BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ
KHOA SƯ PHẠM
BỘ MÔN TOÁN HỌC

GIÁO TRÌNH

TOÁN RỜI RẠC

(Discrete mathematics)

✍ Biên soạn
Th.s Bùi Anh Kiệt
Th.s Trương Quốc Bảo

Năm 2003

LỜI NÓI ĐẦU

Toán rời rạc là một lĩnh vực của toán học nghiên cứu về các đối tượng rời rạc. Mặc dù các đối tượng là rời rạc, không có ý nghĩa nhưng khi chúng ta liên kết các đối tượng rời rạc lại với nhau ta lại có được những thông tin rất lý thú và mang nhiều ý nghĩa. Chúng ta sẽ sử dụng công cụ của toán học rời rạc khi phải đếm các đối tượng, nghiên cứu mối quan hệ giữa các tập rời rạc, khi nghiên cứu các quá trình hữu hạn. Một trong những nguyên nhân chủ yếu làm tăng tầm quan trọng của toán rời rạc là việc lưu trữ và xử lý thông tin trên máy tính điện tử mà bản chất là các quá trình rời rạc. Ba lĩnh vực có nhiều ứng dụng của toán học rời rạc là *lý thuyết tổ hợp, hàm đại số logic (đại số Boole) và lý thuyết đồ thị*. Các vấn đề về lý thuyết tổ hợp, hàm đại số logic (đại số Boole) sẽ được trình bày trong các giáo trình khác. Trong phạm vi giáo trình này chúng tôi chỉ trình bày lĩnh vực có thể xem là quan trọng nhất và có nhiều ứng dụng nhất của toán học rời rạc là *Lý thuyết đồ thị*.

Lý thuyết đồ thị được khai sinh kể từ công trình nghiên cứu về bài toán *"7 cây cầu Königsberg"* của nhà toán học *Leonhard Euler (1707 - 1783)* được công bố vào năm 1736. Từ đó đến nay, đã có nhiều nhà toán học trên thế giới nghiên cứu làm cho lý thuyết đồ thị ngày càng phong phú và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như *mạng điện tử, lý thuyết mã, vận trù học, kinh tế học,...* Đặc biệt, trong khoảng vài chục năm trở lại đây, cùng với sự ra đời của *máy tính điện tử và sự phát triển nhanh chóng của Tin học*, Lý thuyết đồ thị càng được quan tâm nhiều hơn, đặc biệt là các thuật toán và ứng dụng trên đồ thị. Hiện nay, môn học này đã được xem là kiến thức cơ sở của khoa học máy tính.

Giáo trình này được biên soạn từ bài giảng của các tác giả trong các năm qua ở Trường Đại học Cần thơ và các trung tâm đào tạo liên kết trong vùng Đồng bằng sông Cửu long, nhằm đáp ứng nhu cầu tài liệu tham khảo và học tập bằng tiếng Việt của sinh viên. Đây là giáo trình dành cho sinh viên sư phạm Toán Tin, Toán nên hầu hết các vấn đề được trình bày đều được chứng minh chặt chẽ, rõ ràng. Đồng thời, cũng kèm theo một số thuật toán và các ứng dụng thực tế cũng như ứng dụng trên máy tính. Các sinh viên chuyên ngành Lý Tin, Tin học và Điện tử cũng có thể sử dụng giáo trình này như một tài liệu tham khảo hữu ích.

Nội dung của giáo trình bao gồm các nội dung cơ bản nhất của lý thuyết đồ thị có kèm các bài tập áp dụng và được chia làm 04 chương:

Chương 1: Trình bày các thuật ngữ, định nghĩa và khái niệm cơ bản của đồ thị như đồ thị vô hướng, có hướng, các loại đồ thị, đường đi, chu trình, tính liên thông, phương pháp tổng quát để giải quyết một bài toán bằng lý thuyết đồ thị,...

Chương 2: Trình bày các bài toán về đường đi Euler, Hamilton, các giải thuật tìm đường đi ngắn nhất như Dijkstra, Heterdetmin cùng một số ví dụ ứng dụng.

Chương 3: Trình bày các vấn đề liên quan đến đồ thị phẳng và bài toán tô màu đồ thị cùng một số ứng dụng.

Chương 4: Khảo sát tổng quát về cấu trúc cây và các vấn đề liên quan, đặc biệt là cây nhị phân. Một số ứng dụng của cây trong tin học cũng được trình bày như các phép duyệt cây, cây biểu thức số học, ký pháp nghịch đảo Ba Lan (RPN), các thuật toán tìm cây phủ tối tiểu,...

Cuối mỗi chương có phần bài tập giúp sinh viên rèn luyện và kiểm tra lại những kiến thức đã được học. Một số vấn đề trong phần lý thuyết cũng còn để mở xem như phần bài tập tự giải của sinh viên.

