Từ đó tìm được bộ có giá nhỏ nhất là  $(0, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 4, 0, 0, 3, 1)$ , và giá nhỏ nhất là 20. Vậy giá trị nhỏ nhất của  $c_0 + c_1 + \cdots + c_n$  là 20, đạt được ở bộ  $(0, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 4, 0, 0, 3, 1)$ .  $\square$

**Bình luận.** Ý tưởng quy nạp trong cách giải 1 của phần a) là khá tự nhiên. Và sự kiện  $P(x)$  chia hết cho  $Q(x)$  mà ta dùng trong cách giải 2 không phải là một điều gì đặc biệt. Ta có hai tính chất đơn giản nhưng quan trọng sau:

**Tính chất 1.** Nếu  $P(x)$  và  $Q(x)$  là các đa thức với hệ số nguyên, ngoài ra  $Q(x)$  đơn khởi, tức là có hệ số cao nhất bằng 1 thì tồn tại duy nhất các đa thức với hệ số nguyên  $S(x)$  và  $R(x)$  sao cho

i)  $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$ ;

**ii)**  $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ .

**Tính chất 2.** Cho  $P(x), Q(x)$  là các đa thức với hệ số nguyên, trong đó  $Q(x)$  bất khả quy, cùng nhận số thực  $\alpha$  làm nghiệm. Khi đó,  $P(x)$  chia hết cho  $Q(x)$ .

Trong phần b), ta đã dùng phương pháp tìm tính chất của bộ số tối ưu, sau đó dùng tính chất này để xây dựng bộ số tối ưu đó. Lời giải phần b) liên hệ chặt chẽ đến cả hai cách giải ở phần a). Đây là một bài toán khá thú vị vì nó liên hệ được nhiều vấn đề trong cùng một bài toán: đa thức, số nguyên, hệ đếm cơ số, chia hết, thuật toán.

### Một số bài toán liên quan

1. (Nga 2014) Kho bạc nhà nước của nước Cộng hòa toán học chọn một số  $\alpha > 2$  và sản xuất các đồng xu có mệnh giá  $1$  rúp và  $\alpha^k$  rúp với mọi  $k$  nguyên dương. Người ta nhận thấy rằng mọi mệnh giá (trừ mệnh giá  $1$ ) đều vô tỷ. Có thể xảy ra tình huống là mọi số nguyên dương  $n$ , ta đều có thể chọn ra một số đồng xu có tổng bằng  $n$  và mỗi một mệnh giá được chọn không quá  $6$  lần?
2. (IMO 1976) Tổng của một số số nguyên dương bằng  $1976$ . Hỏi tích của chúng lớn nhất bằng bao nhiêu?

**Bài toán 3.** Một số nguyên dương  $k$  có tính chất  $T(m)$  nếu như với mọi số nguyên dương  $a$ , tồn tại số nguyên dương  $n$  sao cho

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \equiv a \pmod{m}.$$

**a)** Tìm tất cả các số nguyên dương  $k$  có tính chất  $T(20)$ .

**b)** Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất có tính chất  $T(20^{15})$ .

**Lời giải.** **a)** Đặt  $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$  thì theo các công thức quen thuộc, ta có

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

và

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}.$$

Sử dụng tính chất  $n^{k+4} - n^k \equiv 0 \pmod{20}$  với mọi  $k > 1$  ta suy ra  $k > 1$  thỏa mãn tính chất  $T(20)$  khi và chỉ khi  $k + 4$  thỏa mãn tính chất  $T(20)$ . (\*)

Để có tính chất  $T(20)$ , trước hết ta phải có tính chất  $T(5)$ . Lập bảng mô-đun 5 như sau

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S_1(n)$	1	3	1	0	0	1	3	1	0
$S_2(n)$	1	0	4	0	0	1	0	4	0
$S_3(n)$	1	4	1	0	0	1	4	1	0

Ta thấy  $k = 1, 2, 3$  không thỏa mãn. Vì  $n^5 \equiv n \pmod{5}$  nên  $k = 5$  cũng không thỏa mãn. Vậy tất cả các số không là bội của 4 đều không thỏa mãn tính chất  $T(20)$ .

Ta chứng minh  $k = 4$  thỏa mãn tính chất  $T(20)$ , từ đó, sử dụng (\*) suy ra mọi bội số của 4 đều thỏa mãn tính chất  $T(20)$ . Ta thấy bảng đồng dư mô-đun 20 của  $n^4$  là

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^4$	1	16	1	16	5	16	1	16	1	0	1

Suy ra bảng đồng dư mô-đun 20 của  $S_4(n)$  là:

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$S_4(n)$	1	17	18	14	19	15	16	12	13	13	14
$N$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$S_4(n)$	10	11	7	12	8	9	5	6	6	7	3
$N$	23	24	25	26	27						
$S_4(n)$	4	0	5	1	2						

Như vậy tất cả các số dư đều xuất hiện. Vậy tất cả các số thỏa mãn điều kiện  $T(20)$  là các bội số của 4.

**b)** Theo kết quả câu a) thì  $k = 1, 2, 3$  không thỏa mãn điều kiện  $T(20^{15})$ . Ta chứng minh rằng  $k = 4$  thỏa mãn điều kiện  $T(20^m)$  với mọi  $m$ . Từ đó suy ra  $k = 4$  là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Để chứng minh điều này, ta chứng minh với mọi  $a$  nguyên, tồn tại  $n$  sao cho  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{30 \cdot 20^m}$ .

Ta lần lượt chứng minh rằng với mọi  $a$  nguyên:

- 1) **Tồn tại  $n$  sao cho  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{3}$ , giả sử là  $n_1$ .**
- 2) **Tồn tại  $n$  sao cho  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{2^{2m+1}}$ , giả sử là  $n_2$ .**
- 3) **Tồn tại  $n$  sao cho  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{5^{m+1}}$ , giả sử là  $n_3$ .**

Khi đó, theo định lý Trung hoa về số dư, tồn tại  $n$  sao cho

$$n \equiv n_1 \pmod{3}, \quad n \equiv n_2 \pmod{2^{2m+1}}, \quad n \equiv n_3 \pmod{5^{m+1}}$$

và khi đó với  $n$  này thì  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{30 \cdot 20^n}$  và ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1) ở trên là hiển nhiên, ta có thể chọn  $n = 0$ .

Để chứng minh 2), ta chứng minh quy nạp theo  $n$  rằng với mọi  $a$  nguyên và với mọi  $m$  nguyên dương, tồn tại  $n$  sao cho

$$6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{2^m}.$$

Với  $m = 1$  điều này đúng, ta có thể chọn  $n = 0$ . Giả sử tồn tại  $n$  sao cho  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{2^m}$ . Ta chứng minh tồn tại  $n$  sao cho  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \equiv 30a \pmod{2^{m+1}}$ . Đặt:

$$6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n = 30a + u \cdot 2^m$$

và chọn  $N = n + v \cdot 2^m$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 6N^5 + 15N^4 + 10N^3 - N &\equiv 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n - v \cdot 2^m \\ &= 30a + (u - v) \cdot 2^m \pmod{2^{m+1}}. \end{aligned}$$

Như vậy chỉ cần chọn  $v = u$  là ta có  $N$  cần tìm.

Mệnh đề 3) được chứng minh bằng cách hoàn toàn tương tự.

Ta đã hoàn tất việc chứng minh  $k = 4$  thỏa mãn điều kiện  $T(20^m)$  với mọi  $m \in \mathbb{N}^*$ . Vậy  $k = 4$  là giá trị nhỏ nhất cần tìm.  $\square$

### Bình luận.

1. Các hệ số của đa thức  $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$  đóng vai trò khá quan trọng trong bước chuyển từ  $m$  lên  $m+1$ , chẳng hạn khi từ mô-đun  $2^m$  lên mô-đun  $2^{m+1}$ , các hệ số 6 và 10 là chẵn nên mới có các đồng dư:

$$6N^5 \equiv 6n^5 \pmod{2^{m+1}}, \quad 10N^3 \equiv 10n^3 \pmod{2^{m+1}}.$$

Với đồng dư thức  $15N^4 \equiv 15n^4 \pmod{2^{m+1}}$  ta dùng đến nhị thức Newton. Tương tự cho trường hợp từ mô-đun  $5^m$  lên  $5^{m+1}$ , các hệ số 15 và 10 chia hết cho 5, còn với hệ thức

$$6N^5 \equiv 6n^5 \pmod{5^{m+1}},$$

ta dùng đến khai triển nhị thức Newton.

2. Việc sử dụng nâng lũy thừa và định lý Trung hoa về số dư là những kỹ thuật rất cơ bản trong số học mô-đu-la. Vì thế bài toán này chỉ khó đối với các bạn chưa quen với các kỹ thuật này, ngược lại đó là một bài tập khá đơn giản. Đây cũng là điểm yếu của bài toán. Trong thực tế chấm thi, số học sinh làm đúng phần b) rất ít.

### Một số bài toán liên quan

1. (VMO 1997) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , tồn tại số nguyên dương  $k$  sao cho  $19^k + 97$  chia hết cho  $2^n$ .
2. (Saudi Arabia TST 2015) Cho  $n$  và  $k$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu  $n$  nguyên tố cùng nhau với 30 thì tồn tại các số nguyên  $a$  và  $b$ , mỗi số đều nguyên tố cùng nhau với  $n$ , sao cho  $a^2 - b^2 + k$  chia hết cho  $n$ .

**Bài toán 4.** Có 100 sinh viên tham dự một cuộc thi vấn đáp. Ban giám khảo gồm 25 thành viên. Mỗi sinh viên được hỏi thi bởi một giám khảo. Biết rằng mỗi sinh viên thích ít nhất 10 giám khảo trong số các thành viên trên.

- a) Chứng minh rằng có thể chọn ra 7 giám khảo mà mỗi thí sinh đều thích ít nhất 1 trong 7 người đó.
- b) Chứng minh rằng có thể sắp xếp lịch thi sao cho mỗi thí sinh được đúng 1 giám khảo mình thích hỏi và mỗi giám khảo hỏi không quá 10 thí sinh.

**Lời giải. a) Cách 1.** Gọi  $A_1$  là giám khảo được nhiều sinh viên thích nhất và  $a_1$  là số sinh viên thích  $A_1$ . Khi đó, do mỗi sinh viên thích ít nhất 10 giám khảo, ta có

$$a_1 \geq \frac{100 \cdot 10}{25} = 40.$$

Ta chọn giám khảo  $A_1$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_1$ , còn lại  $100 - a_1$  sinh viên. Ta lại xét  $A_2$  là giám khảo được nhiều trong các sinh viên còn lại thích nhất và gọi  $a_2$  là số sinh viên trong số sinh viên còn lại thích  $A_2$ . Ta cũng có

$$a_2 \geq \frac{(100 - a_1) \cdot 10}{24}.$$

Ta có lúc này

$$a_1 + a_2 \geq a_1 + \frac{(100 - a_1) \cdot 10}{24} = \frac{14a_1 + 1000}{24} \geq \frac{14 \cdot 40 + 1000}{24} = 65.$$

Ta chọn giám khảo  $A_2$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_2$ , còn lại  $100 - a_1 - a_2$  sinh viên.

Tiếp theo, ta xét  $A_3$  là giám khảo được nhiều trong các sinh viên còn lại thích nhất và gọi  $a_3$  là số sinh viên trong số sinh viên còn lại thích  $A_3$ . Ta có

$$a_3 \geq \frac{(100 - a_1 - a_2) \cdot 10}{23}.$$

Ta có lúc này:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &\geq a_1 + a_2 + \frac{(100 - a_1 - a_2) \cdot 10}{23} \\ &= \frac{13(a_1 + a_2) + 1000}{23} \geq \frac{13 \cdot 65 + 1000}{23} = 80, 22. \end{aligned}$$

Suy ra  $a_1 + a_2 + a_3 \geq 81$ . Hoàn toàn tương tự như vậy ta có

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\geq a_1 + a_2 + a_3 + \frac{(100 - a_1 - a_2 - a_3) \cdot 10}{22} \\ &= \frac{12(a_1 + a_2 + a_3) + 1000}{23} \geq \frac{12 \cdot 81 + 1000}{23} = 89, 63. \end{aligned}$$

Suy ra  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 90$ . Tiếp tục như vậy, ta có  $a_1 + \dots + a_5 \geq 95$ ,  $a_1 + \dots + a_6 \geq 98$  và  $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 100$ .

**Cách 2.** Cũng như cách 1, ta gọi  $A_1$  là giám khảo được nhiều sinh viên thích nhất và  $a_1$  là số sinh viên thích  $A_1$ . Khi đó, do mỗi sinh viên thích ít nhất 10 giám khảo, ta có

$$a_1 \geq \frac{100 \cdot 10}{25} = 40.$$

Ta chọn giám khảo  $A_1$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_1$ , còn lại tối đa 60 sinh viên. Nếu số sinh viên không phải là 60, ta sẽ bổ sung thêm một số sinh viên “ảo” cho đủ 60. Các sinh viên ảo này thích tất cả các giám khảo. Rõ ràng nếu ta chọn được 7 giám khảo cho các sinh viên kể cả các sinh viên ảo thì cũng là 7 giám khảo phù hợp cho 100 sinh viên ban đầu. Bổ sung như thế, ta có 60 sinh viên, mỗi sinh viên thích ít nhất 10 giám khảo.

Ta gọi  $A_2$  là giám khảo được nhiều sinh viên trong số 60 sinh viên này (cả thật lẫn ảo, nếu có) thích và  $a_2$  là số sinh viên thích giám khảo  $A_2$ , ta có

$$a_2 \geq \frac{60 \cdot 10}{24} = 25.$$

Ta lại chọn giám khảo  $A_2$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_2$ . Số sinh viên còn lại tối đa là  $60 - 25 = 35$ . Ta lại bổ sung một số sinh viên ảo nếu số sinh viên nhỏ hơn 35, và tiếp tục gọi  $A_3, a_3$  có định nghĩa tương tự như trên. Ta có

$$a_3 \geq \frac{35 \cdot 10}{23} = 15, 21.$$

Suy ra  $a_3 \geq 16$ . Ta lại chọn  $A_3$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_3$ . Số sinh viên còn lại không quá  $35 - 16 = 19$ . Cứ tiếp tục như vậy ta được

- $a_4 \geq 9$ , số sinh viên còn lại sau khi chọn  $A_4$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_4$  không quá 10.
- $a_5 \geq 5$ , số sinh viên còn lại sau khi chọn  $A_5$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_5$  không quá 4.
- $a_6 \geq 2$ , số sinh viên còn lại sau khi chọn  $A_6$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_6$  không quá 2.
- $a_7 \geq 2$ , số sinh viên còn lại sau khi chọn  $A_7$  và loại đi tất cả các sinh viên thích  $A_7$  không quá 0.

Vậy sau khi chọn 7 giám khảo  $A_1, A_2, \dots, A_7$  thì không còn sinh viên nào, tức là mỗi sinh viên đều thích 1 trong 7 giám khảo đã chọn (đpcm).

**b)** Ta cứ sắp xếp lịch thi cho các thí sinh sao cho mỗi giám khảo hỏi thi không quá 10 thí sinh, đến khi không thể thực hiện được nữa thì dừng lại. Giả sử còn một thí sinh  $A$  chưa được thi. Vì  $A$  thích ít nhất 10 giám khảo nên ta xét 10 trong số giám khảo mà  $A$  thích. Theo giả sử thì ta không thể cho  $A$  thi nữa do đó các giám khảo đều đã đủ “quota”, tức là đã hỏi đủ 10 thí sinh. Vì mỗi thí sinh chỉ được hỏi bởi một giám khảo nên số thí sinh đã được hỏi thi là  $10 \times 10 = 100$ , mâu thuẫn. Vậy không còn thí sinh nào không được hỏi thi và ta có điều phải chứng minh.  $\square$

### Bình luận.

**1.** Câu a) bài toán này có thể mô hình hóa dưới dạng bài toán tập hợp: Có 100 tập con  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$  của tập hợp  $X = \{1, 2, \dots, 25\}$ ,  $|A_i| \geq 10$ . Khi đó tồn tại  $Y \subset X$ ,  $|Y| = 7$  sao cho  $A_i \cap Y \neq \emptyset$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 100$ . Với mô hình này, ta có thể chuyển sang mô hình ma trận thuộc. Chẳng hạn, ta có thể đi theo hướng chứng minh phản chứng và đếm số bộ 7 số 0 trong ma trận thuộc: Giả sử ngược lại, không tồn tại  $Y$  thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó với mọi 7 cột ta luôn tìm được ít nhất một dòng mà giao của dòng đó với 7 cột là các số 0. Suy ra số bộ 7 số 0 trên dòng ít nhất là  $C_{25}^7$ . Mặt khác, trên mỗi dòng có nhiều nhất 15 số 0 nên số bộ 7 số 0 trên dòng nhiều nhất là  $100C_{15}^7$ . Nếu ta có được  $C_{25}^7 > 100C_{15}^7$  thì sẽ suy ra mâu thuẫn. Đáng tiếc (!) là ở đây thì ta lại có  $C_{25}^7 < 100C_{15}^7$  nên cách này không khả thi. Thú vị là chỉ cần giảm số giám khảo từ 25 xuống 24 thì quả thật  $C_{24}^7 > 100C_{14}^7$  và cách giải này trót lọt. Ngược lại, nếu thay 25 bằng 26 thì quy trình giải trên đây sẽ cho số giám khảo cần thiết là 8. Như vậy số 25 được chọn khá có chủ ý.

**2.** Với các chú ý ở trên, có hai câu hỏi được đặt ra là:

- 1) Nếu cố định các thông số 100 (số sinh viên), 25 (số giám khảo), 10 (số giám khảo tối thiểu mà một sinh viên thích) thì có thể thay 7 bằng 6 được không?
- 2) Nếu cố định các thông số 100 (số sinh viên), 10 (số giám khảo tối thiểu mà một sinh viên thích) và 7 (số giám

khảo cần chọn) thì có thể thay 25 bằng 26 được không?  
Và có thể thay bằng số lớn nhất là bao nhiêu?

3. Cách giải câu b) trình bày ở trên cho thấy kết quả câu b) khá tầm thường và như vậy bài 4 thực sự là bài dễ nhất của kỳ thi. Xét tổng thể trong bối cảnh ngày thi thứ hai thì điều này là hợp lý. Tuy nhiên, kết quả bài làm của thí sinh ở bài 4 một lần nữa cho thấy tổ hợp vẫn là yếu điểm then chốt của học sinh Việt Nam.

### Một số bài toán liên quan

1. (IMC 2002) 200 sinh viên tham dự một cuộc thi toán. Họ phải giải 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán được giải đúng bởi ít nhất 120 sinh viên. Chứng minh rằng tồn tại hai sinh viên mà hợp lại giải đúng cả 6 bài toán.
2. (Putnam) Cho tập hữu hạn  $X$  có  $|X| > 10$ .  $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$  là các tập con của  $X$  sao cho  $|A_i| > \frac{|X|}{2}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 1066$ . Chứng minh rằng tồn tại tập con  $A$  gồm 10 phần tử của  $X$  sao cho  $|A \cap A_i| \geq 1$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 1066$ .
3. (Nga 1993) Mỗi một cư dân thành phố  $N$  quen với ít nhất 30% cư dân của thành phố. Một người dân sẽ đi bầu cử nếu như người quen của người đó tranh cử. Chứng minh rằng có thể tổ chức bầu cử thị trưởng thành phố gồm hai ứng cử viên, sao cho có ít nhất một nửa cư dân đi bầu.

**Bài toán 6.** Tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất sao cho tồn tại  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn điều kiện:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0, \quad a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 < 0, \quad a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5 > 0.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh  $n = 5$  là giá trị  $n$  nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta nhận xét rằng nếu tồn tại  $n$  số thực thỏa mãn điều kiện đề bài thì với mọi  $m > n$  cũng tồn tại  $m$  số thực thỏa mãn điều kiện đề bài (chỉ cần bổ sung thêm  $m - n$  số 0). Vì vậy, để chứng minh  $n = 5$  là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đề bài, ta chỉ cần chứng minh:

- 1) Không tồn tại 4 số thực  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sao cho

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0, \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 < 0, \quad a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 > 0.$$

2) Tồn tại 5 số thực  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  sao cho

$$a_1 + a_2 + \dots + a_5 > 0, \quad a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_5^3 < 0, \quad a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_5^5 > 0.$$

Ta lần lượt chứng minh 1) và 2). Để chứng minh 1), ta giả sử ngược lại rằng tồn tại 4 số thực  $a_1, a_2, a_3, a_4$  thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0, \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 < 0, \quad a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 > 0.$$

Khi đó trong các số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  có ít nhất một số dương và ít nhất một số âm.

**Trường hợp 1: Có 1 số dương, 3 số không dương.** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a_1 > 0 \geq a_2, a_3, a_4$ . Đặt  $b_i = -a_i$  thì ta có  $a_1 > b_2 + b_3 + b_4$  suy ra

$$a_1^3 > (b_2 + b_3 + b_4)^3 \geq b_2^3 + b_3^3 + b_4^3 = -(a_2^3 + a_3^3 + a_4^3).$$

Mâu thuẫn.

**Trường hợp 2: Có 3 số không âm, 1 số âm.**  $a_1, a_2, a_3 > 0 > a_4$ . Đặt  $b_4 = -a_4$ . Ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 > b_4, \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 < b_4^3, \quad a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 > b_4^5.$$

Từ bất đẳng thức thứ hai suy ra  $a_1, a_2, a_3 < b_4$  và

$$a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 < a_1^3 b_4^2 + a_2^3 b_4^2 + a_3^3 b_4^2 = (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) b_4^2 < b_3^5.$$

Mâu thuẫn.

**Trường hợp 3: Có 2 số dương, 2 số âm.** Gọi hai số dương là  $a, b$ , hai số âm là  $-c, -d$  thì ta có  $a, b, c, d > 0$  và

$$a + b > c + d, \quad a^5 + b^5 > c^5 + d^5, \quad a^3 + b^3 < c^3 + d^3.$$

Ta chứng minh điều này sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b$  và  $c \geq d$ . Thật vậy, do

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) < (c + d)(c^2 - cd + d^2)$$

và  $a + b > c + d$  nên  $c^2 - cd + d^2 > a^2 - ab + b^2$ , suy ra

$$(c + d)^2 + 3(c - d)^2 > (a + b)^2 + 3(a - b)^2,$$

suy ra  $c-d > a-b$ . Nếu  $c \leq a$  thì từ đây sẽ suy ra  $b-d > a-c \geq 0$ , suy ra  $b > d$ . Từ đó  $a^3 + b^3 > c^3 + d^3$ , mâu thuẫn. Vậy  $c > a$ . Và như vậy ta có  $c > a \geq b > d$ .

Đến đây ta có một số hướng giải khác nhau như sau:

**Cách 1.** Đặt  $C = \frac{c}{d}$ ,  $A = \frac{a}{d}$ ,  $B = \frac{b}{d}$  thì  $C > A, B$ . Xét hàm số

$$f(x) = C^x + 1 - A^x - B^x$$

thì theo điều kiện ta có  $f(1) < 0$ ,  $f(3) > 0$ ,  $f(5) < 0$ . Ngoài ra, do  $C > A, B$  nên  $f(+\infty) = +\infty$ . Theo định lý về tính chất hàm liên tục, phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất 3 nghiệm. Áp dụng định lý Rolle, suy ra phương trình  $f'(x) = 0$  có ít nhất hai nghiệm. (\*)

Nhưng ta lại có

$$\begin{aligned} f'(x) &= C^x \ln C - A^x \ln A - B^x \ln B \\ &= C^x \left[ 1 - \left( \frac{A}{C} \right)^x \ln A - \left( \frac{B}{C} \right)^x \ln B \right]. \end{aligned}$$

Hàm trong ngoặc là hàm liên tục và đồng biến trên  $\mathbb{R}^+$  đồng biến nên chỉ có nhiều nhất 1 nghiệm, suy ra  $f'(x)$  có nhiều nhất 1 nghiệm, mâu thuẫn với (\*).

**Cách 2.** Ta có  $b \leq \left( \frac{c^3+d^3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$  và  $a < (c^3 + d^3 - b^3)^{\frac{1}{3}}$ . Do đó:

$$(c^3 + d^3 - b^3)^{\frac{5}{3}} + b^5 > c^5 + d^5. \quad (**)$$

Xét hàm số  $f(x) = (c^3 + d^3 - x^3)^{\frac{5}{3}} + x^5$  trên  $\left( d, \left( \frac{c^3+d^3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$ . Ta có

$$f'(x) = \frac{5}{3}(c^3 + d^3 - x^3)^{\frac{2}{3}}(-3x^2) + 5x^4 = 5x^2 \left[ x^2 - (c^3 + d^3 - x^3)^{\frac{2}{3}} \right] \leq 0$$

do  $x \leq \left( \frac{c^3+d^3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$ . Vì vậy  $f$  là hàm nghịch biến và ta có

$$f(x) < f(d) = c^3 + d^3.$$

Do đó (\*\*) không thể xảy ra. Mâu thuẫn.

Cuối cùng, để hoàn tất phép chứng minh, ta sẽ chứng minh tồn tại 5 số thực  $a_1, a_2, \dots, a_5$  sao cho  $a_1 + a_2 + \dots + a_5 > 0$ ,  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_5^3 < 0$  và  $a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_5^5 > 0$ .

Ta sẽ chỉ ra 5 số dương  $a, b, c, d, e$  sao cho  $a + b + c > d + e$ ,  $a^3 + b^3 + c^3 < d^3 + e^3$ ,  $a^5 + b^5 + c^5 > d^5 + e^5$ . Đầu tiên ta chọn  $a = 2x, b = c = 1, d = e = x + 1$  thì  $a + b + c = d + e$ .

Ta sẽ chọn  $x$  sao cho  $(2x)^3 + 2 < 2(x+1)^3$  và  $(2x)^5 + 2 > 2(x+1)^5$ . Giải các bất phương trình này, ta có thể chọn  $x = 1, 5$ . Sau đó điều chỉnh  $d$  một chút, ta có thể chọn  $a = 3, b = c = 1, d = e = 2, 45$ . Bài toán được giải quyết hoàn toàn.  $\square$

### Bình luận.

1. Bài toán này khá thú vị về cách đặt vấn đề, khá mới mẻ cho dù hiện nay bất đẳng thức được nghiên cứu một cách khá rầm rộ và có nhiều công cụ mạnh được trang bị cho học sinh. Để giải được bài này, học sinh cần áp dụng một chút tư duy tổ hợp (trong việc phân trường hợp), phép chứng minh phản chứng và những biến đổi đại số (hoặc giải tích) khá tinh tế. Việc xây dựng ví dụ cũng đòi hỏi khả năng dự đoán và khoanh vùng.
2. Tuy nhiên đây là một bài toán hơi nặng về kỹ thuật, không thật phù hợp cho một bài toán olympic, khi thí sinh phải làm bài trong điều kiện thời gian hạn chế và không được sử dụng các công cụ trợ giúp.
3. Trong quá trình đi tìm ví dụ cho trường hợp  $n = 5$ , một cách tự nhiên ta phát hiện ra bài toán sau: *Nếu  $a, b, c, d, e$  là các số thực dương sao cho  $a + b + c = d + e, a^5 + b^5 + c^5 = d^5 + e^5$  thì  $a^3 + b^3 + c^3 < d^3 + e^3$ .*
4. Một cách tự nhiên, ta có thể đặt câu hỏi tổng quát: *Tìm số  $n$  nhỏ nhất sao cho tồn tại  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có tổng các lũy thừa bậc  $4k + 1$  dương ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) và tổng các lũy thừa bậc  $4k - 1$  âm ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).*

Lời giải cho bài toán tổng quát có lẽ là rất khó. Ngay cả trường hợp  $m = 2$  đã là khó.

5. Một câu hỏi khác cũng xuất phát từ lời giải bài toán trên: *Cho  $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n$  là  $m + n$  số thực dương. Hỏi phương trình  $\sum_{i=1}^m a_i^x = \sum_{i=1}^n b_i^x$  có nhiêu nhất bao nhiêu nghiệm thực?*

### Một số bài toán liên quan

1. (Ucraina 2014, lớp 9) Tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho tồn tại  $n$  số thực thỏa mãn điều kiện  $a_1 + \dots + a_n > 0$  và  $a_1^3 + \dots + a_n^3 < 0$ .

(Bài này khá đơn giản: Với  $n = 1, 2$  rõ ràng không thỏa mãn, còn với  $n = 3$  thì chọn  $a_1 = a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -1$ .)

2. (IMC 2006) Cho  $a, b, c, d, e$  là các số thực dương sao cho  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2, a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4$ . Hãy so sánh các số  $a^3 + b^3 + c^3$  và  $d^3 + e^3$ .
3. (Tournament of the Towns, 2006) Các số thực dương  $x_1, \dots, x_k$  thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + \dots + x_k}{2}, \quad x_1 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

- a) Chứng minh rằng  $k > 50$ .
- b) Tìm ví dụ một bộ như vậy với một giá trị  $k$  nào đó.
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $k$  để tồn tại 1 ví dụ như vậy.



# MARTIN GARDNER - NGƯỜI LÀM VƯỜN CỦA TOÁN HỌC

ĐẶNG NGUYỄN ĐỨC TIỀN

(Đại học Trento, Italy)

*Roses are red,  
Violets are blue,  
Sugar is sweet,  
And so are you.*

Có một bài đồng dao như thế, và có một vĩ nhân đã nguệch ngoạc viết thêm vào bài báo của mình như sau:

*Roses are red  
Violets are blue,  
One point 414 ...  
Is the square root of two.*

## Giới thiệu

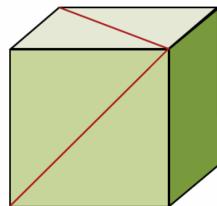
Nền toán học của thế kỷ hai mươi đã sản sinh ra rất nhiều cây đại thụ như John Nash, Andrew Wiles, Grothendieck, Paul Erdős, Alan Turing... Họ đều là những cái tên vĩ đại mà tầm ảnh hưởng đã vượt xa khỏi thời đại của mình. Nhưng trong bài viết này chúng tôi lại muốn giới thiệu đến một vĩ nhân khác: Martin Gardner, một nhân vật trọng yếu của lịch sử toán học nhưng bản thân lại không phải là một nhà toán học, thậm chí cũng chưa từng kinh qua đào tạo bài bản về toán.

Trong suốt sự nghiệp của mình, ông không phải là người đóng góp những công trình nghiên cứu hay phát kiến vượt bậc. Nhưng ông là một người truyền cảm hứng, một nhà làm vườn đã gieo trồng niềm vui và đam mê toán học cho rất nhiều thế hệ những người trẻ tuổi. Giống như Richard K. Guy đã viết: “Gardner, hơn bất kỳ ai, đã đem toán học đến hàng triệu người”, và theo Donald Knuth, “Rất nhiều người đã học được nhiều ý tưởng toán học hay từ Gardner hơn bất kỳ người nào khác trong lịch sử thế giới.”

## 1. Giải toán theo cách Martin Gardner

Trước tiên, chúng ta hãy khởi động với ba bài toán theo phong cách của Martin Gardner như sau:

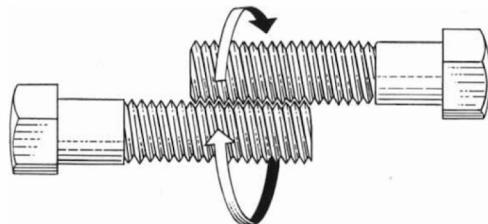
**Bài toán 1.** Góc giữa hai đường thẳng màu đỏ được vẽ từ hai mặt của một khối hộp như hình dưới là bao nhiêu?



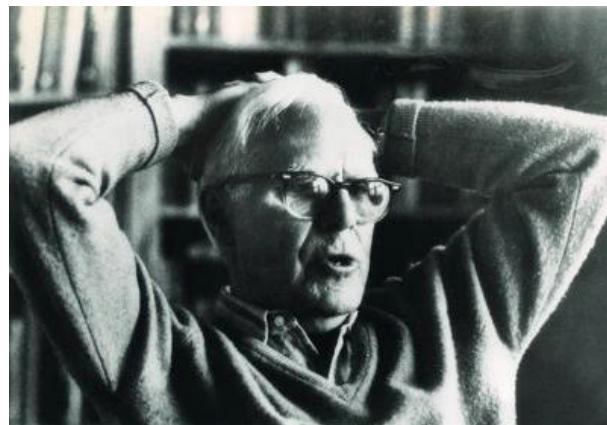
**Bài toán 2.** Xét một vòng kim loại như hình bên dưới khi được đốt nóng và bị nở ra. Điều gì sẽ xảy ra với lỗ bên trong của nó? Nó sẽ co lại, nở ra hay giữ nguyên kích thước?



**Bài toán 3.** Hai bù-loon giống hệt nhau được đặt lại đối nhau để rãnh xoắn ốc của chúng dính vào nhau như hình dưới đây. Nếu bạn cùng lúc xoay cả 2 bù-loon theo chiều của nó (giữ chắc tay tránh làm chệch hướng) thì hai đầu của chúng sẽ tiến lại gần nhau hay ra xa nhau, hay khoảng cách không đổi?



Đây là một số bài toán phổ biến theo phong cách Martin Gardner. Nếu bạn đọc đã từng đọc qua sách của Martin, chắc hẳn đã nắm rõ câu trả lời. Tuy nhiên, điều thú vị nhất của ba bài toán này là chúng không phải chỉ dành riêng cho những người nghiên cứu về toán. Chúng có thể được giải bởi bất cứ ai có kiến thức, đam mê và tất nhiên với một chút kiến thức phổ thông về vật lý. Chúng cũng không hứa hẹn trao cho bạn một khám phá vượt bậc nào, mà đơn giản, chúng mang lại một cảm giác thoả mãn ngọt ngào cho những ai tìm ra lời đáp. Đúng như **Robert P. Crease** đã viết: “*Tìm kiếm câu trả lời bằng Google không phải là phong cách Gardner. Cách của Gardner là tự mình đốt cháy niềm đam mê và trải nghiệm niềm vui vào lúc tự mình tìm được câu trả lời.*”



Và bằng cách đó, trong suốt 25 năm với chuyên mục “Các trò chơi toán học” ở tờ báo khoa học thường thức danh tiếng *Scientific American*, Gardner đã gieo mầm đam mê toán học cho hàng triệu người ở mọi lứa tuổi, ông đã đem toán học đến với nhiều người hơn bất cứ ai trong lịch sử toán học đã từng làm.

*“Martin đã biến hàng ngàn đứa trẻ thành những nhà toán học và hàng ngàn nhà toán học thành những đứa trẻ”*

Ronald Graham, trích **Thời báo New York** số ngày 19 tháng 10 năm 2009.

## 2. Cuộc đời và sự nghiệp

Martin Gardner sinh vào ngày 21 tháng 10 năm 1914 tại Tulsa, Oklahoma, và mất ngày 22 tháng 5 năm 2010, không xa nơi ông đã sinh ra, tại thành phố Norman, Oklahoma.



Từ trái sang phải: Em trai, cha, và Martin Gardner.

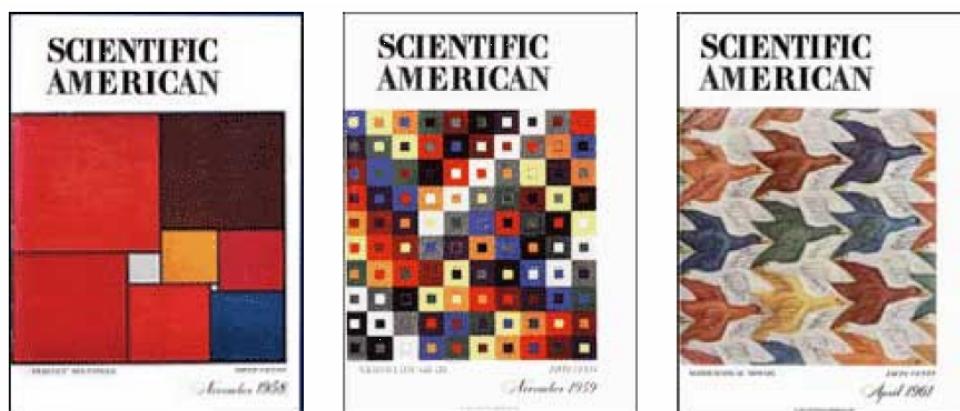
Cha ông có bằng tiến sĩ địa chất và mẹ ông đã từng đi dạy tiểu học ở Lexiton, nhưng sau đó bà nghỉ việc để chăm sóc cho ba anh em ông. Thuở nhỏ, Gardner thích chơi bài, các trò ảo thuật và đọc những tác phẩm phiêu lưu như “Phù thủy xứ Oz” của nhà văn **Braum**, hay “Alice lạc vào xứ thần tiên” của Lewis Caroll... Chính thú đam mê những trò chơi trí tuệ và những câu chuyện phiêu lưu lật lùng của thuở ấu thơ đã ảnh hưởng rất lớn đến quyết định gắn bó với Toán học giải trí trong cuộc đời Gardner. Ông kể rằng:

*“Mẹ tôi đọc “Phù thủy xứ Oz” cho tôi nghe khi tôi bé, và tôi đã nhìn qua vai mẹ mỗi lần bà đọc nó. Tôi đã học chữ như vậy đây.”*

Năm 1936 Gardner tốt nghiệp khoa triết tại trường Đại học Chicago. Sau khi làm việc một thời gian ngắn tại phòng truyền

thông của Đại học Chicago, năm 1937 ông trở lại Oklahoma và trở thành phóng viên cho tờ báo Tulsa Tribune. Sau đó ông chuyển đến làm việc cho tạp chí Humpty Dumpty, một tạp chí dành cho thiếu nhi. Ông viết đều đặn hàng tháng những câu truyện ngắn và những bài thơ đưa ra những lời khuyên về đạo đức cho thiếu niên.

Đến năm 1956, ông được mời viết bài cho chuyên mục các trò chơi toán học (Mathematical Games) với Scientific American. Cũng từ đó sự nghiệp huyền thoại của Gardner đã bắt đầu. Cùng với niềm say mê ảo thuật và đầu óc hiếu kỳ, Gardner đã trụ vững ở tạp chí khoa học có uy tín này và đều đặn đưa ra những câu đố làm bối rối độc giả. Lạ lùng, mới mẻ, sinh động và dễ hiểu là những yếu tố đã khiến những chuyên mục xuất hiện đều đặn từ 1956 đến 1980 của Gardner được nhiều người đón đọc nhất. Chuyên mục của ông đã mở ra cánh cổng dẫn đến một thế giới toán học đầy rẫy những điều thú vị. Chúng không chỉ mang lại niềm vui cho những người yêu toán hay những nhà toán học mà còn góp phần nuôi dưỡng tình yêu toán cho một thế hệ trẻ tuổi, truyền cho họ cảm hứng và niềm say mê giải quyết các vấn đề.



Gardner đã phát biểu về thành công của mình như sau: “*Bí mật lớn nhất cho sự thành công của tôi với vai trò chủ bút của chuyên mục là tôi không biết nhiều về toán.*”

*Martin nói với tôi rằng ông dành 25 ngày mỗi tháng cho chuyên mục của mình trên tờ Scientific American.*

Persi W. Diaconis

*Một con bò không có kỹ năng giải quyết vấn đề của một con tinh tinh, chúng đã biết cách dùng gậy để chọc vào tổ để đuổi đám mối ra khỏi mặt đất. Sự tiến hóa đã phát triển khả năng của bộ não để giải quyết vấn đề, và tại cùng một thời điểm niềm vui của việc giải quyết vấn đề đã được tạo thành trong não của chúng ta.*

Martin Gardner. Science Good, Bad and Bogus (1981), 123.

Ông tin rằng trong giây phút con người tận hưởng niềm vui khi tìm ra đáp án của một vấn đề là một điều cực kỳ quan trọng trong văn hoá của nhân loại. Ông cũng tin rằng điều làm nên sự khác biệt giữa xã hội công nghiệp hiện đại với thời kỳ Hy Lạp cổ là khả năng giải các câu đố. Một màn hình tivi của thời hiện đại, không thể chỉ là nỗ lực của một cá nhân ngày một ngày hai mà là thành quả của hàng trăm người đã góp trí lực vào giải những câu đố nhỏ. Đối với ông niềm vui đến từ những câu đố nhỏ nhặt. Một thứ niềm vui cũng thuần khiết và diệu kỳ không kém gì một nhà khoa học phát kiến ra một điều vĩ đại. Đó là thứ niềm vui mà Gardner truyền vào những chuyên mục của mình suốt một phần tư thế kỷ.

Ông đơn giản hoá những phát kiến toán học lớn lao. Ông nhìn những vấn đề vĩ đại với con mắt của một nhà khám phá và viết lại chúng theo cách một nhà văn kể chuyện về xứ Oz. Ông đặt những ngọn lửa dẫn đường cho một thế hệ trẻ tự mình mày mò và say đắm trong thế giới thần tiên của toán học.

Suốt sự nghiệp của mình, ông đã đóng vai trò là một người truyền cảm hứng, một nhà ảo thuật biến những điều phức tạp cao siêu trở thành những món quà bí ẩn và thú vị cho tất cả những ai giàu lòng say mê khám phá.

Trong lễ hội Toán học (1975) ông viết: “Tôi chắc rằng cách tốt nhất để đánh thức một sinh viên là đưa cho họ một trò chơi toán học hấp dẫn, một câu đố, thủ thuật ma thuật, câu nói đùa, nghịch lý, mô hình, hay bài thơ 5 câu (limerick)... Không phải tôi đang đề nghị giáo viên không nên làm gì khác ngoại trừ giới thiệu các trò chơi giải trí cho sinh viên. Rõ ràng rằng có một sự hoán đổi giữa sự nghiêm túc và tính giải trí. Giải trí giữ cho người đọc tỉnh táo. Sự nghiêm túc làm cho trò chơi đáng giá.”



Martin Gardner và vợ.

Bên cạnh Scientific American, Martin Gardner còn là tác giả của hơn 70 đầu sách, về các trò chơi, về ảo thuật, triết học, thiên văn, tôn giáo... Ông có bạn bè và đồng nghiệp của ông trong khắp các lĩnh vực sáng tạo, từ các nhà logic học, toán học như **Raymond Smullyan**, **Roger Penrose**, **Piet Hein** đến các nhà văn như **Isaac Asimov** và **Vladimir Nabokov**, và các nghệ sĩ **M. C. Escher** và **Salvador Dalí**. Vì vậy không có gì ngạc nhiên khi tác phẩm của ông bao hàm nhiều lĩnh vực khác nhau. Ngoài ra ông cũng là chuyên gia hàng đầu ở Mỹ về **Lewis Carroll** – tác giả của “Alice lạc vào xứ thần tiên”...