Do giới hạn về mặt thời gian (giáo trình được giảng dạy trong 45 tiết) nên chúng tôi chỉ đề cập đến các vấn đề cơ bản nhất của lý thuyết đồ thị. Các vấn đề mở rộng và chuyên sâu của lý thuyết của lý thuyết đồ thị sẽ được trình bày thêm trong quá trình giảng dạy trên lớp và xem là các vấn đề mở cho sinh viên tự học, nghiên cứu thêm khi làm tiểu luận, luận văn tốt nghiệp.

Tuy đã hết sức cố gắng, song với quỹ thời gian và kiến thức hạn chế chắc chắn giáo trình vẫn còn những vấn đề khiếm khuyết, chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến quý báu của quý thầy cô, bạn bè đồng nghiệp và các em sinh viên để giáo trình được hoàn thiện hơn.

Th.S. Bùi Anh Kiệt
Th.S. Trương Quốc Bảo
Cần thơ, tháng 12 năm 2003

Chương I

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

I. Các khái niệm cơ bản

1. Đồ thị

Đồ thị (graph) G = (V,E) là một bộ gồm 2 tập hợp V và E, trong đó $V \neq \emptyset$ các phần tử của V được gọi là các đỉnh (vertices), các phần tử của E được gọi là các cạnh (edges), mỗi cạnh tương ứng với 2 đỉnh.

Nếu cạnh e tương ứng với 2 đỉnh v, w thì ta nói v và w là 2 đỉnh kề (hay 2 đỉnh liên kết) (adjacent) với nhau. Ta cũng nói cạnh e tới hay liên thuộc (incident) với các đỉnh v và w. Ký hiệu $e = \overline{vw}$ hay $v \overset{e}{—} w$ (hoặc e = vw; e = wv). Cạnh $\overline{vv}$ tương ứng với 2 đỉnh trùng nhau gọi là một vòng hay khuyên (loop) tại v.

Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh được gọi là 2 cạnh song song (paralleledges) hay cạnh bội. Đồ thị không có cạnh song song và cũng không có vòng được gọi là đơn đồ thị (simple graph). Ngược lại là đa đồ thị (multigraph).

Đồ thị mà mọi cặp đỉnh của nó đều kề nhau được gọi là đồ thị đầy đủ. (Complete graph). Đơn đồ thị đầy đủ bao gồm n đỉnh được ký hiệu: Kn.

Đồ thị G' = (V',E') được gọi là một đồ thị con (subgraph) của đồ thị G = (V,E) nếu $V' \subset V$; $E' \subset E$.

Đồ thị có số đỉnh và số cạnh hữu hạn được gọi là đồ thị hữu hạn (finite graph), ngược lại được gọi là đồ thị vô hạn (Infinite graph).

Trong giáo trình này, chúng ta chỉ khảo sát các đồ thị hữu hạn.

2. Biểu diễn đồ thị

Một đồ thị có thể được biểu diễn bằng hình học, một ma trận hay một bảng.

2.1. Biểu diễn hình học

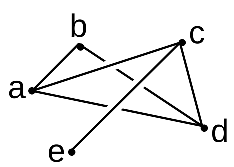
Người ta thường biểu diễn hình học của đồ thị như sau:

- Biểu diễn mỗi đỉnh của đồ thị bằng một điểm (vòng tròn nhỏ, ô vuông nhỏ).

- Một cạnh được biểu diễn bởi một đường (cong hay thẳng) nối 2 đỉnh liên thuộc với cạnh đó.

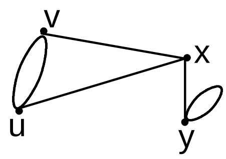
Ví dụ 1: Đồ thị G có: V = {a, b, c, d, e}
E = {ab, ac, ad, bd, cd, ce}

Được biểu diễn hình học như sau:



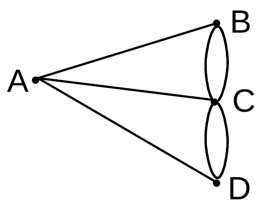
Ví dụ 2: Đồ thị G có: V = {u, v, x, y}
E = {uv, uv, ux, vx, xy, yy}

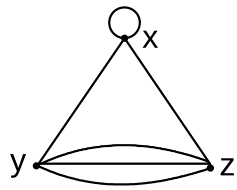
Được biểu diễn hình học như sau:



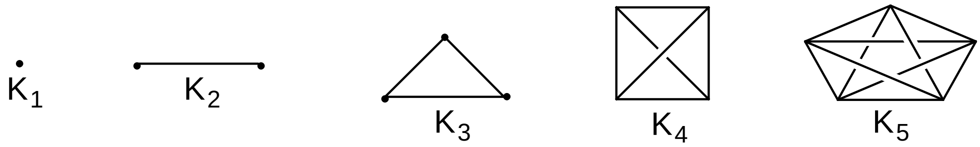
Chú ý: Khi biểu diễn hình học các đồ thị, giao của các cạnh chưa chắc là đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 3:





Ví dụ 4: Các đơn đồ thị đầy đủ:



2.2 Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

Người ta có thể biểu diễn đồ thị bằng ma trận. Có 2 kiểu ma trận thường được dùng để biểu diễn đồ thị:

- Ma trận liên kết hay liền kề (adjacency matrix).