Ngày 22/5/2010, Martin Gardner qua đời tại bệnh viện Norman, Oklahoma.

### 3. Những hạt mầm trong khu vườn của Martin Gardner

Trong một phần tư thế kỷ (1956-1980), dưới đề mục chung Các trò chơi toán học, Martin Gardner đã làm say mê không biết bao nhiêu bạn đọc bằng những trò chơi trí tuệ vừa dễ hiểu vừa sâu sắc và gợi mở ra nhiều khía cạnh mới mẻ. Tất cả chúng không là những trò chơi do ông sáng tạo mà phần lớn là những gì ông tìm thấy trên sách vở. Sau đó thông qua sự trao đổi với các nhà khoa học để nắm bắt được ý tưởng, ông đã trình bày lại chúng dưới dạng những trò chơi đơn giản.

Trong phần này của bài viết, chúng tôi muốn giới thiệu đến độc giả một vài bài toán khá quan trọng và nổi tiếng đã từng được Gardner giới thiệu qua chuyên mục "Các trò chơi toán học" trên tờ Scientific American hoặc qua một số sách của ông.

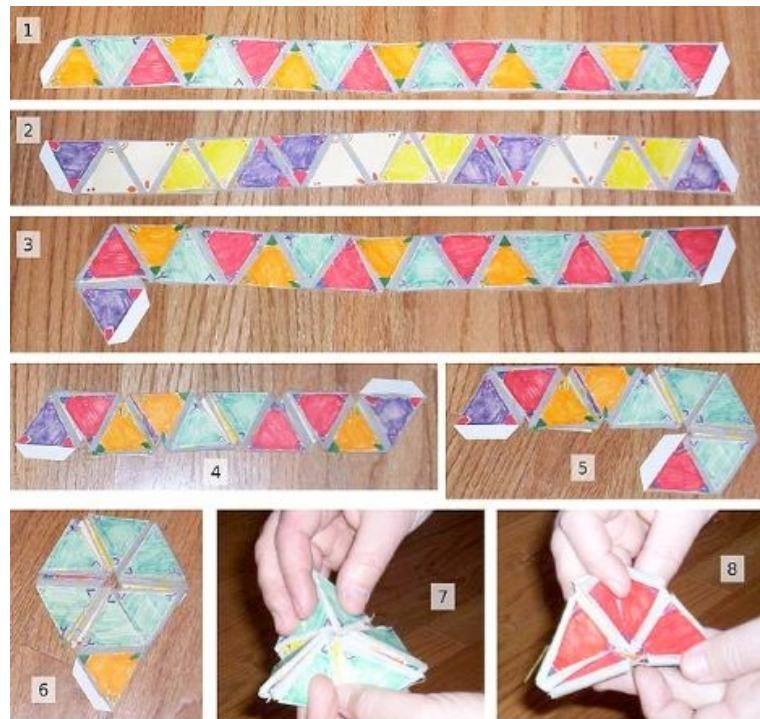
#### 3.1. Flexagon

Flexagon là bài viết đầu tiên tính từ khi Gardner chính thức tham gia Scientific American (ông có một bài trước đó vào năm 1952 là "Các máy logic" khi còn làm việc ở Humpty Dumpty). Bài viết này được hoàn thành vào tháng 12 năm 1956, và nhờ vậy, vào tháng Giêng 1957, chuyên mục các "Các trò chơi toán học" chính thức ra đời.

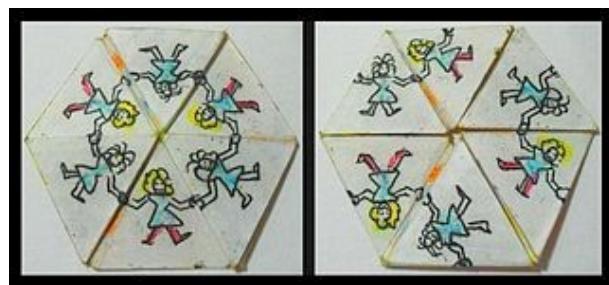
Flexagon là những mẫu giấy/vải phẳng, có thể gấp nếp hay uốn cong để có thể lật cả hai mặt trước và sau một cách sáng tạo, độc đáo. Ví dụ sau đây cho thấy cách tạo ra một Flexagon với những mảnh hình tam giác được gấp và "uốn cong" lại thành một lục giác. Sau đó, bằng một vài động tác, các mặt này có thể thay đổi hoặc hoán đổi vị trí cho nhau để tạo thành các hình dạng khác nhau. Đôi khi người ta viết lên các mặt của Flexagon những con số hay những lời tiên đoán vận may và dùng nó như là một trò chơi.

Độc giả có thể liên tưởng Flexagon với trò chơi "đông tây nam bắc" quen thuộc ở Việt Nam.

Flexagons có một lịch sử phong phú, được phát minh một cách tình cờ vào năm 1939 bởi **Arthur Harold Stone**, đương thời là



một nghiên cứu sinh ở đại học Princeton. Chuyện là trên đường đi từ Anh sang Mỹ, Stone đã tình cờ cắt mẫu báo lớn và gấp nó, thế là Flexagon ra đời. Stone sau đó cùng với các bạn của mình tại Princeton là **John Tukey** (nổi tiếng với phép biến đổi Fourier nhanh (FFT)), **Bryant Tuckerman** (nhà tô-pô học, người phát hiện ra số nguyên tố Mersenne thứ 24), và **Richard Feynman** (nhà vật lý xuất sắc, cha đẻ của sơ đồ Feynman) đã khai phá các tính chất toán học của Flexagon. Nhưng chiến tranh nổ ra ngay sau đó đã khiến bài báo của họ chìm vào quên lãng. 15 năm sau, Martin Gardner đã làm sống lại nó, đặt nền tảng đưa ông vào giai đoạn thành công nhất trong sự nghiệp của mình.



### 3.2. Bài toán thư ký

Năm 1960, cũng trên tờ Scientific American, lần đầu tiên Martin Gardner đã giới thiệu bài toán như sau:

"Yêu cầu một người lấy một số mảnh giấy tùy ý và viết vào mỗi mảnh một số nguyên dương khác nhau. Các số này có thể rất nhỏ như bằng 1 hay lớn đến kích thước của một googol (bắt đầu bởi 1 và theo sau là một trăm số 0) hoặc thậm chí lớn hơn. Các mảnh này được đặt úp mặt xuống và sắp xếp ngẫu nhiên trên mặt bàn. Tại một thời điểm bạn được phép chọn một mảnh và lật lên. Mục tiêu của bài toán là tìm ra thời điểm kết thúc việc lật số này để chọn được mảnh giấy có số lớn nhất. Bạn không thể quay lại và chọn một trong cách mảnh giấy đã lật trước đó. Nếu bạn đã lật tất cả các mảnh giấy thì mảnh cuối cùng chính là mảnh được chọn."

Một bài toán tương tự được đề xuất bởi Arthur Cayley vào năm 1875 và có thể bài toán đã được đưa ra từ trước đó khá lâu bởi Johannes Kepler. Về sau, bài toán sau thường được biết đến với cái tên "bài toán thư ký", chi tiết độc giả có thể xem [tại đây](#).

Bài toán cơ bản trên có một lời giải đẹp. Đầu tiên chọn và lật hết  $n/e$  mảnh đầu tiên (trong đó  $e$  là cơ số của logarit tự nhiên). Sau đó sẽ chọn mảnh đầu tiên trong số những mảnh còn lại có giá trị lớn hơn tất cả các mảnh đã được lật. Nếu áp dụng thuật toán này thì xác suất chọn được mảnh có số lớn nhất là khoảng  $1/e$  và đây cũng là xác suất tối ưu.

Bài toán thư ký là một bài toán nổi tiếng trong lý thuyết dừng tối ưu. Bài toán này đã được nghiên cứu trong xác suất ứng dụng, thống kê, và lý thuyết quyết định.

### 3.3. Các bài toán về nghịch lý

Các bài toán được chọn bởi Gardner bao gồm rất nhiều lĩnh vực, và các nghịch lý là một trong những vấn đề yêu thích của ông. Một bài toán kinh điển thường được nhắc đến trong các giáo trình xác suất hiện nay là nghịch lý ngày sinh:

*Trong một nhóm người được chọn ngẫu nhiên, xác suất để có hai người có cùng ngày sinh là bao nhiêu?*

Trái với những dự đoán cảm tính thông thường (theo nguyên lý Dirichlet chẳng hạn), xác suất khá cao và nếu như buổi tiệc có 70 người thì xác suất có 2 người có cùng ngày sinh lên đến 99.9%. Chi tiết hơn, độc giả có thể xem [tại đây](#).

Một nghịch lý nổi tiếng khác được Gardner giới thiệu vào tháng 7 năm 1974 mà ngày nay chúng ta vẫn gọi là "Nghịch lý Newcomb", bắt nguồn từ nhà toán học **William Newcomb**. Bài toán này như sau:

*Giả sử bạn tham gia một trò chơi và trước mặt bạn có hai chiếc hộp được đậy kín. Hộp 1 chắc chắn có chứa 1.000\$, hộp thứ 2 có thể trống, hoặc chứa 1.000.000\$. Bạn được phép chọn hoặc cả hai hộp hoặc chỉ chọn hộp thứ 2. Luật chơi còn cho biết thêm là người dẫn trò sẽ dự đoán trước đó xem bạn sẽ chọn phương án nào: nếu họ đoán bạn chọn cả 2 hộp thì sẽ để trống hộp thứ 2, và nếu họ đoán bạn chọn phương án chỉ chọn hộp thứ 2, họ sẽ đặt vào đó 1.000.000\$. Nếu họ đoán bạn chọn ngẫu nhiên giữa hai phương án, họ cũng để hộp 2 trống. Và quan trọng hơn, người dẫn trò luôn đoán đúng ý định của bạn!*

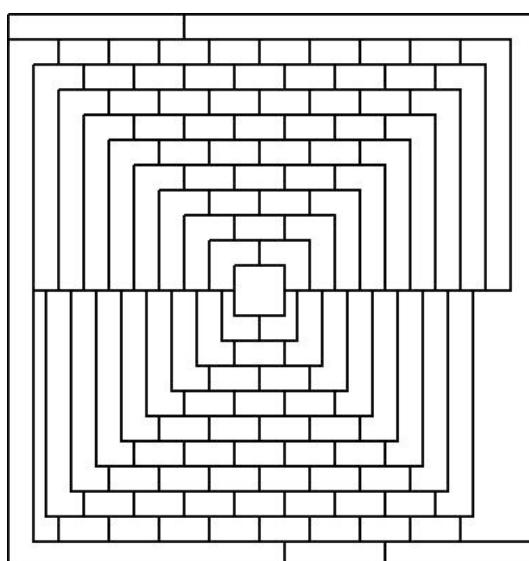
#### Các trường hợp có thể có cho nghịch lý Newcomb

	Dự đoán	Lựa chọn	Số tiền nhận được
TH1	Cả 2 hộp	Cả 2 hộp	1.000
TH2	Cả 2 hộp	Chỉ mở hộp 2	0
TH3	Chỉ mở hộp 2	Cả 2 hộp	1.001.000
TH4	Chỉ mở hộp 2	Chỉ mở hộp 2	1.000.000

Bài toán được gọi là nghịch lý vì có hai cách suy luận trái nhau mà cả 2 đều có vẻ rất hợp lý. Lập luận thứ nhất cho rằng, bất kể chiến thuật của người dẫn trò ra sao, lấy cả 2 hộp luôn có lợi hơn. Điều này xảy ra vì nếu người dẫn trò đoán bạn chọn cả 2 hộp (TH1 và TH2) thì tối đa bạn cũng chỉ lấy được 1.000 \$ (ứng với TH1) và trong tình huống người dẫn trò đoán bạn chọn hộp 2 (TH3 và TH4) thì khi chọn cả 2 hộp (ứng với TH3) bạn được 1.001.000 \$. Lập luận thứ hai cho rằng, chỉ chọn hộp 2 mới là phương án đúng đắn, vì người dẫn trò luôn đoán đúng ý định của bạn, nên chỉ có TH1 và TH4 xảy ra, do vậy chọn phương án chỉ mở hộp 2 sẽ có lợi hơn với phần thưởng 1.000.000 \$. Chi tiết hơn và giải đáp cho nghịch lý này, độc giả có thể tìm hiểu thêm [tại đây](#).

### 3.4. Bài toán tô màu

Trên Scientific American số tháng 4 năm 1975, Gardner đã đăng một bản đồ giấy và đặt ra yêu cầu dùng 5 màu khác nhau để tô cho các vùng sao cho hai vùng kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau. Trong trò chơi này ông đã cố tình chơi trò "**Cá tháng tư**" và nói rằng bản đồ với 110 vùng như bên dưới là phản ví dụ cho định lý 4 màu.



Nguồn: [Wolfram](#).

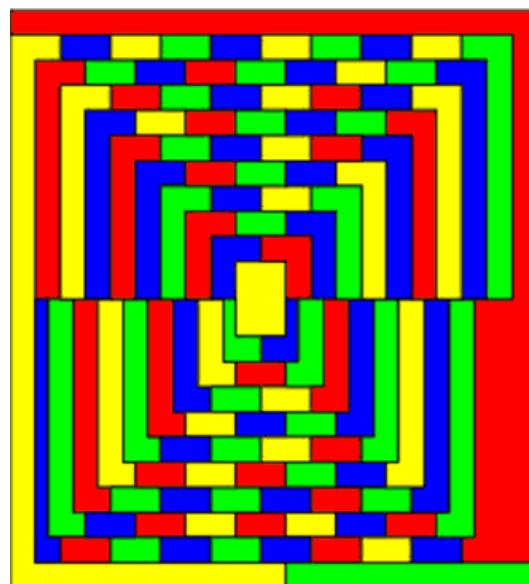
Bài toán tô màu được nêu ra khoảng năm 1840 bởi **Möbius**, cha đẻ của dải băng Möbius nổi tiếng. Giả thuyết đầu tiên về định lý 4-màu được phát biểu chính thức lần đầu tiên bởi **Guthrie** vào năm 1852, do vậy còn được gọi là định lý Guthrie, phát biểu rằng với mọi bản đồ phẳng đều tô được bằng 4 màu sao cho 2 vùng có cùng đường biên không được tô giống màu nhau.

Hai trong số những người tiên phong chứng minh định lý này là **Alfred Kempe**, một người nghiên cứu luật, vào năm 1879, và **Peter Tait**, một nhà vật lý, vào năm 1880. Nhưng 10 năm sau, **Percy Heawood** đã chỉ ra sai lầm trong cách chứng minh của Kempe và đồng thời đưa ra định lý 5-màu. Đến năm 1891, **Julius Petersen** chỉ ra sai lầm trong cách chứng minh của Tait.

Hơn một thế kỷ kể từ khi ra đời, đến năm 1977, cuối cùng thì định lý cũng được chứng minh bởi **Kenneth Appel** và **Wolfgang**

Haken tại trường Đại học Illinois với sự trợ giúp của máy tính. Mặc dù vậy rất nhiều nhà toán học không chấp nhận kết quả này do nghi ngờ về tính đúng đắn của bộ xử lý của máy tính và các vấn đề liên quan. Năm 1996, một chứng minh độc lập, và ngắn gọn hơn được đưa ra bởi Robertson và cộng sự. Chi tiết hơn cho bài toán nổi tiếng này, độc giả có thể xem [tại đây](#).

Dưới đây là một cách tô màu của bản đồ được đặt ra trong câu hỏi của Gardner, được tìm thấy bởi Stan Wagon, một nhà toán học quen thuộc với Epsilon hai số đầu tiên. Mặc dù bất kỳ bản đồ phẳng nào cũng được chứng minh là tô được bởi 4 màu, trong thực tế việc tìm ra một cách tô với 4 màu cho một bản đồ cụ thể thường là một thách thức.



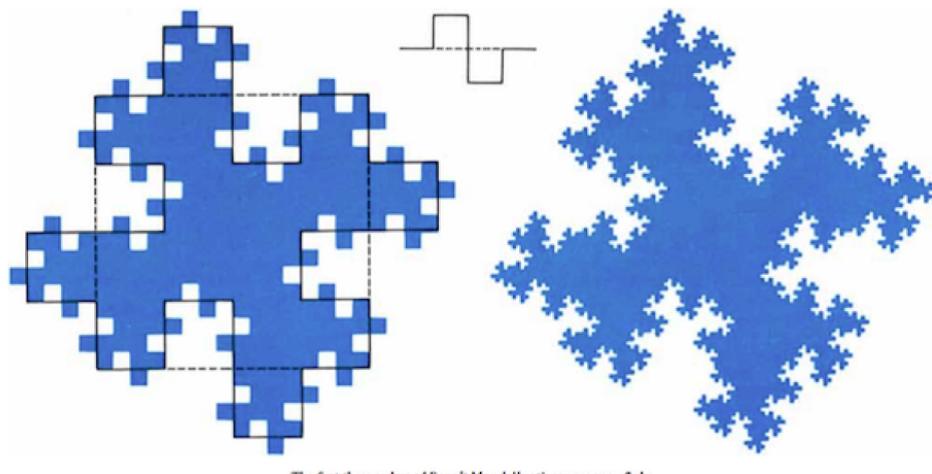
Lời giải cho bài toán tô màu bản đồ của Martin Gardner với 4 màu. Nguồn: [Wolfram](#).

### 3.5. Phân dạng

Phân dạng, hay quen thuộc hơn là Fractal hay hình (học) Fractal, là các hình có cấu trúc tự đồng dạng, được giới thiệu bởi Gardner vào tháng 12 năm 1976, với tên gọi ban đầu là "đường cong quái vật" (Monster curve).

Các nhà toán học bắt đầu nghiên cứu các hình tự đồng dạng từ thế kỷ 17, khi Gottfried Leibniz xem xét các đường gấp khúc và

định nghĩa đường thẳng là đường phân dạng chuẩn: "các đường thẳng là đường cong, bất kỳ phần nào của nó cũng tương tự với toàn bộ". **Benoît Mandelbrot** là người đầu tiên đưa ra khái niệm fractal, bắt nguồn từ tiếng La-tinh fractus nghĩa là "đứt gãy".



*The first three orders of Benoit Mandelbrot's square snowflake*

Mandelbrot sống không xa Gardner khi bài này được viết, và trong thời gian này, tại nhà riêng của mình, Gardner giới thiệu Mandelbrot với **Conway**, nhà toán học người Anh chuyên nghiên cứu lý thuyết số, mã hóa, tổ hợp... và đặc biệt là người phát minh ra "**trò chơi cuộc đời**". Như Gardner thuật lại trong hồi ký của mình, "Conway đã có những phát hiện mới cho bài toán ghép hình Penrose (Penrose tiling), và Mandelbrot đã rất quan tâm đến các phát minh này vì những mẫu ghép Penrose có dạng Fractals. Bạn có thể mở rộng hoặc thu hẹp chúng, chúng luôn luôn có hình dạng tương tự."

### 3.6. Mã hóa RSA

Tháng 8 năm 1977, Martin Gardner cho đăng bài "Một cách mã hóa mới sẽ mất hàng triệu năm để giải mã". Bài viết này đã giới thiệu phương pháp mã hóa RSA, một phương pháp mã hóa công khai mới mà trước đây không ai tin rằng có thể thực hiện được. Khi nhận được bài viết từ 3 tác giả **Ron Rivest, Adi Shamir** và **Leonard Adleman**, Gardner đã rất thích thú và có ấn tượng sâu sắc. Ông đã phá vỡ nguyên tắc thông thường của mình, chuẩn bị bài đăng từ trước đó nhiều tháng mà ngay lập tức xuất bản bài viết về phương pháp RSA.

Ý tưởng cơ bản của RSA độc giả có thể tìm hiểu [ở đây](#). Để chứng tỏ khả năng của RSA, các tác giả đã gửi cho Gardner một thông điệp E đã được mã hóa gồm 128 ký tự, cùng với khóa công khai  $s = 9007$  và trao giải thưởng 100 \$ cho ai giải mã được thông điệp gốc của E.

9686	9613	7546	2206
1477	1409	2225	4355
8829	0575	9991	1245
7431	9874	6951	2093
0816	2982	2514	5708
3569	3147	6622	8839
8962	8013	3919	9055
1829	9451	5781	5154

*Thông điệp đã được mã hóa trong thách thức Gardner gửi đến độc giả.*

Mật mã RSA đã trở thành một tiêu chuẩn công nghiệp và các biến thể của nó vẫn đang được sử dụng cho đến ngày hôm nay. Trong thời gian gần đây các câu hỏi về độ an toàn nó đã được xem xét lại. Và dù cho bài viết này của Gardner mang tính chất đột phá, nhưng tiêu đề của nó đã không hoàn toàn chính xác. Thông điệp trong thách thức đã được giải mã thành công vào khoảng tháng 4 năm 1994, chỉ 17 năm sau khi bài toán được đăng thay vì hàng triệu năm.

Ngoài những vấn đề nêu trên, nhiều bài toán nổi tiếng và quan trọng khác cũng đã được Gardner phổ biến đến đông đảo độc giả như [định lý lớn Fermat](#), trò chơi cuộc đời, [giả thuyết 3n + 1](#)... và hẳn độc giả hãy còn nhớ, "bài toán đội nón" mà chúng tôi đã giới thiệu ở hai số Epsilon đầu tiên cũng được ươm mầm từ người bạn tốt nhất mà toán học từng có.

## 4. **Những điều ít được biết về Gardner**

- Chú giải tác phẩm Alice lạc vào xứ thần tiên (The Annotated Alice) (1960) là tác phẩm bán chạy nhất của ông. Nó phản ánh

tình yêu của Gardner đối với các tác phẩm của nhà văn nổi tiếng người Anh, Lewis Carroll (cũng chính là nhà toán học Charles Dodgson). Những chú giải của Gardner đã giải đáp các ẩn ý về lô-gic và toán học trong "Alice lạc vào xứ thần tiên" và "Through the Looking-Glass".



Gardner và Alice tại Central Park.

2. Bên cạnh niềm say mê toán học, Gardner là cây bút nhiệt tình trong việc lên tiếng chống lại hiện tượng mạo danh khoa học. Trong số 100 cuốn sách, cuốn "Những trò lố bịch nhân danh khoa học" đã nói rất nhiều về những lỗi khoa học cùng những trò thủ đoạn. Năm 1976, Gardner tham gia vào nhóm của Carl Sagan, Isaac Asimov và nhiều người khác thành lập Ủy ban điều tra những hiện tượng huyền bí, siêu nhiên.

3. Ông đã xuất bản bài báo khoa học (có bình duyệt) đầu tiên ở tuổi 74! Bài báo của ông viết chung với cặp vợ chồng **Fan Chung** và **Ronald Graham** được đăng trong tạp chí Mathematics Magazine. Hơn hai thập kỷ tiếp, nhiều bài báo khác được đăng trên MAA, bao gồm bài báo đã đạt giải thưởng Math Horizons "The Square Root of Two = 1.41421 35623 73095..." (Căn bậc 2 của 2 là 1.41421 35623 73095...) khảo sát về tính vô tỷ của căn bậc 2 của 2 mà chúng tôi đã sử dụng bốn câu "đồng dao" đầu tiên trong bài của ông làm lời "đè từ" cho bài viết này của mình. Đây cũng là điểm kết cho bài viết của chúng tôi giới thiệu về Martin Gardner, người làm vườn vĩ đại của toán học.

## 5. Chú thích

Vì bài viết trích dẫn và đề cập đến rất nhiều nhà khoa học, nhà văn, nghệ sĩ khác nhau nên chúng tôi liên kết trực tiếp tiểu sử của từng người thông qua Wikipedia mà không sử dụng chú thích.

Bài viết này được tổng hợp và biên dịch từ các nguồn sau:

1. BBC - **Martin Gardner, puzzle master extraordinaire**. Tham khảo chủ yếu cho phần 1.
2. Huffingtonpost - **Martin Gardner – The Best Friend Mathematics Ever Had** - Colm Mulcahy. Tham khảo chủ yếu cho phần 2.
3. AMS - **Magical Mathematics - A Tribute to Martin Gardner** - Joseph Malkevitch. Tham khảo chủ yếu cho phần 3.
4. Tia sáng - **Martin Gardner Người gọi cảm hứng cho niềm say mê toán học** - Ngọc Tú. Tham khảo chủ yếu cho phần 2.
5. New York Times - **Martin Gardner, Puzzler and Polymath, Dies at 95** - Douglas Martin. Tham khảo chủ yếu cho phần 2.
6. Scientific American (blog) - **The Top 10 Martin Gardner Scientific American Articles** - Colm Mulcahy. Tham khảo chủ yếu cho các phần 3 và 4.
7. **Trò chơi cuộc đời** - Hà Dương Tường. Tham khảo chủ yếu cho phần 2.
8. Recreational Mathematics Magazine No. 2 2014 - **Martin Gardner's Mathemagical Life** - Tereza Bártlová. Tham khảo cho toàn bài.

Tất cả các tài liệu từ Internet đều được truy cập vào tháng 6 năm 2015.

Tạp chí Epsilon, Số 03, 06/2015.

---

# CỰC TRỊ TẬP HỢP

TRẦN MINH HIỀN

(Trường THPT Chuyên Quang Trung, Bình Phước)

## 1. Một số định lý quan trọng

**Định nghĩa 1.1.** Cho  $\mathcal{F}$  là một họ các tập hợp con của một tập  $n$  phần tử  $X$ . Khi đó  $\mathcal{F}$  được gọi là họ **giao** nếu với mọi  $A, B \in \mathcal{F}$  ta có  $A \cap B \neq \emptyset$ .

**Định lý 1.2.** Cho  $\mathcal{F}$  là một họ giao của một tập  $n$  phần tử  $X$ . Khi đó  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ .

*Chứng minh.* Lấy một tập con  $A \subseteq X$ . Khi đó với mỗi cặp tập con  $(A, X \setminus A)$  của  $X$ , thì nhiều nhất là một trong hai tập  $A$  hoặc  $X \setminus A$  thuộc vào  $\mathcal{F}$  (vì nếu cả hai tập  $A, X \setminus A$  đều thuộc vào  $\mathcal{F}$  thì do

$$A \cap (X \setminus A) = \emptyset$$

mâu thuẫn với  $\mathcal{F}$  là một họ giao các tập con của  $X$ ). Vì  $X$  có  $2^n$  tập con, và mỗi cặp tập con  $(A, X \setminus A)$  có nhiều nhất một tập thuộc  $\mathcal{F}$ . Do đó

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

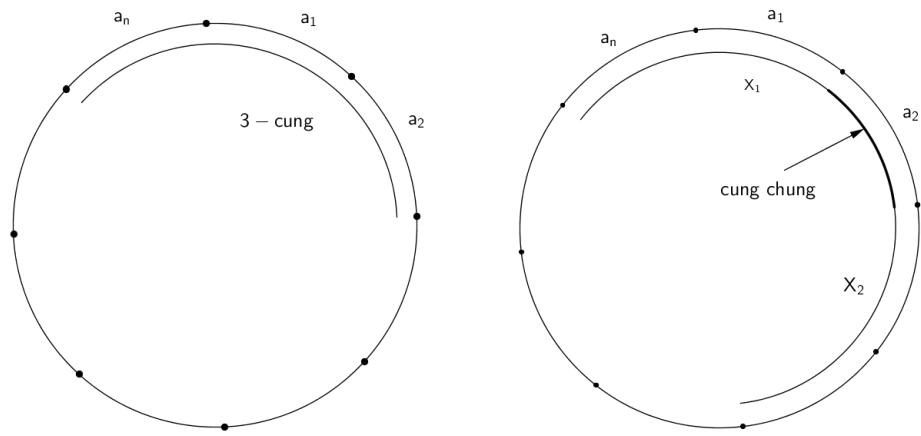
□

**Định lý 1.3 (Định lý Erdos-Ko-Rado).** Một họ  $\mathcal{F}$  các  $k$ -tập (một tập hợp có  $k$  phần tử gọi là  $k$ -tập) của một tập  $n$  phần tử  $X$  ( $k \leq \frac{n}{2}$ ). Khi đó

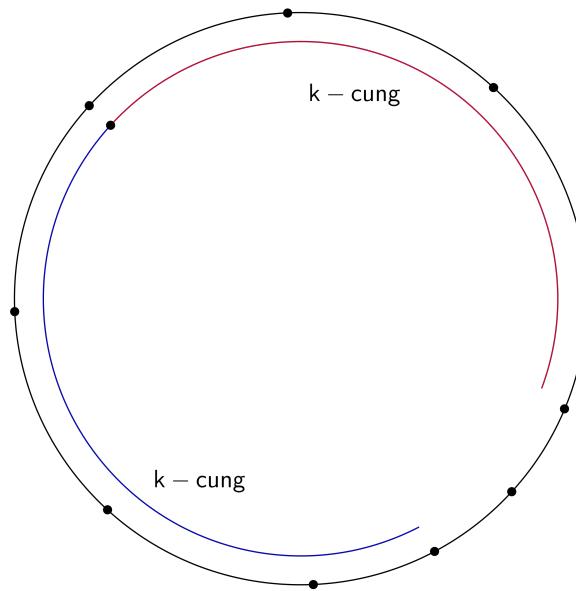
$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

*Chứng minh.* 1. Với  $n, k$  là các số nguyên dương với  $n \geq 2k$ .

Một  $k$ -cung là một tập  $\{i, i+1, \dots, i+k\}$ , với các số nguyên lấy theo modulo  $n$ . Một cách hình dung cho một  $k$ -cung như là  $k$  **đoạn cung tròn** liên tiếp, nối hai điểm  $i$  và  $i+k \pmod n$  trên đường tròn. Ta nói hai cung  $A$  và  $A'$  giao nhau nếu chúng có chung nhau một đoạn cung tròn ( $k$ -cung và hai cung giao nhau được minh họa bởi hình dưới đây).

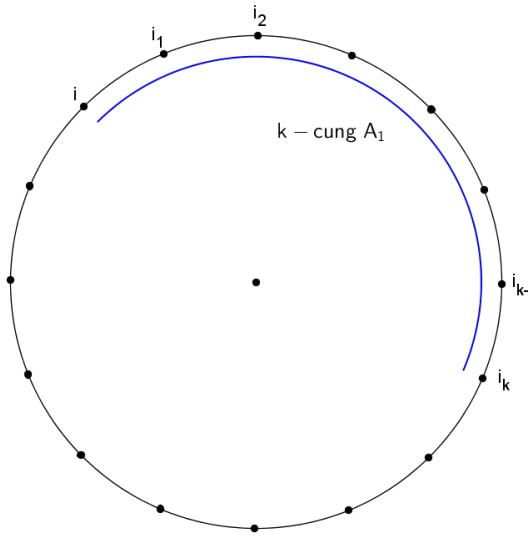


2. Một họ  $\{A_1, A_2, \dots, A_t\}$  các  $k$ \_cung giao nhau đôi một của  $[n]$  thì  $t \leq k$ . Thật vậy, mỗi điểm  $i$  (điểm gắn cho một cung tròn) là điểm kết thúc của hai cung: một cung nhận  $i$  là điểm đầu tiên và một cung nhận  $i$  là điểm cuối cùng.



Do hai cung này không giao nhau, dẫn đến **nhiều nhất một trong hai cung này thuộc vào họ  $\mathcal{F}$** . Xét một cung  $A_1$  cho trước. Vì các cung còn lại đều phải giao với  $A_1$  một đoạn cung chung. Do đó các cung còn lại phải nhận một

trong các điểm trong của cung  $A_1$ , là các điểm  $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$ , là điểm kết thúc. Vì mỗi điểm kết thúc có không quá một  $k$ \_cung thuộc  $\mathcal{F}$ , nên có  $k - 1$  điểm kết thúc sẽ có không quá  $k$ \_cung thuộc  $\mathcal{F}$ , cộng với cung  $A_1$  thì có không quá  $k$ \_cung thuộc tập  $\mathcal{F}$ .



3. Bây giờ xét **một** hoán vị của  $[n]$  có dạng  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Ta đánh dấu các đoạn cung tròn bởi các số  $a_i$  như hình vẽ ban đầu. Mỗi một tập của  $\mathcal{F}$  xem như là một  $k$ \_cung **của hoán vị này**. Theo kết quả trên, thì với một hoán vị này ta có  $\leq k$  các  $k$ \_cung.

- Lấy tổng hết tất cả các hoán vị  $[n]$  trên đường tròn, có  $(n - 1)!$  hoán vị, thì ta thấy có nhiều nhất là  $k(n - 1)!$  các tập như thế này.
- Tuy nhiên, khi sắp xếp trên đường tròn và trong cách đếm trên, tập  $A_1$  được đếm làm nhiều lần (vì sắp xếp trên đường tròn, thì tập  $A_1$  hay bất kỳ tập nào lấy để làm thứ tự là giống nhau). Vì trong nhiều lần hoán vị của  $(n - 1)!$ , sẽ tạo ra những hoán vị khác nhau, nhưng phần tử của  $A_1$  vẫn như vậy. Do đó có  $k!$  cách sắp xếp các phần tử của  $A_1$  và  $(n - k)!$  cách sắp xếp các phần tử bù của tập  $A_1$ . Do đó

$$|\mathcal{F}|k!(n - k)! \leq k(n - 1)!$$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

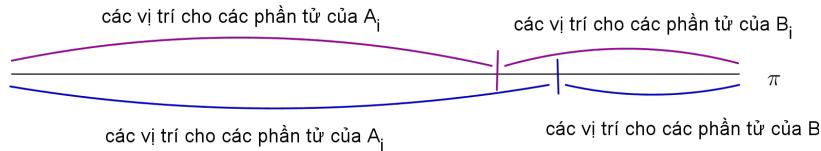
□

**Định lý 1.4 (Bollobas).** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_m$  và  $B_1, B_2, \dots, B_m$  là các tập con của  $S = [n]$ . Đặt  $a_i = |A_i|$  và  $b_i = |B_i|$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, m$ . Giả sử  $A_i \cap B_j = \emptyset$  khi và chỉ khi  $i = j$ . Khi đó

$$\sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

*Chứng minh.* 1. Với mỗi hoán vị trong số  $n!$  hoán vị các phần tử của  $S$ , ta nói một hoán vị  $\pi$  là **chứa  $B$  sau  $A$**  nếu tất cả các phần tử của  $A$  đều đứng trước các phần tử của  $B$  trong  $\pi$ .

2. Với một hoán vị  $\pi$  có tính chất chứa  $B_i$  sau  $A_i$ , mà cũng có thêm tính chất chứa  $B_j$  sau  $A_j$ , khi đó  $A_i \cap B_j = \emptyset$  (nếu  $A_i$  đứng trước  $B_j$ , minh họa hình dưới)



hoặc  $A_j \cap B_i = \emptyset$  (khi  $A_i$  kết thúc sau  $B_j$ ). Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết  $A_i \cap B_j = \emptyset$  khi và chỉ khi  $i = j$ . Do đó, với mỗi hoán vị  $\pi$ , tồn tại **nhiều nhất một** chỉ số  $i$  để  $\pi$  chứa  $B_i$  sau  $A_i$ .

3. Ngược lại, với mỗi  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , ta đếm số hoán vị mà  $A_i$  đứng trước  $B_i$ .

- Chọn  $a_i + b_i$  ví trí để sắp xếp cho  $A_i$  và  $B_i$ , ta có  $\binom{n}{a_i+b_i}$  cách.
- Đặt  $a_i$  phần tử của  $A_i$  vào  $a_i$  vị trí đầu tiên trong  $a_i + b_i$  ví trí vừa chọn có  $a_i!$  cách, sau đó sắp xếp  $b_i$  các phần tử của  $B_i$  vào các vị trí còn lại có  $b_i!$  cách. Vậy có  $a_i!.b_i!$  cách sắp xếp  $A_i$  trước  $B_i$ .

- Sắp xếp  $n - a_i - b_i$  phần tử còn lại của  $S$  vào  $n - a_i - b_i$  vị trí còn lại có  $(n - a_i - b_i)!$  cách.

Vậy ta có

$$\binom{n}{a_i + b_i} \cdot a_i! \cdot b_i! \cdot (n - a_i - b_i)! = \frac{n!}{\binom{a_i + b_i}{a_i}}.$$

4. Lấy tổng số tất cả các chỉ số  $i = 1, 2, \dots, m$  ta có

$$\sum_{i=1}^m \frac{n!}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} \leq n! \Rightarrow \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

Định lý được chứng minh. □

**Định nghĩa 1.5.** Cho  $S$  là một tập hợp hữu hạn. Một họ các tập con  $A_1, A_2, \dots, A_n$  của  $S$  được gọi là một **xích** nếu

$$A_i \subset A_{i+1} \quad \text{và} \quad |A_{i+1}| = |A_i| + 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó một **xích trong một poset** là một tập hợp  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  thỏa mãn

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k.$$

**Định nghĩa 1.6.** Cho  $P$  là một tập hợp hữu hạn. Một họ các tập con  $A_1, A_2, \dots, A_n$  của  $S$  được gọi là một **phản xích** nếu

$$A_i \not\subset A_j, \forall i \neq j.$$

Khi đó một **phản xích** trong 1 poset chính là một tập các phần tử  $y_1, y_2, \dots, y_k$  mà  $y_i, y_j$  không thể so sánh theo quan hệ của poset với mọi  $i \neq j$ .

**Định lý 1.7 (Bất đẳng thức LYM, Lubell, Yamamoto, Meshalkin).** Cho  $F$  là **một phản xích** trong  $[n]$  (ta dùng ký hiệu  $[n]$  thay cho  $\{1, 2, \dots, n\}$ ). Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{a \in F} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

*Chứng minh.* 1. Gọi  $\mathcal{C}$  là tập hợp tất cả các **xích**  $C$ , mỗi xích  $C$  gồm  $n$  tập hợp, mỗi tập hợp là một tập con của  $[n]$  và đây là xích chứa nhiều phần tử nhất,  $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n$ ,  $|C_i| = i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Hỏi  $\mathcal{C}$  có bao nhiêu phần tử? (mỗi phần tử thuộc  $\mathcal{C}$  là một xích độ dài  $n$ ). Xét một xích  $C \in \mathcal{C}$  thì

- Có  $n$  cách chọn cho tập  $C_1$ . Thật vậy, vì  $|C_1| = 1$  nên  $C_1 \in \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ .
- Với mỗi cách chọn tập  $C_1$ , có  $n - 1$  cách chọn tập  $C_2$ .  
Thật vậy, minh họa cho  $C_1 = \{3\}$ , khi đó

$$C_2 \in \{\{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{3, n\}\}.$$

- Cứ tiếp tục như vậy, ta có  $n - 2$  cách chọn tập  $C_3$ ,  $n - 3$  cách chọn tập  $C_4, \dots$  và cuối cùng là 1 cách chọn tập  $C_n$  vì  $C_n = [n]$ .

Vậy  $\mathcal{C}$  có  $n!$  phần tử.

2. Một tập  $A \subset [n]$  thì  $A$  có thể vừa thuộc vào xích  $\mathcal{C}$ , vừa thuộc vào *đối xích*  $F$ . Do đó ta đi đếm số cặp  $N$  gồm các bộ  $(A, C)$  với  $C \in \mathcal{C}$  và  $A$  là một tập hợp vừa thuộc xích  $C$  vừa thuộc *đối xích*  $F$ .

- Với mỗi  $C \in \mathcal{C}$ , có nhiều nhất một tập  $A$  mà  $A \in C$  và  $A \in F$ . Thật vậy, giả sử có hai tập  $A_1, A_2$  vừa thuộc vào  $C$ , vừa thuộc vào  $F$ . Vì  $A_1, A_2$  thuộc xích  $C$  nên hoặc  $A_1 \subset A_2$  hoặc  $A_2 \subset A_1$ , nhưng khi đó thì  $A_1, A_2$  không thể thuộc vào  $F$  được, vì các tập con của  $F$  không có tập nào là tập con của tập khác. Vậy

$$|N| \leq n!$$

- Với mỗi tập  $A \in F$  mà  $|A| = k$ . Khi đó có  $k!$  cách chọn các tập  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$  (cách đếm giống hệ ý 1) mà

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A, \quad |A_i| = i, \forall i = 1, 2, \dots, k-1$$

và có  $(n-k)!$  cách chọn các tập  $A_{k+1}, \dots, A_n$  mà

$$A \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_n, \quad |A_j| = j, \forall j = k+1, k+2, \dots, n.$$

Suy ra mỗi  $A \in F$  ta có

$$k!(n-k)! = |A|!(n-|A|)!$$

cách chọn xích  $C$  chứa  $A$ . Do đó

$$|N| = \sum_{A \in F} |A|!(n-|A|)!.$$

Từ hai cách đếm trên, ta có

$$\sum_{A \in F} |A|!(n - |A|)! \leq n! \Rightarrow \sum_{A \in F} \frac{|A|!(n - |A|)!}{n!} \leq 1$$

đây chính là điều phải chứng minh.  $\square$

**Nhận xét 1.** Bất đẳng thức LYM có thể dễ dàng suy ra từ định lý Bollobas, định lý 1.4 bằng cách, đặt  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  và đặt  $B_i = [n] \setminus A_i$ . Khi đó điều kiện  $A_i \cap B_i = \emptyset$  thỏa mãn và điều kiện  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  trở thành  $A_i \not\subseteq A_j$ , tức là điều kiện của một phản xích. Chú ý là  $b_i = n - a_i$ . Đến đây thì

$$\sum_{i=1}^m \binom{n}{a_i}^{-1} = \sum_{i=1}^n \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

**Định lý 1.8.** Một họ  $\mathcal{F}$  các tập con của tập  $n$  phần tử  $X$  được gọi là **không so sánh được** nếu  $A, B$  là hai phần tử bất kỳ của  $\mathcal{F}$  thì  $A \not\subseteq B$ .

**Định lý 1.9 (Định lý Sperner).** Cho  $\mathcal{F}$  là một họ không so sánh được các tập con của tập  $n$  phần tử  $X$ . Khi đó

$$|\mathcal{F}| \leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

*Chứng minh.* Mặt khác, theo tính chất của nhị thức Newton thì hệ số trong khai triển  $(1+x)^n$  thỏa tính chất

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \dots < \binom{n}{\left[\frac{n-1}{2}\right]} < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Ap dụng vào ta có

$$\binom{n}{k_j} < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Thay vào (\*) ta có đánh giá

$$m \cdot \frac{1}{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leq \sum_{j=1}^m \frac{1}{\binom{n}{k_j}} \leq 1.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi  $B$  chứa tất cả các tập con gồm  $\left[\frac{n}{2}\right]$  phần tử của tập  $B$ .  $\square$

**Hệ quả 1.10 (Bất đẳng thức Lubell).** Cho  $\mathcal{F}$  là một họ không so sánh được các tập con của tập  $n$  phần tử  $X$ . Gọi  $a_k$  là số các  $k$ -tập con thuộc  $\mathcal{F}$ . Khi đó

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{C_n^k} \leq 1.$$

## 2. Một số phương pháp giải toán cực trị tập hợp

### 2.1. Khoảng cách Hamming - chặn Plotkin

Cho  $n$  là số nguyên dương, ký hiệu

$$[0, 1]^n = \{x_1 x_2 \dots x_n | x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

là tập tất cả các xâu nhị phân độ dài  $n$ .

**Định nghĩa 2.1.** Cho hai xâu nhị phân  $x = x_1 \dots x_n$  và  $y = y_1 \dots y_n$ . Khi đó khoảng cách giữa hai xâu  $x$  và  $y$

$$d(x, y) = \text{số vị trí } i \text{ mà } x_i \neq y_i.$$

Khoảng cách này gọi là khoảng cách Hamming thỏa tất cả các điều kiện

- $d(x, x) = 0, \forall x \in [0, 1]^n;$
- $d(x, y) > 0, \forall x \neq y \in [0, 1]^n;$
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in [0, 1]^n;$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in [0, 1]^n.$

**Định nghĩa 2.2.** Cho  $d$  là số nguyên dương. Gọi  $C$  là tập hợp tất cả các xâu nhị phân trong  $[0, 1]^n$  sao cho

$$d(x, y) \geq d, \forall x \neq y \in C.$$

**Định lý 2.3 (PLOTKIN).** Cho  $n, d$  là các số nguyên dương. Đặt  $M = |C|$ . Khi đó

1. Nếu  $d$  chẵn,  $2d > n$  thì

$$M \leq 2 \left[ \frac{d}{2d-n} \right].$$

2. Nếu  $d$  lẻ,  $2d+1 > n$  thì

$$M \leq 2 \left[ \frac{d+1}{2d+1-n} \right].$$

*Để chứng minh định lý, ta sử dụng một số nhận xét sau:*

**Bổ đề 2.4.** Giả sử  $N, M$  là các số nguyên dương và  $0 \leq N \leq M$  thì

$$N(M-N) \leq \begin{cases} \frac{M^2}{4} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ \frac{M^2-1}{4} & \text{nếu } M \text{ lẻ.} \end{cases}$$

**Bổ đề 2.5.** Nếu  $x \in \mathbb{R}$  thì  $[2x] \leq 2[x] + 1$ .

**Bổ đề 2.6.** Cho  $v$  là xâu nhị phân  $\in [0, 1]^n$ . Khi đó  $d(v+w)$  bằng với số số 1 xuất hiện trong  $v+w$ .

*Chứng minh.* Bằng việc kiểm tra tất cả các khả năng của  $v_i$  và  $w_i$ , ta thấy

$$(v+w)_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } v_i = w_i \\ 1 & \text{nếu } v_i \neq w_i. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(v, w) &= |\{i | v_i \neq w_i\}| \\ &= |\{i | (v+w)_i = 1\}|. \end{aligned}$$

□

*Chứng minh định lý với  $d$  chẵn.* Ta viết ma trận  $A = \binom{M}{2} \times n$ , với mỗi dòng là một phần tử  $u+v$ , với  $u, v \in C$ . Ta **đếm số lần xuất hiện số 1 trong ma trận trên**.

1. Ta đếm số lần xuất hiện số 1 trong mỗi cột. Xét một cột  $j$ . Lấy một dòng tùy ý, giả sử dòng đó là xâu nhị phân của  $u+w$ , khi đó số 1 xuất hiện ở cột  $j$  nếu và chỉ nếu  $v$  và  $w$  có một số 1 ở vị trí  $j$ , xâu còn lại có số 0 ở vị trí  $j$ . Gọi  $N$  là số xâu ký tự trong  $C$  có số 1 ở vị trí  $j$ , khi đó số cách chọn

căp  $u, w$  sao cho  $v + w$  có số 1 ở vị trí  $j$  là  $N(M - N)$ . Khi đó số số 1 xuất hiện trong cột thứ  $j$  là

$$N(M - N) \leq \begin{cases} \frac{M^2}{4} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ \frac{M^2 - 1}{4} & \text{nếu } M \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Điều này đúng cho mọi  $j = 1, 2, \dots, n$ . Do đó số số 1 xuất hiện trong ma trận  $A$  là

$$\begin{cases} n \frac{M^2}{4} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ n \frac{M^2 - 1}{4} & \text{nếu } M \text{ lẻ.} \end{cases}$$

2. Ta đếm số lần xuất hiện số 1 trong mỗi dòng. Với một dòng chứa  $v + w$ . Ta đã biết số số 1 trong dòng đó là  $d(v, w)$ . Mà theo giả thiết thì  $d(v, w) \geq d$ . Do đó có ít nhất  $d$  số 1 trong mỗi dòng. Do đó số các số 1 trong  $A$  ít nhất là

$$\binom{M}{2} \cdot d.$$

Từ đây ta thấy

1. Nếu  $M$  **chẵn**. Khi đó kết hợp hai kết quả trên thì

$$\begin{aligned} \binom{M}{2} &\leq n \cdot \frac{M^2}{4} \\ \Rightarrow \frac{dM^2}{2} - \frac{dM}{2} &\leq n \cdot \frac{M^2}{4} \\ \Rightarrow (2d - n)M^2 &\leq 2dM. \end{aligned}$$

Theo giả thiết thì  $2d - n$  và  $M$  đều là các số nguyên dương, nên

$$M \leq \frac{2d}{2d - n}.$$

Lại vì  $M$  là số nguyên dương nên

$$M \leq \left[ \frac{2d}{2d - n} \right] \leq 2 \left[ \frac{d}{2d - n} \right] + 1;$$

mà  $M$  chẵn, và  $2 \left[ \frac{d}{2d - n} \right] + 1$  lẻ nên

$$M \leq 2 \left[ \frac{d}{2d - n} \right].$$

2. Nếu  $M$  lẻ, thì

$$d \cdot \binom{M}{2} \leq n \frac{M^2 - 1}{4} \Rightarrow d \cdot \frac{M}{2} \leq n \frac{M + 1}{4}.$$

Do đó  $(2d - n)M \leq n$  nên

$$M \leq \frac{n}{2d - n} = \frac{2d}{2d - n} - 1.$$

Do  $M$  là số nguyên, ta được

$$\begin{aligned} M &\leq \left\lceil \frac{2d}{2d - n} - 1 \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{2d}{2d - n} \right\rceil - 1 \\ &\leq 2 \left\lceil \frac{d}{2d - n} \right\rceil + 1 - 1 \\ &= 2 \left\lceil \frac{d}{2d - n} \right\rceil, \end{aligned}$$

tức chúng ta đã có được chặng Plotkin cho  $d$  chẵn.

□

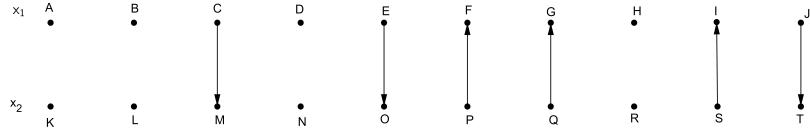
**Ví dụ 2.7 (Vĩnh Phúc 2012).** Có 7 em học sinh tham gia vào  $m$  nhóm hoạt động ngoại khóa, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều nhóm hoạt động. Biết rằng với hai nhóm tùy ý thì có ít nhất 4 học sinh chỉ **tham gia vào một trong hai nhóm đó**. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của  $m$ .

*Chứng minh.* Gọi bảy học sinh là  $a_1, a_2, \dots, a_7$  và đặt  $X$  là tập hợp các học sinh. Ta **mỗi nhóm là một xâu nhị phân**

$$x_1 x_2 \dots x_7,$$

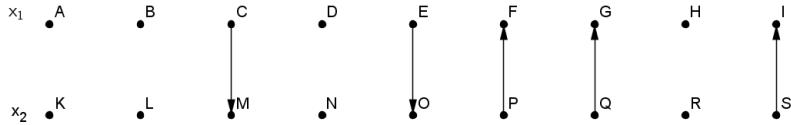
trong đó  $x_i = 1$  nếu nhóm đó chứa  $a_i$  và  $x_i = 0$  nếu nhóm đó không chứa  $a_i$ . Xét hai nhóm  $A, B$  tùy ý trong số  $m$  nhóm, khi đó có ít nhất 4 học sinh, giả sử là  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Gọi hai xâu biểu diễn cho  $A, B$  là  $v, w$ .

- Nếu  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \in A$  thì  $a_i \notin B, \forall i = 1, 2, 3, 4$ . Khi đó hai xâu có dạng



Khi đó  $d(v, w) \geq 4$ .

- Nếu  $a_1 \in A, \{a_2, a_3, a_4\} \in B$ . Khi đó hai xâu có dạng



Khi đó  $d(u, v) \geq 4$ .

Xét tất cả các trường hợp tương tự, ta luôn có  $d(v, w) \geq 4$  với mọi  $v, w$ . Vậy  $d = 4, n = 7$ . Khi đó theo định lý 3.3 thì

$$m \leq 2 \left[ \frac{4}{2.4 - 7} \right] = 8.$$

Khi đó  $m \leq 8$ . Với  $m = 8$  ta có một cách xây dựng các nhóm là, với  $a, b, c, d, e, f, h$  là 7 học sinh  $\square$

$$\begin{aligned} A_1: & \quad a \quad b \quad c \\ A_2: & \quad a \quad \quad \quad d \quad e \\ A_3: & \quad a \quad \quad \quad \quad \quad f \quad g \\ A_4: & \quad \quad b \quad \quad d \quad \quad f \\ A_5: & \quad \quad b \quad \quad e \quad \quad g \\ A_6: & \quad \quad \quad c \quad d \quad \quad f \\ A_7: & \quad \quad \quad c \quad \quad e \quad f \\ A_8: & \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.8 (China TST 1994).** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các tập con của  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  sao cho

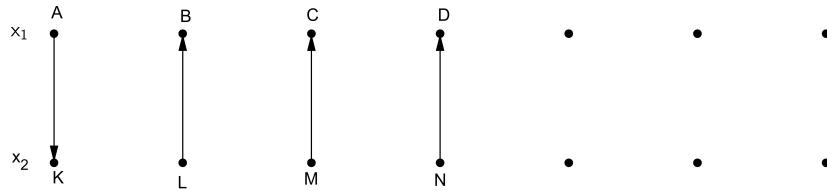
$$\begin{cases} |A_i| = 5, \forall i = 1, 2, \dots, k \\ |A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq k. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của  $k$ .

*Chứng minh.* Ta coi mỗi tập con  $A_t$  là một xâu nhị phân dạng  $x_1 \dots x_{10}$ , trong đó  $x_i = 1$  nếu  $i \in A_t$  và  $x_i = 0$  nếu  $i \notin A_t$ . Do

$$|A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq k$$

nên suy ra  $d(x, y) \geq 6$ .



(Giả sử xâu  $v$  biểu diễn cho  $A_i$ , xâu  $w$  biểu diễn cho  $A_j$ . Nếu  $|A_i \cap A_j| = 2$  thì có hai xâu  $v, w$  chỉ có **đúng hai số 1 trùng nhau vị trí**. Như hình bên minh họa cho hai số 1 ngoài cùng bên trái. Đối với xâu  $v$  còn 3 số 1, tương ứng 3 vị trí đó của xâu  $w$  phải là số 0 và ngược lại đối với xâu  $w$  còn 3 số 1, tương ứng 3 vị trí đó của xâu  $v$  phải là số 0. Trong trường hợp này là  $d(v, w) = 6$ . Nếu  $|A_i \cap A_j| = 1$  hay  $A_i \cap A_j = \emptyset$  thì rõ ràng  $d(x, y) > 6$ .) Theo định lý 3.3 thì

$$k \leq 2 \left\lceil \frac{6}{2.6 - 10} \right\rceil = 6.$$

Vậy  $k$  lớn nhất bằng 6, và dưới đây là một cách xây dựng các tập  $\square$

$A_1:$	1	2	3	4	5					
$A_2:$		2	3			6	7	8		
$A_3:$			3	4			8	9	10	
$A_4:$				4	5	6	7		9	
$A_5:$	1				5	6		8		10
$A_6:$	1	2				7		9	10	

Cách xây dựng 6 tập hợp trên không phải là duy nhất. Dưới đây cũng là 6 tập hợp thỏa mãn

$A_1:$	1	2	3	4	5					
$A_2:$	1	2		6	7	8				
$A_3:$	1		3		6		9	10		
$A_4:$		2		4		7		9	10	
$A_5:$			3		5		7	8		10
$A_6:$				4	5	6		8	9	

**Ví dụ 2.9 (PTNK 2012).** Cho số nguyên dương  $n$  và tập hợp  $X = \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$ . Hai tập con  $A, B$  của  $X$  được gọi là **không giống nhau** nếu

$$|A \Delta B| \geq 2n + 1,$$

với  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Xét  $m$  tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_m$  là các tập con đôi một không giống nhau của  $X$ . Chứng minh rằng

$$m \leq \frac{4(n+1)}{3}.$$

*Chứng minh.* Ta đồng nhất mỗi tập  $A_t$  là một xâu nhị phân độ dài  $4n$

$$x_1 x_2 \dots x_{4n}$$

với  $x_i = 1$  nếu  $i \in A_t$  và  $x_i = 0$  nếu  $i \notin A_t$ . Xét hai tập  $A_i, A_j$  tùy ý trong  $m$  tập, gọi  $v, w$  là hai xâu nhị phân biểu diễn của chúng. Do

$$|A \Delta B| \geq 2n + 1$$

nên tương tự như ví dụ 3.1 thì

$$d(v, w) \geq 2n + 1.$$

Từ đó suy ra  $d = 2n + 1$ . Do  $2.d = 4n + 2 > 4n$ , nên theo định lý 3.3 thì

$$m \leq 2 \left[ \frac{2n+1+1}{4n+2+1-4n} \right] = 2 \left[ \frac{2n+2}{3} \right] \leq \frac{4(n+1)}{3}.$$

□

**Ví dụ 2.10 (Inspired IMO 1998).** Trong một cuộc thi có  $n$  thí sinh và  $p$  giám khảo, ở đó  $n, p$  là các số nguyên dương,  $p > 2$ . Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận thí sinh đó đỗ hay trượt. Giả sử  $k$  là số thỏa mãn điều kiện: **với hai**

**giám khảo tùy ý, số thí sinh mà họ cho kết quả giống nhau nhiều nhất là  $k$ .** Chứng minh rằng

$$\frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

*Chứng minh.* Giả sử  $n$  thí sinh là  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Mỗi giám khảo cho **tương ứng với một xâu nhịn phân độ dài  $n$ :**  $x_1x_2\dots x_n$  **với**  $x_i = 1$  **nếu thí sinh  $S_i$  đỗ và**  $x_i = 0$  **nếu thí sinh  $S_i$  rớt.** Theo điều kiện bài toán thì  $d = n - k$ . Xét hai trường hợp

1. Nếu  $2(n - k) \leq n$  thì

$$\frac{k}{n} \geq \frac{1}{k} > \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

2. Nếu  $2(n - k) > n$ , xét hai khả năng xảy ra

- Nếu  $n - k$  chẵn, theo định lý 3.3 thì

$$p \leq 2 \left[ \frac{n-k}{2(n-k)-n} \right] \leq 2 \frac{n-k}{2(n-k)-n} = \frac{2(n-k)}{n-2k}.$$

Do đó

$$p(n-2k) \leq 2n-2k \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

- Nếu  $n - k$  lẻ, theo định lý 3.3 thì

$$p \leq 2 \left[ \frac{n-k+1}{2(n-k)+1-n} \right] \leq 2 \frac{n-k+1}{2(n-k)+1-n} = \frac{2(n-k+1)}{n-2k+1}.$$

Do đó

$$p(n-2k+1) \leq 2n-2k+2 \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

## 2.2. Sử dụng nguyên lý tổ hợp

**Ví dụ 2.11.** Gọi  $A$  là tập tất cả các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 và nhỏ hơn 30. Tìm số  $k$  nhỏ nhất sao cho mỗi tập con của  $A$  gồm  $k$  phần tử đều tồn tại hai số chia hết cho nhau.

*Giải.* Ta có

$$A = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29\}, |A| = 12.$$

Xét tập

$$B = \{9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 29\}.$$

Khi đó hai phần tử bất kì thuộc  $B$  thì không chia hết cho nhau. Từ đó ta suy ra được  $k \geq 9$ . Ta chứng minh  $k = 9$  thỏa đề bài. Xét  $S$  là một tập con bất kì của  $A$  và  $|S| = 9$ . Xét ba cặp  $\{21, 7\}, \{27, 9\}, \{1, 11\}$  ta thấy mỗi cặp là bội của nhau. Nếu trong 3 cặp trên có ít nhất một cặp thuộc  $S$  thì bài toán được giải quyết. Giả sử trong ba cặp trên không có cặp nào cùng thuộc  $S$ , do  $|S| = 9$  nên  $S$  phải chứa một số trong mỗi cặp và chứa 6 số còn lại. Từ đó suy ra trong  $S$  phải có cặp  $\{3, 9\}$  hoặc  $\{3, 27\}$  và mỗi cặp này là bội của nhau. Hay nói cách khác trong  $S$  luôn tồn tại hai số chia hết cho nhau. Vậy  $\min k = 9$ .  $\square$

**Nhận xét 2.** Mẫu chốt trong bài toán trên là chúng ta phát hiện ra tập  $A_0$  để từ đó ta khẳng định được  $k \geq 9$  và dự đoán  $\min k = 9$ . Để tìm tập  $A_0$ , ta liệt kê hết các số trong  $A$  mà không có hai số nào là bội của nhau. Với bài toán này, việc tìm ra tập  $A_0$  khá đơn giản.

**Ví dụ 2.12 (KMO 1990).** Cho  $n$  tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$  thỏa mãn

$$\begin{cases} |A_i| = 30, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ |A_i \cap A_j| = 1, \forall i \neq j \\ A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng minh  $n < 872$ .

*Chứng minh.* 1. Giả sử  $n \geq 872$ . Xét tập hợp  $A_1$ ,  $|A_1| = 30$ . Do

$$|A_i \cap A_1| = 1, \forall i = 2, 3, \dots, n$$

nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại phần tử  $a \in A_1$  thuộc vào ít nhất là

$$\left[ \frac{n}{30} \right] + 1 \geq \left[ \frac{872}{30} \right] + 1 = 30$$

tập hợp. Không mất tính tổng quát, gọi các tập hợp đó là  $A_2, A_3, \dots, A_{31}$ .

2. Vì  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$ , nên tồn tại một tập  $B$  trong số các tập  $A_{32}, \dots, A_n$  không chứa phần tử  $a$ .
3. Xét 31 tập hợp  $A_2, A_3, \dots, A_{31}$  và  $B$  với  $a \in A_j, \forall j = 2, 3, \dots, 30$  và  $a \notin B$ .
  - Vì  $|A_j \cap B| = 1, \forall j = 2, 3, \dots, 31$ , các tập  $A_j$  đều chứa  $a$ , còn  $B$  không chứa  $a$ , nên  $\{x_j\} = A_j \cap B$  thì  $x_j \in B \setminus \{a\}$ .
  - Có 29 phần tử  $x_2, \dots, x_{29}$  trong tập  $B \setminus \{a\}$ , mỗi phần tử trong chúng thuộc vào ít nhất một tập hợp trong 30 tập  $A_j, j \in \{2, \dots, 31\}$ , nên tồn tại một phần tử  $x_t$ , với  $t \in \{2, 3, \dots, 29\}$  thuộc vào hai tập hợp  $A_r, A_s$  ( $r, s \in \{2, 3, \dots, 31\}$ ).
  - Khi đó  $\{a, x_t\} \subset A_r \cap A_s$ , mâu thuẫn với giả thiết  $|A_r \cap A_s| = 1$ .

Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 2.13 (China TST1994, Ví dụ 3.1.2).** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các tập con của  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  sao cho

$$\begin{cases} |A_i| \geq 5, \forall i = 1, 2, \dots, k \\ |A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq k. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của  $k$ .

*Chứng minh.* Trong ví dụ 3.1.2 ta đã giải bài toán này bằng chẵn Plotkin, và xây dựng được với  $k = 6$ . Do đó  $k \geq 6$ . Nếu  $k \geq 7$ , ta trình bày một lời giải kết hợp đếm số tập hợp chứa phần tử và nguyên lý bao hàm loại trừ (inclusion - exclusion principle). Với mỗi  $i \in X$ , đặt

$$n_i = |\{j \in \{1, 2, \dots, 10\} \mid i \in A_j\}|$$

tức đếm số tập hợp trong  $A_1, A_2, \dots, A_k$  chứa phần tử  $i$ . Khi đó

$$\sum_{i=1}^{10} n_i = \sum_{j=1}^k |A_j| \geq 5k = 35.$$

Do đó phải tồn tại chỉ số  $i_0$  sao cho  $n_{i_0} \geq 4$ , vì nếu tất cả  $n_i \leq 3$  thì  $\sum_{i=1}^{10} n_i \leq 3 \times 10 = 30$ , mâu thuẫn với đánh giá trên. Tức là tồn tại một phần tử  $i_0$  trong  $X$  thuộc vào ít nhất 4 tập hợp trong  $k$

tập  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $i_0$  thuộc vào 4 tập hợp  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Khi đó với mọi  $1 \leq i < j < t \leq 4$  thì

$$|A_i \cap A_j \cap A_t| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \geq 1.$$

Theo nguyên lý IE thì

$$\begin{aligned} 10 &= |X| \geq |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_t| - \\ &\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\geq 4 \times 5 - \binom{4}{2} \times 2 + \left( \binom{4}{3} - 1 \right) \times 1 = 11, \end{aligned}$$

mâu thuẫn. Do đó điều giả sử là sai. Suy ra  $k \leq 6$ . Vậy  $k = 6$ .  $\square$

**Ví dụ 2.14 (India Postal Coaching 2014 Set 5 Problem 4, Ví dụ 3.3.3).** Tập  $M$  được viết dưới dạng  $M = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  và  $A_i \cap A_j = \emptyset$  với mọi  $1 \leq i < j \leq n$ , thì các tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  được gọi là *n\_phân hoạch* của  $M$ . Giả sử  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và  $B_1, B_2, \dots, B_n$  là hai *n\_phân hoạch* của  $M$  thỏa mãn

$$|A_i \cup B_j| \geq n, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Chứng minh  $|M| \geq \frac{n^2}{2}$ .

Dưới đây ta trình bày một lời giải khác bằng cách dùng công thức IE.

**Chứng minh.** Đặt  $k = \min\{|A_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $|A_1| = k$ . Khi đó

$$|M| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| \geq n|A_1| \Rightarrow |A_1| \leq \frac{M}{n}.$$

Tương tự đặt  $j = \min\{|B_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $|B_1| = j$  và tương tự như đánh giá trên thì

$$|B_1| \leq \frac{M}{n}.$$

Theo giả thiết bài toán thì  $|A_1 \cup B_1| \geq n$  nên theo công thức IE thì

$$n \leq |A_1 \cup B_1| = |A_1| + |B_1| - |A_1 \cap B_1| \leq |A_1| + |B_1| \leq \frac{2|M|}{n} \Rightarrow M \geq \frac{n^2}{2}.$$

$\square$

**Ví dụ 2.15.** Cho 2005 tập hợp, mỗi tập hợp có có 44 phần tử. Biết rằng hai tập hợp bất kỳ đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2005 tập hợp đã cho.

*Ta cần khẳng định tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2005 tập hợp đã cho. Do đó ta sẽ làm việc với một phần tử  $x$  thuộc nhiều tập hợp nhất (vì chỉ có phần tử này mới có cơ hội nhiều nhất thỏa đề bài). Để làm được điều này, ta phải biết được  $x$  thuộc bao nhiêu tập hợp. Nếu  $x$  thuộc ít hơn 2005 tập hợp, bằng lập luận dẫn đến vô lý.*

*Giải.* Ta có 2005 tập hợp, mỗi tập có 44 phần tử nên có tối đa là  $2005 \times 44$  phần tử. Với  $x$  là một phần tử bất kỳ trong chúng, đặt

$$A_x = \{số tập hợp trong 2005 tập hợp mà chứa phần tử x\} \in \mathbb{N}.$$

Vì  $\{A_x\}_x \subset \mathbb{N}$  là hữu hạn nên **tồn tại phần tử lớn nhất trong chúng**, mà ta giả sử luôn là  $x$ . Tức  $x$  là phần tử thuộc **nhiều tập hợp nhất**, gọi các tập hợp này là  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Nếu  $k = 2005$  thì bài toán được chứng minh. Giả sử  $k < 2005$ , tức tồn tại một tập hợp  $B$ , trong số 2005 tập hợp, không chứa  $x$ . Theo giả thiết bài toán

$$x_1 = B \cap A_1 \neq x,$$

$$x_2 = B \cap A_2 \neq x,$$

dễ thấy  $x_1 \neq x_2$  vì nếu không thì  $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ , trong khi đó theo điều kiện bài toán thì  $A_1 \cap A_2 = x$ , duy nhất. Tương tự ta có  $B$  sẽ chứa các phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Tuy nhiên  $B$  chỉ chứa đúng 44 phần tử nên  $k \leq 44$ . Vì mỗi phần tử của  $B$  không thuộc quá 44 tập hợp (vì phần tử  $x$  thuộc nhiều tập hợp nhất là  $k$  tập hợp mà  $k \leq 44$ ) nên  $B$  có giao khác rỗng với nhiều nhất là

$$44^2 = 1936 < 2004$$

tập hợp, mâu thuẫn với giả thiết  $B$  có giao khác rỗng với 2004 tập hợp còn lại.

Vậy điều giả sử là sai, tức  $k = 2005$ . Bài toán được giải xong.  $\square$

**Ví dụ 2.16.** Cho 2014 thùng trái cây, mỗi giỏ trái cây có cả ba loại trái cây Táo, Xoài, Cam. Chứng minh rằng có thể chọn ra được 1008 thùng trái cây, sao cho tổng số Xoài, tổng số Táo, tổng số Cam trong 1008 thùng trái cây này đều lớn hơn một nửa tổng số Xoài, tổng số Táo, tổng số Cam của 2014 thùng trái cây ban đầu.

*Chứng minh.* Đánh số  $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$  là 2014 thùng trái cây đó. Gọi  $(a_i, b_i, c_i)$  lần lượt là số táo, xoài, cam trong thùng  $A_i$ . Chọn ra 2 thùng  $A_i, A_j$  có **số táo và số xoài lớn nhất**. Nếu  $i = j$  thì ta chọn thùng  $A_i$  và một thùng bất kỳ. Gọi  $A$  và  $B$  lần lượt là **số táo và số xoài lớn nhất trong 2012 thùng còn lại**. Ta sẽ chứng minh trong 2012 thùng còn lại, có thể chia vào 2 nhóm I, II (mỗi nhóm có 1006 thùng) sao cho

$$\begin{cases} \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in II} a_i \right| \leq A \\ \left| \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in II} b_i \right| \leq B \end{cases}$$

Giả sử  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2012}$ , ta xét các cặp  $X_i = (a_{2i-1}, a_{2i})$ , ( $i = 1, 2, \dots, 1006$ ). Với mỗi cặp

$$\begin{cases} a_{2i-1} \in X_i \\ a_{2i} \in X_i \end{cases}$$

ta sẽ cho cặp đó vào 2 nhóm nhau. Khi đó với mọi cách chia thì

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in II} a_i &\leq a_1 + a_3 + \dots + a_{2011} - a_2 - a_4 - \dots - a_{2012} \\ &= a_1 + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{2011} - a_{2010}) - a_{2012} \leq a_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in II} a_i &\geq a_2 + a_4 + \dots + a_{2012} - a_1 - a_3 - \dots - a_{2011} \\ &= -a_1 + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2010} - a_{2011}) + a_{2012} \geq -a_1. \end{aligned}$$

Nên với mọi cách chia thì

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in II} a_i \right| \leq A.$$

Gọi  $T$  là một cách chia như thế. Nếu

$$\left| \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in II} b_i \right| \leq B$$

thì chọn cách này. Nếu

$$\left| \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in II} b_i \right| > B$$

không mất tính tổng quát, giả sử

$$\sum_{i \in I} b_i > \sum_{i \in II} b_i \Rightarrow \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in II} b_i > B.$$

Khi đó tồn tại  $j \in I, k \in II$  sao cho  $b_j > b_k$ . Khi đó ta chỉ việc đổi chỗ  $(a_j, b_j)$  từ nhóm I sang nhóm II và  $(a_k, b_k)$  từ nhóm II sang nhóm I (cách đổi chỗ này không ảnh hưởng đến điều kiện (1)). Khi đó  $\sum_{i \in I} b_i$  sẽ giảm đi ít nhất 1, còn  $\sum_{i \in I} b_i$  sẽ tăng lên ít nhất 1.

Do đó

$$\sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in II} b_i$$

sẽ giảm đi ít nhất là 2. Nếu sau khi đổi chỗ mà thỏa điều kiện (2) thì dừng, nếu chưa thỏa thì tiếp tục làm như trên sẽ đến lúc thỏa vì hiệu trên giảm ngặt trên tập số nguyên dương. Vậy ta luôn chia được thành 2 nhóm sao cho

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in II} a_i \right| &\leq A \\ \left| \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in II} b_i \right| &\leq B. \end{aligned}$$

Trong hai nhóm I và II, thì tổng số cam trong mỗi nhóm đã được xác định, nên ta sẽ chọn được nhóm nào số cam nhiều hơn. Giả sử nhóm I. Khi đó thêm 2 thùng đã lấy ra cho vào nhóm I, thì số cam lấy ra lớn hơn 1 nửa và

$$-A \leq \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in II} a_i \leq A \Rightarrow \sum_{i \in II} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i + A,$$

tức số Táo thỏa mãn điều kiện. Tương tự kiểm tra cho số Xoài.

□

**Ví dụ 2.17.** Cho  $X$  là một tập hợp hữu hạn,  $|X| = n$  và  $A_1, A_2, \dots, A_m$  là các tập con của  $X$  thỏa mãn

$$|A_i| \geq 2, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \text{và} \quad |A_i \cap A_j| \neq 1, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Chứng minh rằng có thể tô các phần tử của  $X$  bằng hai màu, mỗi phần tử tô một màu, sao cho mọi tập  $A_i$  đều chứa các phần tử được tô cả hai màu.

- Chứng minh.*
1. Giả sử  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Giả sử kết luận bài toán sai. Trong tất cả các cách tô màu mỗi phần tử của tập  $X$ , chọn cách **tô được một tập con cực đại** của  $X$ , giả sử  $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  ( $k < n$ ) thỏa mãn bài toán theo nghĩa: nếu thêm phần tử  $x_{k+1}$  vào  $Y$  thì không thể tô màu cho  $x_{k+1}$  được để thỏa mãn bài toán.
  2. Điều đó dẫn đến sẽ có hai tập, giả sử là  $A_r, A_s$  chứa  $x_{k+1}$  và  $A_r, A_s \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$  sao cho
    - Nếu  $x_{k+1}$  được tô màu xanh thì  $A_r \cap Y$  gồm toàn các phần tử màu xanh;
    - Còn nếu  $x_{k+1}$  được tô màu đỏ thì  $A_s \cap Y$  gồm toàn các phần tử màu đỏ.

Nhưng khi đó thì  $A_r \cap A_s = \{x_{k+1}\}$ , mâu thuẫn với giải thiết bài toán. Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được chứng minh.

□

**Ví dụ 2.18 (2000 Hungarian-Israeli).** Đặt  $S = \{1, 2, \dots, 2000\}$ . Nếu  $A$  và  $B$  là hai tập con của  $S$ , ta ký hiệu  $|A|$  và  $|B|$  là số phần tử trong tập  $A$  và tập  $B$  tương ứng. Giả sử rằng

$$|A| \cdot |B| \geq 3999.$$

Chứng minh rằng khi đó hai tập hợp  $A - A$  và  $B - B$  chứa ít nhất một phần tử chung. Ký hiệu

$$X - X = \{s - t | s \in X \text{ và } t \in X, s \neq t\}.$$

*Giải.* Đặt  $T = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$  thì

$$|T| = |A| \cdot |B| \geq 3999.$$

Tập  $W = \{a+b | a \in A, b \in B\}$  là một tập con của tập  $\{2, 3, \dots, 4000\}$ . Nếu  $W = \{2, 3, \dots, 4000\}$  thì vì hai số 2 và 4000 đều nằm trong  $W$  nên suy ra cả hai tập  $A$  và  $B$  đều chứa hai số 1 và 2000. Suy ra hai tập  $A - A$  và  $B - B$  đều có một phần tử chung là 1999.

Nếu  $W \neq \{2, 3, \dots, 4000\}$  thì  $W$  có ít hơn 3999 phần tử. Theo nguyên lý Dirichlet, phải tồn tại hai cặp  $(a, b) \neq (a', b')$  trong  $T$  để

$$a + b = a' + b' \implies a - a' = b - b'.$$

Khi đó hai tập hợp  $A - A$  và  $B - B$  đều chứa chung một phần tử là  $a - a' = b - b'$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

### 2.3. Thiết lập ánh xạ giữa các tập hợp

**Ví dụ 2.19 (Italy 2000).** Cho  $X$  là một tập hợp hữu hạn với  $|X| = n$ , và đặt  $A_1, A_2, \dots, A_m$  là các tập con chứa 3 phần tử của  $X$  thỏa mãn  $|A_i \cap A_j| \leq 1$  với mọi  $i \neq j$ . Chứng tỏ tồn tại tập con  $A$  của  $X$  chứa ít nhất  $\lceil \sqrt{2n} \rceil$  phần tử mà không nhận bất cứ tập  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) nào là tập con của nó.

*Giải.* 1. Để tập  $A$  không chứa bất kỳ tập  $A_i$  nào làm tập con, thì lẽ tự nhiên tập  $A$  chứa càng ít phần tử càng tốt.

2. Tuy nhiên để bài lại yêu cầu  $|A| \geq \sqrt{2n}$ , tức một chẵn dưới cho  $|A|$ . Nghĩa là để bài yêu cầu tồn tại tập  $A$  có số lượng phần tử "tương đối" nhiều. Để làm việc với những tập tương đối nhiều phần tử, thông thường ta làm trên tập có nhiều phần tử nhất. Giả sử  $A$  là một tập con của  $X$  mà không chứa bất kỳ một tập  $A_i$  nào, với phần tử lớn nhất. Đặt  $k = |A|$ .

- Ý nghĩa như sau: bất kỳ tập con nào của  $X$  có số phần tử  $> k$ , sẽ đều chứa một tập con  $A_i$  nào đó.
- Do đó ta sẽ khảo sát những tập vi phạm sinh ra từ  $A$ , những tập đó bằng tập  $A$  thêm một phần tử ngoài  $A$ , tức thêm vào  $A$  một phần tử của tập  $X \setminus A$ .

3. Cách 1. Vì  $|A|$  chứa  $k$  phần tử nên  $X \setminus A$  có  $n - k$  phần tử.

4. Cách 2. Xét  $x$  là một phần tử của  $X$  nhưng không thuộc  $A$ ,  $x \in X \setminus A$ . Theo tính tối đại của tập  $A$ , thì  $A \cup \{x\}$  sẽ không thỏa mãn điều kiện bài toán. Nghĩa là sẽ tồn tại một chỉ số  $i(x) \in \{1, 2, \dots, m\}$  sao cho

$$A_{i(x)} \subseteq A \cup \{x\}.$$

Vì  $A_{i(x)} \not\subset A$  và  $A_{i(x)} \subseteq A \cup \{x\}$  nên  $x \in A_{i(x)}$ . Từ đó suy ra

$$A_{i(x)} \setminus \{x\} \subset A.$$

Vì mỗi tập  $A_i$  có ba phần tử nên  $A_{i(x)} \setminus \{x\}$  chỉ có hai phần tử, mà nó lại là tập con của  $A$ , dẫn đến tập

$$L_x = A \cap A_{i(x)}$$

có đúng hai phần tử. Lại theo giả thiết bài toán  $|A_i \cap A_j| \leq 1$  với mọi  $i \neq j$  nên các tập  $L_x$  đều là các tập phân biệt (theo nghĩa, hai tập hợp  $L_x$  và  $L_y$ , ở đây  $x \neq y$  thuộc  $X \setminus A$  thì  $L_x \neq L_y$ . Vì nếu  $L_x = L_y$ , giả sử  $L_x = L_y = \{a, b\}$ . Khi đó  $\{a, b\} \subset A_x$ ,  $\{a, b\} \subset A_y$ , dẫn đến  $A_x \cap A_y = \{a, b\}$ , mâu thuẫn).

5. Từ đó chúng ta đã xác lập được một **đơn ánh** từ tập  $X \setminus A$  đến **tập hợp chứa các tập hai phần tử** của  $A$ . Do đó theo tính chất đơn ánh thì

$$\begin{aligned} n - k &\leq \binom{k}{2} = \frac{k^2 - k}{2} \\ \implies k^2 + k &\geq 2n \implies k \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8n}}{2} \geq \frac{\sqrt{8n}}{2} = \sqrt{2n}. \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 2.20 (AMM, E3459).** Cho  $X$  là một tập hợp,  $|X| = n \geq 12$  và  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  là họ các 4\_tập của  $X$  sao cho

$$|A_i \cap A_j| \geq 2, \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một tập con  $S$  của  $X$ ,  $|S| \geq \sqrt[3]{6n - 6}$  sao cho  $A_i \not\subset S, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

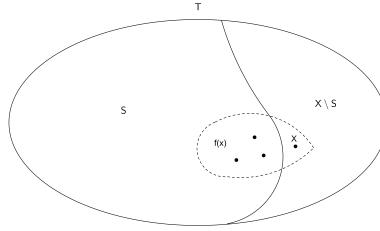
*Chứng minh.* 1. Ta gọi một tập con  $T$  của  $X$  là một tập **độc lập** nếu

$$A_i \not\subset T, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

2. Xét  $S$  là tập độc lập có kích thước **lớn nhất** trong  $X$ , đặt  $|S| = k$ . Khi đó  $k \geq 3$ . Vì  $S$  lớn nhất, nên với mỗi phần tử  $x \in X \setminus S$ , sẽ tồn tại một 3\_tập  $f(x) \subseteq S$  sao cho

$$f(x) \cup \{x\} \in \mathcal{F}.$$

(vì nếu mọi tập  $B$  chứa 3 phần tử trong  $S$  mà  $B \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$  thì ta bổ sung  $x$  và  $S$  và được tập  $S \cup \{x\}$  cũng là tập độc lập, mâu thuẫn với tính lớn nhất của  $S$ ).



3. Lấy  $x_1 \neq x_2$  ( $x_1, x_2$  thuộc  $X \setminus S$ ). Theo kết quả trên, tồn tại hai tập chứa 3 phần tử  $f(x_1), f(x_2)$  trong  $S$  sao cho

$$f(x_1) \cup \{x_1\} \in F, \quad f(x_2) \cup \{x_2\} \in F.$$

Rõ ràng  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , vì nếu  $f(x_1) \equiv f(x_2)$ . Khi đó hai tập  $A_1 = f(x_1) \cup \{x_1\}, A_2 = f(x_2) \cup \{x_2\}$  có

$$|A_1 \cap A_2| = |f(x_1)| = 3$$

mâu thuẫn giả thiết.

4. Từ trên ta thấy  $f$  là một đơn ánh từ  $X \setminus S$  vào các tập con chứa 3 phần tử của  $S$ . Do đó

$$|X \setminus S| \leq |S| \Leftrightarrow n - k \leq \binom{k}{3}.$$

Từ đây suy ra

$$6n \leq 6 \binom{k}{3} + 6k = k^3 - 3k^2 + 8k \leq k^3 - 3 \Rightarrow k \geq \sqrt[3]{6n + 3}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

**Ví dụ 2.21 (India Postal Coaching 2014 Set 5 Problem 4).**  
 Tập  $M$  được viết dưới dạng  $M = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  và  $A_i \cap A_j = \emptyset$  với mọi  $1 \leq i < j \leq n$ , thì các tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  được gọi là một n\_phân hoạch của  $M$ . Giả sử  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và  $B_1, B_2, \dots, B_n$  là hai n\_phân hoạch của  $M$  thỏa mãn

$$|A_i \cup B_j| \geq n, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Chứng minh  $|M| \geq \frac{n^2}{2}$ .

*Chứng minh.* Đặt  $k = \min\{|A_i|, |B_j|, 1 \leq i, j \leq n\}$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $|A_1| = k$ .

1. Do  $B_1, B_2, \dots, B_n$  là các tập con phân biệt. Vì  $|A_1| = k$ , nên **có nhiều nhất**  $k$  tập  $B_j$  trong  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  mà  $A_1 \cap B_j \neq \emptyset$ . Khi đó tồn tại **ít nhất**  $n - k$  tập  $B_j$  trong  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  mà  $A_1 \cap B_j = \emptyset$ .
2. Giả sử trong các tập  $B_1, B_2, \dots, B_n$  có **chính xác**  $m$  tập  $B_j$  mà  $A_1 \cap B_j \neq \emptyset$ , khi đó  $m \leq k$ . Không mất tính tổng quát, gọi  $m$  tập đó là  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . Khi đó  $n - m$  tập  $B_{m+1}, B_{m+2}, \dots, B_n$  còn lại có  $A_1 \cap B_j = \emptyset, \forall j = m + 1, m + 2, \dots, n$ .
3. Vì  $B_j \cap A_1 = \emptyset, \forall j = m + 1, m + 2, \dots, n$ , lại theo giả thiết  $|B_j \cup A_1| \geq n, \forall j = m + 1, m + 2, \dots, n$ . Chứng tỏ

$$|B_j| \geq n - |A_1| = n - k, \forall j = m + 1, \dots, n.$$

4. Theo định nghĩa của  $k$  thì

$$|B_j| \geq |A_1| = k, \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |M| &= |B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n| \\ &= \underbrace{|B_1| + \dots + |B_m|}_{m \text{ tập}} + \underbrace{|B_{m+1}| + \dots + |B_n|}_{n-m \text{ tập}} \\ &\geq m \times k + (n - m) \times (n - k) \\ &= n(n - k) - m(n - 2k). \end{aligned}$$

- Nếu  $n \geq 2k$ , thì  $n - 2k \geq 0$ . Do  $m \leq k$  nên

$$|M| \geq n(n - k) - k(n - 2k) = \frac{n^2}{2} + 2 \left( \frac{n}{2} - k \right)^2 \geq \frac{n^2}{2}.$$

- Nếu  $n < 2k$ , khi đó

$$|M| = |B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n| = |B_1| + \dots + |B_n| \geq n \times k > \frac{n^2}{2}.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.  $\square$

**Ví dụ 2.22.** Cho  $A_i$  là các tập hợp hữu hạn, với  $i = 1, 2, \dots, n$ .  
Chứng minh rằng nếu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} < 1,$$

thì tồn tại  $a_i \in A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  để  $a_i \neq a_j, \forall 1 \leq i < j \leq n$ .