- Ma trận liên thuộc (incidence matrix).

➢ **Ma trận liền kề**

Cho G = (V,E) có n đỉnh v_1, v_2, ..., vn. Ma trận liền kề của G tương ứng với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, ..., vn là một ma trận vuông cấp n.

A = $(aij)_n$ trong đó:

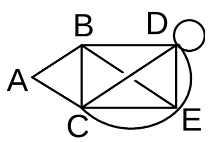
$$aij = \begin{cases} 1 \text{ nếu vivj là một cạnh của G.} \\ 0 \text{ nếu vivj không là một cạnh của G.} \end{cases}$$

➢ **Chú ý**:

- Ma trận liền kề của một đồ thị khác nhau tùy thuộc vào thứ tự liệt kê các đỉnh. Do đó, có tới n! ma trận liền kề khác nhau của một đồ thị n đỉnh vì có n! cách sắp xếp n đỉnh.

- Ma trận liền kề của một đồ thị là một ma trận đối xứng vì nếu vi được nối với vj thì vj cũng được nối vi và ngược lại nếu vi không nối với vj thì vj cũng không nối với vi.

- Một vòng được tính là một cạnh từ đỉnh v vào v.

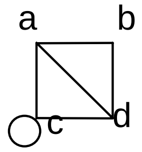
Ví dụ 5: Đồ thị sau: 

có ma trận liền kề là:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ví dụ 6: Hãy vẽ đồ thị có ma trận liền kề theo thứ tự của các đỉnh là a, b, c, d.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\longrightarrow
$$



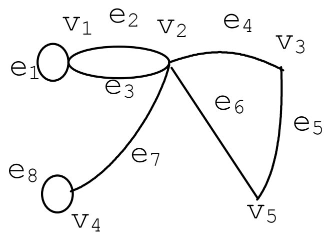
➢ **Ma trận liên thuộc**

Người ta còn dùng ma trận liên thuộc để biểu diễn đồ thị. Cho G = (V,E) là một đồ thị với v_1, v_2, ..., vn là các đỉnh và e_1, e_2, ..., em là các cạnh của G. Khi đó ma trận liên thuộc của G theo thứ tự trên của V và E là một ma trận $M = (mij)_{n \times m}$ với:

$$
mij = \begin{cases} 1 \text{ nếu cạnh ej nối với đỉnh vi.} \\ 0 \text{ nếu cạnh ej không nối với đỉnh vi} \end{cases}
$$

➢ **Chú ý**: Các ma trận liên thuộc cũng có thể được dùng để biểu diễn các cạnh bội và khuyên (vòng). Các cạnh bội (song song) được biểu diễn trong ma trận liên thuộc bằng cách dùng các cột có các phần tử giống hệt nhau vì các cạnh này được nối với cùng một cặp các đỉnh. Các vòng được biểu diễn bằng cách dùng một cột với đúng một phần tử bằng 1 tương ứng với đỉnh nối với khuyên đó.

Ví dụ 7: Đồ thị



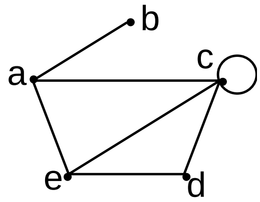
Có ma trận liên thuộc như sau:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

2.3. Biểu diễn đồ thị bằng bảng

Người ta có thể biểu diễn đồ thị không có cạnh bội bằng bảng hay còn gọi là danh sách liền kề. Danh sách này chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 8: Dùng danh sách liền kề để biểu diễn đồ thị



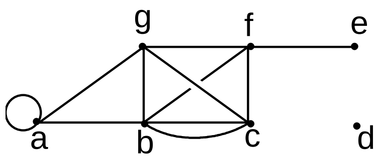
Đỉnh	Đỉnh liền kề
a	b, c, e
b	a
c	a, c, d, e
d	c, e
e	a, c, d

3. Bậc của đỉnh trong đồ thị

Định nghĩa: Đỉnh v của đồ thị G được gọi là có bậc n nếu v kề với n đỉnh khác (v là đầu mút của n cạnh). Ký hiệu: deg(v) hay d(v).

- Mỗi vòng (khuyên) tại v được kể là 2 cạnh tới v.
- Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập (isolated vertex).
- Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo (pendant vertex).
- Cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo (pendant edge).
- Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là đồ thị rỗng (null graph).

Ví dụ 9: Cho đồ thị sau:



Ta có: deg(a) = 4; deg(b) = 5; deg(c) = 4; deg(d) = 0; deg(e) = 1; deg(f) = 4; deg(g) = 4.