*Chứng minh.* Đặt  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  và  $T = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ . Xét ánh xạ  $f : S \rightarrow T$  sao cho: với mỗi  $i \in S$  thì  $f(i) \in A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Gọi  $M$  là tập hợp tất cả các ánh xạ như vậy. Khi đó

$$|M| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_n|.$$

Ta chứng minh có ít nhất một đơn ánh trong  $M$ . Nếu  $f \in M$  mà không là đơn ánh, khi đó tồn tại  $i, j \in S, i \neq j$  sao cho  $f(i) = f(j)$ . Với ánh xạ  $f$  như vậy, thì  $f(i) = f(j)$  nhận nhiều nhất là  $|A_i \cap A_j|$  giá trị khác nhau, và  $f(k) (k \neq i, j)$  nhận nhiều nhất là  $|A_k|$  giá trị khác nhau. Do đó với  $i, j \in S (i \neq j)$ , số ánh xạ  $f$  mà  $f(i) = f(j)$  nhiều nhất là

$$|A_i \cap A_j| \cdot \prod_{k=1, k \neq i, j}^n |A_k| = \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} \cdot |M|.$$

Từ đó suy ra số ánh xạ trong  $M$  mà không phải là đơn ánh nhiều nhất là

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} \cdot |M| < |M|.$$

Từ đó suy ra tồn tại ít nhất một đơn ánh  $f_0 \in M$ . Đặt

$$f_0(i) = a_i (i = 1, 2, \dots, n).$$

Khi đó  $a_i \in A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  và do  $f_0$  đơn ánh nên  $i, j \in S (i \neq j)$  thì

$$a_i = f_0(i) \neq f_0(j) = a_j.$$

□

**Ví dụ 2.23 (Iran 1999).** Cho  $n$  là số nguyên dương và tập hợp  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Các tập  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các tập con của  $X$  sao cho với mọi  $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$  ta có

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leq n - 2.$$

Chứng minh rằng  $k \leq 2^{n-2}$ .

*Chứng minh.* Một tập con  $T \subset X$  được gọi là 2-phủ nếu  $T \subseteq A_i \cup A_j$  với  $i, j$  thuộc  $\{1, 2, \dots, k\}$  ( $i, j$  không nhất thiết phân biệt). Trong số tất cả các tập con của  $X$  không bị 2-phủ, ta chọn ra tập có số lượng phần tử **nhỏ nhất**. Gọi đó là tập  $A$ .

1. Xét họ tập hợp  $S_1 = \{A \cap A_1, A \cap A_2, \dots, A \cap A_k\}$  (ở đây  $A \cap A_i$  có thể trùng  $A \cap A_j$ , nếu xảy ra điều này ta bỏ khỏi tập  $S_1$  những tập trùng nhau). Vì  $A$  **không phải** 2-phủ nên nếu  $X \in S_1$  thì  $A \setminus X \notin S_1$  (thật vậy, giả sử cả  $X$  và  $A \setminus X \in S_1$ , khi đó

$$X = A \cap A_r, \quad A \setminus X = A \cap A_s$$

với  $r, s$  thuộc  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Nhưng khi đó thì

$$A = X \cup (A \setminus X) = (A \cap A_r) \cup (A \cap A_s) = A \cap (A_r \cup A_s) \Rightarrow A \subseteq A_r \cup A_s,$$

mâu thuẫn với  $A$  không là 2-phủ.) Như vậy có không quá một nửa số tập con của  $A$  nằm trong  $S_1$ . Do đó

$$|S_1| \leq 2^{|A|-1}.$$

2. Bây giờ lấy  $B = X \setminus A$  (dĩ nhiên  $B$  sẽ là 2-phủ, vì  $|B| > |A|$ ), lại xét tiếp tập hợp

$$S_2 = \{B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_k\}.$$

Khi đó nếu  $X \in S_2$  thì  $B \setminus X \notin S_2$ . Thật vậy, giả sử cả hai tập  $X$  và  $B \setminus X$  đều nằm trong  $S_2$ . Khi đó

$$X = B \cap A_p \quad B \setminus X = B \cap A_q$$

thì

$$B \subseteq A_p \cup A_q.$$

Theo tính nhỏ nhất của  $|A|$ , suy ra bất kỳ tập nào có  $< |A|$  phần tử sẽ là 2-phủ. Do đó với  $m \in A$  thì

$$A \setminus \{m\} = A_c \cup A_d$$

với  $c, d \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Khi đó

$$|A_c \cup A_d \cup A_p \cup A_q| \geq |B \cup (A \setminus \{m\})| = |X \setminus \{m\}| = n - 1,$$

mâu thuẫn với giả thiết. Từ đây, tương tự lập luận trên, cũng suy ra

$$|S_2| \leq 2^{|B|-1} = 2^{n-|A|-1}.$$

3. Mặt khác, mỗi tập  $A_i$  xác định duy nhất bởi  $(B \cap A_i) \cup (A \cap A_i)$ .  
Do đó

$$k \leq |S_1| \cdot |S_2| \leq 2^{|A|-1} \cdot 2^{n-|A|-1} = 2^{n-2}.$$

□

## 2.4. ĐẾM SỐ TẬP HỢP CHỨA PHẦN TỬ - ĐẾM HAI CÁCH

**Ví dụ 2.24 (PUTNAM 1980).** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$  là các tập con của tập hữu hạn  $X$  sao cho  $|A_i| > \frac{1}{2}|X|$ , với mọi  $1 \leq i \leq 1066$ . Chứng minh rằng tồn tại 10 phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  của  $X$  sao cho mọi tập  $A_j$  ( $j \in \overline{1, 1066}$ ) đều chứa ít nhất một phần tử trong mươi phần tử này.

*Chứng minh.* Bài toán chỉ xét khi  $|X| \geq 10$ . Đặt  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , với  $m = |X|$ .

1. Với mỗi  $t$  ( $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ ), đặt

$$n_t = |\{j \in \{1, 2, \dots, 1066\} | x_t \in A_j\}|$$

tức  $n_t$  đếm số tập hợp  $A_j$  chứa phần tử  $x_t$ . Khi đó

- $n_1$  đếm số tập hợp  $A_j$  chứa phần tử  $x_1$ ;
- $n_2$  đếm số tập hợp  $A_j$  chứa phần tử  $x_2$ ;
- .....;
- $n_m$  đếm số tập hợp  $A_j$  chứa phần tử  $x_m$ .

Do đó

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{1066}| > 1066 \cdot \frac{m}{2} = 533m.$$

Từ đây suy ra có một số  $n_i$ , không mất tính tổng quát giả sử là  $n_1$ , mà  $n_1 > 533$ . Tức là ta có *hơn một nửa tập hợp trong số các tập  $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$  chứa phần tử  $x_1$* .

2. Gọi  $B_1, B_2, \dots, B_s$  là các tập hợp trong số các tập  $A_i$  mà **không chứa phần tử  $x_1$** . Ta có

$$s = 1066 - n_1 \leq 532.$$

Đặt  $Y = X \setminus \{x_1\} = \{x_2, \dots, x_m\}$ . Ngoài ra

$$|B_i| = |A_i| > \frac{1}{2}m > \frac{1}{2}(m-1) = \frac{1}{2}|Y|.$$

Với mỗi  $t$  ( $t \in \{2, \dots, 1066\}$ ), đặt

$$k_t = |\{j \in \{1, 2, \dots, s\} | x_t \in B_j\}|$$

tức  $k_t$  đếm số tập hợp  $B_j$  chứa phần tử  $x_t$ . Khi đó

$$k_2 + k_3 + \dots + k_m = |B_1| + |B_2| + \dots + |B_s| > s \cdot \frac{m-1}{2} = \frac{s}{2} \cdot (m-1).$$

Về trái là tổng của  $m-1$  số, do đó phải tồn tại một  $k_i$ , không mất tính tổng quát giả sử  $k_2 > \frac{s}{2}$ . Nghĩa là có *hơn một nửa tập hợp trong số  $B_1, B_2, \dots, B_s$  chứa phần tử  $x_2$* .

3. Đến đây lại đặt  $C_1, C_2, \dots, C_r$  là các tập hợp trong số các tập  $B_j$  mà **không chứa phần tử  $x_2$** . Ta có

$$r = s - k_2 < s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2} \leq \frac{532}{2} = 265.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta lại chỉ ra được  $> \frac{r}{2}$  (hơn một nửa trong số các tập  $C_1, \dots, C_r$ ) chứa phần tử  $x_3$ . Ta lại chỉ ra được một dãy tập hợp  $D_1, D_2, \dots, D_u$  với  $u < \frac{r}{2} = 132$  không chứa phần tử  $x_4$ .

4. Cứ tiếp tục quá trình này ở lần thứ 5 đến lần thứ 10, mỗi dãy sẽ không nhiều hơn 65, 32, 15, 7, 3, và 1. Do đó ta nhận được các phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

**Ví dụ 2.25 (China 1996, Romania 1994).** Cho 11 tập hợp  $M_i, i = 1, 2, \dots, 11$  thỏa mãn

$$\begin{cases} |M_i| = 5, \forall i = 1, 2, \dots, 11 \\ M_i \cap M_j \neq \emptyset, \forall 1 \leq i < j \leq 11. \end{cases} \quad (I)$$

Gọi  $m$  là số nguyên dương lớn nhất sao cho tồn tại các tập  $M_{i_1}, \dots, M_{i_m}$  trong số 11 tập trên để

$$\bigcap_{k=1}^m M_{i_k} \neq \emptyset.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $m$  trên tất cả cách chọn 11 tập hợp  $M_i$  thỏa mãn (I).

*Chứng minh.* Đặt  $X = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$ . Với mỗi  $x \in X$ , đặt

$$n_x = |\{j \in \{1, 2, \dots, 11\} | x \in M_j\}|$$

và  $m = \max\{n_x | x \in X\}$ . Khi đó

$$\sum_{x \in X} n_x = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_{11}| = 55.$$

Theo giả thiết thì  $M_i \cap M_j \neq \emptyset$  với mọi  $1 \leq i < j \leq 11$ .

- Có  $\binom{11}{2}$  cách chọn **giao khác rỗng**, mỗi cách chọn giao khác rỗng là một cách chọn một cặp tập hợp  $M_i, M_j$  trong số 11 tập  $M_1, M_2, \dots, M_{11}$ ;
- Mặt khác, mỗi phần tử  $x$  xuất hiện trong  $\binom{n_x}{2}$  **giao khác rỗng** của các tập  $M_i, M_j$ .

Do đó

$$\sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} \geq \binom{11}{2} = 55.$$

Do đó

$$\sum_{x \in X} \frac{n_x(n_x - 1)}{2} \geq 55.$$

Vì  $n_x \leq m, \forall x \in X$ , do đó

$$55 \leq \sum_{x \in X} \frac{n_x(n_x - 1)}{2} \leq \frac{m-1}{2} \sum_{x \in X} n_x = \frac{m-1}{2} \cdot 55 \Rightarrow \frac{m-1}{2} \geq 1 \Rightarrow m \geq 3.$$

Nếu  $m = 3$ , khi đó dấu bằng phải xảy ra trong tất cả các bất đẳng thức trên, nên  $n_x = m = 3, \forall x \in X$ . Nhưng  $\sum_{x \in X} n_x = 55$  không chia hết cho 3, nên  $n_x$  không thể bằng 3 với mọi giá trị

của  $x \in X$ . Từ đây suy ra  $m \geq 4$ .

Tiếp theo ta chứng minh  $m = 4$  thỏa mãn. Xét

$a$	$b$	$b$	$d$
$e$	$f$	$g$	$h$
1	2	3	4
5	6	7	8

Khi đó 11 tập  $M_i$  được lấy như sau:

- 4 tập **dòng**

$$\begin{aligned} M_1 &= \{a, b, c, d, D\}, & M_2 &= \{e, f, g, D\}, \\ M_3 &= \{1, 2, 3, 4, D\}, & M_4 &= \{5, 6, 7, 8, D\}. \end{aligned}$$

- 4 tập **cột**

$$\begin{aligned} M_5 &= \{a, e, 1, 5, C\}, & M_6 &= \{b, f, 2, 6, C\}, \\ M_7 &= \{c, g, 3, 7, C\}, & M_8 &= \{d, h, 4, 8, C\}. \end{aligned}$$

- 3 tập **đường chéo**

$$M_9 = \{a, f, 3, 8, D\}, \quad M_{10} = \{b, g, 4, 5, D\}, \quad M_{11} = \{c, h, 1, 6, D\}.$$

(Mỗi tập trên đều lấy trên mỗi dòng, mỗi cột đúng một phần tử)  $\square$

**Ví dụ 2.26 (USAMO 2011).** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_{11}$  là các hợp sô cho

$$\begin{cases} |A_i| = 45, \forall 1 \leq i \leq 11 \\ |A_i \cap A_j| = 9, \forall 1 \leq i < j \leq 11. \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$  và cho một ví dụ với trường hợp dấu bằng xảy ra.

*Chứng minh.* Đặt  $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}$ , với mỗi  $x \in X$ , đặt

$$n_x = |\{j \in \{1, 2, \dots, 11\} | x \in A_j\}|.$$

Khi đó

$$\sum_{x \in X} n_x = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{11}| = 11 \times 45 = 495.$$

- Có  $\binom{11}{2}$  cách chọn hai tập giao khác rỗng  $A_i, A_j$  trong số 11 tập  $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ .
- Mặt khác, mỗi phần tử  $x$  xuất hiện trong  $\binom{n_x}{2}$  giao khác rỗng của các tập  $A_i, A_j$ .

Theo giả thiết thì  $|A_i \cap A_j| = 9$  với mọi  $1 \leq i < j \leq 11$  nên mỗi tập giao của hai tập  $A_i, A_j$  thì mỗi phần tử được đếm lặp 9 lần. Do đó

$$\sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} = 9 \times \binom{11}{2} = 495.$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{x \in X} n_x = \sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} \Rightarrow n_x = 3, \forall x \in X.$$

Mặt khác

$$\sum_{x \in X} n_x = \sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} = 495 \Rightarrow \sum_{x \in X} n_x^2 = 3 \times 495$$

Đặt  $n = |X|$ , theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz thì

$$\left( \sum_{x \in X} 1 \cdot n_x \right)^2 \leq \left( \sum_{x \in X} 1 \right) \left( \sum_{x \in X} n_x^2 \right) \Rightarrow 495^2 \leq n \times 3 \times 495 \Rightarrow n \geq 165.$$

Để kết thúc bài toán, ta chỉ ra một thuật xây dựng. *Coi 11 tập hợp là 11 mặt phẳng trong  $\mathbb{R}^3$ , trong đó không có hai mặt phẳng nào song song với nhau. Khi đó ba mặt phẳng tùy ý cắt nhau tại một điểm. Tổng số giao điểm đạt được là*

$$\binom{11}{3} = 165$$

là các điểm trong tập  $X$ . □

**Ví dụ 2.27 (USA TST 2005).** Cho  $n$  là số nguyên dương lớn hơn 1. Với mỗi số nguyên dương  $m$ , đặt  $X_m = \{1, 2, \dots, mn\}$ . Giả sử tồn tại một họ  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$  gồm  $2n$  tập con của  $X_m$  sao cho

1.  $|A_i| = m, \forall i = 1, 2, \dots, 2n;$

2.  $|A_i \cap A_j| \leq 1, \forall 1 \leq i < j \leq 2n;$
3. Mọi phần tử của  $X_m$  đều nằm trong đúng hai tập hợp thuộc  $\mathcal{F}$ .

Tìm giá trị lớn nhất của  $m$  theo  $n$ .

*Chứng minh.* Với mỗi  $i \in X_{mn}$ , đặt

$$n_i = |\{j \in \{1, 2, \dots, 2n\} | i \in A_j\}|.$$

Khi đó, theo giả thiết thứ 3 thì  $n_i = 2, \forall i = 1, 2, \dots, mn$ . Mặt khác, sử dụng giả thiết thứ 2 thì

$$\sum_{i=1}^{mn} \binom{n_i}{2} = \sum_{1 \leq i < j \leq mn} |A_i \cap A_j| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq mn} 1 = \binom{2n}{n}.$$

Từ đây suy ra

$$mn \leq \binom{2n}{2} \Rightarrow m \leq 2n - 1.$$

Mặt khác, ta lấy  $2n$  đường thẳng trong  $\mathbb{R}^2$ , trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Tổng số giao điểm của các cặp đường thẳng này là

$$\binom{2n}{2} = n(2n - 1) = n.m$$

là các phần tử của  $X_{mn}$ . Khi đó mỗi tập  $A_i$  chứa  $2n - 1$  giao điểm trên đường thẳng  $i$ . Nhận thấy các tập  $A_i$  thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy giá trị lớn nhất của  $n$  là  $2m - 1$ .  $\square$

**Ví dụ 2.28.** Tìm số nguyên dương  $n$  lớn nhất sao cho tồn tại  $n$  tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$  thỏa mãn

$$\begin{cases} |A_i| = 4, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ |A_i \cap A_j| = 1, \forall 1 \leq i < j \leq n \\ |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = n. \end{cases}$$

*Chứng minh.* 1. Đặt  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Với mỗi  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , đặt

$$n_i = |\{j \in \{1, 2, \dots, n\} | i \in A_j\}|.$$

Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^n n_i = |A_1| + \cdots + |A_n| = 4n. \quad (*)$$

Dẫn đến với mỗi  $i$ , thì **trung bình** nó xuất hiện trong 4 tập hợp  $A_j$ .

2. Giả sử tồn tại một phần tử, không mất tính tổng quát, giả sử là 1 nằm trong **nhiều hơn 4 tập hợp**. Không mất tính tổng quát, giả sử là  $A_1, A_2, \dots, A_5$ .

- Vì  $|A_i \cap A_j| = 1, \forall 1 \leq i < j \leq 5$  và ta luôn có  $A_i \cap A_j = \{1\}, \forall 1 \leq i < j \leq 5$ , nên  $3 \times 5 = 15$  phần tử còn lại của các tập  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  phải khác nhau.
- Ngoài ra 1 không thể nằm trong tất cả các tập hợp  $A_1, \dots, A_n$ , vì nếu không áp dụng lập luận trên thì

$$3 \times n = 3n$$

phần tử còn lại trong các tập  $A_1, \dots, A_n$  phải phân biệt. Nhưng khi đó thì

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = 3n + 1 > n,$$

mâu thuẫn.

- Do đó tồn tại một tập hợp trong  $A_6, \dots, A_n$  không chứa phần tử 1. Giả sử  $A_6 \cap A_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  là các tập phân biệt. Nếu ngược lại, giả sử

$$A_6 \cap A_1 = A_6 \cap A_2 = \{b\}$$

thì  $b \neq 1$  do  $1 \notin A_6$ . Nhưng khi đó thì  $b \in A_1, b \in A_2$ , mâu thuẫn với ý đầu tiên. Từ đây dẫn đến tập  $A_6$  phải có ít nhất 5 phần tử, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy mỗi phần tử nằm trong không quá 4 tập hợp. Ngoài ra nếu có một phần tử nào đó nằm trong ít hơn 4 phần tử, theo (\*) phải có một phần tử nằm trong  $\leq 4$  tập hợp, dẫn đến mâu thuẫn. Vậy một phần tử **xuất hiện trong đúng 4 tập hợp**  $A_j$ .

3. Giả sử 1 nằm trong  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Khi đó, giả sử

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A_2 = \{1, 5, 6, 7\}, \\ A_3 = \{1, 8, 9, 10\}, \quad A_4 = \{1, 11, 12, 13\}$$

Khi đó  $n \geq 13$ .

4. Nếu  $n \geq 14$  thì phần tử 14 nằm trong một tập hợp, giả sử  $A_5$ . Khi đó 3 phần tử còn lại của  $A_5$  sẽ nằm trong các tập  $A_1, A_2, A_3$ . Dẫn đến  $A_5$  và  $A_4$  không có phần tử chung, mâu thuẫn.

5. Vậy  $n$  lớn nhất là 13, và dưới đây là 13 tập hợp thỏa mãn

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A_2 = \{1, 5, 6, 7\}, \quad A_3 = \{1, 8, 9, 10\}, \\ A_4 = \{1, 11, 12, 13\}, \quad A_5 = \{2, 5, 8, 11\}, \quad A_6 = \{2, 6, 9, 12\}, \\ A_7 = \{2, 7, 10, 13\}, \quad A_8 = \{3, 5, 10, 12\}, \quad A_9 = \{3, 6, 8, 13\}, \\ A_{10} = \{3, 7, 9, 11\}, \quad A_{11} = \{4, 5, 9, 13\}, \quad A_{12} = \{4, 6, 10, 11\}, \\ A_{13} = \{4, 7, 8, 12\}.$$

□

**Ví dụ 2.29 (China 1999).** Cho  $n$  nguyên dương và  $X$  là một tập hợp với  $|X| = n$ . Gọi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập con của  $X$  sao cho

$$|A_i| \geq 2, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Giả sử rằng với mỗi tập con  $A' \subset X$ ,  $|A'| = 2$  thì tồn tại duy nhất một chỉ số  $i$  sao cho

$$A' \subseteq A_i.$$

Chứng minh rằng

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

*Chứng minh.* 1. Vì mỗi tập con, giả sử  $\{a, b\}$  của  $X$  thì tồn tại duy nhất một chỉ số  $i$  sao cho  $\{a, b\} \subseteq A_i$  và mỗi tập con chứa hai phần tử của  $A_i$  thì không thể là tập con của một tập  $A_j$  nào khác. Do đó

$$\sum_{i=1}^n \binom{|A_i|}{2} = \binom{n}{2}. \quad (1)$$

2. Đặt  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Với mỗi  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $x_i$ , ký hiệu

$$n_i = |\{j \in \{1, 2, \dots, n\} | x_i \in A_j\}|.$$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^n n_i = \sum_{i=1}^n |A_i|. \quad (2)$$

Mặt khác

- Mỗi phần tử  $x_i \in X$  sẽ nằm trong  $n_i$  tập hợp. Do đó mỗi phần tử  $x_i$  sẽ xuất hiện trong  $\binom{n_i}{2}$  **tập giao**.
- Xét một tập giao, giả sử  $\{x_i, x_t\} = A_r \cap A_s$ . Khi đó cả  $x_i$  và  $x_t$  đều được tính trong tập giao này. Do đó

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \binom{n_i}{2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|}. \quad (3)$$

3. Theo giả thiết bài toán, thì  $|A_i \cap A_j| \leq 1$ . Và **kết luận bài toán cần chứng minh**  $|A_i \cap A_j| = 1$ . Khi đó (3) trở thành

$$\sum_{i=1}^n \binom{n_i}{2} = \binom{n}{2}.$$

Từ đây theo (1), (2) và đẳng thức trên ta được

$$\sum_{i=1}^n \binom{|A_i|}{2} = \sum_{i=1}^n \binom{n_i}{2}, \quad \sum_{i=1}^n n_i = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

dẫn đến kết luận bài toán đưa về chứng minh

$$\sum_{i=1}^n n_i^2 = \sum_{i=1}^n |A_i|^2. \quad (*)$$

4. Với mỗi phần tử  $x_i \in X$ , xét tập  $A_j$  mà  $x_i \notin A_j$ . Giả sử  $A_j = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ . Khi đó mỗi tập hợp chứa 2 phần tử sau đây

$$\{x_i, y_1\}, \{x_i, y_2\}, \dots, \{x_i, y_s\}$$

là tập con của các tập, chẳng hạn  $A_1, A_2, \dots, A_s$  (lưu ý không thể xảy ra  $\{x_i, y_1\}, \{x_i, y_2\}$  cùng thuộc vào một tập,

chẳng hạn  $A_1$ . Vì khi đó  $\{y_1, y_2\}$  cũng là tập con của  $A_1$ , mâu thuẫn với giả thiết. Điều này đúng cho tất cả các tập còn lại). Từ đây suy ra  $x_i$  thuộc vào  $s = |A_j|$  tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_s$  (đi nhiên  $x$  còn thuộc vào một số tập khác nữa). Điều này chứng tỏ nếu  $x_i \notin A_j$  thì

$$n_i \geq |A_j| \Rightarrow \frac{n_i}{n - n_i} \geq \frac{|A_j|}{n - |A_j|}.$$

5. Số tập hợp  $A_j$  không chứa  $x_i$  là  $n - n_i$ . Do đó

$$\sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{n_i}{n - n_i} = (n - n_i) \cdot \frac{n_i}{n - n_i} = n_i.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n n_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{n_i}{n - n_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n - |A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n - |A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^n |A_j|. \end{aligned}$$

Nhưng theo (2) đẳng thức phải xảy ra trong ước lượng trên. Do đó  $n_i = |A_j|$ . Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (n - n_i) n_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} d_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (n - |A_j|) |A_j| \end{aligned}$$

từ đó (\*) được chứng minh. Bài toán kết thúc.

□

## 2.5. Xây dựng - Quy nạp - Truy hồi

**Ví dụ 2.30.** Cho  $n$  nguyên dương và tập hợp  $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ . Gọi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập con phân biệt khác rỗng của  $M$  sao cho

$$|A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Tìm giá trị lớn nhất của  $n$ .

*Chứng minh.* 1. Giả sử  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập con của  $M$  thỏa mãn điều kiện bài toán. Nếu một trong các tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  có ít nhất 4 phần tử, không mất tính tổng quát, giả sử  $|A_1| \geq 4$ . Gọi  $a$  là một phần tử trong  $A_1$ .

- Khi đó  $A_1 \setminus \{a\}$  là tập có ít nhất ba phần tử. Do  $|A_1 \cap A_i| \leq 2, \forall i = 2, 3, \dots, n$  nên tập  $A_1 \setminus \{a\}$  phải phân biệt với tất cả các tập  $A_2, \dots, A_n$  (vì nếu  $A_1 \setminus \{a\} \equiv A_i$  nào đó, thì

$$A_1 \setminus \{a\} \cap A_i = A_1 \setminus \{a\}$$

có ít nhất ba phần tử. Khi đó  $A_1 \cap A_i$  cũng có ít nhất ba phần tử, vô lý.)

- Ngoài ra

$$|(A_1 \setminus \{a\}) \cap A_j| \leq |A_1 \cap A_j| \leq 2, \forall j = 2, 3, \dots, n.$$

2. Từ các kết quả trên, nếu thay  $A_1$  bởi  $A_1 \setminus \{a\}$  thì hệ tập hợp

$$A_1 \setminus \{a\}, A_2, A_3, \dots, A_n$$

vẫn thỏa mãn bài toán. Hệ mới này có cùng số tập hợp với hệ ban đầu, nhưng số phần tử trong mỗi tập hợp  $\leq 1$  so với số phần tử trong mỗi tập hợp của hệ ban đầu. *Cứ tiếp tục quá trình này, ta thu được dãy tập hợp  $A_1^*, \dots, A_n^*$  thỏa mãn bài toán và*

$$|A_i^*| \leq 3, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Tức là các tập hợp này, mỗi tập hợp chỉ có tối đa ba phần tử. Do đó

$$n \leq \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} = 1350.$$

3. Tiếp theo, tổng số các tập con chứa 1 phần tử, chứa 2 phần tử, chứa 3 phần tử của  $M$  là

$$\binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} = 1350$$

và tất cả các tập này thỏa mãn điều kiện bài toán (*rõ ràng hai tập phân biệt bất kỳ trong các tập này có giao không vượt quá 2 phần tử*). Do đó  $n = 1350$  đạt được.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của  $n$  là  $n = 1350$ .  $\square$

**Ví dụ 2.31 (Indian 2014).** Cho số tự nhiên  $n$  và  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Với hai tập con  $A$  và  $B$  của  $X$ , ký hiệu

$$A\Delta B = \{i \in X \mid i \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}.$$

Gọi  $\mathcal{F}$  là một họ các tập con của  $X$  sao cho với mọi  $A, B \in \mathcal{F}$  thì

$$|A\Delta B| \geq 2.$$

Chứng minh rằng  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$  và tìm tất cả các họ  $\mathcal{F}$  có  $2^{n-1}$  phần tử.

*Chứng minh.* 1. Với mỗi tập con  $A \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$ , thì trong cặp tập hợp  $(A, A \cup \{n\})$ , **tối đa một tập hợp thuộc vào  $\mathcal{F}$ .** Thật vậy vì

$$A \setminus (A \cup \{n\}) = \emptyset, \quad (A \cup \{n\}) \setminus A = \{n\} \Rightarrow A\Delta(A \cup \{n\}) = \{n\}.$$

Mặt khác, ta có tối đa  $2^{n-1}$  cặp tập hợp  $(A, A \cup \{n\})$ . Do đó tập  $\mathcal{F}$  có tối đa  $2^{n-1}$  phần tử.

2. Tiếp theo ta chứng minh bằng quy nạp theo  $n$  là nếu  $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$  thì  $\mathcal{F}$  **hoặc chứa tất cả các tập con chứa số lẻ phần tử hoặc  $\mathcal{F}$  chứa tất cả các tập hợp chứa số lẻ phần tử.**

- Kết quả hiển nhiên đúng với  $n = 1$ .
- Giả sử kết quả đúng đến  $n = m-1$ , với  $m$  nguyên dương lớn hơn 1. Xét trường hợp với  $n = m$ . Đặt

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} \mid m \in A\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{A \in \mathcal{F} \mid m \notin A\}.$$

Theo giả thiết quy nạp, tập  $\mathcal{F}_1$  có nhiều nhất  $2^{m-2}$  phần tử.

- Với mỗi tập hợp  $A \in \mathcal{F}_1$ , ta xét tập hợp mới  $A \setminus \{m\}$ . Khi đó

$$\mathcal{F}_3 = \{A \setminus \{m\} \mid A \in \mathcal{F}_1\}$$

Khi đó tập  $\mathcal{F}_3$  cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán và theo giả thiết quy nạp thì lại có  $|\mathcal{F}_3| \leq 2^{m-2}$ . Nhưng

$$|\mathcal{F}_2| = |\mathcal{F}_3| \leq 2^{m-2} \Rightarrow |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2^{m-2} + 2^{m-2} = 2^{m-1}.$$

Do đó nếu  $|\mathcal{F}| = 2^{m-1}$  thì  $|\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2| = 2^{m-2}$ . Nhưng khi đó lại theo giả thiết quy nạp, họ  $\mathcal{F}_\epsilon$  chứa tất cả các tập con của  $\{1, 2, \dots, m-1\}$  với, giả sử, số chẵn phần tử. Khi đó  $\mathcal{F}_\infty$  chứa tất cả các tập con của  $\{1, 2, \dots, m\}$ , chứa  $m$ , dạng  $A \cup \{m\}$ . Tuy nhiên  $A$  không thể thuộc vào  $\mathcal{F}_2$ , vì nếu không thì cả  $A, A \cup \{m\}$  đều thuộc vào  $\mathcal{F}$  vô lý. Khi đó  $A$  phải có số lẻ phần tử,  $A \subset \{1, 2, \dots, m-1\}$ , và  $|\mathcal{F}_1| = 2^{m-2}$  nên  $A$  phải chạy trên tất cả các tập có số lẻ phần tử. Do đó  $\mathcal{F}_1$  cũng chứa các tập có số chẵn phần tử. Vậy  $\mathcal{F}$  chứa tất cả các tập hợp có số chẵn phần tử.

Tương tự khi  $\mathcal{F}_2$  chứa tất cả các tập có số lẻ phần tử.

Bài toán được chứng minh. □

**Ví dụ 2.32 (Bankal 2012).** Cho  $n$  là số nguyên dương. Đặt tập hợp  $P_n = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \dots, 3^n\}$ . Với mỗi tập con  $X$  của  $P_n$ , đặt  $S_X$  là tổng tất cả các phần tử trong  $X$ , ở đây  $S_\emptyset = 0$ . Cho  $y$  là một số thực thỏa mãn điều kiện  $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ . Chứng minh rằng tồn tại một tập con  $Y$  của  $P_n$  thỏa mãn điều kiện  $0 \leq y - S_Y < 2^n$ .

*Giải.* Ta có

$$\begin{aligned} S_{P_n} &= 3^n + 3^{n-1} \cdot 2 + \dots + 3^2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &= (3-2)(3^n + 3^{n-1} \cdot 2 + \dots + 3^2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n) \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

Bằng cách chia cách phân tử của  $P_n$  cho  $2^n$  ta đưa bài toán về dạng tương đương như sau:

Cho  $n$  là số nguyên dương,  $a = \frac{3}{2}$ , và  $Q_n = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$ . Chứng tỏ rằng với mỗi giá trị của  $x$  thỏa mãn  $0 \leq x \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ , luôn tồn tại một tập con  $X$  của  $Q_n$  sao cho  $0 \leq x - S_X < 1$ .

Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $n$ . Khi  $n = 1$  thì  $S_\emptyset = 0, S_{\{1\}} =$

$1, S_{\{a\}} = \frac{3}{2}, S_{\{1,a\}} = \frac{5}{2}$ . Từ đây kiểm chứng thấy ngay là nếu  $x$  là một số thực thỏa  $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$  thì luôn có một tập con  $X$  của  $Q_1$  thỏa yêu cầu.

Giả sử kết quả bài toán đúng đến số nguyên dương  $n$ .

Xét  $x$  là một số thực với  $0 \leq x \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1}$ .

+ Nếu  $0 \leq x \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^n$  thì theo giả thiết quy nạp tồn tại tập con  $X \subset Q_n \subset Q_{m+1}$  thỏa  $0 \leq x - S_X < 1$ .

+ Xét với  $x > 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ , khi đó vì

$$\begin{aligned} a^{n+1} - 1a - 1 &= \frac{a^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2(a^{n+1} - 1) \\ &= a^{n+1} + (a^{n+1} - 2) > a^{n+1} + a^2 - 2 = a^{n+1} + \frac{1}{4} > a^{n+1} \end{aligned}$$

nên

$$0 < (x - a^{n+1}) \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại tập con  $X \subset Q_n$  thỏa mãn

$$0 \leq (x - a^{n+1}) - S_X < 1 \implies 0 \leq x - S_{X'} < 1$$

với

$$X' = X \bigcup \{a^{n+1}\} \subset Q_{n+1}.$$

Bài toán được chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 2.33 (Romania, grade 9, final round).** Cho  $p, q$  là hai số nguyên dương,  $p \geq 2, q \geq 2$ . Một tập hữu hạn  $X$  gọi là có tính chất ( $S$ ) nếu: với bất kỳ cách chọn  $p$  tập con  $B_i \subset X, i = 1, 2, \dots, p$ , không nhất thiết phân biệt, mỗi tập có  $q$  phần tử, thì luôn tồn tại tập con  $Y \subset X$  có  $p$  phần tử, sao cho

$$|Y \cap B_i| \leq 2, \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

Chứng minh rằng

1. Mọi tập  $X$  có  $pq - q$  phần tử đều không có tính chất ( $S$ ).
2. Mọi tập hợp  $X$  có  $pq - q + 1$  phần tử đều có tính chất ( $S$ ).

*Chứng minh.* 1. Nếu  $X$  có  $pq - q = (p - 1)q$  phần tử, khi đó ta chọn  $p - 1$  tập, mỗi tập có  $q$  phần tử (là phân hoạch của  $X$ ) như sau

$$B_1 = \{1, 2, \dots, q\}, \quad B_2 = \{q + 1, q + 2, \dots, 2q\}, \quad \dots, \\ B_{p-1} = \{(p - 2)q + 1, \dots, (p - 1)q\}$$

và tập  $B_p$  là một tập tùy ý có  $q$  phần tử. Khi đó, theo nguyên lý Dirichlet, thì với mọi tập  $Y$  có  $p$  phần tử trong  $X$ , sẽ tồn tại ít nhất một tập  $B_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$ ) sao cho giao của nó với  $Y$  có  $\geq 2$  phần tử. Vậy tập  $X$  không có tính chất (S).

2. Bây giờ với mỗi  $i$  cho trước, nhận xét tập

$$\bigcup_{j \neq i} B_j$$

có  $\leq (p - 1)q$  phần tử. Trong khi đó tập  $X$  có  $pq - q + 1 = (p - 1)q + 1$  phần tử. Do đó ta tìm được **ít nhất một phần tử của tập  $X$  mà nó không nằm trong mọi tập  $B_j$ , với mọi  $j \neq i$** .

- Với  $i = 1$ , sử dụng lập luận trên, ta tìm được phần tử  $x_1$  mà  $x_1 \notin B_j, \forall j = 2, \dots, p$ . Nếu  $x_1 \in B_1$ , ta tiếp tục qua bước 2, nếu  $x_1 \notin B_1$ , ta xây dựng tập  $B_1$  **mới bằng cách bỏ ra khỏi  $B_1$  một phần tử  $y_1$ , và thêm vào tập  $B_1$  phần tử  $x_1$** . Dĩ nhiên phần tử  $y_1$  vẫn là phần tử trong  $X$ .
- Tiếp tục với  $i = 2$ , lưu ý tập  $B_1$  sử dụng bây giờ là tập  $B_1$  "mới". Lại sử dụng lập luận trên, ta tìm được phần tử  $x_2$  mà  $x_2$  không nằm trong bất cứ tập  $B_1, B_3, B_4, \dots, B_n$ . Khi đó  $x_2 \neq x_1$  (vì  $x_1 \in B_1, x_2 \notin B_1$ ). Nếu  $x_2 \in B_2$  ta tiếp tục quy trình, nếu  $x_2 \notin B_2$ , ta xây dựng tập  $B_2$  **mới bằng cách bỏ ra khỏi  $B_2$  một phần tử  $y_2$ , và thêm vào tập  $B_2$  phần tử  $x_2$** .

3. Cứ tiếp tục quy trình này đến bước  $p$ , ta sẽ tìm được tập  $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ . Tập  $Y$  giao với mỗi tập  $B_i$  "mới" chính xác một phần tử, đó là  $x_i$ . Bây giờ thay ngược trở lại  $x_i$  bởi  $y_i$  ta quay trở lại tập  $B_i$  "cũ". Nếu  $y_i \notin Y$  thì  $Y \cap B_i = \emptyset$ , còn nếu  $y_i \in Y$  thì  $Y \cap B_i = \{y_i\}$ .

□

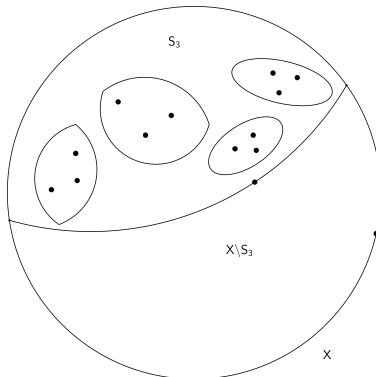
**Ví dụ 2.34 (China TST 2015).** Cho  $X$  là một tập khác rỗng và  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  tập con của  $X$  sao cho

1.  $|A_i| \leq 3, \forall i = 1, 2, \dots, n;$
2. Bất kỳ một phần tử nào của  $X$  cũng nằm trong ít nhất 4 tập trong số  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Chứng minh rằng có thể chọn  $\left[ \frac{3n}{7} \right]$  tập hợp trong số các tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mà hợp của chúng bằng  $X$ .

*Chứng minh.* Kết luận bài toán yêu cầu chọn được một số tập hợp, hợp lại bằng  $X$ , do đó ta sẽ

1. Chọn tập đầu tiên có 3 phần tử, giả sử  $A_1, |A_1| = 3$ . Sau đó, ta chọn tiếp tập  $A_2$  mà  $|A_2| = 3$  và  $A_2 \cap A_1 = \emptyset$ . Sau khi chọn được tập  $A_2$ , ta chọn tiếp tập  $A_3$  mà  $|A_3| = 3$  và  $A_3 \cap A_1 = \emptyset, A_3 \cap A_2 = \emptyset$ , cứ tiếp tục như vậy đến khi không thể chọn thêm được tập nào nữa vào trong hệ. Trong tất cả cách lựa chọn các tập hợp trong  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , ta chọn ra hệ tập hợp  $S_3$  **cực đại**, giả sử  $S_3 = \{A_1, A_2, \dots, A_i\}$  ( $i \leq n$ ) (tức là họ  $S_3$  chứa nhiều tập hợp nhất có thể có) mà  $|A_t| = 3, \forall t = 1, 2, \dots, i$  và  $A_r \cap A_s = \emptyset, \forall 1 \leq r < s \leq i$  (điều này có nghĩa, mỗi lần bổ sung một tập hợp vào  $S_3$  thì tập  $X_3$  có số lượng phần tử tăng lên 3).



Đặt  $X_3 = \bigcup_{A_r \in S_3} A_r$ . Do tính tối đại của tập  $S_3$ , nên với bất kỳ tập hợp  $A_j$  ( $j > i$ ) thì

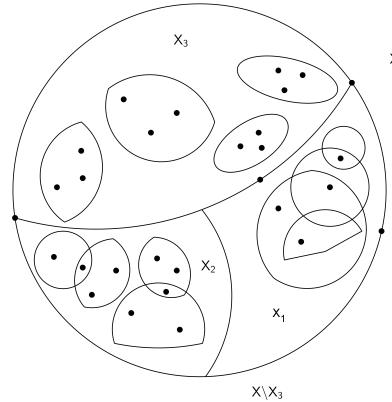
$$|A_j \cap (X \setminus X_3)| \leq 2$$

vì nếu không thì ta tiếp tục bổ sung  $A_j$  vào tập  $S_3$ , mâu thuẫn với tính tối đại của  $S_3$ . Và khi đó

$$|X_3| = 3i.$$

2. Bây giờ ta tiếp tục chọn họ  $S_2$  **cực đại** chứa các tập  $A_j$  còn lại trong số  $A_{i+1}, \dots, A_n$ , sao cho **mỗi lần thêm một tập hợp vào họ  $S_2$ , thì số lượng phần tử trong hợp của chúng tăng lên 2**. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$S_2 = \{A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_j\}$$



Đặt

$$X_2 = \bigcup_{A_r \in S_2} A_r \cap (X \setminus X_3)$$

thì theo cách xác định của  $S_2$  ta có  $|X_2| = 2j$  và theo tính tối đại của tập  $S_2$  thì

$$|A_t \cap (X \setminus (X_2 \cup X_3))| \leq 1, \forall t = j+1, \dots, n.$$

3. Bây giờ ta tiếp tục chọn họ  $S_1$  chứa các tập  $A_s$  còn lại trong số  $A_{j+1}, \dots, A_n$ , sao cho **mỗi lần thêm một tập hợp vào họ  $S_1$ , thì số lượng phần tử trong hợp của chúng tăng lên 1** và **dĩ nhiên các tập hợp trong họ  $S_1$  chứa hết tất cả các phần tử của  $X \setminus (X_3 \cup X_2) = X_1$** . Không mất tính tổng quát, giả sử

$$S_1 = \{A_{j+1}, A_{i+2}, \dots, A_k\}.$$

4. Khi đó  $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| = 3i + 2j + k$ ,  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$  và

$$|S_3| + |S_2| + |S_1| = i + j + k = m.$$

Ta cần chứng minh  $m \leq \frac{3n}{7}$ .

- Vì mỗi phần tử trong  $X_1$  nằm trong ít nhất 4 tập hợp, nhưng do  $|A_r \cap X_1| \leq 1, \forall r = j+1, \dots, n$  nên

$$n \geq i + j + 4k. \quad (1)$$

Mỗi phần tử trong  $X_1 \cup X_2$  xuất hiện ít nhất trong 4 tập hợp, như do  $|A_r| \cap (X_1 \cup X_2) \leq 2, \forall r = i+1, \dots, n$  nên

$$n \geq i + \frac{4(2j+k)}{2} = i + 4j + 2k. \quad (2)$$

Mỗi phần tử trong  $X$  xuất hiện ít nhất trong 4 tập hợp, và  $|A_r \cap X| \leq 3, \forall r = 1, 2, \dots, n$ , do đó

$$n \geq \frac{4(3i+2j+k)}{3}. \quad (3)$$

- Lấy  $20 \times (1) + 12 \times (2) + 27 \times (3)$  ta có

$$59n \geq 140(i+j+k) = 140m \Rightarrow m \leq \frac{59n}{140} < \frac{3n}{7}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

**Ví dụ 2.35 (Romania TST 2006).** Cho  $n$  là số nguyên dương. Một tập con  $S \subset \{0, 1, 2, \dots, 4n-1\}$  được gọi là tập **rời rạc** nếu với số  $k$  bất kỳ, hai điều kiện được sau thỏa mãn

- Tập  $S \cap \{4k-2, 4k-1, 4k, 4k+1, 4k+2\}$  có tối đa 2 phần tử.
- Tập  $S \cap \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$  có tối đa 1 phần tử.

Hỏi tập  $\{0, 1, \dots, 4n-1\}$  có bao nhiêu tập con rời rạc?

*Chứng minh.* • Ta diễn giải tập  $S$ , trong tập 5 số: gồm 4 số chia hết cho 4, chia 4 dư 1, chia 4 dư 2, chia 4 dư 3 và thêm một số chia 4 dư 2 thì tập  $S$  chứa tối đa 2 phần tử trong chúng. Trong một tập 3 số: chia 4 dư 1, dư 2, dư 3 thì tập  $S$  chứa tối đa một số. Rõ ra hai số chia cho 4 dư 2 và dư 3 không thể cùng nằm trong tập  $S$  (vì vi phạm điều kiện (ii)).

- Gọi  $S_n$  là tập hợp chứa các tập con rời rạc của tập

$$\{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\}.$$

Rõ ràng là *các số có dạng  $4k + 1, 4k + 2$  bị ràng buộc bởi hai điều kiện*. Đây chính là cơ sở cho việc xây dựng công thức truy hồi.

- Gọi  $X_n$  là tập hợp chứa các tập con của  $S_n$  mà mỗi tập con của nó chứa phần tử  $4n - 1$  (*tức là các tập con của  $S_n$  mà các tập con đó chứa phần tử chia 4 dư 3*).
- Gọi  $Y_n$  là tập hợp chứa các tập con của  $S_n$  mà mỗi tập con của nó không chứa cả hai phần tử  $4n - 1$  và  $4n - 2$  (*tức là chứa các tập con của  $S_n$  mà mỗi tập con của nó không chứa hai phần tử chia 4 dư 2 và chia 4 dư 3, nghĩa là nó sẽ chứa các phần tử chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 1*).
- Gọi  $Z_n$  là tập hợp chứa các tập con của  $S_n$  mà mỗi tập con của nó chứa phần tử  $4n - 2$  (*tức là chứa các tập con của  $S_n$  mà các tập con đó chứa phần tử chia 4 dư 2*).

Khi đó

$$|S_n| = |X_n| + |Y_n| + |Z_n|.$$

1. Xét tập hợp  $X_{n+1}$  được xây dựng từ các tập hợp còn lại. Xét tập hợp  $\{1, 2, \dots, 4n - 2, 4n - 1, 4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3\}$ .

- Từ tập  $X_n$ , khi đó ta chỉ có thể thêm vào mỗi tập của  $X_n$  phần tử  $4n$  hoặc không thêm vào, vì bản thân tập  $X_{n+1}$  đã chứa phần tử  $4n + 3$ . Vậy  $|X_{n+1}| = 2|X_n|$ .
- Từ tập  $Y_n$ , ta cũng chỉ có thể thêm vào mỗi tập của  $Y_n$  phần tử  $4n$  hoặc không thêm vào. Vì vậy  $|X_{n+1}| = 2|Y_n|$ .
- Từ tập  $Z_n$ , ta cũng chỉ có thể thêm vào mỗi tập của  $Y_n$  phần tử  $4n$  hoặc không thêm vào. Vậy  $|X_{n+1}| = 2|Z_n|$ .

Từ đó ta có quan hệ truy hồi

$$|X_{n+1}| = 2|X_n| + 2|Y_n| + 2|Z_n| = 2|S_n| \quad (1).$$

2. Xét tập hợp  $Y_{n+1}$  được xây dựng từ các tập hợp còn lại

- Từ tập  $Y_n$ , khi đó ta có thể thêm vào mỗi tập con của  $Y_n$  phần tử  $4n$  hoặc  $4n + 1$ , thêm cả hai hoặc không thêm phần tử nào. Khi đó  $|Y_{n+1}| = 4|Y_n|$ .

- Từ tập  $X_n$ , khi đó ta có thể thêm vào mỗi tập con của  $X_n$  phần tử  $4n$  hoặc  $4n+1$  nhưng không thể thêm đồng thời hai phần tử này, hoặc không thêm vào. Khi đó  $|Y_{n+1}| = 3|X_n|$ .
- Từ tập  $Z_n$ , khi đó ta có thể thêm vào mỗi tập con của  $Z_n$  phần tử  $4n$  hoặc  $4n+1$  nhưng không thể thêm đồng thời hai phần tử này, hoặc không thêm vào. Khi đó  $|Y_{n+1}| = 3|Z_n|$ .

Từ đó ta có quan hệ hồi quy

$$|Y_{n+1}| = 3|X_n| + 4|Y_n| + 3|Z_n| \quad (2).$$

### 3. Tương tự ta cũng có

$$|Z_{n+1}| = 2|X_n| + 2|Y_n| + 2|Z_n| = 2|S_n| \quad (3).$$

Từ ba quan hệ (1), (2), (3) ta có  $|S_{n+1}| = 7|S_n|$ . Từ đó ta tính được

$$|S_{n+1}| = 7^n \cdot |S_1| = 8 \cdot 7^n.$$

□

## 3. Bài tập vận dụng

**Bài tập 3.1 (Olympic KHTN lần 1).** Xét tập  $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  và  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là dãy các tập con khác rỗng, phân biệt của  $M$  sao cho

$$|A_i \cap A_j| \leq 3, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Tìm giá trị lớn nhất của  $n$ .

*Đáp số:*  $n = 385$ .

**Bài tập 3.2 (Taiwan 1998).** Cho  $n \geq k \geq 3$  và  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Gọi  $F_k$  là một họ các  $k$ -tập của  $X$  sao cho với mọi  $A, B \in F_k$  thì

$$|A \cap B| \leq k - 2.$$

Chứng minh rằng tồn tại một tập con  $M_k$  của  $X$ ,  $|M_k| \geq [\log_2 n] + 1$  sao cho  $M_k$  không nhận bất cứ phần tử nào của  $F_k$  là tập con của nó.

**Bài tập 3.3 (THTT 444 - Trần Nam Dũng).** Cho 100 điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$  nằm trong hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập con  $X$  của  $E = \{1, 2, \dots, 100\}$  gồm 50 phần tử sao cho

$$\left| \sum_{i \in X} \overrightarrow{AA_i} - \sum_{i \in E \setminus X} \overrightarrow{AA_i} \right| \leq \sqrt{2}.$$

**Bài tập 3.4 (China 2006).** Cho trước số nguyên dương  $n \geq 2$  và tập  $X$  hữu hạn. Gọi  $B_1, B_2, \dots, B_n$  là  $n$  tập con tùy ý của  $X$ , mỗi tập chứa ít nhất hai phần tử. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|X|$  sao cho tồn tại một tập con  $Y$  của  $X$  thỏa mãn hai điều kiện

1.  $|Y| = n$ ;
2.  $|Y \cap B_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

*Dáp số:*  $|X| = 2n - 1$ .

**Bài tập 3.5 (Tuyển tập Olympic 30-4 năm 2007).** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  là các tập hợp thỏa mãn điều kiện

1.  $|A_i| = 8, \forall i = 1, 2, \dots, 10$ ;
2.  $|A_i \cap A_j| = 1, \forall 1 \leq i < j \leq 10$ .

Chứng minh rằng  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}| \geq 39$ .

**Bài tập 3.6 (Dan Schwarz).** Cho  $X$  là một tập hợp. Gọi  $n$  và  $m \geq 1$  là các số nguyên không âm sao cho

$$|X| \geq m(n-1) + 1.$$

Giả sử  $B_1, B_2, \dots, B_n$  là  $n$  tập con của  $X$  sao cho  $|B_i| \leq m, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Chứng minh rằng tồn tại một tập con  $Y$  của  $X$  sao cho  $|Y| = n$  và  $|Y \cap B_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

**Bài tập 3.7 (China 2010).** Cho số nguyên dương  $n \geq 2$  và  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  là các tập con phân biệt của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Xác định giá trị lớn nhất của

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|}.$$

Đáp số:  $\frac{1}{2}$

**Bài tập 3.8 (Chọn đội tuyển KHTN 2010).** Cho số nguyên dương  $n > 10$ . Tìm số nguyên dương  $m$  lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Tồn tại  $m$  tập con  $A_j$  của tập  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , mỗi tập con gồm  $n$  phần tử sao cho

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 1, \forall 1 \leq i < j < k \leq m.$$

Đáp số:  $m = 4$

**Bài tập 3.9 (China 2014).** Với các tập hợp khác rỗng  $S, T$ , ta định nghĩa hai tập

$$S + T = \{s + t | s \in S, t \in T\}, \quad 2S = \{2s | s \in S\}.$$

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $A, B$  là các tập con khác rỗng của  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Chứng minh tồn tại một tập con  $D$  của  $A + B$  sao cho

1.  $D + D \subseteq 2(A + B)$ ;

2.  $|D| \geq \frac{|A| \cdot |B|}{2n}$ .

**Bài tập 3.10.** Cho  $n$  và  $k$  là các số nguyên dương sao cho  $n > k^2 - k + 1$ . Cho  $n$  tập hợp, mỗi tập hợp có  $k$  phần tử sao cho hai tập hợp tùy ý trong  $n$  tập hợp đó đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh  $n$  tập hợp đó đều có một phần tử chung.

**Bài tập 3.11.** Cho  $ke \geq 1$  là một số tự nhiên. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất  $n$  sao cho với mọi tập gồm  $n$  số nguyên luôn có 2 số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho  $2k + 1$ .

**Bài tập 3.12.** Xác định số  $n$  lớn nhất sao cho tồn tại sao cho tồn tại các tập phân biệt  $S_1, S_2, \dots, S_n$  thỏa mãn

1.  $|S_i \cup S_j| \leq 2006$  với mọi  $1 \leq i, j \leq n$ .

2.  $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, \dots, 2010\}$  với mọi  $1 \leq i < j < k \leq n$

**Bài tập 3.13 (VMO 2004).** Cho tập  $A$  gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có  $k$  phần tử của  $A$  đều tồn tại hai số phân biệt  $a, b$  sao cho  $a^2 + b^2$  là số nguyên tố.

**Bài tập 3.14 (Stars of Mathematics 2014).** Cho các số nguyên dương  $M, m, n$  thỏa mãn  $1 \leq m \leq n, 1 \leq M \leq \frac{m(m+1)}{2}$  và  $A$  là một tập con của  $\{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $|A| = m$ . Chứng minh rằng tồn tại tập con  $B \subseteq A$  sao cho

$$0 \leq \sum_{b \in B} b - M \leq n - m.$$

**Định lý 3.1 (Erdos).** Cho  $\mathcal{F}$  là một họ các tập con của tập  $n$  phần tử  $X$  thỏa mãn

1.  $|\mathcal{F}| \geq 2$  và với mọi  $A \in \mathcal{F}$  thì  $|A| \geq 2$ .
2. Với hai phần tử bất kỳ  $x, y \in X$  tồn tại duy nhất  $A \in \mathcal{F}$  để  $\{x, y\} \in A$ .

Khi đó

$$|\mathcal{F}| \geq n.$$

## Tài liệu tham khảo

1. Một số định lý trong lý thuyết tập hợp cực trị, Vũ Thế Khôi, Bài giảng tại Viện Toán Học dành cho trường hè 2012.
2. Combinatorial Mathematics, Stefan H. M. van Zwam, Princeton University 2013.
3. Khoảng cách Hamming, bài giảng trên mạng.
4. Combinatorics of sets, Po-Shen Loh, June 2013.
5. Combinatorial problems in Mathematical Competitions, Yao Zhang, World Scientific 2011.
6. Đề thi học sinh giỏi các nước trên trang mathlinks.ro.

Tạp chí Epsilon, Số 03, 06/2015.

---

# MỘT BÀI TOÁN SỐ HỌC HAY VỚI NHIỀU CÁCH GIẢI

NGUYỄN DUY LIÊN  
(THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

## Lời giới thiệu

Giải được bài toán Số học hay và khó, ta đã cảm thấy thích thú rồi. Nhưng nếu một bài toán Số học hay và khó mà giải được bằng nhiều cách mà từ đó ta có thể giải được, hay tạo ra một số bài toán cùng lớp bài toán đó thì niềm vui còn nhân lên nhiều lần. Bài viết này, tôi xin giới thiệu với các bạn 5 cách giải cho bài toán số 6 về Số học khá hay và khó trong kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 42 tại Hoa Kỳ.

Chúng ta cùng bắt đầu với bài toán đó nhé.

### Bài toán.

Cho các số nguyên dương  $a, b, c, d$  với  $a > b > c > d > 0$ . Giả sử  $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$ . Chứng minh rằng  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố.

**Lời giải 1.** Giả sử rằng  $ab + cd$  là số nguyên tố.

Ta có

$$ab + cd = (a + d)c + (b - c)a = m \cdot \gcd(a + d, b - c) \quad (*)$$

(với  $m$  là số nguyên dương và  $\gcd(a + d, b - c)$  là ước số chung lớn nhất của  $a + d$  và  $b - c$ ).

Từ (\*) suy ra  $m = 1$  hoặc  $\gcd(a + d, b - c) = 1$ .

**Trường hợp 1 :**  $m = 1$  thì

$$\begin{aligned} \gcd(a + d, b - c) &= ab + cd > ab + cd - (a - b + c + d) \\ &= (a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1) \geq \gcd(a + d, b - c) \end{aligned}$$

điều này dẫn tới vô lý.

**Trường hợp 2 :**  $\gcd(a+d, b-c) = 1$ .

Ta có

$$ac + bd = (a+c)b - (b-c)a$$

kết hợp với đề bài

$$ac + bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

ta được :

$$(a+c)b - (b-c)a = (b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

Suy ra

$$(a+d)(a-c-d) = (b-c)(b+c+d) \quad (**).$$

Từ đẳng thức  $(**)$  tồn tại số nguyên dương  $k$  sao cho:

$$a - c - d = k(b - c) \text{ và } b + c + d = k(a + d)$$

từ đó suy ra:

$$a + b = k(a + b - c + d) \Leftrightarrow k(c - d) = (k - 1)(a + b)$$

kết hợp với  $a > b > c > d > 0$  ta có:

- Nếu  $k = 1 \Rightarrow c = d$  vô lý
- Nếu  $k \geq 2$  thì  $2 \geq \frac{k}{k-1} = \frac{a+b}{c-d} > 2$  vô lý.

Từ sự vô lý của các trường hợp 1 và 2, nên  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố.

**Lời giải 2.** Theo đề bài

$$ac + bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

biến đổi ta được

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 \quad (1).$$

Xét tứ giác  $ABCD$  với

$$AB = a, BC = d, CD = b, DA = c ; \widehat{BAD} = 60^\circ; \widehat{BCD} = 120^\circ.$$

Rõ ràng tứ giác  $ABCD$  tồn tại (qua việc dựng hình).

Gọi  $\widehat{ABC} = \alpha \Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \alpha$ .

Áp dụng định lý hàm số cosin trong hai tam giác  $BAD$  và  $BCD$ , ta có.

$$BD^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{BAD} = b^2 + d^2 - 2bd \cos \widehat{BCD}$$

Suy ra hằng đẳng thức (1).

Áp dụng định lý hàm số cosin trong hai tam giác  $ABC$  và  $ACD$ , ta có

$$AC^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$$

Suy ra

$$2 \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$$

và

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Từ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn, theo định lý Ptôlêmê ta có

$$(AC \cdot BD)^2 = (ab + cd)^2$$

suy ra

$$(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc) \quad (2).$$

Từ  $a > b > c > d > 0$ , ta suy ra được

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc \quad (3).$$

Giả sử rằng  $ab + cd$  là số nguyên tố.

Từ (3) ta thấy hai số  $ab + cd$  và  $ac + bd$  nguyên tố cùng nhau. Cho nên từ đẳng thức (2) ta có  $ac + bd$  chia hết  $ad + bc$  theo (3) vô lý. Nên  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố.

**Lời giải 3.** Từ  $a > b > c > d > 0$ , ta suy ra

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc \quad (3).$$

Theo đầu bài

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

nên ta có

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 \quad (4)$$

Do vậy :

$$(ab + cd)(ad + bc) = ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2) \quad (5).$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$(ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)(a^2 - ac + c^2) \quad (6).$$

Giả sử rằng  $ab + cd$  là số nguyên tố.

Từ (3) ta thấy hai số  $ab + cd$  và  $ac + bd$  nguyên tố cùng nhau. Cho nên từ đẳng thức (6) ta có  $ac + bd$  chia hết  $ad + bc$  theo (3) vô lý. Nên  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố.

**Lời giải 4.** Theo đề bài  $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$  biến đổi ta được

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 \quad (7).$$

Giả sử rằng  $ab + cd$  là số nguyên tố, đặt

$$ab + cd = p \Rightarrow ab \equiv -cd \pmod{p}$$

kết hợp với (7) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= b^2(a^2 - ac + c^2) + b^2(b^2 + bd + d^2) \\ &\equiv c^2d^2 + bc^2d + b^2c^2 + b^4 + b^3d + b^2d^2 \\ &\equiv (b^2 + c^2)(b^2 + bd + d^2) \pmod{p} \end{aligned} \quad (8).$$

Từ (8) suy ra  $b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{p}$  hoặc  $b^2 + bd + d^2 \equiv 0 \pmod{p}$ .

**Trường hợp 1.**  $b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{p}$  do

$$0 < b^2 + c^2 < 2(ab + cd) = 2p \Rightarrow b^2 + c^2 = p$$

nên ta suy ra

$$b^2 + c^2 = ab + cd \Leftrightarrow b(a - b) = c(c - d)$$

dẫn tới

$$\Rightarrow c(c - d) \equiv 0 \pmod{p} \quad (9).$$

Theo giả thiết  $ab + cd$  là số nguyên tố cho nên hai số  $(b, c) = 1$ , do đó từ (9) suy ra  $c - d \equiv 0 \pmod{p}$  vô lý.

**Trường hợp 2 .**  $b^2 + bd + d^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Điều này tương đương với

$$a^2 - ac + c^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

mà

$$0 < a^2 - ac + c^2 < 2(ab + cd) = 2p$$

nên ta suy ra được

$$a^2 - ac + c^2 = p = ab + cd$$

do đó, ta có

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} a^2 - ac + c^2 = ab + cd \\ b^2 + bd + d^2 = ab + cd \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} c(c-d) = ab + ac - a^2 \\ d(c-d) = b^2 + bd - ab \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a \mid c(c-d) \\ b \mid d(c-d) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (10).$$

Mà  $ab + cd$  là số nguyên tố cho nên  $(a, c) = 1$  và  $(b, d) = 1$  nên từ (10) suy ra

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mid c-d \\ b \mid c-d \end{array} \right.$$

điều này vô lý.

Từ sự vô lý của các trường hợp 1 và 2, nên  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố.

**Lời giải 5.** Theo đề bài  $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$  suy ra

$$a + b - c + d \mid ac + bd \Rightarrow a + b - c + d \mid ac + bd + a(a + b - c + d)$$

hay

$$a + b - c + d \mid a^2 + bd + ab + ad = (a + b)(a + d).$$

Giả sử  $(a + b - c + d, a + d) = 1 \Rightarrow a + b - c + d \mid a + b$ .

Đặt  $a + b = k(a + b - c + d)$  (11) với  $k$  là số nguyên dương.

Nếu  $k = 1$ , từ (11)  $\Rightarrow a + b = a + b - c + d \Rightarrow c = d$  vô lý.

Nếu  $k \geq 2$ , từ (11) ta suy ra

$$a + b = k(a + b - c + d) \geq 2(a + b - c + d) > a + b$$

điều này vô lý do  $a > b > c > d > 0$ . Vậy  $(a + b - c + d, a + d) \neq 1$ .

Giả sử có số nguyên tố  $p$  sao cho  $p \mid (a + b - c + d, a + d)$ . Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} p \mid a + d \\ p \mid b - c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv -d \pmod{p} \\ b \equiv c \pmod{p} \end{cases}$$

dẫn tới

$$ab \equiv -cd \pmod{p} \Leftrightarrow ab + cd \equiv 0 \pmod{p}.$$

Mà  $ab + cd > p$  cho nên  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố, nó là hợp số.

Từ những cách giải trên các bạn vận dụng vào giải các bài toán tương tự sau đây nhé.

**Bài 1.** Chứng minh rằng nếu :  $a^2 + ac - c^2 = b^2 + bd - d^2$  với các số nguyên dương  $a > b > c > d > 0$  thì  $ab + cd$  không phải là số nguyên tố.

**Bài 2.** Cho các số nguyên dương  $a, b, c, d$  với  $a > b > c > d > 0$  thoả mãn điều kiện  $a + b - c + d \mid ac + bd$ . Chứng minh rằng:  $a^n b^m + c^m d^n$  không phải là số nguyên tố (trong đó  $m, n$  là những số nguyên dương và  $n$  là số lẻ).

**Bài 3.** Cho các số nguyên dương  $a, b, c, d$  và số nguyên tố  $p$  thoả mãn hệ thức  $\frac{a^p + b^p}{c^p + d^p} = \frac{1}{p-1}$ . Chứng minh rằng:  $a + b + c + d$  chia hết cho  $p$ .

Và các bài toán trên liệu có bao nhiêu cách giải các bạn hãy tìm tòi và suy nghĩ cùng tôi.

# ĐỊNH LÝ CARNOT VỀ SỰ ĐỒNG QUY CỦA CÁC ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VỚI CÁC CẠNH CỦA TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

VŨ THANH TÙNG, NGUYỄN CHƯƠNG CHÍ

## 1. Lời giới thiệu

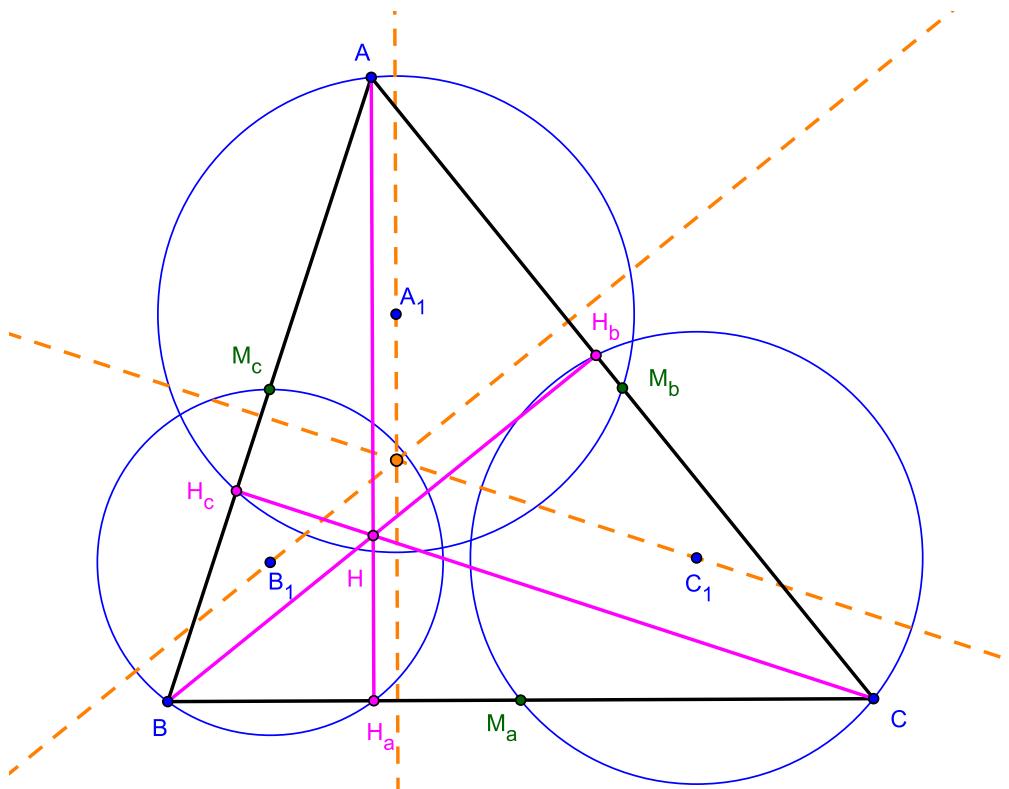
Vừa qua trên Forum "Bài toán hay–Lời giải đẹp–Đam mê toán học" đã diễn ra một cuộc thảo luận rất sôi nổi giữa các thành viên về một đề tài mà chúng tôi sẽ đề cập trong bài báo này. Đầu tiên là một bài toán hay một giả thiết được đưa ra bởi Đào Thanh Oai. Khi đó, giả thiết này vẫn chưa có lời giải.

**Bài toán 1** (Đề bài của Đào Thanh Oai [1]). Cho tam giác  $ABC$  có  $M_a, M_b, M_c$  là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $H_a, H_b, H_c$  là chân các đường cao tương ứng với các đỉnh  $A, B, C$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là tâm của ba đường tròn  $(AM_bH_c), (BM_cH_a)$  và  $(CM_aH_b)$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng qua  $A_1, B_1, C_1$  và vuông góc với ba cạnh  $BC, CA, AB$  đồng quy.

Bài toán là một thử thách không nhỏ khi có rất nhiều điểm, nhiều đường. Trong khi đó, phương pháp chứng minh đồng quy lại rất đa dạng là sử dụng tứ giác nội tiếp, Ceva, Desargues, v.v. Tuy vậy, bài toán trên không quá phức tạp. Sử dụng định lý Carnot, chúng tôi đã chứng minh được bài toán trên một cách khá gọn gàng.

Ngay sau khi bài toán được chứng minh, đã có rất nhiều nghiên cứu sâu hơn và những hướng mở rộng khác nhau.

**Bài toán 2** (Nguyễn Ngọc Giang [1]). Cho tam giác  $ABC$  có  $M_a, M_b, M_c$  là ba trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Gọi  $P$  là một điểm bất kỳ trên mặt phẳng chứa tam giác  $ABC$  và có các hình chiếu vuông góc xuống  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $P_a, P_b, P_c$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là tâm của ba đường tròn  $(AM_bP_c), (BM_cP_a), (CM_aP_b)$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng qua  $A_1, B_1, C_1$  và vuông góc với ba cạnh  $BC, CA, AB$  đồng quy.

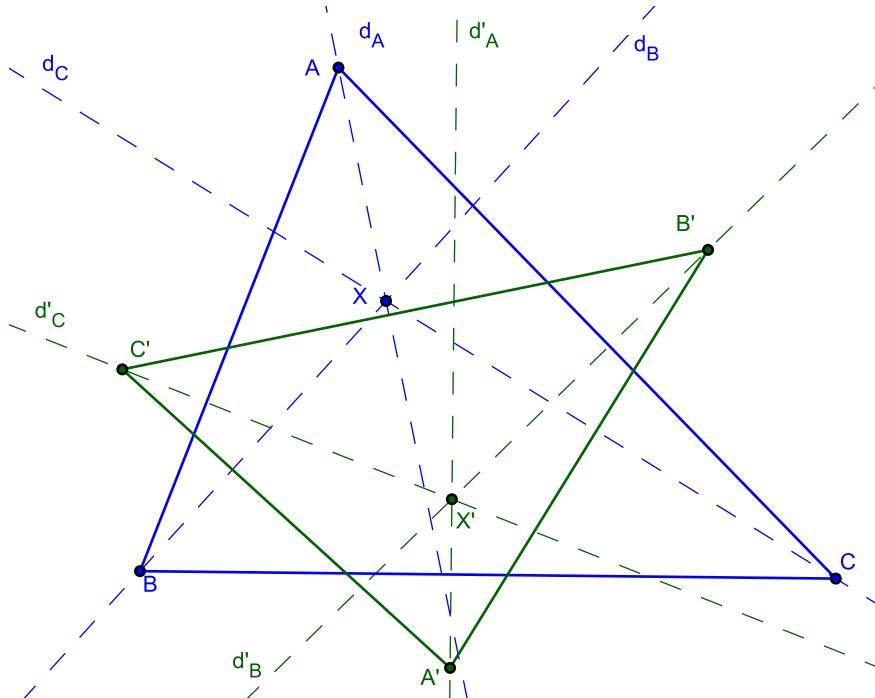


Hình 11.1: Giả thiết của Đào Thanh Oai

**Bài toán 3 (Nguyễn Văn Lợi [1]).** Cho tam giác  $ABC$  và hai điểm bất kỳ  $P, N$  trên mặt phẳng. Gọi hình chiếu vuông góc của  $P$  xuống  $BC, CA, AB$  là  $P_a, P_b$  và  $P_c$  và của  $N$  là  $N_a, N_b$  và  $N_c$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là tâm của ba đường tròn  $(AN_bP_c)$ ,  $(BN_cP_a)$  và  $(CN_aP_b)$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng qua  $A_1, B_1, C_1$  và lần lượt vuông góc với 3 cạnh  $BC, CA, AB$  đồng quy.

Như vậy ban đầu Đào Thanh Oai dùng trực tâm và tâm ngoại tiếp, tiếp theo đó Nguyễn Ngọc Giang dùng điểm  $P$  bất kỳ và tâm ngoại tiếp, còn Nguyễn Văn Lợi dùng hai điểm bất kỳ  $P$  và  $N$  làm dữ liệu cho giả thuyết của mình. Điều đáng lưu ý là ở đây cả ba giả thuyết đều đúng và được chứng minh một cách gọn gàng khi dùng định lý Carnot như là một công cụ chính.

Đến đây một câu hỏi đặt ra: Nếu chúng ta bỏ qua điều kiện bộ sáu điểm  $N_a, N_b, N_c, P_a, P_b, P_c$  là hình chiếu vuông góc của hai điểm  $N, P$  và chỉ để lại điều kiện là các điểm đó nằm trên ba cạnh của tam giác thì điều kiện cần và đủ để kết luận bài toán vẫn đúng là gì? Chúng tôi đã nghiên cứu lời giải của các bài

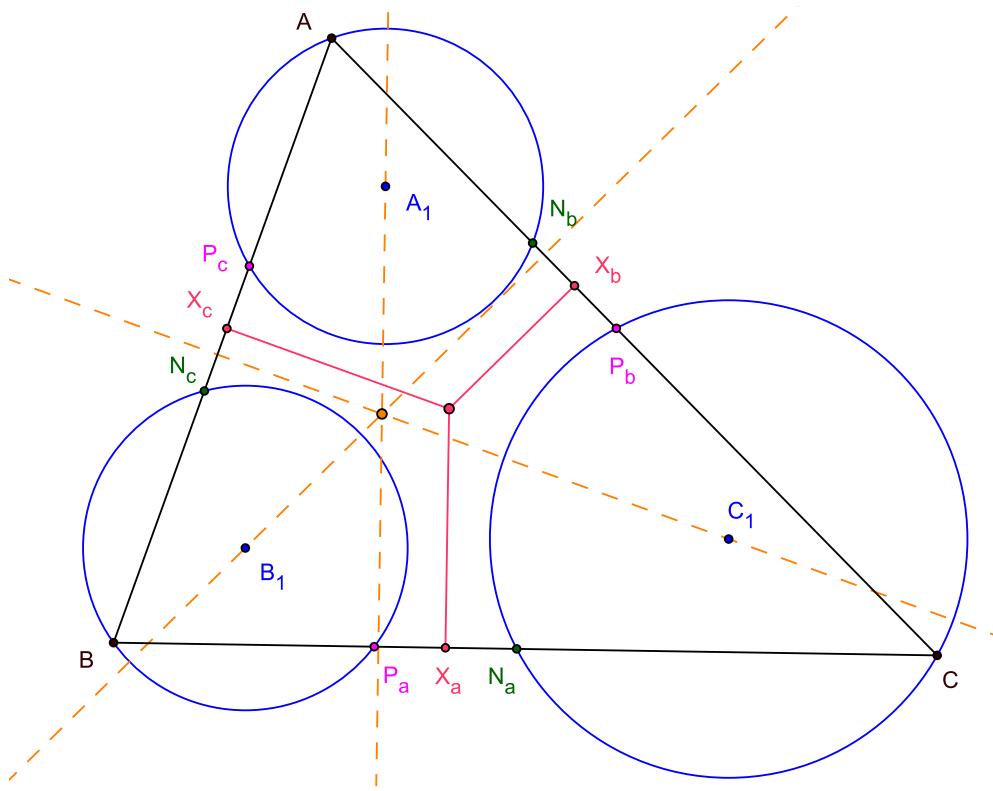


Hình 11.2: Hai tam giác trực giao

toán đưa ra ở trên và đã tìm ra một điều kiện cần và đủ cho bộ sáu điểm  $N_a, N_b, N_c, P_a, P_b, P_c$  sao cho kết luận của bài toán vẫn đúng.

**Bài toán 4 (Bài toán tổng quát [1]).** Cho tam giác  $ABC$  và sáu điểm  $N_a, P_a \in BC, N_b, P_b \in CA, N_c, P_c \in AB$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $AN_bP_c, BN_cP_a$  và  $CN_aP_b$ . Chứng minh rằng các đường thẳng qua  $A_1, B_1, C_1$  và lần lượt vuông góc với  $BC, CA, AB$  đồng quy khi và chỉ khi các đường trung trực của  $N_aP_a, N_bP_b, N_cP_c$  đồng quy.

Rõ ràng các bài toán ở trên đều là những trường hợp đặc biệt của bài toán tổng quát vừa được giới thiệu. Cùng với việc nhắc lại nội dung định lý Carnot chúng tôi sẽ đưa ra một khái niệm mới - đại lượng Carnot, kèm theo đó là một số tính chất nhằm trợ giúp cho việc áp dụng định lý này. Lời giải của bài toán tổng quát cũng sẽ được đưa ra đầy đủ. Cuối cùng là một số bài toán dùng để minh họa cho định lý Carnot và để các bạn tự luyện tập.



Hình 11.3: Bài toán tổng quát

## 2. Định lý Carnot

Xét hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  trên mặt phẳng. Các đường thẳng  $d'_A, d'_B, d'_C$  lần lượt đi qua  $A', B', C'$  và vuông góc với  $BC, CA, AB$ . Ta định nghĩa đại lượng Carnot của tam giác  $A'B'C'$  đối với tam giác  $ABC$  như sau:

$$c_{ABC}(A'B'C') = (A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2).$$

Đại lượng mới này được đưa ra vì nó rất tiện lợi cho việc phát biểu định lý Carnot theo cách mới. Chú ý rằng đại lượng Carnot phụ thuộc vào thứ tự các đỉnh khi ta xét hai tam giác. Nói cách khác  $c_{ABC}(A'B'C')$  là khác với  $c_{ABC}(B'A'C')$  hay  $c_{ABC}(A'C'B')$ .

**Định lý 1** (Định lý Carnot - 1803). : [2] Ba đường thẳng  $d'_A, d'_B, d'_C$  lần lượt đi qua  $A', B', C'$  và vuông góc với  $BC, CA, AB$  đồng quy khi và chỉ khi

$$(A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0$$

hay

$$c_{ABC}(A'B'C') = 0.$$

Từ định nghĩa của đại lượng Carnot ta thấy:

$$c_{ABC}(A'B'C') + c_{A'B'C'}(ABC) = 0.$$

Nhờ định lý Carnot, ta thấy rằng nếu  $d'_A, d'_B, d'_C$  đồng quy tại một điểm  $X'$  thì ba đường thẳng  $d_A, d_B, d_C$  đi qua  $A, B, C$  và vuông góc với  $B'C', C'A', A'B'$  cũng sẽ đồng quy tại một điểm  $X$  nào đó. Trong hình học, hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thỏa mãn điều kiện của định lý Carnot được gọi là trực giao với nhau (orthologic), hai điểm đồng quy được gọi là hai tâm trực giao (orthologic centers).  $X$  được gọi là tâm trực giao của tam giác  $ABC$  với tam giác  $A'B'C'$  và  $X'$  được gọi là tâm trực giao của tam giác  $A'B'C'$  với tam giác  $ABC$  [3].

Sau đây là một số tính chất của đại lượng Carnot.

**Bổ đề 1.** Gọi  $T_a, T_b, T_c$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và số thực  $k \in \mathbb{R}$ . Ta có:

1.  $c_{ABC}(A'B'C') = -2(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'T_a} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{B'T_b} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'T_c})$ .

2. Nếu  $A'_1 A'_2 \perp BC, B'_1 B'_2 \perp CA, C'_1 C'_2 \perp AB$  thì:

$$c_{ABC}(A'_1 B'_1 C'_1) = c_{ABC}(A'_2 B'_2 C'_2).$$

3. Những mệnh đề sau là tương đương:

(a)  $d'_A, d'_B, d'_C$  đồng quy.

(b)  $(A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0$ .

(c)  $c_{ABC}(A'B'C') = 0$ .

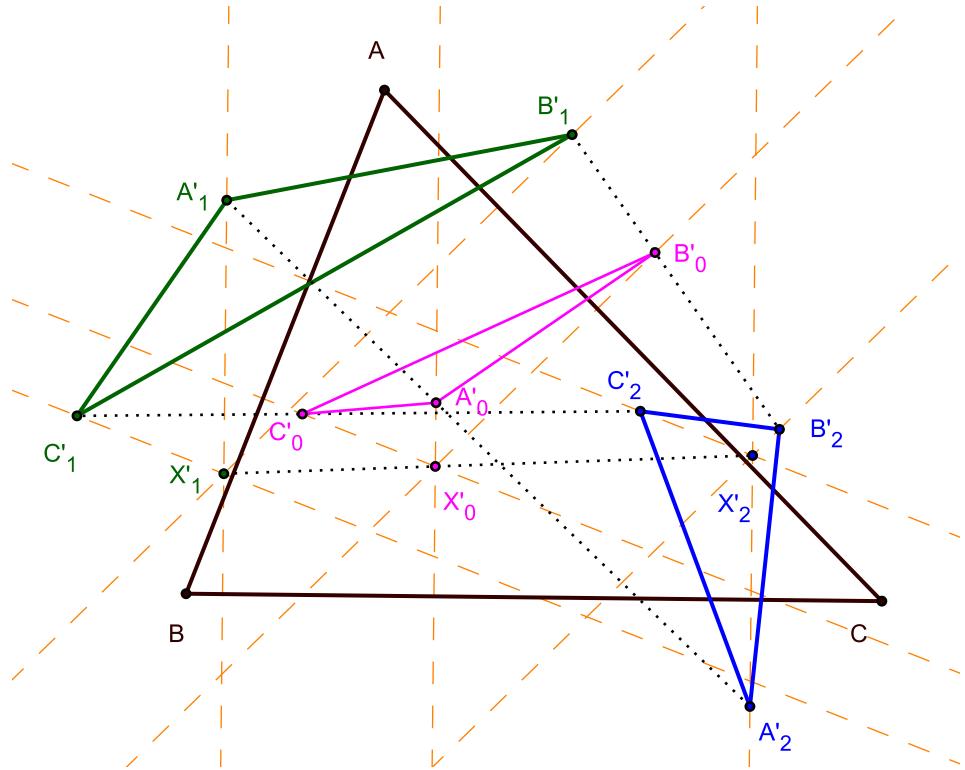
(d)  $c_{A'B'C'}(ABC) = 0$ .

(e)  $d_A, d_B, d_C$  đồng quy.

4. Nếu  $\overrightarrow{A'_1 A'_0} = k \overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{B'_1 B'_0} = k \overrightarrow{B'_1 B'_2}, \overrightarrow{C'_1 C'_0} = k \overrightarrow{C'_1 C'_2}$  thì:

(a)  $c_{ABC}(A'_0 B'_0 C'_0) = k \cdot c_{ABC}(A'_1 B'_1 C'_1) + (1 - k) \cdot c_{ABC}(A'_2 B'_2 C'_2)$ .

(b) Nếu  $A'_1 B'_1 C'_1, A'_2 B'_2 C'_2$  là trực giao với  $ABC$  thì  $A'_0 B'_0 C'_0$  cũng trực giao với  $ABC$ . Hơn nữa,  $\overrightarrow{X'_1 X'_0} = k \cdot \overrightarrow{X'_1 X'_2}$  với  $X'_0, X'_1, X'_2$  là các tâm trực giao của các tam giác  $A'_0 B'_0 C'_0, A'_1 B'_1 C'_1, A'_2 B'_2 C'_2$  đối với tam giác  $ABC$ .



Hình 11.4: Bố đ𝐞 1.4

### 2.0.0.1 Chứng minh.

1. Ta có:

$$\begin{aligned} A'B^2 - A'C^2 &= \overrightarrow{A'B} \cdot (\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{A'C} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= -\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AT_a} \end{aligned}$$

Tương tự như vậy, ta có:

$$B'C^2 - B'A^2 = -2 \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BT_b}; \quad C'A^2 - C'B^2 = -2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CT_c}.$$

Cộng ba đẳng thức trên, ta được:

$$c_{ABC}(A'B'C') = -2 \cdot (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AT_a} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BT_b} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CT_c}).$$

2. Từ phần 1 ta có:

$$c_{ABC}(A'_1B'_1C'_1) - c_{ABC}(A'_2B'_2C'_2) = -2 \cdot (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'_1A'_2} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{B'_1B'_2} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'_1C'_2})$$

$$= 0.$$

3. Trước hết ta thấy rằng:  $b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d$ . Ta sẽ chứng minh  $a \Leftrightarrow c$ .