➢ **Định lý 1.1**: Trong mọi đồ thị G = (V, E), tổng số bậc của các đỉnh của G bằng 2 lần số cạnh. Nghĩa là ta có:

$$\sum_{i=1}^{\|V\|} \deg(v_i) = 2\|E\|$$

➢ *Hệ quả:* Trong mọi đồ thị G = (V, E), ta có:

1. Số các đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.
2. Tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẳn.

➢ **Định lý 1.2**: Trong mọi đồ thị G = (V, E), có $\|V\| \geq 2$ thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

➢ **Định lý 1.3**: Trong mọi đồ thị G = (V, E), có $\|V\| > 2$ có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc bậc n-1.

4. Chứng minh - giải bài toán bằng phương pháp đồ thị

Để chứng minh (giải) bài toán bằng đồ thị ta thực hiện theo các bước sau:

➢ **Bước 1**: Xây dựng đồ thị G = (V, E) mô tả đầy đủ các thông tin của bài toán, trong đó:

+ Mỗi đỉnh $v \in V$ biểu diễn cho một **đối tượng** nào đó của bài toán.

+ Mỗi cạnh $e \in E$ nối 2 đỉnh v_i và v_j sẽ biểu diễn cho **mối quan hệ** giữa hai đối tượng tương ứng được biểu diễn bằng v_i và v_j.

+ Vẽ đồ thị G = (V, E) mô tả bài toán (nếu được).

➢ **Bước 2**: Sử dụng các định nghĩa, định lý, tính chất,... đã biết về lý thuyết đồ thị để suy ra điều cần giải (chứng minh).

Ví dụ 10: Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý có ít nhất 02 đại biểu tham gia trở lên, luôn luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đã đến dự họp.

Chứng minh:

➢ **Bước 1**: Xây dựng đồ thị G = (V, E) mô tả đầy đủ các thông tin của bài toán:

+ *Đỉnh*: Lấy các điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các đại biểu đến dự họp. **Đối tượng** của bài toán ở đây là **đại biểu** dự họp. Vậy, mỗi đỉnh $v \in V$ biểu diễn cho một đại biểu trong cuộc họp.

+ *Cạnh*: Trong đồ thị G các đỉnh v_i và v_j được nối với nhau bằng một cạnh nếu hai đại biểu v_i và v_j quen nhau. Vậy, **mối quan hệ** giữa 02 đối tượng ở đây là mối quan hệ **quen biết**. Mỗi cạnh $e \in E$ nối 2 đỉnh v_i và v_j trong G nếu hai đại biểu v_i và v_j quen nhau.

➢ **Bước 2**: Suy luận để suy ra điều cần chứng minh:

+ Với cách xây dựng đồ thị G như đã trình bày thì số đỉnh của G chính là số đại biểu đến dự họp $\|V\| \geq 2$ và bậc của mỗi đỉnh trong G bằng đúng số đại biểu quen với đại biểu được biểu diễn bằng đỉnh này.

+ Theo định lý 1.2 ta có trong G tồn tại ít nhất 02 đỉnh có cùng bậc nghĩa là luôn luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đã đến dự họp.

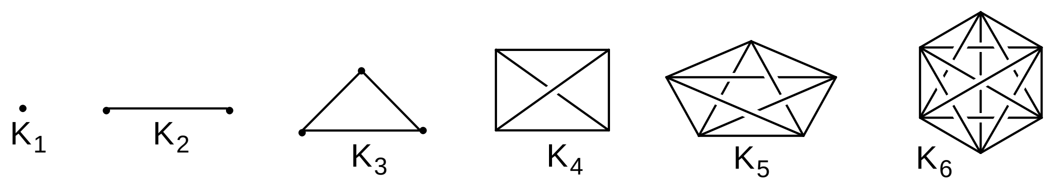
Ví dụ 11: Chứng minh rằng số người mà mỗi người đã có một số lẻ lần bắt tay nhau trên trái đất này là một con số chẵn.

(Xem như bài tập - Sinh viên tự chứng minh)

II. Một số đồ thị đặc biệt

1. Đồ thị đầy đủ

Định nghĩa: Đồ thị đầy đủ (Complete graph), **ký hiệu: Kn** là một đơn đồ thị bao gồm n đỉnh mà mọi đỉnh đều có bậc n−1 (mỗi đỉnh đều nối với n−1 đỉnh còn lại).