Gọi  $H$  là giao điểm của  $d'_B$  và  $d'_C$ . Khi đó, từ phần 2 ta có:

$$c_{ABC}(A'B'C') = c_{ABC}(A'HH) = c_{ABC}(HHH) - 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H} = -2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H}.$$

Suy ra  $c_{ABC}(A'B'C') = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H} = 0 \Leftrightarrow BC \perp A'H$ . Như vậy  $a \Leftrightarrow c$ . Tương tự ta có:  $e \Leftrightarrow d$ .

4. a. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_a A'_0} &= k\overrightarrow{T_a A'_1} + (1-k)\overrightarrow{T_a A'_2}; \\ \overrightarrow{T_b B'_0} &= k\overrightarrow{T_b B'_1} + (1-k)\overrightarrow{T_b B'_2}; \\ \overrightarrow{T_c C'_0} &= k\overrightarrow{T_c C'_1} + (1-k)\overrightarrow{T_c C'_2}.\end{aligned}$$

Từ ba đẳng thức trên và từ phần 1 ta suy ra hệ thức cần chứng minh.

b. Gọi  $X'_0$  là một điểm sao cho:  $\overrightarrow{X'_1 X'_0} = k\overrightarrow{X'_1 X'_2}$ . Từ định lý Thales ta có:  $A'_1 X'_1 \| A'_0 X'_0 \| A'_2 X'_2$ . Mặt khác vì  $A'_1 X'_1 \perp BC$  nên  $A'_0 X'_0 \perp BC$ . Tương tự ta có:  $B'_0 X'_0 \perp CA$ ,  $C'_0 X'_0 \perp AB$ . Do đó  $X'_0$  là tâm trực giao của tam giác  $A'_0 B'_0 C'_0$  đối với tam giác  $ABC$ .

□

### 3. Lời giải bài toán tổng quát và bình luận

#### 3.1. Lời giải của bài toán tổng quát

Gọi  $X_a, X_b, X_c$  lần lượt là trung điểm của  $N_a P_a, N_b P_b, N_c P_c$ . Ta sẽ chứng minh rằng:  $c_{ABC}(X_a X_b X_c) = c_{ABC}(A_1 B_1 C_1)$ .

Thật vậy, gọi  $T_a, T_b, T_c$  là các điểm sao cho  $AT_a, BT_b, CT_c$  là đường kính của các đường tròn  $(A_1), (B_1)$  và  $(C_1)$ . Khi đó  $A_1, B_1, C_1$  là trung điểm của  $AT_a, BT_b$  và  $CT_c$ . Nhờ bổ đề 1 ta có:

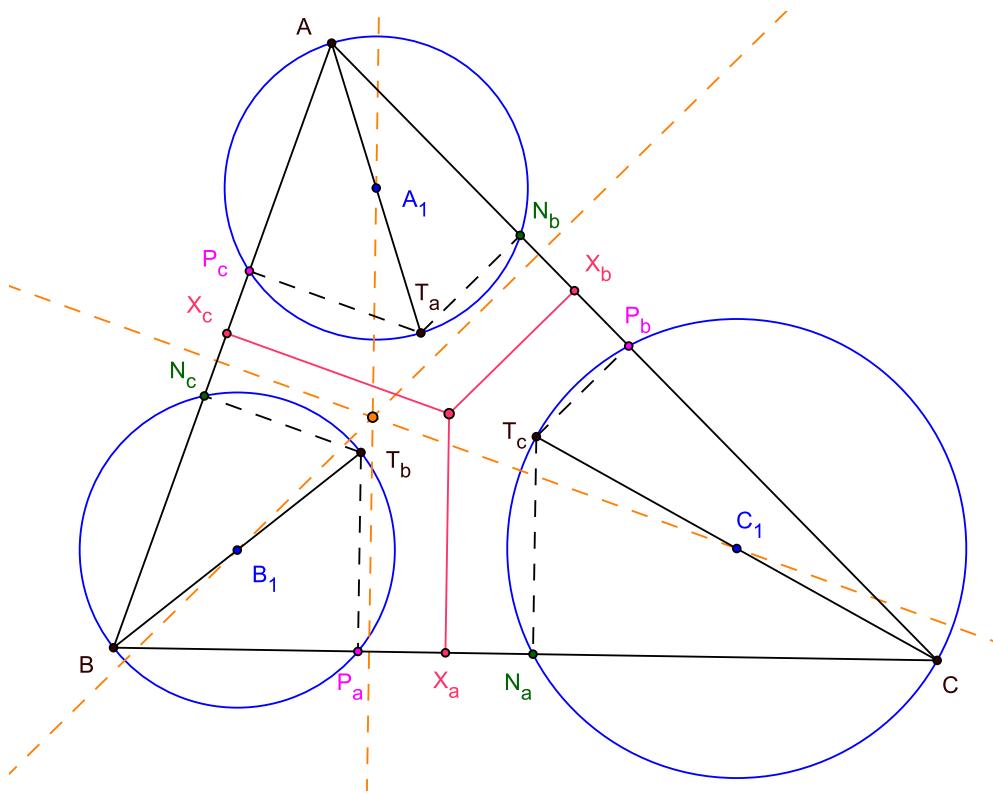
$$c_{ABC}(T_a T_b T_c) + c_{ABC}(ABC) = 2.c_{ABC}(A_1 B_1 C_1).$$

Tuy nhiên ta thấy rằng  $c_{ABC}(ABC) = 0$ , do đó:

$$c_{ABC}(T_a T_b T_c) = 2.c_{ABC}(A_1 B_1 C_1).$$

Mặt khác cũng theo bổ đề 1 ta lại có:

$$c_{ABC}(T_a T_b T_c) = (T_a B^2 - T_a C^2) + (T_b C^2 - T_b A^2) + (T_c A^2 - T_c B^2)$$



Hình 11.5: Lời giải bài toán tổng quát

$$\begin{aligned}
 &= (T_a B^2 - T_a A^2) - (T_a C^2 - T_a A^2) + (T_b C^2 - T_b B^2) \\
 &\quad - (T_b A^2 - T_b B^2) + (T_c A^2 - T_c C^2) - (T_c B^2 - T_c C^2) \\
 &= (BP_c^2 - AP_c^2) - (CN_b^2 - AP_c^2) + (CP_a^2 - BP_a^2) \\
 &\quad - (AN_c^2 - BN_c^2) + (AP_b^2 - CP_b^2) - (CN_a^2 - BN_a^2) \\
 &= c_{ABC}(N_a N_b N_c) + c_{ABC}(P_a P_b P_c) \\
 &= 2 \cdot c_{ABC}(X_a X_b X_c)
 \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra  $c_{ABC}(X_a X_b X_c) = c_{ABC}(A_1 B_1 C_1)$ . Áp dụng định lý Carnot ta có: các đường thẳng qua  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt vuông góc với  $BC, CA$  và  $AB$  đồng quy  $\Leftrightarrow c_{ABC}(A_1 B_1 C_1) = 0 \Leftrightarrow c_{ABC}(X_a X_b X_c) = 0 \Leftrightarrow$  các đường thẳng qua  $X_a, X_b, X_c$  lần lượt vuông góc với  $BC, CA$  và  $AB$  đồng quy  $\Leftrightarrow$  các đường trung trực của  $N_a P_a, N_b P_b, N_c P_c$  đồng quy.

### 3.2. Một số trường hợp đặc biệt

Trong bài toán trên, tập sáu điểm  $N_a, P_a, N_b, P_b, N_c, P_c$  thỏa mãn điều kiện bài toán tổng quát có một số trường hợp đặc biệt sau

- $N_a, P_a, N_b, P_b, N_c, P_c$  là giao điểm của một đường tròn ( $O$ ) với các cạnh của tam giác  $ABC$ . Khi đó, các đường trung trực của  $N_aP_a, N_bP_b, N_cP_c$  đồng quy tại  $O$ .
- (Giả thuyết của Nguyễn Văn Lợi đã nêu ở trên [1]) Gọi  $N_a, N_b, N_c$  là hình chiếu của một điểm  $N$  xuống  $BC, CA, AB$ ;  $P_a, P_b, P_c$  là hình chiếu của một điểm  $P$  xuống  $BC, CA, AB$ . Khi đó ta dễ dàng nhận thấy các đường trung trực của  $N_aP_a, N_bP_b, N_cP_c$  đồng quy tại trung điểm của  $NP$ .

Một trường hợp đặc biệt của  $(N_a, P_a, N_b, P_b, N_c, P_c)$  sẽ được xây dựng trong một bài tập dưới đây.

Ngoài ra chúng ta thấy rằng vai trò của hai điểm  $N_a$  và  $P_a$  trên  $BC$  là ngang nhau nên chúng ta có thể hoán đổi hai điểm này. Tương tự, chúng ta cũng có thể hoán đổi hai điểm  $N_b$  và  $P_b$ , hai điểm  $N_c$  và  $P_c$ . Như vậy, chúng ta có tám bộ ba đường thẳng đồng quy. Các bạn hãy thử vẽ hình và tìm ra những tính chất mới của tám điểm đồng quy này nhé!

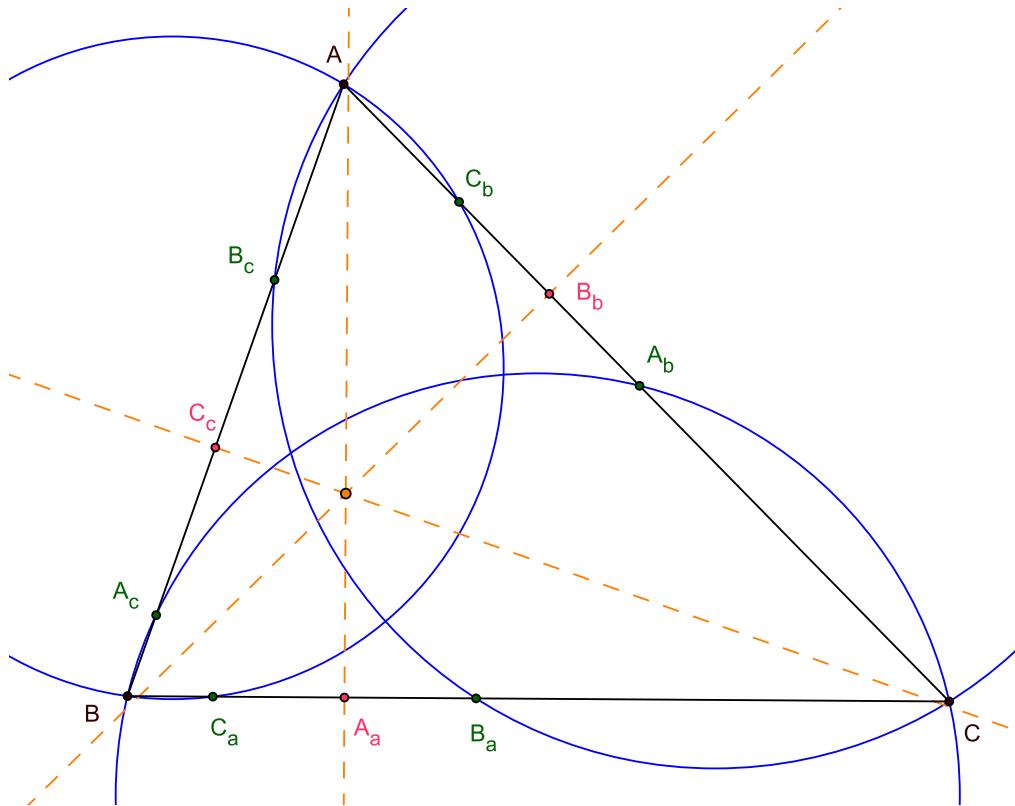
## 4. Một số bài toán luyện tập

Tiếp theo là một số bài toán minh họa cho định lý Carnot và lời giải của chúng.

**Bài toán 5** (ví dụ về bộ sáu điểm thỏa mãn điều kiện bài toán tổng quát). Cho tam giác  $ABC$ , một đường tròn đi qua  $B, C$  cắt  $CA, AB$  tại  $A_b, A_c$ ; đường tròn đi qua  $C, A$  cắt  $BC, BA$  tại  $B_c, B_a$ ; đường tròn đi qua  $A, B$  cắt  $CA, CB$  tại  $C_a, C_b$ . Chứng minh rằng các đường trung trực của các đoạn  $C_aB_a, A_bC_b, B_cA_c$  đồng quy.

**Lời giải 6.** Gọi  $A_a, B_b, C_c$  là trung điểm của  $C_aB_a, A_bC_b, B_cA_c$ . Theo định lý Carnot, chúng ta cần phải chứng minh rằng:

$$(AC_c^2 - BC_c^2) + (BA_a^2 - CA_a^2) + (CB_b^2 - AB_b^2) = 0.$$



Hình 11.6: 6 điểm thỏa mãn điều kiện của bài toán tổng quát

Ta xét từng phần của biểu thức trên:

$$AC_c^2 - BC_c^2 = (\overline{AC}_c + \overline{BC}_c).(\overline{AC}_c - \overline{BC}_c) = \overline{AB}.(\overline{AC}_c - \overline{BC}_c).$$

Vì

$$\begin{aligned}\overline{AC}_c &= 1/2.(\overline{AA}_c + \overline{AB}_c) = 1/2.(\overline{AA}_c + \overline{AB} - \overline{BB}_c). \\ \overline{BC}_c &= 1/2(\overline{BB}_c + \overline{AB} - \overline{AA}_c).\end{aligned}$$

Do vậy

$$AC_c^2 - BC_c^2 = \overline{AB}(\overline{AA}_c - \overline{BB}_c).$$

Tương tự như trên:

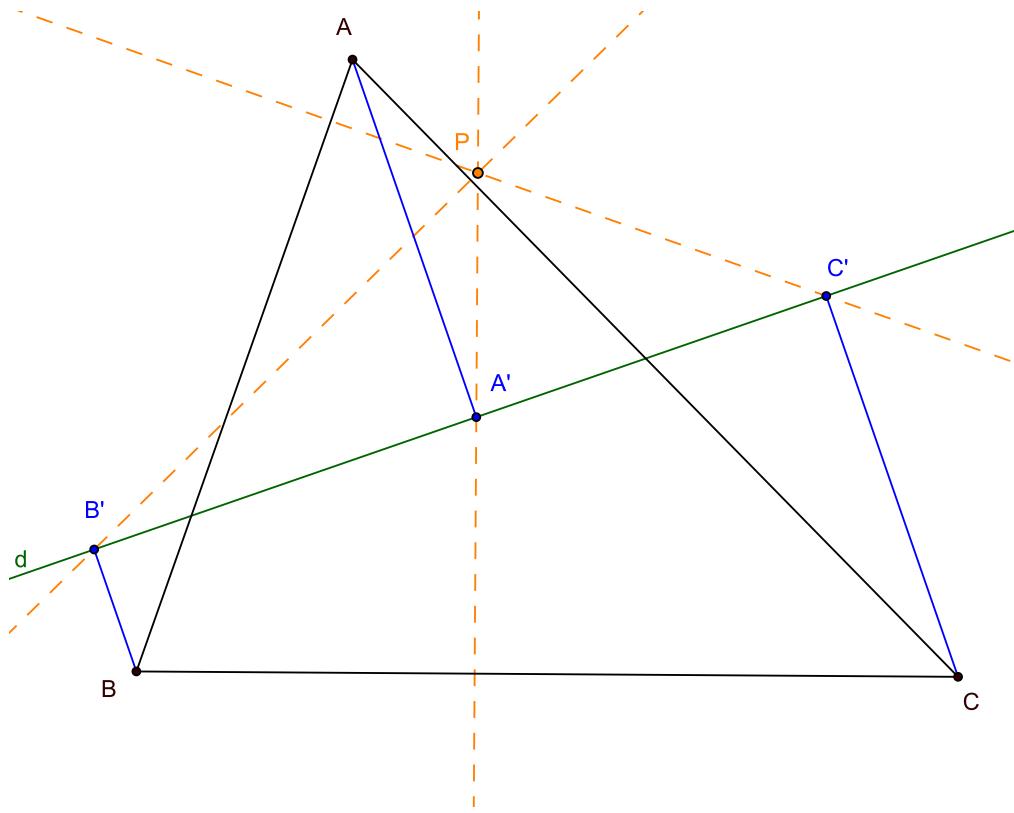
$$BA_a^2 - CA_a^2 = \overline{BC}(\overline{BB}_a - \overline{CC}_a); \quad CB_b^2 - AB_b^2 = \overline{CA}(\overline{CC}_b - \overline{AA}_b).$$

Do đó ta cần phải chứng minh:

$$\overline{AB}.\overline{AA}_c + \overline{BC}.\overline{BB}_a + \overline{CA}.\overline{CC}_b = \overline{BA}.\overline{BB}_c + \overline{CB}.\overline{CC}_a + \overline{AC}.\overline{AA}_b.$$

Vì bốn điểm  $B, C, A_c, A_b$  đồng viên nên  $\overline{AB} \cdot \overline{AA_c} = \overline{AC} \cdot \overline{AA_b}$ . Tương tự,  $\overline{BC} \cdot \overline{BB_a} = \overline{BA} \cdot \overline{BB_c}$  và  $\overline{CA} \cdot \overline{CC_b} = \overline{CB} \cdot \overline{CC_a}$ . Như vậy biểu thức trên đúng. Từ định lý Carnot, ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 6 (Định nghĩa orthopole (Soons-1886) [4]).** Cho tam giác  $ABC$  và một đường thẳng  $d$  trên mặt phẳng. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B, C$  trên  $d$ . Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua  $A', B', C'$  và lần lượt vuông góc với  $BC, CA, AB$  đồng quy tại  $P$  (điểm đồng quy  $P$  được gọi là orthopole của đường thẳng  $d$  đối với tam giác  $ABC$ ).



Hình 11.7: Orthopole

**Lời giải 7.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 c_{ABC}(A'B'C) &= (A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) \\
 &= (B'B^2 + A'B'^2 - C'C^2 - A'C'^2) + (C'C^2 + B'C'^2 - A'A^2 - A'B'^2) \\
 &\quad + (A'A^2 + A'C'^2 - B'B^2 - B'C'^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Từ định lý Carnot, ta có điều phải chứng minh.

**Bài toán 7** (Hai tam giác trực giao hoàn toàn (định lý Pantazi) [3]). Giả sử tam giác  $ABC$  trực giao với tam giác  $A'B'C'$  và  $B'C'A'$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  cũng trực giao với tam giác  $C'A'B'$ .

**Lời giải 8.** Từ định nghĩa của của đại lượng Carnot ta dễ dàng chứng minh được:

$$c_{ABC}(A'B'C') + c_{ABC}(B'C'A') + c_{ABC}(C'A'B') = 0.$$

Từ đó theo định lý Carnot:  $c_{ABC}(A'B'C') = 0$ ;  $c_{ABC}(B'C'A') = 0$ . Do đó ta suy ra  $c_{ABC}(C'A'B') = 0$ . Theo định lý Carnot, ta có điều phải chứng minh.

## 5. Kết luận

Chúng tôi đã giới thiệu định lý Carnot, một công cụ rất hiệu quả khi cần chứng minh các đường thẳng vuông góc với ba cạnh của một tam giác đồng quy. Đại lượng Carnot là một khái niệm mới đã được đưa vào rất tiện lợi trong việc trình bày lời giải các bài toán một cách có hệ thống. Sử dụng định lý Carnot một bài toán tổng quát gần đây mới xuất hiện đã được giải quyết gọn gàng.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Nhóm "Bài toán hay - Lời giải đẹp - Đam mê toán học":  
[www.facebook.com/groups/Loicenter/](http://www.facebook.com/groups/Loicenter/)
- [2] Định lý Carnot [www.cut-the-knot.org/pythagoras/Carnot.shtml](http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Carnot.shtml)
- [3] Hai tam giác trực giao [www.mathworld.wolfram.com/OrthologicTriangles.html](http://www.mathworld.wolfram.com/OrthologicTriangles.html)
- [4] Cực trực giao [www.mathworld.wolfram.com/Orthopole.html](http://www.mathworld.wolfram.com/Orthopole.html)

# VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỪ DIỄN ĐÀN AoPS

TRẦN QUANG HÙNG, NGUYỄN BẢO NGỌC

(Trường THPT Chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

## Tóm tắt

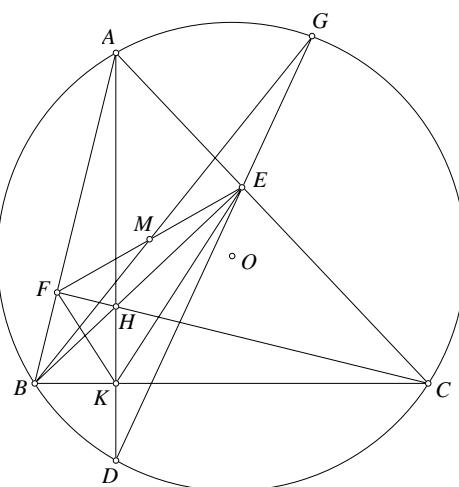
Bài viết này là về một bài toán trên diễn đàn AoPS và trình bày các ứng dụng của nó với các công cụ hình học thuận túy.

## 1. Mở đầu

Trên diễn đàn AoPS có một bài toán rất thú vị như sau (ký hiệu của bài toán đã được sửa lại để phù hợp hơn với bài viết)

**Bài toán 1.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H$  là giao điểm của hai đường cao  $BE, CF$ ;  $AH$  cắt  $(O)$  tại  $D$  khác  $A$ ;  $DE$  cắt  $(O)$  tại  $G$  khác  $D$ . Chứng minh rằng  $BG$  chia đôi  $EF$ .

Lời giải sau là ý tưởng của Jeck Lim, nick name là oneplusone trên diễn đàn AoPS.



**Lời giải.** Gọi  $K$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ . Ta dễ dàng chứng minh được  $K$  là trung điểm của  $HD$  và hai tam giác  $EFB$  và  $EHK$  đồng dạng. Gọi  $M$  là trung điểm của  $EF$ , ta có

$$\frac{EF}{HE} = \frac{BF}{HK} \text{ hay } \frac{EF}{2HE} = \frac{BF}{2HK}$$

hay

$$\frac{FM}{HE} = \frac{BF}{HD}.$$

Kết hợp với điều kiện  $\angle BFM = \angle DHE$ , ta suy ra hai tam giác  $BFM$  và  $DHE$  đồng dạng. Do đó

$$\angle FMB = \angle HDE = \angle FBG.$$

Vậy  $B, M, G$  thẳng hàng.

Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Việc dùng kỹ thuật đồng dạng "gấp đôi và chia đôi cạnh" trong lời giải bài toán trên rất hay, nó giúp chúng ta có nhiều cách để phát triển và mở rộng bài toán này.

## 2. Các mở rộng

Trong bài toán trên  $E, F$  chính là các giao điểm của đường tròn đường kính  $BC$  với các cạnh  $CA, AB$ . Vậy chúng ta thử thay đường tròn đường kính  $BC$  thành một đường tròn bất kỳ, ta sẽ có bài toán sau:

**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Một đường tròn  $(K)$  qua  $B, C$  cắt  $AC, AB$  lần lượt tại  $E, F$ ;  $BE$  giao với  $CF$  tại  $H$ ;  $AH$  cắt  $(O)$  tại  $P$  khác  $A$ ;  $PE$  cắt  $(O)$  tại  $R$  khác  $P$ . Chứng minh rằng  $BR$  chia đôi  $EF$ .

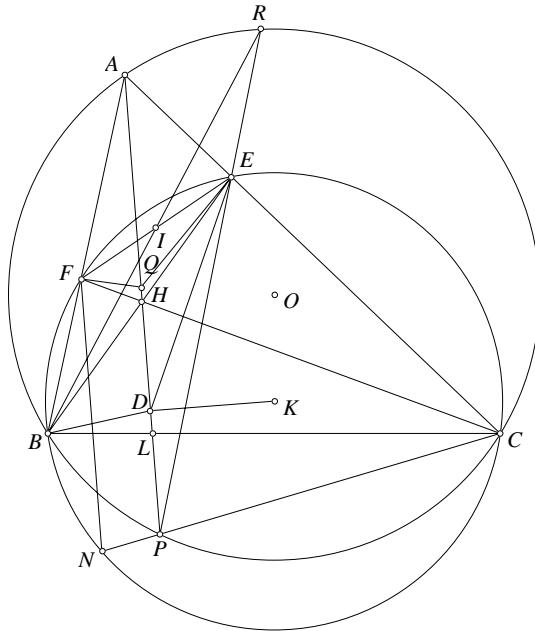
**Lời giải.** Gọi  $D$  là hình chiếu của  $K$  lên  $AH$ . Lấy điểm  $N$  đối xứng với  $F$  qua  $DK$ . Suy ra  $N$  thuộc  $(K)$ . Vì

$$\angle BCP = \angle BAP = \angle BFN = \angle BCN$$

nên  $C, P, N$  thẳng hàng. Gọi  $AH$  cắt  $BC$  tại  $L$  và  $Q$  đối xứng với  $P$  qua  $D$ . Ta có

$$\angle FQA = \angle QFN = \angle FNC = \angle APC = \angle ABC$$

nên tứ giác  $BFQL$  nội tiếp.



Tương tự như trên tứ giác  $CEQL$  nội tiếp nên tứ giác  $AEQF$  nội tiếp. Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được hai tam giác  $EFB$  và  $EQD$  đồng dạng. Gọi  $I$  là trung điểm  $EF$ . Ta sẽ có hai tam giác  $IFB$  và  $EPQ$  đồng dạng. Suy ra

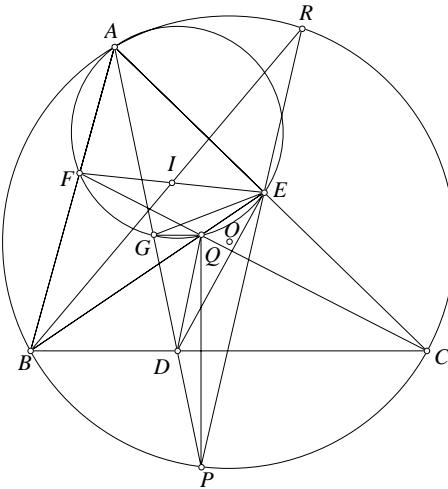
$$\angle FBI = \angle EPQ = \angle ABR.$$

Vậy  $BR$  đi qua  $I$  chia đôi  $EF$ . □

**Nhận xét.** Lời giải trên cũng sử dụng kỹ thuật đồng dạng "gấp đôi và chia đôi cạnh". Tuy nhiên rõ ràng là trong bài toán mở rộng nó đã được dùng khéo léo để vận dụng hết các dữ kiện mở rộng của bài toán.

Trong bài toán gốc, ta có thể coi  $H$  nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  qua  $BC$ . Vậy ta thử thay thế điểm  $H$  thành điểm bất kỳ trên đường tròn này, ta sẽ có kết quả rất thú vị như sau:

**Bài toán 3.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $P$  thuộc cung nhỏ  $BC$  sao cho nếu  $Q$  đối xứng  $P$  qua  $BC$  thì  $Q$  nằm trong tam giác  $ABC$ .  $QB, QC$  lần lượt cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ ;  $PE$  cắt  $(O)$  tại  $R$  khác  $E$ . Chứng minh rằng  $BR$  chia đôi  $EF$ .



**Lời giải.** Gọi  $D$  là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABE$  và  $BC$ . Ta dễ có tứ giác  $AEQF$  nội tiếp nên

$$\angle EQC = \angle BAC = \angle EDC$$

suy ra tứ giác  $EQDC$  nội tiếp. Từ đó

$$\angle BAD = \angle BED = \angle QCD = \angle DCP = \angle BAP$$

vậy ta thu được  $A, D, P$  thẳng hàng. Gọi  $G$  đối xứng  $P$  qua  $D$ , từ  $GQ \parallel BC$  suy ra

$$\angle DGQ = \angle GDB = \angle AEB$$

vì vậy tứ giác  $AEQG$  nội tiếp. Từ đó dễ có

$$\angle EGD = \angle EFB$$

và

$$\angle FBE = \angle GDE.$$

Vậy hai tam giác  $EFB$  và  $EDG$  đồng dạng. Gọi  $I$  là trung điểm  $EF$  suy ra tam giác  $IFB$  và  $EGP$  đồng dạng. Vậy ta thu được

$$\angle FBI = \angle GPE = \angle ABR$$

nên  $BR$  đi qua  $I$  chia đôi  $EF$ .

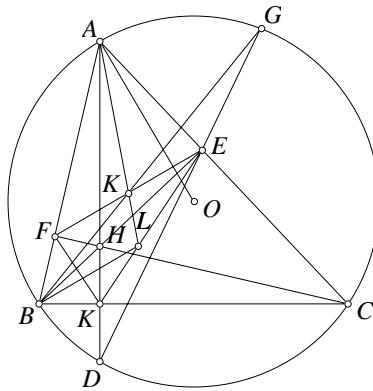
□

**Nhận xét.** Một lần nữa ta thấy kỹ thuật đồng dạng "gấp đôi và chia đôi cạnh" lại được sử dụng một cách khéo léo để khai thác các giả thiết mở rộng. Hai bài toán trên cho chúng ta hai mở rộng khác nhau của cùng một bài toán. Các cách làm này sẽ còn gặp lại trong nhiều các vấn đề khác nữa.

### 3. Một số ứng dụng của bài toán gốc và các mở rộng

Bài toán gốc và bài toán mở rộng có khá nhiều ứng dụng thú vị, chúng ta hay tìm hiểu qua các bài toán tiếp theo như sau. Bài toán sau được đề xuất trong [3].

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$  có các đường cao  $AK, BE, CF$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $AK$  và  $(O)$ ;  $L$  thuộc  $KE$  sao cho  $BL \perp OA$ ;  $DE$  cắt  $(O)$  tại điểm  $G$  khác  $D$ . Chứng minh rằng  $AL$  và  $BG$  cắt nhau tại trung điểm  $EF$ .



**Lời giải.** Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm của  $EF$ . Theo bài toán 1 thì  $BG$  đi qua  $M$ . Mặt khác ta có  $EF \perp OA$  nên  $BL \parallel EF$ . Vì  $BG$  đi qua trung điểm  $M$  của  $EF$  nên  $B(EF, GL) = -1$ . Từ hàng điều hòa cơ bản ta cũng có

$$E(BA, FK) = -1$$

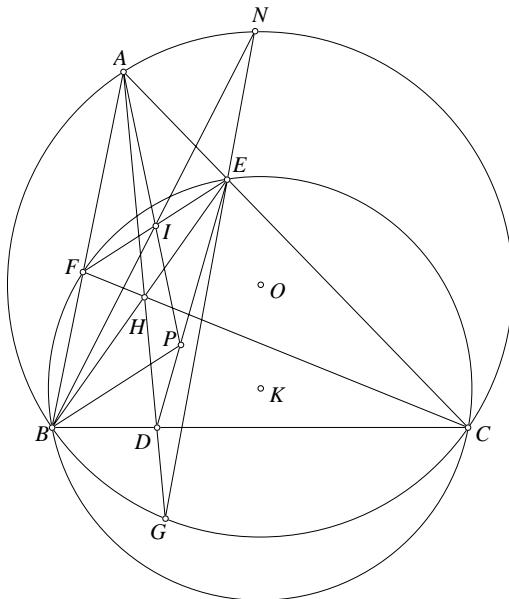
nên

$$B(EF, GL) = E(BA, FK).$$

Suy ra  $A, M, L$  thẳng hàng. Vậy  $BL$  và  $AG$  cắt nhau tại trung điểm  $EF$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

Với ý tưởng sử dụng hàng điều hòa ta sẽ thu được một bài toán tổng quát hơn như sau

**Bài toán 5.** Cho tam giác nhọn, không cân  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Một đường tròn  $(K)$  đi qua  $B, C$  cắt đoạn thẳng  $CA, AB$  lần lượt tại  $E, F$  khác  $C, B$ ;  $BE$  giao  $CF$  tại  $H$ ;  $AH$  cắt  $BC$  tại  $D$ ;  $AD$  cắt  $(O)$  tại  $G$  khác  $A$ ;  $GE$  cắt  $(O)$  tại  $N$  khác  $G$ ;  $P$  thuộc  $DE$  sao cho  $BP \parallel EF$ . Chứng minh rằng  $BN$  và  $AP$  cắt nhau tại trung điểm  $EF$ .

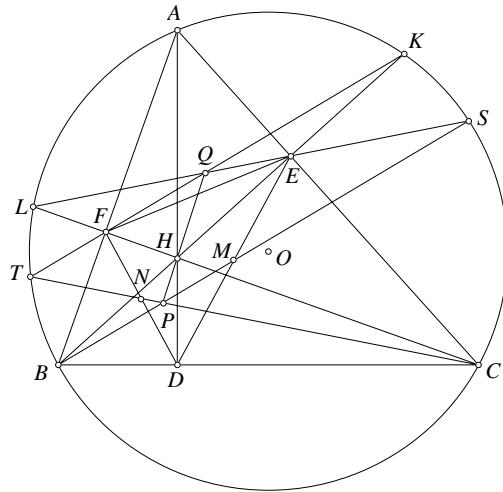


**Lời giải.** Theo bài toán 4, ta chứng minh được  $BN$  đi qua trung điểm  $I$  của  $EF$ . Do  $BP \parallel EF$  nên chùm  $B(EF, NP) = -1$ . Kết hợp với chùm cơ bản

$$E(BA, FD) = -1 \text{ suy ra } B(EF, NP) = -1 = E(BA, FD).$$

Suy ra giao điểm tương ứng là  $A, I, P$  thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

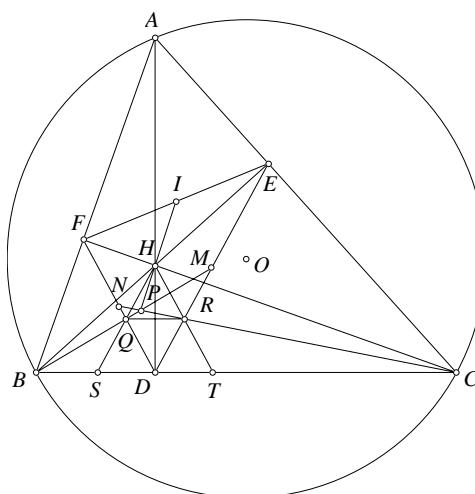
**Bài toán 6.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại trực tâm  $H$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DE$  và  $DF$ ;  $BM$  cắt  $CN$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $HP$  chia đôi  $EF$ .



**Lời giải.** Gọi  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Gọi  $K, L$  lần lượt là giao điểm của  $BE$  và  $CF$  với  $(O)$ . Theo bài trước ta dễ thấy  $LE$  và  $BM$  cắt nhau tại  $S$  thuộc  $(O)$ . Tương tự  $KF$  và  $CN$  cắt nhau tại  $T$  thuộc  $(O)$ . Gọi  $Q$  là giao điểm của  $SL$  và  $KT$ .

Áp dụng định lý Pascal cho  $\left( \begin{array}{c} B \ T \ L \\ C \ S \ K \end{array} \right)$  ta suy ra  $P, H, Q$  thẳng hàng. Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác  $EFLK$  là hình thang nên theo bổ đề hình thang  $HQ$  chia đôi  $EF$ . Suy ra  $PH$  chia đôi  $EF$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Bài toán 7.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại trực tâm  $H$ . Trung trực  $HD$  cắt  $DF, DE$  tại  $Q, R$ ;  $BQ$  cắt  $CR$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $HP$  chia đôi  $EF$ .



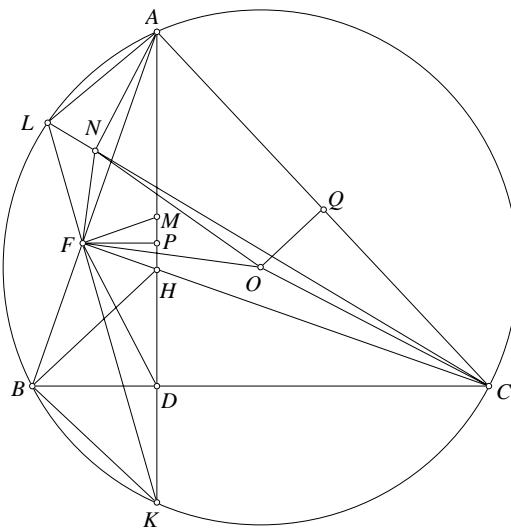
**Lời giải.** Theo bài trước nếu ta chứng minh được  $BQ$  đi qua trung điểm  $M$  của  $EF$  và  $CR$  đi qua trung điểm  $N$  của  $DF$  thì bài toán được chứng minh. Thật vậy, gọi  $HQ, HR$  cắt  $BC$  tại  $S, T$ . Vì tam giác  $HSD$  vuông tại  $D$  và tam giác  $QHD$  cân tại  $H$  suy ra tam giác  $QSD$  cân tại  $Q$ . Do đó

$$\angle QSD = \angle QDS = \angle EDC$$

nên  $HQ \parallel DE$ . Mặt khác, dễ thấy  $Q$  là trung điểm của  $HS$  nên  $BQ$  đi qua trung điểm  $M$  của  $DE$ . Tương tự  $CR$  đi qua trung điểm  $N$  của  $DF$ . Theo bài trước ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Sử dụng phương pháp chiếu song song ta dễ dàng suy ra được bài toán 7 đúng với mọi điểm  $P$  bất kỳ trong mặt phẳng thay cho  $H$ . Bài toán tổng quát này có thể giải đơn giản chỉ bằng biến đổi diện tích. Các bạn hãy quan tâm tới vấn đề này.

**Bài toán 8.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và đường cao  $AD, CF$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AD$  và  $(O)$ ;  $KF$  cắt  $(O)$  tại  $L$  khác  $K$ ; đường thẳng qua  $A$  vuông góc  $OC$  cắt  $CL$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $FN \perp FO$ .



**Lời giải.** Ta sẽ chứng minh  $\triangle FNA \sim \triangle FOC$  để suy ra  $\triangle FNO \sim \triangle FAC$ . Từ đó suy ra

$$\angle NFO = 90^\circ.$$

Thật vậy, ta dễ dàng chứng minh được

$$\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$$

nên

$$\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO.$$

Gọi  $AD$  cắt  $CF$  tại  $H$  và  $P$  là hình chiếu của  $F$  lên  $AD$ ,  $M$  đối xứng  $H$  qua  $P$ . Để thấy

$$\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$$

và

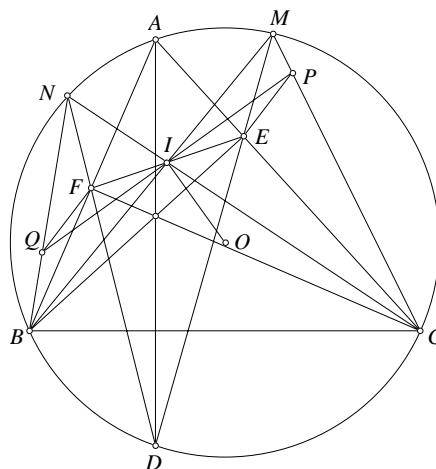
$$\angle FKM = \angle ACN.$$

Do đó  $\triangle KFM \sim \triangle CNA$ . Ta cũng có tam giác  $\triangle FAL \sim \triangle FKB$  và  $\triangle FDP \sim \triangle ACF$ . Từ đó ta có biến đổi tỷ số

$$\begin{aligned} \frac{NA}{FA} &= \frac{NA}{LA} \cdot \frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC} \cdot \frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC} \cdot \frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC} \cdot \frac{AC}{MK} \\ &= \frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}. \end{aligned}$$

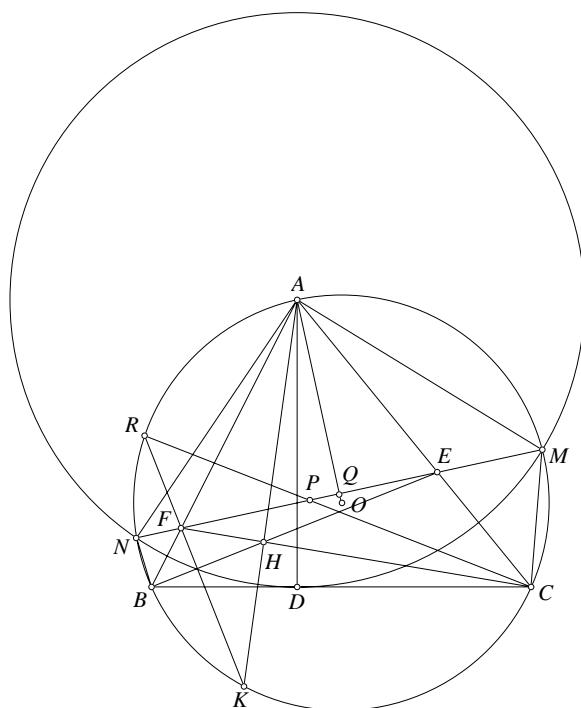
Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Bài toán 9.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  với đường cao  $BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $D$  là giao điểm  $AH$  và  $(O)$ ;  $DE$  cắt  $(O)$  tại  $M$  khác  $D$ ;  $I$  là trung điểm  $EF$ ;  $P$  thuộc  $CM$  sao cho  $PI \perp IO$ ; lấy  $Q$  đối xứng  $P$  qua  $I$ . Chứng minh rằng  $DF$  và  $BQ$  cắt nhau trên  $(O)$ .



**Lời giải.** Theo bài toán 1 thì  $BM$  đi qua  $I$ . Gọi  $DF$  cắt  $(O)$  tại điểm  $N$  khác  $D$ . Vẫn theo bài toán 1 thì  $CN$  đi qua  $I$ . Trong tứ giác  $BCMN$  có  $BM$  cắt  $CN$  tại  $I$ . Mặt khác đường thẳng qua  $I$  vuông góc  $OI$  cắt  $CM$  tại  $P$ . Theo bài toán con bướm thì đối xứng của  $P$  qua  $I$  là  $Q$  thuộc  $BN$ . Từ đó  $BQ$  và  $DF$  cắt nhau tại  $N$  thuộc  $(O)$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Bài toán 10.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  với đường cao  $AD$ . Đường tròn  $(A, AD)$  cắt  $(O)$  tại  $M, N$  với  $M, B$  khác phía  $AC$ ;  $MN$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ ;  $BE$  cắt  $CF$  tại  $H$ ;  $AH$  cắt  $(O)$  tại  $K$ ;  $KF$  cắt  $(O)$  tại  $R$  khác  $K$ ;  $CR$  cắt  $MN$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $2PQ = |ME - NF|$ .

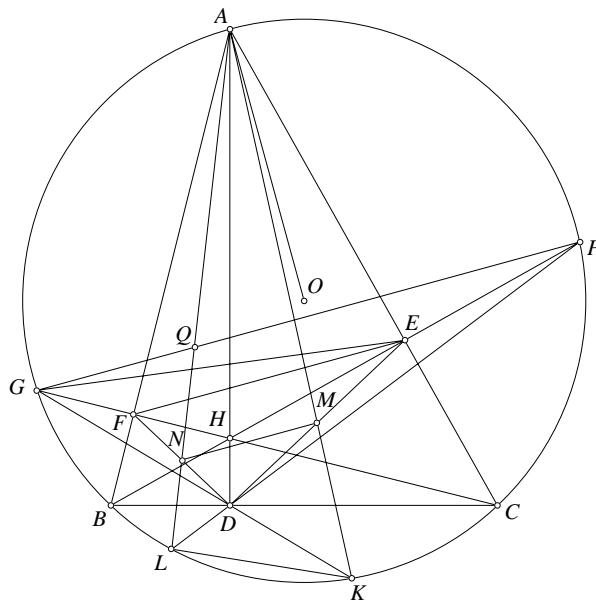


**Lời giải.** Ta có tam giác  $AMN$  cân nên  $\angle NBA = \angle NMA = \angle ANM$ . Từ đó  $AN^2 = AF \cdot AB$ . Tương tự  $AM^2 = AE \cdot AC$ . Do  $AM = AN$  nên  $AF \cdot AB = AE \cdot AC$ . Từ đó tứ giác  $BCEF$  nội tiếp. Theo bài toán 3 thì  $CR$  chia đôi  $EF$  suy ra  $Q$  là trung điểm của  $EF$ . Mà  $Q$  là trung điểm  $MN$  nên

$$|ME - NF| = |PM - PN| = |QN - QM + 2PQ| = 2PQ.$$

Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Bài toán 11.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $H$ ;  $CH$  cắt  $(O)$  tại  $G$  khác  $C$ ;  $GD$  cắt  $(O)$  tại  $K$  khác  $G$ ;  $N$  là trung điểm  $DF$ ;  $AN$  cắt  $(O)$  tại  $L$  khác  $A$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KLN$  chia đôi  $DE$ .



**Lời giải.** Gọi  $M$  là trung điểm của  $DE$ . Ta sẽ chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KLN$  đi qua  $M$ .

Thật vậy, theo bài toán 1 thì  $AK$  đi qua  $M$ . Gọi  $BH$  cắt  $(O)$  tại  $P$  khác  $B$ . Cũng theo bài toán 1 thì  $LD$  đi qua  $P$  là đối xứng của  $H$  qua  $CA$ . Từ đó suy ra

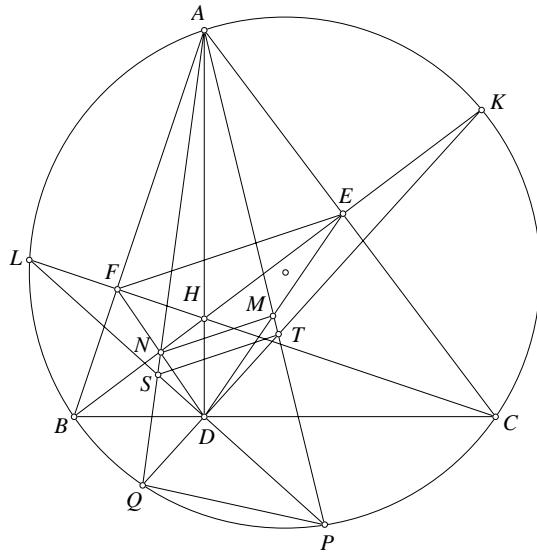
$$AG = AH = AP \Rightarrow GP \perp OA \perp EF \Rightarrow GP \parallel EF \parallel MN.$$

Gọi  $AL$  cắt  $GP$  tại  $Q$ . Ta có

$$\begin{aligned} \angle MNA &= \angle AQP = \angle AGQ + \angle QAG = \angle APG + \angle QAG \\ &= \angle AKG + \angle GKL = \angle AKL. \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác  $MKNL$  nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Bài toán 12.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $H$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DE, DF$ .  $AM, AN$  lần lượt cắt  $(O)$  tại  $P, Q$  khác  $A$ .  $DP, DQ$  lần lượt cắt  $AM, AN$  tại  $S, T$ . Chứng minh rằng  $ST \parallel MN$ .



**Lời giải.** Theo bài toán trên ta đã chứng minh được tứ giác  $PQNM$  nội tiếp. Gọi  $K, L$  đối xứng với  $H$  qua  $CA, AB$  thì  $K, L$  thuộc  $(O)$ . Theo bài toán 1 thì  $DQ$  đi qua  $K$  và  $DP$  đi qua  $L$ . Vì  $AK = AH = AL$  nên tam giác  $AKL$  cân. Từ đó

$$\begin{aligned}\angle QSP &= \angle SAP + \angle SPA = \angle SAP + \angle AKL \\ &= \angle SAP + \angle ALK = \angle SAP + \angle AQT = \angle QTP.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác  $PQST$  nội tiếp. Vậy từ hai tứ giác  $PQNM$  và  $PQST$  nội tiếp, ta dễ dàng suy ra  $ST \parallel MN$ .  $\square$

Với kĩ thuật gấp đôi và chia đôi cạnh, ta có thể tìm ra được nhiều bài toán hình học hay. Với cách nghĩ đơn giản và cổ điển, hầu hết học sinh có thể nghiên cứu và sử dụng nó. Phải chăng, bài toán càng tinh túy khi phương pháp giải càng sơ cấp?

## Tài liệu tham khảo

- [1] Topic Divide in two equal segments. [www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=386417](http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=386417)
- [2] Lim Jeck [www.limjeck.com](http://www.limjeck.com)
- [3] Topic Midpoint [www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=389720](http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=389720)

# ĐỊNH LÝ BƯỚM KÉP ĐỐI VỚI TỨ GIÁC

NGUYỄN NGỌC GIANG (TP. HỒ CHÍ MINH)

TRỊNH HUY VŨ (THPT CHUYÊN KHTN HÀ NỘI)

## Tóm tắt

Chúng ta sẽ khám phá chứng minh định lý bướm đơn và định lý bướm kép cho tứ giác. Các kết quả này là mở rộng các kết quả trong [1] của tác giả Zvonko Cerin.

## 1. Định lý bướm đơn đối với tứ giác

Zvonko Cerin [1] đã chứng minh được kết quả sau gọi là định lý bướm đơn đối với tứ giác

**Định lý 1** (Định lý bướm đơn đối với tứ giác). Cho  $A'B'C'D'$  là tứ giác nội tiếp của  $ABCD$ . Giả sử  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  cùng chung giao điểm của các đường chéo.  $U$  và  $V$  lần lượt là các giao điểm của đường thẳng  $AC$  với các đường thẳng  $D'A'$  và  $B'C'$ . Định lí con bướm đối với tứ giác, được thiết lập

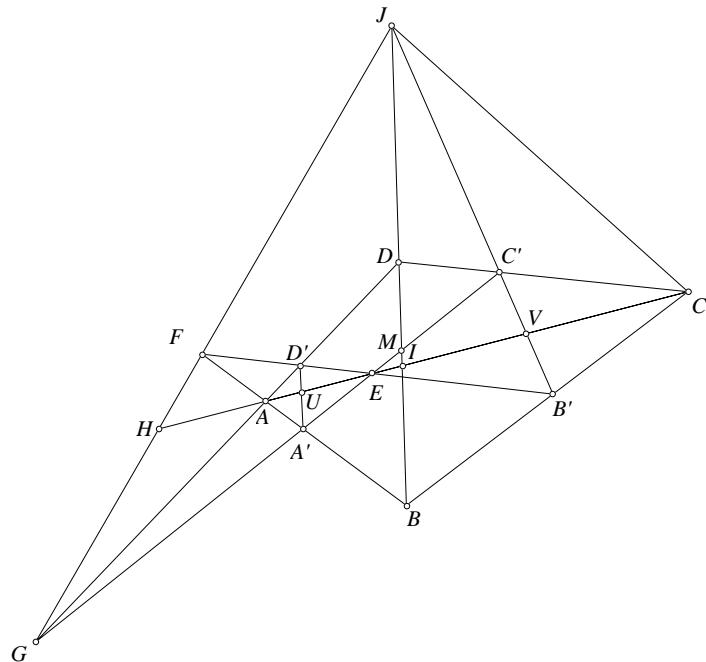
$$\frac{AU}{UI} \cdot \frac{IV}{VC} = \frac{AI}{IC}. \quad (1)$$

Zevonko Cerin cũng đã mở rộng hệ thức (1) thành định lí tổng quát sau

**Định lý 2.** Gọi  $A'B'C'D'$  là tứ giác nội tiếp của  $ABCD$ .  $E$  là giao của  $A'C'$  và  $B'D'$ .  $I$  là giao của  $AC$  và  $BD$ .  $U$  là giao của  $AC$  và  $D'A'$ .  $V$  là giao của  $AC$  và  $B'C'$ . Nếu  $E$  nằm trên đường thẳng  $AC$ , thì

$$\frac{AU}{UE} \cdot \frac{EV}{VC} = \frac{AI}{IC}. \quad (2)$$

Cerin chứng minh hệ thức (2) bằng phương pháp tọa độ với sự trợ giúp của phần mềm Maple. Cách chứng minh của Cerin có ưu điểm là cách chứng minh có tư duy thuật toán. Nhược điểm của nó là lời giải dài, tính toán phức tạp. Chính vì thế để khắc phục nhược điểm này, chúng tôi đã nghiên cứu và đưa ra cách chứng minh thuận túy hình học.



**Chứng minh định lý 2.** Đặt  $B'D'$  cắt  $AB$  tại  $F$ ;  $A'C'$  cắt  $AD$  tại  $G$ ;  $FG$  cắt  $AC$  tại  $H$ ;  $FG$  cắt  $B'C'$  tại  $J$ ,  $A'C'$  cắt  $BD$  tại  $M$ . Xét  $\Delta AFG$  và  $\Delta CB'C'$  có  $AC, FB', GC'$  đồng quy tại  $E$ . Theo định lí Desargues, suy ra  $J, D, B$  thẳng hàng. Nói cách khác là  $J$  nằm trên  $BD$ . Xét tứ giác toàn phần  $AD'E A'FG$ , ta có

$$(HU, AE) = -1 \text{ suy ra } \frac{HA}{HE} = \frac{UA}{UE}.$$

Từ đây ta có

$$(HI, AE) = G(HI, AE) = (JI, DM) = C'(JI, DM) = (VI, CE).$$

Suy ra

$$\frac{HA}{HE} \cdot \frac{IE}{IA} = \frac{VC}{VE} \cdot \frac{IE}{IC} \text{ suy ra } \frac{AU}{UE} \cdot \frac{EV}{VC} = \frac{AI}{IC}.$$

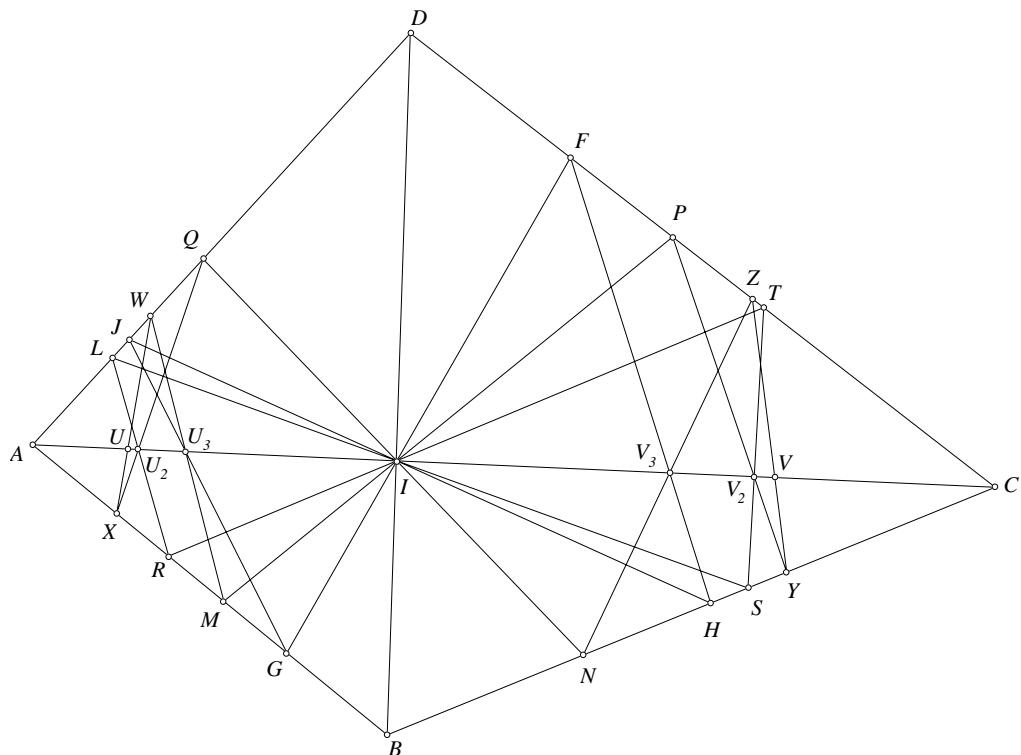
Đây chính là điều phải chứng minh. □

## 2. Định lí bướm kép đối với tứ giác

Từ định lí 1, chúng tôi nảy sinh ra ý tưởng mở rộng định lí bướm đơn đối với tứ giác thành định lí bướm kép như sau

**Định lý 3** (Định lí bướm kép đối với tứ giác). Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Qua  $I$  dựng các đường thẳng  $d_1, d_2, d_3; d'_1, d'_2, d'_3$  lần lượt cắt các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  tại  $M, R, G; N, S, H; P, T, F; Q, L, J$ . Gọi giao điểm của  $RL, GJ; ST, HF$  với  $AC$  lần lượt là  $U_2, U_3; V_2, V_3$ . Gọi giao điểm của  $MU_3$  với  $AD$  là  $W; QU_2$  với  $AB$  là  $X$ . Gọi giao điểm của  $NV_3$  với  $DC$  là  $Z; PV_2$  với  $BC$  là  $Y$ . Gọi giao điểm của  $XW$  với  $AC$  là  $U; YZ$  với  $AC$  là  $V$ . Chứng minh rằng

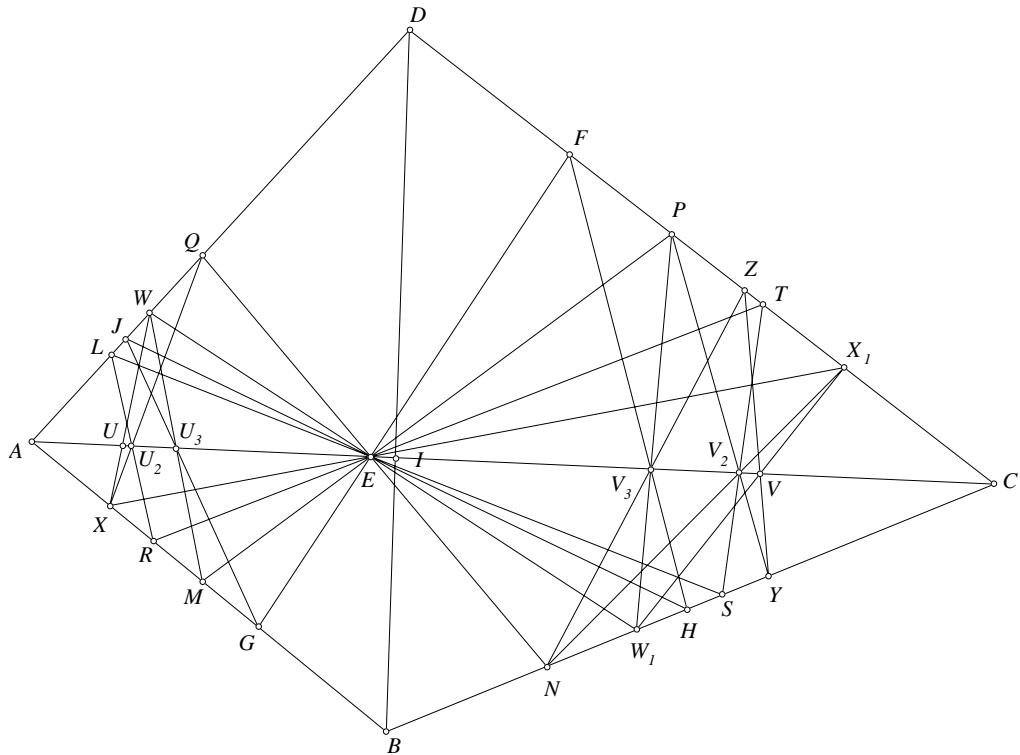
$$\frac{AU}{UI} \cdot \frac{IV}{VC} = \frac{AI}{IC}. \quad (3)$$



Chúng tôi mở rộng định lý 3 thành định lý 4 tổng quát hơn như sau

**Định lý 4.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $E$  là điểm bất kì nằm trên  $AC$ . Qua  $E$  dựng các đường thẳng  $d_1, d_2, d_3; d'_1, d'_2, d'_3$  lần lượt cắt các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  tại  $M, R, G; N, S, H; P, T, F; Q, L, J$ . Gọi giao điểm của  $RL, GJ; ST, HF$  với  $AC$  lần lượt là  $U_2, U_3; V_2, V_3$ . Gọi giao điểm của  $MU_3$  với  $AD$  là  $W; QU_2$  với  $AB$  là  $X$ . Gọi giao điểm của  $NV_3$  với  $DC$  là  $Z; PV_2$  với  $BC$  là  $Y$ . Gọi giao điểm của  $XW$  với  $AC$  là  $U; YZ$  với  $AC$  là  $V$ . Chứng minh rằng

$$\frac{AU}{UE} \cdot \frac{EV}{VC} = \frac{AI}{IC}. \quad (4)$$



**Chứng minh định lý 4.** Gọi giao điểm của  $WE$  và  $BC$  là  $W_1$ ;  $XE$  cắt  $DC$  tại  $X_1$ ;  $X_1W_1$  cắt  $YZ$  tại  $V'$ . Áp dụng định lí 2 cho tứ giác  $GHFJ$  nội tiếp tứ giác  $ABCD$  ta có

$$\frac{AU_3}{U_3E} \cdot \frac{EV_3}{V_3C} = \frac{AI}{IC}, \quad (5)$$

Áp dụng định lí 2 cho tứ giác  $MW_1PW$  nội tiếp tứ giác  $ABCD$  và kết hợp với (5), ta suy ra  $P, W_1, V_3$  thẳng hàng. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được  $N, X_1, V_2$  thẳng hàng.

Áp dụng định lí Pappus cho 3 cặp điểm thẳng hàng là  $P, Z, X_1$  và  $N, W_1, Y$  có  $PW_1$  cắt  $ZN$  tại  $V_3$ ;  $ZY$  cắt  $X_1W_1$  tại  $V'$ ;  $PY$  cắt  $X_1N$  tại  $V_2$  nên  $V', V_2, V_3$  thẳng hàng. Nói cách khác là  $V'$  nằm trên  $AC$ . Do đó  $V'$  chính là giao điểm của  $ZY$  với  $AC$ . Suy ra  $V'$  trùng  $V$  hay  $V$  thuộc  $X_1W_1$ .

Áp dụng định lí 2 cho tứ giác  $XW_1X_1W$  nội tiếp tứ giác  $ABCD$  ta thu được

$$\frac{AU}{UE} \cdot \frac{EV}{VC} = \frac{AI}{IC}.$$

Đây là điều phải chứng minh. □

**Nhận xét** Khi  $E = I$  thì định lí 4 trở thành định lí 3.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Zvonko Cerin, On Butterflies inscribed in a quadrilateral, *Forum Geom*, 6(2006), 241-246.



# ĐÊM TRƯỚC NHỮNG BẢN THẢO SẮP IN

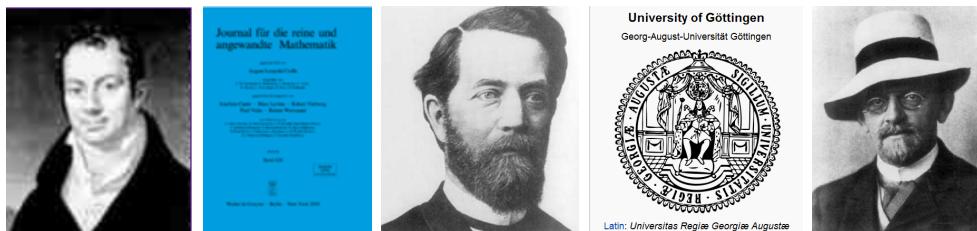
NGUYỄN QUỐC KHÁNH

(Hà Nội)

Trong bài điểm sách “*Toán học trong mắt ai*” đăng trên Epsilon số 2 ngày 13/04/2015, tôi đã nhắc tới một câu chuyện có tính “*bệnh thành tích*”, đó là câu chuyện về số lượng giải Fields tính theo mỗi quốc gia. Trong bài viết đó, tôi đã nói là nhờ có giải Fields năm 2010, mà Việt Nam đã quân bình thành tích với một cường quốc toán học là nước Đức. Viết như vậy, là có ba thiếu sót. Thứ nhất, Đức không chỉ là cường quốc về toán học, mà còn là về triết học, âm nhạc, văn chương, công nghệ, kĩ thuật, kinh tế, quân sự. Thứ hai, có một số thời kì, toán học của nước Đức không chỉ là cường quốc, mà còn là một đế quốc thực sự (theo nghĩa đen). Có hai thứ phải kể tới ở nước Đức ở đầu thế kỉ 19, và đầu thế kỉ 20, là tạp chí Crelle, và Đại học Göttingen.

Tờ báo (độc lập) nghiên cứu toán học cao cấp “*hạng nặng*” đầu tiên trên thế giới có thể tính là tờ Crelle của nước Đức. Ra đời năm 1826 bởi ông Crelle, không biết bằng cách nào, tạp chí Crelle đã trở thành một hiện tượng độc nhất vô nhị trong lịch sử toán học. Ngay số đầu tiên, Crelle đã phát hiện ra “*sự tồn tại của Abel*” bằng cách cho đăng tải một loạt 7 bài báo của nhà toán học trẻ này. Trong những năm tiếp theo, Crelle tiếp tục trở thành nơi “*trình làng*” của hàng loạt những nhà toán học từ kiệt xuất tới rất kiệt xuất trở lên. Rất nhiều những nhà toán học kiệt xuất, khi mà cả thế giới vẫn chưa có ai biết đến họ, đã đăng những bài báo đầu tay tại đây. Đó là trường hợp của Dirichlet, Eisenstein, Grassmann, Hesse, Jacobi, Kummer, Lobachevsky, Möbius, Pöcker, Weierstrass, vân vân.

Ở một góc độ khác, Đại học Göttingen “của Klein và Hilbert” đã được thừa nhận một cách rộng rãi là thánh đường toán học thời kì cuối thế kỉ 19, đầu thế kỉ 20. Đây chính là nơi “*tầm sư*



### Crelle, Crelle's Journal, Klein, Göttingen, Hilbert: năm bảo vật của nền toán học Đức

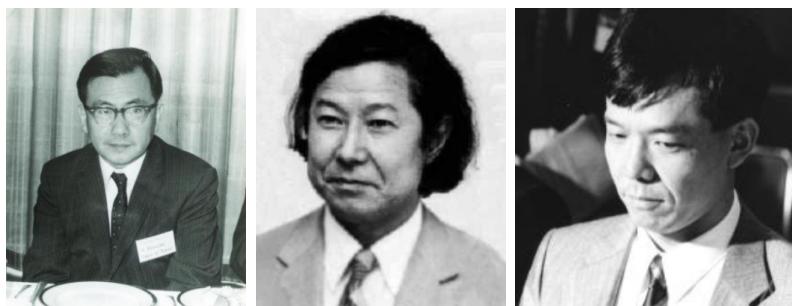
“học đạo” của hầu hết các trưởng khoa toán đầu tiên của các đại học trên toàn nước Mỹ, hoặc nói một cách đúng hơn, là nước Mỹ, với mục tiêu xây dựng một nền toán học cao cấp và hiện đại, như là một động lực để hướng tới sự phát triển quốc gia, đã gửi hàng loạt các nghiên cứu sinh sang học tập tại Göttingen dưới sự hướng dẫn trực tiếp của Klein và Hilbert. Tất cả những người đó sau này đều đã trở thành những nhà lãnh đạo khoa học xuất sắc của nước Mỹ hiện đại thế kỉ 20, và cùng lúc, họ cũng đã trở thành những người thầy của những trưởng khoa toán tiếp theo của các đại học khác trên khắp thế giới. Vai trò của Göttingen với nước Mỹ một cách trực tiếp, và với phần còn lại của toàn thế giới một cách gián tiếp, là vẫn chưa thực sự được đo đếm một cách rõ ràng.

Có một mốc thời gian đáng nhớ là, vào thời bấy giờ, khi Pháp và Đức đã có những sự phát triển đáng ngưỡng mộ về toán học, thì nước Mỹ vẫn còn đang rất hoang vu. Khi mà Hilbert đang chuẩn bị bài nói chuyện bắt hủ của mình về 23 bài toán hướng tới thế kỉ mới tại Paris, thì cùng lúc, tận cuối thế kỉ 19, với sự ủng hộ tài chính mạnh mẽ của nhà tài phiệt Rockefeller, Đại học Chicago mới được thành lập. Trải qua hơn 100 năm phát triển, khoa toán của Đại học Chicago ngày nay đã là một trung tâm hùng mạnh trên thế giới. Còn bản thân Đại học Chicago thì ngay từ những ngày đầu, đã trở thành nơi khai sinh ra hầu như mọi tiêu chuẩn trong lĩnh vực xây dựng và kỹ thuật của toàn nước Mỹ.

Tôi lại mắc cái tật ăn nói lan man, mà trì hoãn để chưa phải tới với cái thiếu sót thứ ba trong bài viết trước. Cái sai sót thứ ba, cũng là sai sót “lớn nhất”, là thực ra Việt Nam chưa thể quân bình thành tích giải Fields với Đức, bởi vì Đức thì có một giải,

còn Việt Nam thì chỉ có nửa, do phải chia đôi với Pháp. Nhưng nói tới đây, các bạn đọc cũng đừng buồn vì chuyện Việt Nam như thế là vẫn ít thành tích hơn Đức, bởi vì lẽ nếu như chúng ta phải buồn, thì bản thân nước Đức sẽ phải buồn hơn gấp vài lần, bởi vì chính họ cũng vẫn đang phải “cam chịu” xếp sau một nước Châu Á khác về câu chuyện thành tích giải Fields này vậy. Quốc gia Châu Á mà tôi đang muốn nói tới, quốc gia mà họ đã âm thầm, lặng lẽ giật tới tận 3 giải Fields, đó là nước Nhật. Điều thú vị là, cả ba giải Fields của nước Nhật đều thuộc về lĩnh vực hình học đại số, đó là Kodaira năm 1954 với các công trình dẫn tới những hiểu biết nền tảng về các đa tạp Kähler và các cấu trúc Hodge, Hironaka năm 1970 với định lý giải kì dị nổi tiếng, và Mori năm 1990 với chương trình Mori về việc phân loại các đa tạp đại số số chiều bằng 3.

Tất nhiên, có thể chỉ trong vài chục năm tới, thành tích của Việt Nam trong mảng giật giải Fields hoàn toàn có thể cân bằng với Đức, hoặc quyết tâm hơn, thì là Nhật. Nhưng có một câu chuyện khác cũng “bệnh thành tích” không kém ở cả Đức và Nhật mà chúng ta cũng đều nên để ý tới, đó là câu chuyện về sách vở và dịch thuật.



**Kodaira, Hironaka, Mori: ba nhà toán học Nhật Bản giành huy chương Fields.**

Trên thế giới có 2 cuộc đại dịch thuật mà không ai có thể quên đi. Cuộc đại dịch thuật thứ nhất là ở Châu Âu vào thế kỉ 11 và thế kỉ 12 phần lớn do các học giả Ả-rập thực hiện ngay khi các đại học đầu tiên ở Châu Âu hình thành, chính cuộc đại dịch thuật này trở thành một tiền đề để Châu Âu có được sự phát triển không tưởng về khoa học và giáo dục trên quy mô toàn châu lục. Và cuộc đại dịch thuật thứ hai chính là ở nước

Nhật vào hai thế kỉ 16 và 17 với hàng ngàn cuốn sách đã được chuyển ngữ bởi chính giới học giả trong nước<sup>(1)</sup>, chính cuộc đại dịch thuật này là một tiền đề, một cột trụ cho sự phát triển quốc gia của nước Nhật sau này. Ngày nay, người ta nói vui rằng, ở Đại học Tokyo, các sinh viên có thể không cần dùng tới sách chuyên khảo tiếng nước ngoài, bởi vì hễ những thứ gì đã được đưa vào sách ở nước ngoài, thì một là nó cũ, hai là sách ấy cũng đã được dịch ngay ra bản tiếng Nhật tức thì. Sinh viên Todai có thể làm việc và nghiên cứu trực tiếp những lĩnh vực thời thượng nhất ngay trên tiếng mẹ đẻ.

Theo các thông tin mà GS Nguyễn Xuân Xanh đã dẫn trong bài viết “*Tại sao người Nhật mê đọc sách?*”<sup>(1)</sup> thì ngay từ khi dân số còn mới dừng ở mức 30 triệu, ở Nhật đã có những sách phát hành được tới cả triệu bản, và số sách in ấn chục vạn bản là rất phổ biến. Còn theo những thông tin trích lục trong blog về “*Bản báo cáo của Émile Vayrac*”<sup>(2)</sup> mà Blog Quachhien đã đăng tải, thì đầu thế kỉ 20 ở Việt Nam cũng đã xuất hiện những ấn phẩm được phát hành tới chục vạn bản, và tiêu biểu là “*Thơ ngũ ngôn La Fontaine*” do học giả Nguyễn Văn Vĩnh dịch đã bán được 100.000 bản ngay lần xuất bản đầu tiên, và “*Tứ dân văn uyển*” tới cả nửa triệu bản được phát hành trong đó có 360.000 số là phát không. Nhưng đáng tiếc, đó chỉ là những trường hợp rất hân hữu, và tới bây giờ thì mọi chuyện đã khác hoàn toàn. Nếu như ở Nhật, việc đọc sách đã trở thành một yếu tố truyền thống cầu thành nên văn hóa xã hội, thì ở Việt Nam, chuyện đọc sách và văn hóa đọc lại đang trở thành một đề tài nóng bỏng.

Hiện nay, Nhật Bản và Việt Nam có cùng mức dân số xấp xỉ 100 triệu dân, diện tích cũng ngang ngửa (khoảng 300 nghìn km<sup>2</sup>), nhưng số lượng sách vỏ phát hành ở hai quốc gia thực là một trời một vực. Nếu như ở Việt Nam một cuốn sách được phát hành tới 1 vạn bản đã là best-seller, thì ở Nhật như thế vẫn là tương đối tốn kém. Nếu như ở Nhật vẫn có các tựa sách in đi tái bản lại tới cả triệu bản, các nhà văn và người sống bằng nghề viết ở Nhật vô cùng đông đảo và có những chế độ đãi ngộ rất đặc thù và nhân văn, thì ở Việt Nam, có lẽ chỉ có vài tác giả có tới vài chục bản sách được phát hành, và nghề viết, đối với kể cả những người viết chuyên nghiệp, thường khi vẫn chỉ là “*nghề tay trái*”, khi mà “*cơm áo gạo tiền không đùa với khách thơ*”.

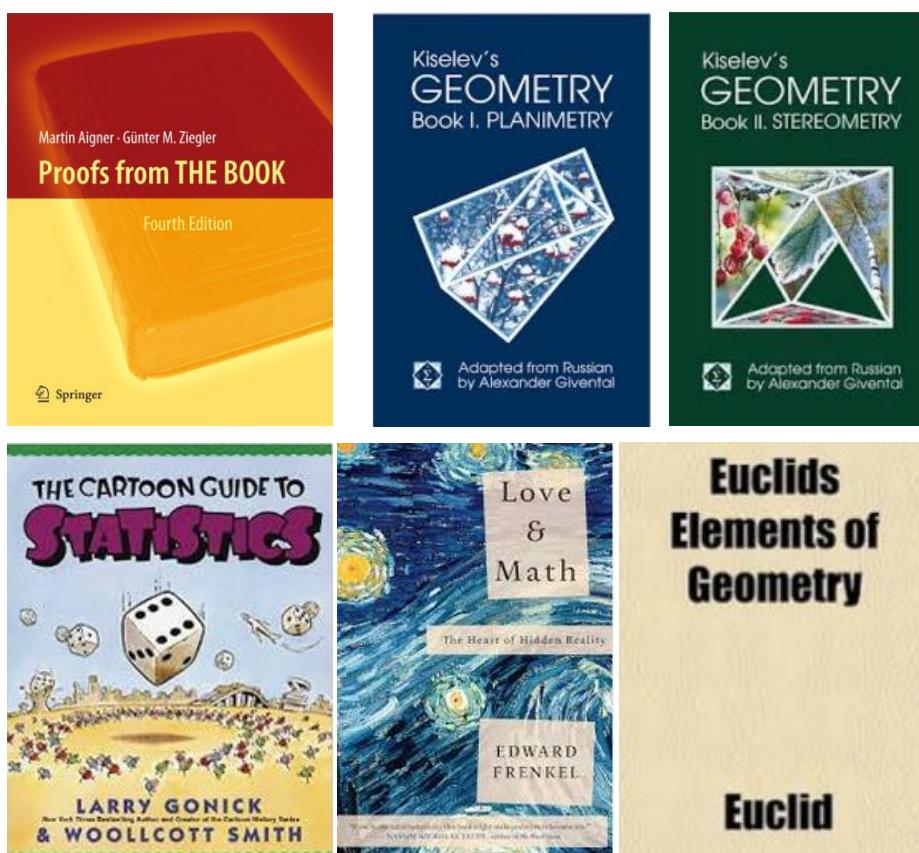


GS Hironaka chụp ảnh cùng các nhà Toán học Việt Nam tại ICTP năm 1991 (Từ trái qua: Lê Văn Thành, Hà Huy Khoái, Nguyễn Hữu Đức, Nguyễn Văn Châu, Nguyễn Việt Dũng, Federeric Phạm, Nguyễn Tự Cường, Ngô Việt Trung, Hironaka, Lê Tự Quốc Thắng, Hà Huy Vui)

Cùng mức dân số và diện tích với Nhật Bản và Việt Nam, và cũng như nước Nhật, nước Đức ngày nay cũng vẫn thực sự là một đế quốc về sách, ngay cả so với Anh, Pháp, Mỹ, thì Đức vẫn là một sự khổng lồ không cần bàn cãi. Người ta hay nói vui rằng, ở bên Đức, khi đi ra đường, nếu bạn gặp 1 người đàn ông đang cầm chai bia và đi lang thang, thì 90% anh ta sẽ là một tay kĩ sư, hoặc tối thiểu cũng là một nhà toán học, còn nếu tới thăm nhà của một người bạn, và bạn nhận ra là anh ta có một căn phòng riêng bí mật, thì 90% là anh ta đang viết một cuốn sách nào đó, và có lẽ anh ta thực sự là một nhà văn chưa biết chừng. Trên thực tế, rất nhiều những gia đình người Đức thực sự có cả một công ty sách ở ngay trong phòng làm việc cá nhân. Một trong số các công ty sách gia đình như vậy là Springer, bắt đầu từ một hiệu sách nhỏ, họ đã phát triển ra mọi ngóc ngách của thế giới. Ngày nay nhắc tới Springer nghĩa là nhắc tới sách khoa học kĩ thuật, sách chuyên khảo, và những cuốn sách chất lượng cao nhất, và ngược lại, mỗi khi nhắc tới sách khoa học kĩ thuật chất lượng cao, thì nghĩa là nhắc tới Springer. Nhớ lại cách đây mới chừng 1-2 năm, cả cộng đồng toán học Việt Nam đã tỏ ra vô cùng vui mừng khi hai tạp chí nghiên cứu toán học trong nước đã được Springer phát hành toàn cầu, đó là "Acta Mathematica Vietnamica" và "Vietnam Journal of Mathematics", chỉ riêng việc này thôi đã đủ để thấy uy tín của Springer đối với giới khoa học mà nói thật rất là đáng nể.

Nói nhiều tới Đức và Nhật như thế, là âu cũng để chúng ta

có một dịp tự nhìn lại mình. Rõ ràng so với hai cường quốc sách vở như thế, thì chúng ta vẫn đang chỉ là Epsilon, Epsilon, nhưng chắc chắn khác 0. Khác 0, bởi vì ngay lúc này đây, chúng ta cũng vẫn đang có một cuộc “tiểu dịch thuật”, mà đối với cá nhân tôi, thì đây thực sự một công cuộc âm thầm và lặng lẽ được thực hiện bởi, cùng một lúc, rất nhiều những cá nhân và các nhà sách tư nhân, những người dung cảm và tử tế. Có những cuốn sách đã bắt đầu cách đây vài năm, cũng có những cuốn vừa mới chỉ mua xong tác quyền.



**Một trong số những cuốn sách toán chuẩn bị có bản dịch tiếng Việt.**

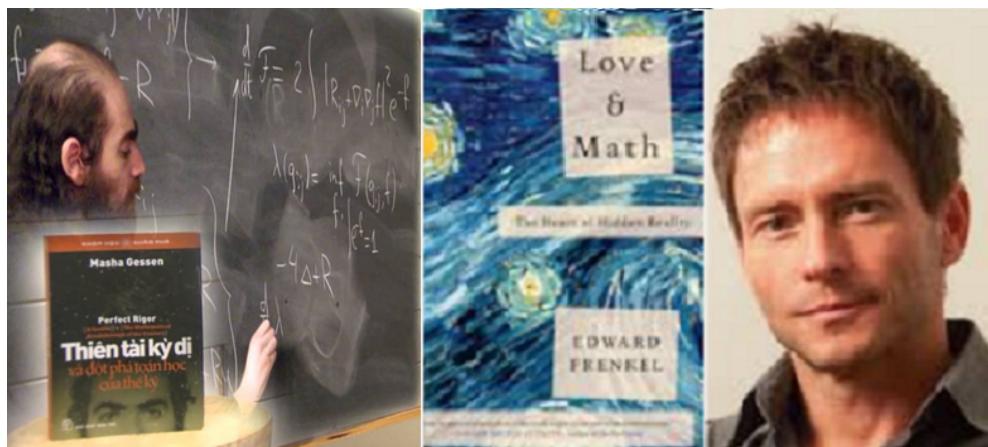
Cuốn “*KINH THÁNH Toán*” hay nhất, bán chạy nhất của Springer trong suốt mười năm qua là **Proof from THE BOOK** của hai tác giả Martin Aigner và Günter M. Ziegler viết dựa trên những hồi ức về Paul Erdős đã được công ty sách Long Minh mua tác

quyền và tổ chức dịch theo sự gợi ý và kết nối của GS Lê Tuấn Hoa. Đây có lẽ sẽ là cuốn sách toán đầu tiên của Springer được dịch ra tiếng Việt trong thời kì mới. Với gần 50 chủ đề chia về 5 nhóm kiến thức số học, đại số, hình học, giải tích, tổ hợp, và lý thuyết đồ thị, THE BOOK chứa đựng một cách dày đặc các định lý, tính chất, và các chứng minh toán học đẹp đẽ đến ngỡ ngàng. Từ định lý cơ bản của đại số, tới tính vô hạn của số nguyên tố, các bài toán đếm cây, ứng dụng của công thức Euler, bài toán xáo bài, các bài toán đồ thị, phương pháp thống kê trong các bài toán đếm, bài toán Kedlaya, số  $\pi$  và cây kim Buffon, tới hàng loạt các “*hiện tượng*” toán học đẹp đẽ, thú vị với những ý tưởng chứng minh bất ngờ “*không thể tưởng tượng được*” đã được các tác giả liên tục cập nhật qua mỗi lần tái bản. Trong nhóm dịch thuật, có một học trò trực tiếp của tác giả thứ hai là ông Ziegler. Có một chuyện khá thú vị là, trong quá trình dịch thuật, bản 5 cuốn sách cũng đã chuẩn bị được ra đời, do đó, nhóm dịch thuật của công ty Long Minh, lúc đó đang làm việc trên bản 4, đã ngay lập tức chuyển sang làm việc trên bản thảo mới nhất. Có lẽ, sau “*Mèo Penrose*” và tủ sách Theoni Pappas, cùng hàng loạt sách của DK, bản dịch cuốn sách mới coóng này của Springer chắc chắn sẽ là một sự tiếp tục tuyệt vời cho Tủ sách “*Đam mê toán học*” mà Long Minh đang quyết tâm theo đuổi.

Với một cách tiếp cận khác, bộ sách **Kiselev's Geometry** gồm hai tập hình học phẳng và hình học không gian do A. P. Kiselev chủ biên đã được GS Nguyễn Tiến Dũng “chỉ đạo” dịch ra tiếng Việt bởi Sputnik Education. Đã rất lâu rồi người ta mới có thể lại được thấy những cuốn sách giáo khoa bài bản, kiến thức chính xác, hệ thống bài tập lớp lang, và chứa đựng đầy tính mô phạm của các tác giả người Nga xuất hiện trên kệ sách trong nước, kể từ sau thời của những sách kinh điển của Prasolov và Sharygin. Sách hình học của Kiselev, cùng với “*Tổ hợp quy nạp*” của Vilenkin dịch bởi GS Hà Huy Khoái, và “*Nhập môn hiện đại xác suất & thống kê*” soạn bởi GS Nguyễn Tiến Dũng và GS Đỗ Đức Thái, tất cả đang dần dần khiến cho Sputnik Education từng bước đặt được dấu ấn rõ rệt và vững chắc của mình với việc phát triển hệ thống sách giáo khoa toán học trong nước. Các sách của Sputnik Education thiên về chất lượng, nội dung rành rọt, chữ nghĩa sắc sảo, tuy nhiên cũng vẫn là chưa thực sự đẹp. Dẫu hay nhưng chưa có đẹp, e rằng sự đón nhận của

các độc giả vẫn phần nào đó có sự hạn chế.