➢ Vậy Kn có:

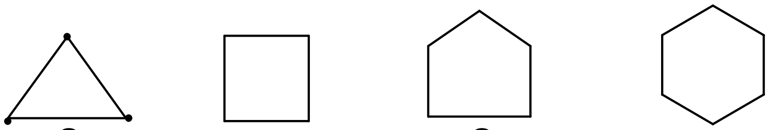
+ Số đỉnh: $\|V\| = n$

+ Bậc của đỉnh $\deg(v_i) = n - 1; \quad \forall v_i \in V$

+ Số cạnh: $\|E\| = \dfrac{n(n-1)}{2}$

2. Đồ thị vòng

Định nghĩa: Đồ thị vòng **ký hiệu: Cn**, n ≥ 3 là một đồ thị với n đỉnh $v_1, v_2, ..., vn$ và các cạnh $v_1v_2, v_2v_3, ..., vnv_1$.



C_3 C_4 C_5 C_6

➢ Vậy Cn có:

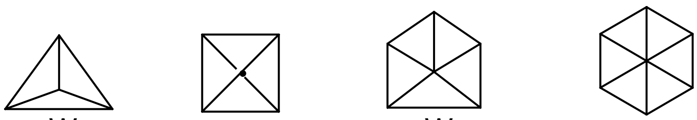
+ Số đỉnh: $\|V\| = n \geq 3$

+ Bậc của đỉnh $\deg(v_i) = 2$; $\forall v_i \in V$

+ Số cạnh: $\|E\| = n$

3. Đồ thị hình bánh xe

Định nghĩa: Nếu thêm một đỉnh vào đồ thị vòng Cn (n ≥ 3) và nối đỉnh này với n đỉnh của Cn thì ta được đồ thị hình bánh xe (Wheel graph), **ký hiệu: Wn**.



W_3 W_4 W_5 W_6

➢ Vậy Wn có:

+ Số đỉnh: $\|V\| = n + 1 \qquad n \geq 3$

+ Bậc của đỉnh $\deg(v_i) = 3$; $\forall v_i \in V$ và $v_i \neq$ đỉnh được thêm vào (vnew)

+ $\deg(v_{new}) = n$

+ Số cạnh: $\|E\| = 2n$

4. Đồ thị đều

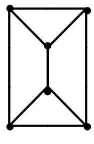
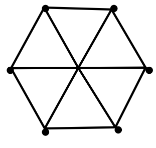
Định nghĩa: Một đồ thị đều (Regular graph) là đồ thị mà mọi đỉnh đều có cùng bậc. Nếu đồ thị G có các đỉnh có cùng bậc K thì được gọi là **K-đều**.

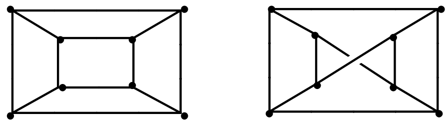
Ví dụ 12:

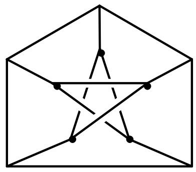
+ Đồ thị rỗng gồm n đỉnh là đồ thị đều bậc 0.

+ Cn là đồ thị đều bậc 2.

+ Kn là đồ thị đều bậc (n−1).

+ Đồ thị 3-đều 6 đỉnh:  

+ Đồ thị 3-đều 8 đỉnh: 

+ Đồ thị đều bậc 3: đồ thị Petersen: 

- Vậy k đều n đỉnh cói:

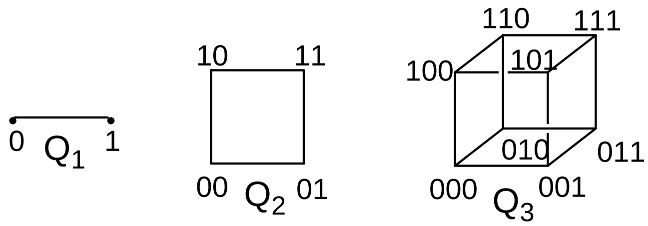
  + Số đỉnh: $\|V\| = n$

  + Bậc của đỉnh $\deg(v_i) = k$; $\forall v_i \in V$

  + Số cạnh: $\|E\| = \dfrac{n * k}{2}$

5. Các khối n-lập phương

Các khối n-lập phương (n-cube graph), **ký hiệu: Qn** là các đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một dãy số nhị phân với độ dài n. Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các dãy nhị phân biểu diễn chúng chỉ khác nhau đúng 1 bit.

Ví dụ 13: 

Vậy Qn cói:

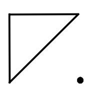
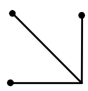
+ Số đỉnh: $\|V\| = 2^n$

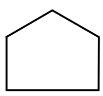
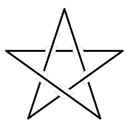
+ Bậc của đỉnh $\deg(v_i) = n$; $\forall v_i \in V$

+ Số cạnh: $\|E\| = n * 2^{n-1}$

6. Đồ thị bù

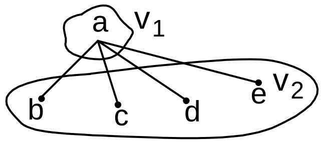
Hai đơn đồ thị G và G' được gọi là bù với nhau nếu chúng có chung các đỉnh, cạnh nào thuộc G thì không thuộc G' và ngược lại. **Ký hiệu: G' =** $\overline{G}$.

Ví d? 14  và 

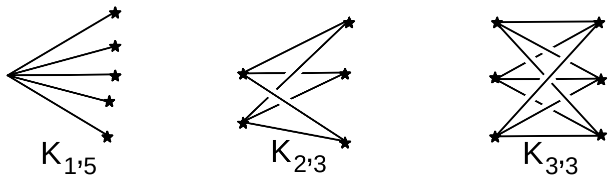
 và 

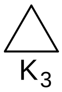
7. Đồ thị lưỡng phân

Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân (bipartie graph) nếu tập hợp các đỉnh V của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng V_1 và V_2, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.

Ví dụ 15: 

➢ Một đồ thị lưỡng phân mà mỗi đỉnh của V_1 (có m đỉnh) đều kề với mọi đỉnh của V_2 (có n đỉnh), được gọi là một đồ thị lưỡng phân đầy đủ, **ký hiệu: $K_{m,n}$**.

Vêduû16: 

➢ 

là không phải là đồ thị lưỡng phân vì nếu ta chia các đỉnh của nó thành 2 phần rời nhau thì một trong 2 phần này phải chứa 2 đỉnh. Nếu đồ thị là lưỡng phân thì các đỉnh này không thể nối với nhau bằng một cạnh. Nhưng trong K_3 mỗi đỉnh được nối với đỉnh khác bằng một cạnh.

III. Sự đẳng cấu của các đồ thị

1. Định nghĩa

Các đồ thị $G_1 = (V_1,E_1)$ và $G_2 = (V_2,E_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu có một song ánh f: $V_1 \rightarrow V_2$ sao cho nếu a và b là liền kề trong V_1 thì f(a) và f(b) liền kề trong V_2; $\forall$ a, b $\in V_1$. Khi đó song ánh f được gọi là một đẳng cấu.

Nói cách khác, nếu 2 đồ thị là đẳng cấu thì sẽ tồn tại một song ánh giữa các đỉnh của 2 đồ thị bảo toàn quan hệ liền kề.

➢ **Chú ý**: Nếu 2 đồ thị G_1 và G_2 là đẳng cấu thì chúng có:

+ Số đỉnh bằng nhau.

+ Số cạnh bằng nhau.

+ Hai đỉnh tương ứng có cùng bậc.

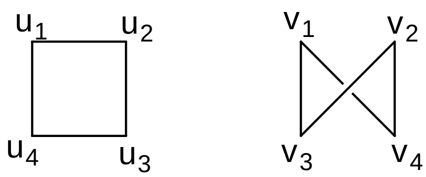
Đây là các **điều kiện cần** để hai đồ thị là đẳng cấu.

➢ Để chứng minh hai đồ thị đẳng cấu ta cần:

+ Chứng minh điều kiện cần thỏa.

+ Xây dựng một song ánh bảo toàn quan hệ liền kề giữa hai đồ thị (điều kiện đủ để hai đồ thị đẳng cấu).

Ví dụ 17: Chứng minh rằng hai đồ thị sau là đẳng cấu với nhau:



G = (V,E) H = (W,F)

➢ *Xét điều kiện cần*:

+ Hai đồ thị G và H đều có 4 đỉnh,

+ Hai đồ thị G và H đều có 4 cạnh,

+ Các đỉnh của hai đồ thị đều có bậc 2.

Vậy điều kiện cần thỏa.

➢ *Xét điều kiện đủ*:

Xét hàm f: V $\rightarrow$ W

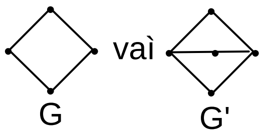
$u_1 \mapsto v_1$

$u_2 \mapsto v_4$

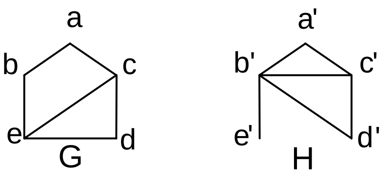
$u_3 \mapsto v_2$

$u_4 \mapsto v_3$

$\Rightarrow$ f là song ánh và bảo toàn quan hệ liền kề, điều kiện đủ thỏa. Vậy hai đồ thị G và H đẳng cấu với nhau.

Ví dụ 18: 

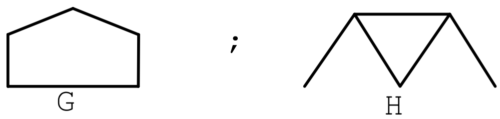
không đẳng cấu vì số cạnh và đỉnh khác nhau. Điều kiện cần không thỏa $\Rightarrow$ G và G' không đẳng cấu.

Vêduû19: 

G và H có cùng số cạnh, số đỉnh nhưng H có đỉnh e' bậc 1, trong khi đó G không có đỉnh nào bậc 1. Điều kiện cần không thỏa $\Rightarrow$ G và H không đẳng cấu.