Cùng lúc với những sự tiến lên của tủ sách “Đam mê toán học” của Long Minh, tủ sách khoa giáo của Sputnik Education, thì tủ sách “Khoa học khám phá” của nhóm dịch giả Phạm Văn Thiều vẫn tiếp tục thể hiện được năng suất làm việc đáng ngưỡng mộ của mình. Lần này sách **Love and Math** của một người cộng sự gần gũi với GS Ngô Bảo Châu là GS Edward Frenkel sẽ được dịch và phát hành bởi công ty sách Nhã Nam. Cuốn sách này sẽ là một sự tiếp nối tuyệt vời của cuốn sách rất hay trước đó về Perelman mà chính nhóm dịch giả này đã dịch là “*Perfect Rigor – Thiên tài kì dị và cuộc đột phá toán học của thế kỷ*”. Hai cuốn sách như hai vế của một gạch nối, gạch nối về một sự biến chuyển kì lạ ngay trong lòng hệ thống giáo dục nước Nga Xô Viết. Thông qua hành trình toán học của Perelman và Frenkel, những bạn độc giả, nhất là những người làm giáo dục và giáo dục toán học trong nước, chắc chắn sẽ rút ra được rất nhiều bài học quý giá. Người ta nói rằng, trình độ của một dịch giả, đầu tiên sẽ được thể hiện qua việc chọn sách. Sách cốt tinh, không cần nhiều. Nhóm dịch giả do TS Phạm Văn Thiều đang lặng lẽ xây dựng thực sự đã phần nào làm được điều đó.



**Perelman, Frenkel, những hành trình toán học kì lạ và những câu chuyện về giáo dục toán học ở nước Nga Xô Viết.**

Hướng tới một sự thay đổi mới với xã hội, bắt đầu bằng một dòng sách “Toán học thân thiện”, một nhà sách (giấu tên) đã tiến hành giao dịch tác quyền và đã bắt đầu chuyển ngữ cùng một lúc gần chục đầu sách toán các loại, chủ yếu hướng tới đối

tương học sinh cấp một và cấp hai, trong đó, tiêu biểu có lẽ là cuốn **The cartoon guide to statistics** của Larry Gonick. Cuốn “Truyện tranh để học xác suất thống kê” này sẽ là một cú debut cho một tủ sách tiếp theo có tên dự kiến là “Em không sợ toán.” Đây cũng sẽ là một sự mạo hiểm, vì xác suất thống kê hiện vẫn đang là một mảng bị bỏ trống gần như hoàn toàn ở cấp độ trung học, điều mà ở các nước phương Tây, đã trở thành một điều gì đó hiển nhiên trong hệ thống nền tảng kiến thức căn bản.

Một bộ sách khác cũng đã gần như được hoàn thành, là bộ sách “Cơ sở” của Euclid (**Euclid's Element**) do GS Đàm Thanh Sơn, Blogger 5xu Nguyễn Phương Văn và một nhóm cộng sự tổ chức biên dịch. Theo dự kiến, NXB Kim Đồng sẽ là đơn vị phát hành bản dịch này. Tuy đây là một bộ sách kinh điển, và nhóm dịch giả cũng rất chất lượng. Nhưng thực sự có nhiều câu hỏi đặt ra về khả năng thành công của dự án này. Thứ nhất là về việc một bộ sách khi có quá nhiều người tham gia dịch thuật liệu sẽ đi tới đâu, tính đồng nhất và sự cân đối giữa các phần khác nhau sẽ như thế nào. Thứ hai là thực sự thì liệu kiến thức trong bộ sách này bây giờ sẽ có giá trị ra sao đối với các thế hệ bạn đọc tiếp theo, sẽ sử dụng được một số tư duy hoặc kiến thức ở mức độ nào đó, hay đơn thuần chỉ là sự hồi tưởng dĩ vãng. Và thứ ba, là thường khi những bộ sách như thế này, sẽ có giá trị nhiều hơn ở chính những bình chú của người biên dịch, nhưng đây lại điều mà có lẽ sẽ không được nhóm biên dịch thực hiện. Và nếu xét trên ba câu hỏi như vậy, thì chuyện phát hành bản dịch này, cũng có thể sẽ không hẳn đạt lại kì vọng như lúc ban đầu. Tất nhiên, tới tận thời điểm này thì NXB Kim Đồng cũng vẫn chưa có những động thái cụ thể gì hơn, mặc dù bản dịch có lẽ đã gần như hoàn thiện. Như vậy, vẫn còn quá sớm để nói về tương lai của bản dịch ấy. Nhưng dù như thế nào, thì sự nhiệt tâm của tất cả các đơn vị đang tham gia công cuộc tiểu dịch thuật các sách toán học như thế này là rất đáng trân trọng! Còn bây giờ, trong thời gian chờ đợi, lại mời độc giả của Epsilon đọc lại những dòng giới thiệu dưới đây của GS Ngô Bảo Châu về bộ “Cơ sở” của Euclid cách đây nhiều ngày.

Tác phẩm Cơ sở của Euclid là một bộ phận của cái gọi là phép màu Hy Lạp. Ở xứ này, lần đầu tiên con người có ý thức về khả năng chứng minh dựa trên có sở của logic hình thức, và do đó không thể bắt bẻ được. Nó là một bước tiến rất xa so với các nền văn minh cùng thời nơi toán học có thể rất phát triển nhưng chỉ phát triển như một công cụ đo đạc trực tiếp phục vụ cuộc sống hàng ngày. Thực ra, định lý Pythagore đã được chứng minh ở Ấn độ từ 600 năm, ở Trung Quốc từ 500 năm trước công nguyên, tức là 200 năm trước khi bộ sách Cơ sở ra đời. Những khám phá thú vị này không làm lung lay lý thuyết về phép màu nhiệm Hy Lạp. Trong khi Á Đông đặt trọng tâm vào Nghĩa và coi thường Ngữ (pháp), ở Hy Lạp người ta đã có ý thức về sức mạnh của ngôn ngữ.

GS. Ngô Bảo Châu<sup>(3)</sup>.

Viết ra chứng minh là một thay đổi cơ bản về chất: cái trực quan rất riêng của bạn đã trở thành một khách thể tồn tại độc lập với bạn. Về mặt nguyên tắc, người khác có thể đọc lại và hiểu, không cần phải mò mẫm lại con đường của bạn đi qua, không cần phải trải nghiệm lại những khó nhọc mà bạn đã gặp. Con đường gắn bó với bao buồn vui của ta, đối với người khác chỉ là một phương tiện để đi từ một điểm A đến một điểm B. Nhưng đây là cái giá phải trả để ta có quyền hy vọng rằng người khác sẽ đi xa hơn. Deligne viết thế này về một chứng minh lý tưởng mà không mấy khi, không mấy ai đạt tới: "*nothing should remain visible of the efforts it cost to reach an understanding.*"

GS. Ngô Bảo Châu<sup>(3)</sup>

Giới thiệu với độc giả của Epsilon một số trong số những bản thảo chuẩn bị đem in của rất nhiều các nhà sách, đặt trong bối cảnh lịch sử chuyện sách vở ở Đức và Nhật, cũng là để hi vọng các bạn có được những thông tin và những cách nhìn khoáng đạt hơn về chuyện sách toán ở Việt Nam nói riêng và chuyện sách vở nói chung. Người nước bạn đã dành, nhưng cũng phải nhìn lại rằng, thực ra, sách toán ở Việt Nam không phải là ít, nhưng cũng không phải là không hỗn loạn. Có rất nhiều sách chất lượng, nhưng bên cạnh đó cũng có không ít những sách thị trường, chuyện ấy áu cũng không thể tránh khỏi. Cho

nên, người làm sách trước mỗi khi đem in một cuốn sách, đều mong sách tới được tay độc giả, và tới thật sớm. Nhưng đây mới chỉ là một khâu, bởi vì nếu các nhà sách mong mỏi một phần, thì các tác giả đã viết ra những cuốn sách, sẽ mong mỏi sách tới tay bạn đọc và được bạn đọc cùng chia sẻ những điều trong sách bao lần nhiều hơn. Tôi hay nói vui rằng, có những sách được in ra tới triệu bản, tới tay triệu người, nhưng không mấy ai đọc, nên nếu đem phép nhân số lượng với số tỉ lệ đọc sách lại thì có lẽ chẳng còn bao nhiêu. Cho nên, đây cũng là điều mà bản thân những người làm sách cũng nên lưu tâm, để tránh lại bị rơi vào bệnh thành tích mà mất đi thực chất. Rằng không chỉ in sách ra và bán hết đã là thành công, mà cái chủ yếu, là độc giả đã đọc và đạt được những gì, ấy mới là cái điều cần hướng tới về chung cuộc vậy.

**<Bài viết này đã được sự cho phép của các đơn vị đang sở hữu tác quyền của các bản thảo đang chuẩn bị đem in>**

Trí Ngủ  
10/06/2015  
Hà Nội

**Trích dẫn:**

1. Tại sao người Nhật mê đọc sách? – Nguyễn Xuân Xanh
2. Bản báo cáo của Émile Vayrac – Blog Quachhien
3. Yêu ngôn – Ngô Bảo Châu

Tạp chí Epsilon, Số 03, 06/2015.

---

# CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

TRẦN NAM DŨNG

(Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TP. HCM)

## Giới thiệu

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ , một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới.

Ban Biên tập khuyến khích các độc giả gửi lời giải (toute phần hoặc từng phần) cho Ban Biên tập. Các lời giải hay sẽ được chọn đăng trong các số tiếp theo (N+3). Thư điện tử xin gửi về theo địa chỉ trannam dung@yahoo.com, tiêu đề bắt đầu bởi:

"[Epsilon] [Lời giải]"

Trong số này chúng tôi chọn đăng chuỗi bài toán về Khối vuông Rubik được Alexey Kanel-Belov, Ilya Ivanov-Pogodaev, Alexey Malistov, Dmitriy Baranov, Ivan Mitrofanov đề xuất cho Hội nghị mùa hè của Cuộc thi toán giữa các thành phố, năm 2008. Đặc biệt, dành cho các học sinh lớp lớn tiểu học, các học sinh THCS, THPT và các thầy cô giáo phổ thông chúng tôi giới thiệu chuỗi bài toán Phát triển tư duy tổ hợp qua các bài toán đếm.

## 1. Phát triển tư duy tổ hợp qua các bài toán đếm

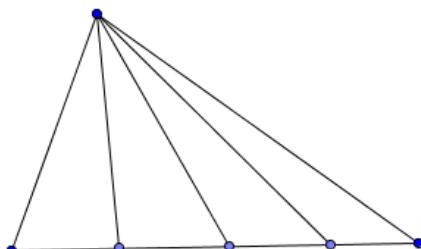
Đếm số đoạn thẳng, số tam giác, số hình vuông không phải để cho vui mà thực ra hình thành các tư duy tổ hợp rất quan

trọng: biết chia trường hợp, biết phân loại, biết dự đoán quy luật, biết tổng quát hóa, biết loại trừ ... Dưới đây là chuỗi các bài toán đếm dành cho các học sinh lớp lớn của tiểu học và các lớp Trung học cơ sở. Với những tư duy tổ hợp được hình thành ở mức độ trực giác, khi được trang bị các công cụ tổ hợp, học sinh sẽ dễ dàng hiểu nhanh, hiểu sâu các khái niệm và có khả năng áp dụng.

**Bài toán 1.** Có 5 điểm nằm trên một đường thẳng. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành?

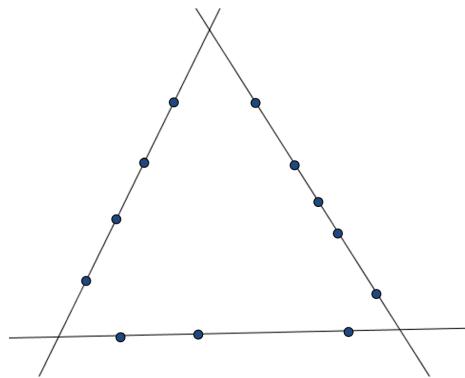


**Bài toán 2.** Có 5 điểm nằm trên một đường thẳng và 1 điểm nằm ngoài đường thẳng đó. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành?



**Bài toán 3.** Có 4 điểm trên 1 đường thẳng và 5 điểm trên một đường thẳng khác. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đó?



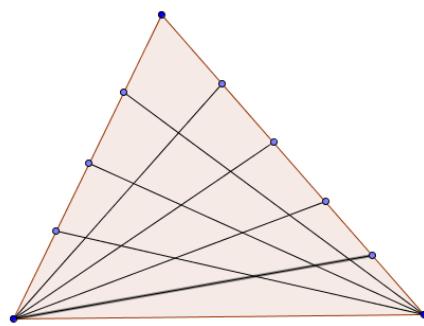


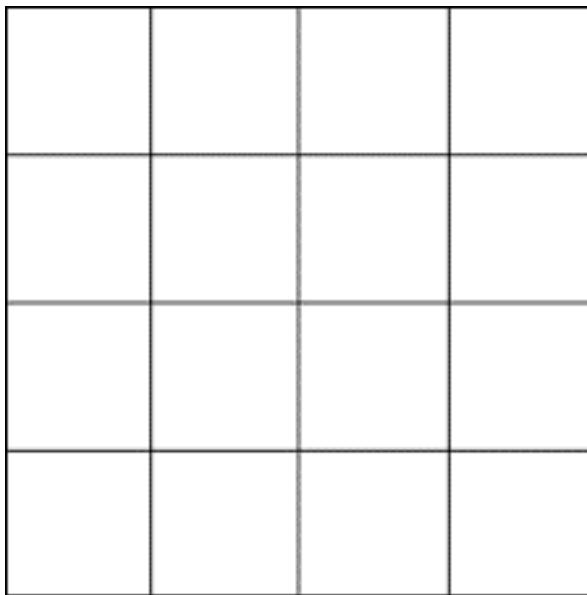
**Bài toán 4.** Trên 3 cạnh của một tam giác có tương ứng 3, 4, 5 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đó

**Bài toán 5.** Có 9 điểm tạo thành 1 lưới vuông  $3 \times 3$ . Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho?



**Bài toán 6.** Có bao nhiêu tam giác trong hình sau?





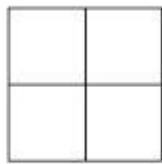
**Bài toán 7.** Trong hình trên có bao nhiêu hình vuông?

**Bài toán 8.** Trong các hình sau có tương ứng bao nhiêu hình chữ nhật?

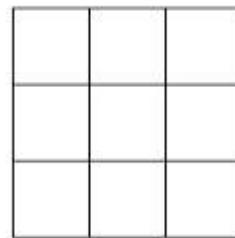
$n = 1$



$n = 2$

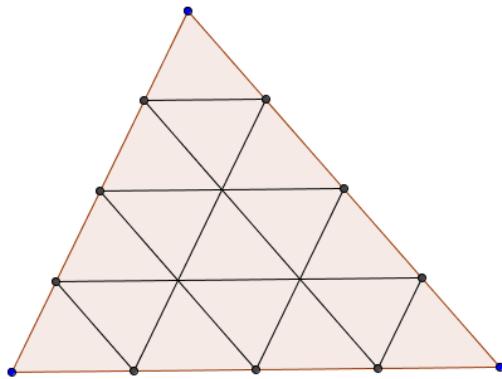


$n = 3$



**Bài toán 9.** Thủ dự đoán xem trong hình ở bài 7 có bao nhiêu hình chữ nhật? Kiểm tra dự đoán của bạn bằng cách đếm trực tiếp.

**Bài toán 10.** Có bao nhiêu hình bình hành trong hình sau



**Bài toán 11.** Vẽ 9 điểm trên mặt phẳng sao cho có đúng 74 tam giác có đỉnh tại các điểm này.

## 2. Khối vuông Rubik và bài toán Higman

Đối tượng nghiên cứu của chúng ta là khối vuông Rubik và các trò chơi gần với nó. Trước khi bắt đầu nghiên cứu khối vuông Rubik, ta hãy làm một số bài toán chuẩn bị.

Các bài toán chuẩn bị:

**Bài toán 1.** Có 12 khối lập phương xếp thành một dãy, được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 12 từ trái sang phải. Khi chiếc trống thần gõ một tiếng, hai hình lập phương nào đó sẽ đổi chỗ cho nhau. Sau 333 tiếng trống, mỗi khối lập phương sẽ nhảy lên vì hạnh phúc nếu thấy bên phải nó có một số lẻ các hình lập phương với số nhỏ hơn số của nó. Hỏi có thể có đúng 6 hình lập phương nhảy lên vì hạnh phúc?

**Bài toán 2.** Có 42 khối lập phương xếp thành một hàng, được đánh số theo thứ tự tăng dần. Một nước đi cho phép đổi chỗ hai khối lập phương bất kỳ. Có thể xảy ra tình huống sau đúng 2008 nước đi thì hai khối lập phương đầu đổi chỗ cho nhau, còn tất cả các khối lập phương khác vẫn ở chỗ cũ?

**Bài toán 3.** Có 20 khối lập phương có màu khác nhau xếp thành một vòng tròn. Với mỗi nước đi có thể nhắc 3 khối lập phương lên và xếp khối lập phương thứ nhất vào chỗ của khối thứ hai, khối thứ hai vào chỗ của khối thứ ba và khối thứ ba vào chỗ của khối thứ nhất. Có thể xảy ra khả năng sau một số bước thì tất cả các khối lập phương đều dịch sang 1 bước so với cũ theo chiều kim đồng hồ?

**Bài toán 4.** Các mặt của một khối lập phương được sơn bằng các màu khác nhau. Từ một số các khối lập phương như thế ta xếp thành hình chữ nhật  $m \times n$ . Ta có thể chọn mọi dãy các khối nhỏ (dọc hay ngang) và xoay đồng thời các khối nhỏ theo chiều ngang (hay chiều dọc). Chứng minh rằng ta có thể xoay tất cả các khối nhỏ để các mặt trên có màu giống nhau.

## 2.1. Chuỗi A - Khối vuông (lập phương) Rubik

Để rõ ràng ta sẽ gọi khối lập phương là cả khối lập phương lớn, còn khối nhỏ sẽ là các khối lập phương nhỏ tạo thành khối lập phương lớn. Mỗi một mặt của khối lập phương, được tạo thành từ 9 khối nhỏ, có thể quay theo chiều kim đồng hồ và ngược chiều kim đồng hồ. Có thể thực hiện một vài phép quay như thế liên tiếp và ta sẽ gọi là tổ hợp các phép quay, hay đơn giản là tổ hợp.

Các mặt của khối lập phương sẽ được ký hiệu bằng các chữ in hoa, ví dụ  $A, B, C$ . Phép quay theo chiều kim đồng hồ một mặt nào đó sẽ ký hiệu đơn giản bằng đúng chữ cái đó luôn, ví dụ  $A$ . Phép quay ngược chiều kim đồng hồ được ký hiệu là  $A^{-1}$ . Tổ hợp các phép quay sẽ được viết bằng dãy các chữ cái: ví dụ ký pháp  $ABA^{-1}C$  nghĩa là đầu tiên ta quay mặt  $A$  theo chiều kim đồng hồ, sau đó quay mặt  $B$  theo chiều kim đồng hồ, sau đó mặt  $A$  ngược chiều kim đồng hồ và cuối cùng là mặt  $C$  theo chiều kim đồng hồ.

Với các phép quay (hay các tổ hợp)  $X$  và  $Y$  ta gọi giao hoán tử của chúng là tổ hợp  $XYX^{-1}Y^{-1}$ .

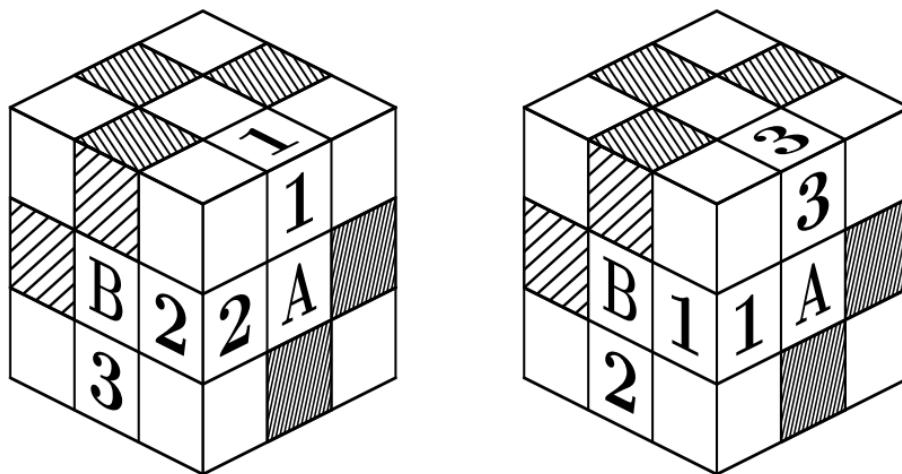
Các khối nhỏ có 3 loại: loại trung tâm - ở giữa các mặt, góc - ở các góc khối lập phương và giữa - ở giữa các cạnh của khối lập phương. Ta tưởng tượng rằng các khối góc và giữa không được gắn với gì cả, tức là ta có thể thỏa mái gỡ ra và chuyển.

Ở đây các khối góc đổi chỗ cho nhau và các khối giữa đổi chỗ cho nhau, và các mặt của các khối nhỏ nhìn thấy từ bên ngoài trước khi đổi vẫn là các mặt ngoài sau khi đổi. (Các khối trung tâm ta không bao giờ đổi chỗ). Mọi vị trí có thể thu được bằng cách đổi chỗ như vậy ta gọi là trạng thái. Ta sẽ nói khối lập phương mà tất cả các mặt đều đơn sắc (cùng một màu) là ở trạng thái đúng. Ta sẽ nói khối nhỏ ở vị trí đúng nếu như màu các mặt của nó giống như màu tại trạng thái đúng của khối lập phương. Nếu như từ một trạng thái ta có thể bằng một tổ hợp các bước thu được một trạng thái khác thì ta nói rằng các trạng thái này liên thông với nhau. Trạng thái giải được là trạng thái liên thông với trạng thái đúng.

**A1.** Một tổ hợp các phép quay đưa khối lập phương ra khỏi trạng thái ban đầu. Chứng minh rằng nếu ta lặp lại một số lần thì ta lại thu được trạng thái ban đầu.

**A2.** Tồn tại hay không một tổ hợp toàn năng các phép quay mà nếu áp dụng nó một số khác nhau lần, có thể chuyển khối lập phương về trạng thái đúng từ mọi trạng thái giải được?

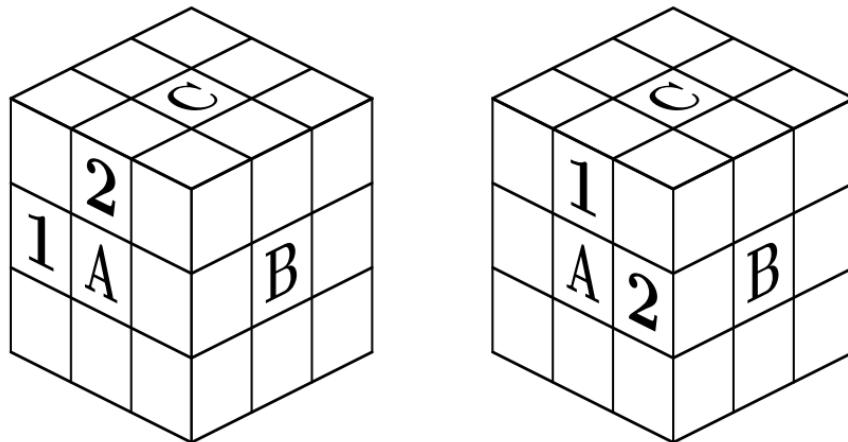
**A3.** Hãy nghĩ ra tổ hợp các phép quay cho phép đổi chỗ các khối nhỏ 1, 2, 3 và giữ các khối giữa khác tại chỗ (hình 15.1).



Hình 15.1: Hãy nghĩ ra tổ hợp các phép quay cho phép đổi chỗ các khối nhỏ 1, 2, 3 và giữ các khối giữa khác tại chỗ.

**A4.** Chứng minh rằng tổ hợp  $A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$  sẽ đổi chỗ các

khối nhỏ 1 và 2 và giữ các khối giữa khác tại chỗ (hình 15.2, bên trái).



Hình 15.2: Minh họa cho bài toán A4 (bên trái) và A5 (bên phải).

**A5.** Hãy tìm tổ hợp cho phép các khối nhỏ 1 và 2 đồng thời xoay tại chỗ còn các khối giữa khác thì vẫn ở chỗ cũ và ở thế cũ (hình 15.2, bên phải)?

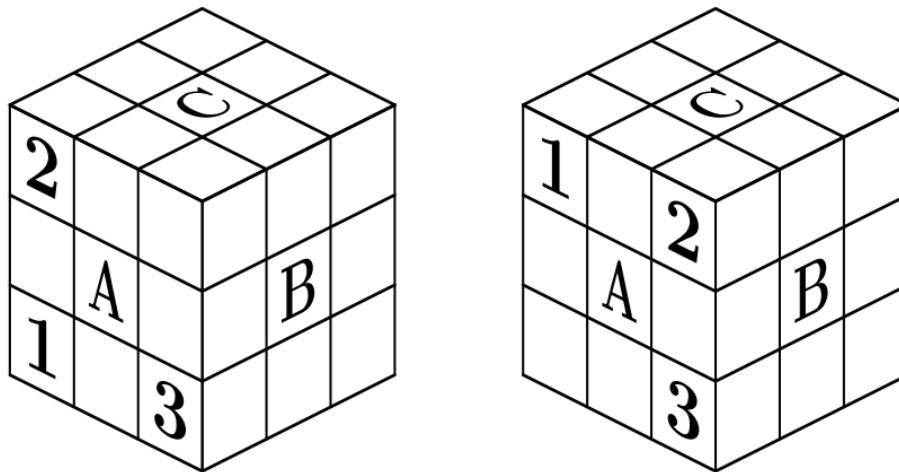
**A6.** Chứng minh rằng không tồn tại tổ hợp cho phép khối nhỏ 1 xoay tại chỗ còn các khối giữa khác thì vẫn ở chỗ cũ và ở thế cũ (hình 15.2, bên phải).

**A7.** Giả sử trạng thái của khối lập phương là giải được. Hãy mô tả cách đặt tất cả các khối giữa vào chỗ của mình. Giả sử trạng thái của khối lập phương không nhất thiết giải được. Hãy xét tất cả các trạng thái của các khối giữa và mô tả tất cả các trạng thái liên thông với trạng thái đó.

**A8.** Hãy tìm một tổ hợp không tầm thường các phép quay mà nếu áp dụng 3 lần, nó sẽ không tạo ra thay đổi nào.

**A9.** Hãy tìm một tổ hợp các phép quay, cho phép đổi chỗ vòng tròn các khối nhỏ 1, 2, 3 (hình 15.3, bên trái), và không làm thay đổi vị trí của các khối góc và giữ tất cả các khối giữa khác ở chỗ cũ và ở thế cũ.

**A10.** Giả sử trạng thái của khối lập phương là giải được. Hãy mô tả cách xếp các khối góc vào vị trí của mình mà không làm



Hình 15.3: Minh họa cho bài toán A9 (bên trái) và A12 (bên phải).

thay đổi vị trí của các khối giữa. Giả sử trạng thái của khối lập phương không nhất thiết giải được. Hãy xét tất cả các trạng thái của các khối góc và mô tả tất cả các trạng thái liên thông với trạng thái đó.

**A11.** Chứng minh rằng không tồn tại một tổ chức các phép quay cho phép xoay tại chỗ một khối góc và giữ tất cả các khối khác tại chỗ đó và tại thế đó.

**A12.** Hãy tìm một tổ hợp các phép quay cho phép đồng thời xoay các khối nhỏ 1, 2, 3 (hình 15.3, bên phải) sang một góc 120 độ theo chiều kim đồng hồ và không thay đổi vị trí các khối nhỏ khác.

**A13.** Hãy mô tả cách xoay khối Rubik, nếu biết rằng nó ở trạng thái giải được.

**A14.** Làm sao theo thế của các khối góc xác định được ta có thể xếp thành khối Rubik được không, nếu chúng ở đúng chỗ của chúng, còn các khối giữa thì ở vị trí đúng?

**A15.** Hãy tìm số tối đa các trạng thái đôi một không liên thông của khối lập phương.

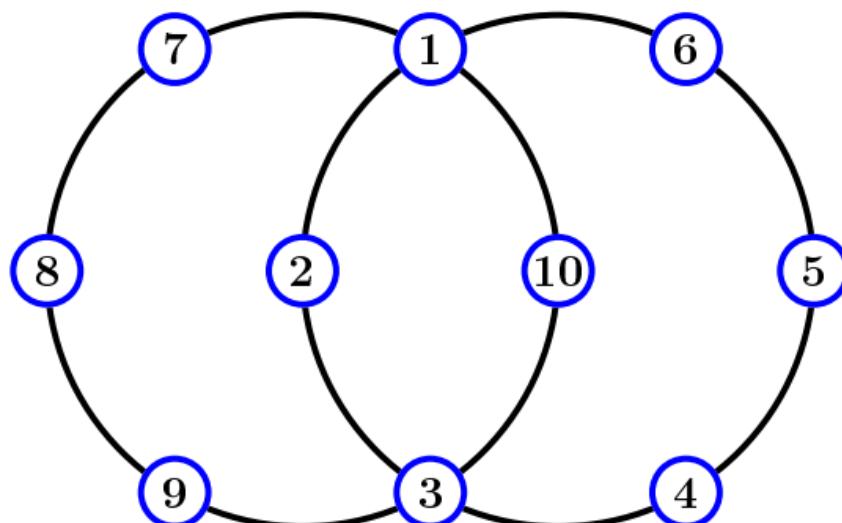
**A16.** Hãy tính số trạng thái giải được của khối vuông Rubik.

## 2.2. Chuỗi B

Trong các bài toán của chuỗi này, ta sẽ xem xét một số các trò chơi nát óc tương tự. Ta sẽ nói hai tổ hợp phép quay là khác nhau, nếu như, nếu cùng áp dụng vào một trạng thái, ta sẽ thu được các kết quả khác nhau.

**B1.** Trên bàn cờ ta xếp các số từ 1 đến 64, mỗi ô một số. Cho phép chọn một hình vuông  $2 \times 2$  bất kỳ và đổi chỗ các số trong đó theo chiều kim đồng hồ. Chứng minh rằng sử dụng các phép toán này, ta có thể thu được mọi cách xếp.

**B2.** Xét khối  $2 \times 2 \times 2$ . Hãy mô tả tất cả các trạng thái giải được. Có bao nhiêu trạng thái như vậy?

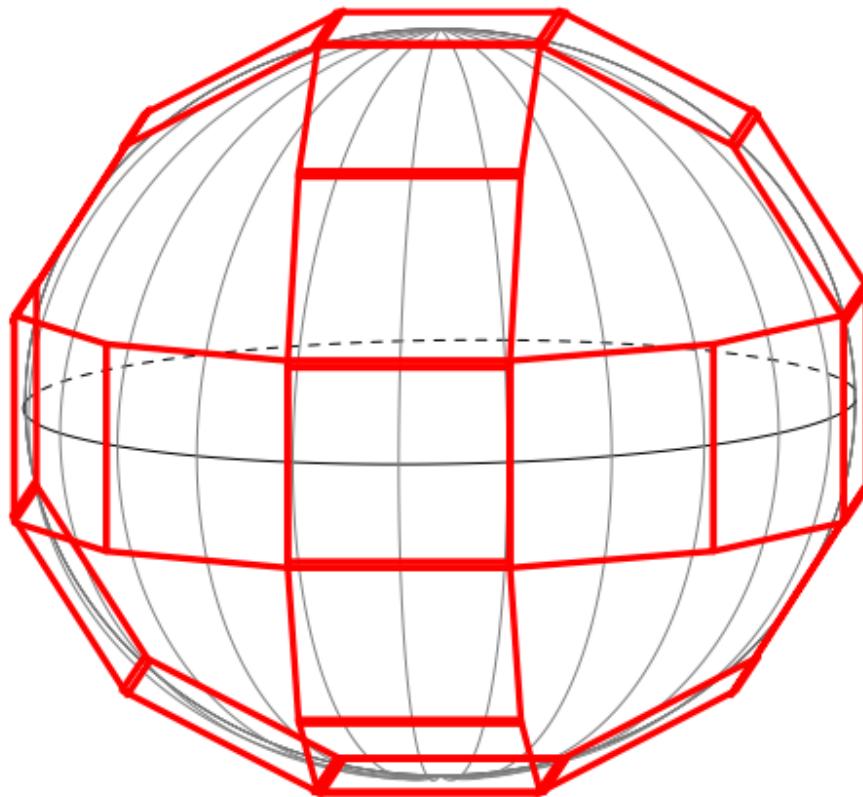


Hình 15.4: “Chiếc vòng Hungary”.

**B3.** Xét trò chơi “Chiếc vòng Hungary” (xem hình 15.4). Đây là trò chơi nát óc phẳng, được tạo thành bởi 2 hay một vài vòng tròn dính với nhau, trên đó có một số ô tròn được đánh số. Một số trong số các ô tròn này có thể thuộc vào hơn một vòng tròn. Mỗi một bước đi, ta di chuyển một vòng tròn theo một hay vài nắc cùng với tất cả các ô của nó. Khoảng cách giữa các ô tròn là như nhau. Ô tròn thuộc về nhiều hơn một vòng tròn có thể chạy theo bất cứ vòng tròn nào chứa nó. Để đơn giản, ta xét trò

chơi với hai vòng tròn, mỗi vòng chứa 6 ô tròn. Các vòng 1 và 3 có di chuyển cùng bất cứ vòng nào. Chú ý rằng mỗi một nước đi tương ứng với một hoán vị trên tập hợp các số  $\{1, 2, \dots, 10\}$ . Hãy mô tả tất cả các trạng thái có thể chuyển đến được từ trạng thái ban đầu.

**B4.** Xét trò chơi “Xích đạo” (xem hình 15.5). Trò chơi nát óc này cấu tạo từ một mặt cầu, được bao bọc bởi 3 chiếc đai, mỗi chiếc chia thành 12 phần, có dạng phần của mặt cầu. Hai chiếc đai bất kỳ giao nhau dưới một góc vuông và có 2 mảnh chung, ta gọi là các nút. Có tất cả 6 nút. Cho phép di chuyển các đai sao cho mảnh này chuyển thành mảnh kia. Tổng số các mảnh có thể di chuyển là  $3 \times 12 - 6 = 30$ . Hãy mô tả tất cả các trạng thái có thể chuyển đến được từ trạng thái ban đầu.



Hình 15.5: Trò chơi “Xích đạo”.

**B5.** Xét khối vuông  $4 \times 4 \times 4$ . Hãy mô tả tất cả các trạng thái đến được.

**B6.** Xét trò chơi “15”. Trong hình vuông  $4 \times 4$  có 15 tâm bìa được đánh số từ 1 đến 15. Có 1 ô trống. Mỗi một nước đi cho phép chọn tâm bìa kề cạnh với ô trống và chuyển tâm bìa đó vào ô trống. Hãy mô tả tất cả các trạng thái đến được.

**B7.** Có tối đa bao nhiêu trạng thái đôi một không liên thông của khối vuông  $4 \times 4 \times 4$ ?

**B8.** Hãy tìm hệ các bất biến cho khối vuông  $4 \times 4 \times 4$ .

**B9.** Hãy tìm hệ các bất biến cho khối vuông  $n \times n \times n$ .

### 2.3. Chuỗi C

**C1.** Xét tứ diện đều. Ta có thể xoay tứ diện thế nào cho nó biến thành chính nó nhưng một số đỉnh có thể đổi chỗ. Có bao nhiêu cách chuyển như vậy?

**C2.** Câu hỏi tương tự cho hình lập phương. Các đường chéo của hình lập phương sẽ như thế nào trong các di chuyển này?

Giả sử ta có một khối đa diện đều. Cũng tương tự như phép quay khối vuông Rubik và các trò chơi nát óc khác, ta có thể thực hiện tổ hợp của các phép di chuyển. Rõ ràng tổ hợp này cũng là một phép di chuyển biến khối đa diện thành chính nó. Ta gọi tổ hợp của hai di chuyển như vậy là tích của hai phép di chuyển.

Ta sẽ gọi di chuyển mà đa diện nói chung không di chuyển gì cả và tất cả các đỉnh đứng yên tại chỗ là đơn vị. Nếu như có một di chuyển nào đó “nhân” với di chuyển đơn vị thì di chuyển đó không thay đổi.

**C3.** Giả sử có  $n$  phần tử. Xét tất cả các phép biến đổi sắp xếp các phần tử này theo một thứ tự khác. Ví dụ với  $n = 6$  thì có 6 sắp xếp như vậy:

1. Đổi chỗ 1 và 2, để yên 3;
2. Đổi chỗ 2 và 3, để yên 1;
3. Đổi chỗ 1 và 3, để yên 3;
4. Đổi 1 sang chỗ của 2, 2 sang chỗ của 3, 3 sang chỗ của 1 (xích độ dài 3);

5. Đổi 1 sang chỗ của 3, 3 sang chỗ của 2, 2 sang chỗ của 1 (xíc độ dài 3);
6. Để tất cả các phần tử tại chỗ.

Một cách tương tự có thể viết ra tất cả các sắp xếp (ta sẽ gọi là hoán vị) với mọi  $n$ . Tích của hai hoán vị là hoán vị thu được bằng cách áp dụng hoán vị thứ nhất, sau đó hoán vị thứ hai. Hoán vị nào sẽ là đơn vị?

Hãy kiểm tra rằng với mọi di chuyển  $A$ , tồn tại di chuyển  $A^{-1}$  mà  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ , trong đó  $E$  – di chuyển đơn vị. Hãy kiểm tra rằng quy tắc  $(AB)C = A(BC)$  được thỏa mãn.

**C4.** Xét tập hợp  $A$  – tập hợp tất cả các di chuyển biến đổi lập phương vào chính nó và  $B$  là tập hợp tất cả các hoán vị của 4 phần tử. Hãy chỉ ra tương ứng giữa hai tập hợp để tích trong tập hợp này tương ứng với tích trong tập hợp kia.

**Định nghĩa.** Tập hợp  $G$  mà các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

1. Với mỗi hai phần tử xác định tích của chúng thỏa mãn luật kết hợp  $(AB)C = A(BC)$  ( $A, B, C \in G$ );
2. Tồn tại phần tử đơn vị  $E \in G$  :  $AE = EA = A$  với mọi  $A \in G$ ;
3. Với mọi phần tử  $A \in G$  tồn tại phần tử nghịch đảo  $A^{-1} \in G$  :  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ;

được gọi là một nhóm.

Nhóm các hoán vị từ bài toán C3 được ký hiệu là  $S_n$ .

**C5.** Chứng minh rằng các tập hợp sau cùng các phép toán là nhóm:

1. Tập hợp các số nguyên theo phép cộng;
2. Tập hợp các số hữu tỷ dương theo phép nhân;
3. Tập hợp các dãy các phép quay của khối vuông Rubik theo phép nối (tổ hợp).

**C6.** Các tập hợp sau có phải là nhóm không:

1. Tập hợp các số hữu tỷ theo phép nhân;

2. Tập hợp các từ trong bảng chữ cái hữu hạn (có cả từ rỗng) đối với phép nối hai từ;
3. Tập hợp các từ từ các chữ cái  $\{a, b, c\}$  (kể cả từ rỗng), với điều kiện có thể thay đổi bất kỳ trong các từ  $XabcY, XbcaY, XcabY$  thành  $XY$  với mọi từ  $X$  và  $Y$  (tức là xóa  $abc, bca, cab$  từ mọi từ), cũng như thực hiện phép toán ngược (viết thêm các từ tương ứng);
4. Tập hợp các chuyển vị của 4 phần tử  $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$  và phép biến đổi đồng nhất?

Ghi chú: ký hiệu  $(123)(4567)$  có nghĩa là trong mỗi dấu ngoặc, các phần tử thay đổi vòng tròn:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightleftharpoons 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4$ .

**Định nghĩa.** Giả sử  $G$  là một nhóm,  $H$  là tập con của  $G$ . Nếu như  $H$  chứa phần tử đơn vị của nhóm  $G$  và nếu như  $H$  chứa tất cả các tích các phần tử của  $H$  và các nghịch đảo của chúng thì  $H$  được gọi là nhóm con.

**C7.** Giả sử  $H$  là nhóm con trong  $G$ . Chứng minh rằng  $H$  là một nhóm.

**C8.** Tìm tất cả các nhóm con của  $S_3$ .

**C9.** Định lý Lagrange. Chứng minh rằng số phần tử trong mọi nhóm chia hết cho số phần tử trong một nhóm con bất kỳ của nó.

**C10.** Tìm nhóm con gồm  $n!/2$  phần tử trong  $S_n$ , trong đó  $n > 2$ .

Tà gọi nhóm trong bài toán trước là  $A_n$

**C11.** Chứng minh rằng mọi phần tử của  $A_n$  là tích của các xích độ dài 3.

**Định nghĩa.** Phần tử  $aba^{-1}b^{-1}$  được gọi là giao hoán tử của các phần tử  $a$  và  $b$ .

**Định nghĩa.** Giao hoán tử của nhóm  $G$  là nhóm con gồm tất cả các tích các giao hoán tử.

**C12.** Tìm giao hoán tử của các nhóm  $S_3, A_3, A_4, S_n, A_n$ .

Ta chọn trong một nhó  $G$  nào đó một phần tử  $a$ . Mỗi một phần tử của nhó ta cho tương ứng với phần tử  $a^{-1}ga$ . Phần tử này được gọi là liên hợp với  $g$  qua  $a$ , hay đơn giản là liên hợp.

**C13.** Giả sử  $H$  là nhó con của  $G$ . Chứng minh rằng  $a^{-1}Ha$  - tập hợp các phần tử liên hợp với  $H$  cũng là nhó con. Các nhó con  $H$  và  $a^{-1}Ha$  được gọi là liên hợp.

Định nghĩa. Nhó con mà qua mọi phép liên hợp đều biến thành chính nó được gọi là chuẩn tắc.

**C14.** Chứng minh rằng giao hoán tử của nhó, phần tử đơn vị và cả nhó là các nhó con chuẩn tắc.

Trong một nhó bất kỳ có hai nhó con chuẩn tắc tám thường là phần tử đơn vị và cả nhó. Các nhó con chuẩn tắc khác, nếu có, sẽ được gọi là không tám thường. Các nhó không có nhó con chuẩn tắc không tám thường được gọi là nhó đơn.

**C15.** Với giá trị nào của  $n$  thì  $S_n$  là nhó đơn.

**C16.** Chứng minh rằng  $A_n$  là nhó đơn với  $n > 5$ .

**C17.** Nhó nào trong các nhó  $S_n$  hoặc  $A_n$  tương ứng với các nhó dịch chuyển của khôi lập phương và khôi tứ diện đều.

**C18.** Chứng minh rằng nhó các phép dịch chuyển của biến đổi của icosaedron tương ứng với  $A_5$ .

**C19.** Hãy tìm một nhó có 8 phần tử mà trong đó tồn tại hai phần tử  $a$  và  $b$  sao cho  $ab \neq ba$ .

(còn tiếp phần 2)