2. Đồ thị tự bù

Định nghĩa: Đồ thị G được gọi là tự bù (Self-complementary) nếu G đẳng cấu với $\overline{G}$.

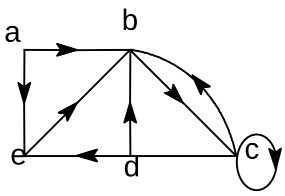
Vê duû 20 . 

Định lý 1.4: Nếu hai đồ thị G và H có ma trận liền kề (được liệt kê theo một thứ tự nào đó của các đỉnh) bằng nhau thì G và H là hai đồ thị đẳng cấu với nhau.

IV. Đồ thị có hướng (Directed graph)

1. Định nghĩa

Một đồ thị có hướng G = (V,E) gồm tập hợp các đỉnh V và tập hợp các cạnh E bao gồm các cặp sắp thứ tự các phần tử của V. Cạnh e tương ứng với một cặp thứ tự (a,b) của 2 đỉnh a, b $\in$ V được gọi là một cạnh có hướng từ a đến b. Ký hiệu: e = $\overrightarrow{ab}$. a được gọi là đỉnh đầu, b được gọi là đỉnh cuối của cạnh e. Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên (vòng) là trùng nhau.

Vêduû21: 

2. Bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng

2.1. Bậc vào

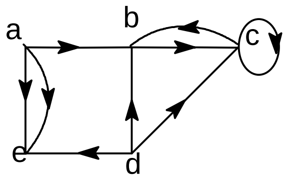
Định nghĩa: Cho G là đồ thị có hướng, bậc vào của đỉnh v, ký hiệu: $deg^{-}(v)$ (hoặc din(v)) là số cạnh có đỉnh cuối là v.

2.2. Bậc ra

Định nghĩa: Cho G là đồ thị có hướng, bậc ra của v, ký hiệu: $deg^{+}(v)$ (hay dout(v)) là số cạnh có đỉnh đầu là v.

➢ **Chú ý**: Một vòng tại một đỉnh sẽ góp thêm một đơn vị vào bậc vào và bậc ra của đỉnh này.

Ví dụ 22:



+ Đối với đỉnh a: din(a) = 0, dout(a) = 3;

+ Đối với đỉnh b: din(b) = 3, dout(b) = 1;

+ Đối với đỉnh c: din(c) = 3; dout(c) = 2

+ Đối với đỉnh d: din(d) = 0; dout(d) = 3

+Đối với đỉnh e: din(e) = 3; dout(e) = 0

2.3. Định lý 1.5: Cho G = (V,E) là một đồ thị có hướng. Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị. Nghĩa là ta có:

$$\sum_{i=1}^{\|V\|} d_{in}(v_i) = \sum_{i=1}^{\|V\|} d_{out}(v_i) = \|E\|$$

➢ Một đồ thị có hướng được gọi là **cân bằng (balanced)** nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc vào và bậc ra bằng nhau.

Ví dụ 23: Có một nhóm gồm 09 đội bóng bàn thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi sau khi có kết quả thi đấu của tất cả các đội có thể có trường hợp bất kỳ đội nào trong 09 đội này cũng đều thắng đúng 05 đội khác trong nhóm được không? (Lưu ý trong thi đấu bóng bàn không có trận hòa).

(Xem như bài tập - Sinh viên tự chứng minh)

V. Tính liên thông của đồ thị

1. Đường đi

Định nghĩa: Đường đi (path) có độ dài n từ vo đến vn với n là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh liên tiếp vov_1, v_1v_2, ... , $vn_{-1}vn$. Đỉnh v_o được gọi là đỉnh đầu, đỉnh vn được gọi là đỉnh cuối. Đường đi này thường được viết gọn: vov_1v_2 ... $vn_{-1}vn$. Khi chỉ cần nêu ra đỉnh đầu vo và đỉnh cuối vn của đường đi, ta viết: đường đi vo – vn.

➢ Một đường đi không qua cạnh nào lần thứ hai được gọi là ***đường đi đơn giản (đường đi đơn)***.

➢ Một đường đi không qua đỉnh nào lần thứ hai được gọi là ***đường đi sơ cấp***.

➢ **Lưu ý**: Một đường đi sơ cấp là một đường đi đơn giản nhưng một đường đi đơn giản có thể không là đường đi sơ cấp).

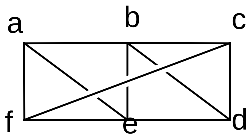
2. Chu trình

2.1. Định nghĩa: Một đường đi khép kín (đỉnh đầu ≡ đỉnh cuối) và có độ dài $n \geq 3$ được gọi là một chu trình (Cycle).

- Chu trình không đi qua cạnh nào lần thứ hai được gọi là ***chu trình đơn giản***.

- Chu trình không đi qua đỉnh nào lần thứ hai, trừ đỉnh đầu ≡ đỉnh cuối, được gọi là một ***chu trình sơ cấp***.

Ví dụ 24:



- abcdbe là một đường đơn giản.
- eabdc là một đường đi sơ cấp...

2.2. Định lý 1.6: Cho G=(V,E) là một đồ thị vô hướng có $\|V\| \geq 3$ và $\forall v \in V$ có $d(v) \geq 2$ thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp.

Chứng minh:

Vì G là một đồ thị hữu hạn, mỗi đường sơ cấp qua từng đỉnh không quá một lần, nên số đường sơ cấp trong G là hữu hạn. Do đó, ta luôn xác định được đường đi sơ cấp có độ dài cực đại trong số các đường đi sơ cấp có trong đồ thị G=(V,E).

Giả sử $\alpha = v_1\ v_2, \cdots v_{k-1}\ v_k$ là một trong các đường đi sơ cấp có độ dài cực đại. Do bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 2 ($\forall v \in V$ có $d(v) \geq 2$), nên đỉnh v_1 phải kề với 1 đỉnh u nào đó và $u \neq v_2$. Xét 02 trường hợp:

+ Nếu đỉnh $u \equiv v_i\ (3 \leq i \leq k)$, khi đó trong đồ thị G sẽ có một chu trình sơ cấp $\beta = v_1\ v_2 \cdots v_i \cdots v_{k-1}\ v_k\ v_{k-1} \cdots v_i\ v_1$.

+ Ngược lại, nếu đỉnh $u \neq v_i\ (3 \leq i \leq k)$, khi đó trong G tồn tại đường sơ cấp $\alpha_1 = v_1\ v_2, \cdots v_{k-1}\ v_k$ có độ dài lớn hơn đường sơ cấp α có độ dài lớn nhất đã chọn (mâu thuẫn). Vậy đỉnh $u \equiv v_i\ (3 \leq i \leq k) \Rightarrow$ trong đồ thị G có một chu trình sơ cấp.

2.3. Định lý 1.7: Cho G=(V,E) là một đồ thị vô hướng có $\|V\| \geq 4$ và $\forall v \in V$ có $d(v) \geq 3$ thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn.

Chứng minh:

Giả sử α là một đường sơ cấp có độ dài cực đại trong đồ thị G=(V, E):

$$\alpha = v_1\ v_2\ v_3,\ \cdots v_{i-1}\ v_i\ v_{i+1} \cdots v_{j-1}\ v_j\ v_{j+1} \cdots v_{k-1}\ v_k$$

Vì α là đường sơ cấp có độ dài cực đại và bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 3, nên đỉnh v_1 phải kề với 02 đỉnh vi và vj khác thuộc đường α với $3 \leq i \leq k$, $3 \leq j \leq k$**.** Khi đó trong G có 02 chu trình sơ cấp:

+ $\alpha_1 = v_1\ v_2\ v_3 \cdots v_{i-1}\ v_i\ v_1$ và

+ $\alpha_2 = v_1\ v_2\ v_3 \cdots v_{i-1}\ v_i\ v_{i+1} \cdots v_{j-1}\ v_j\ v_1$

Ta xét 2 trường hợp sau:

+ Nếu một trong hai đường sơ cấp α_1 hoặc α_2 có độ dài chẵn thì ta có điều phải chứng minh.

+ Ngược lại, nếu cả hai đường sơ cấp α_1 và α_2 đều có độ dài lẻ thì khi đó đường đi sơ cấp:

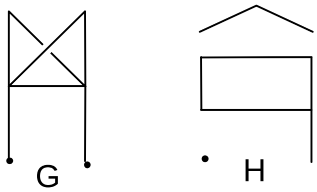
$\alpha_3 = v_1\ v_2\ v_3 \cdots v_{i-1}\ v_i$ có độ dài chẵn và đường sơ cấp:

$\alpha_4 = v_i\ v_{i+1} \cdots v_{j-1}\ v_j\ v_1$ có độ dài lẻ nên chu trình:

$\alpha_5 = v_1\ v_i\ v_{i+1} \cdots v_{j-1}\ v_j\ v_1$ có độ dài chẵn (điều phải chứng minh).

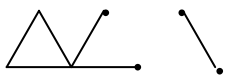
3. Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

3.1. Định nghĩa: Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Ví dụ 25: 

G: liên thông; H: không liên thông.

Cho đồ thị G = (V,E) và v ∈ V. V' là tập hợp các đỉnh của V liên thông với v, E' là tập hợp các cạnh nối 2 đỉnh của V'. Khi đó đồ thị G' = (V',E') gọi là thành phần liên thông (connected component) của G chứa v. Đương nhiên nếu v và u liên thông trong G thì thành phần liên thông của G chứa v cũng là thành phần liên thông chứa u.

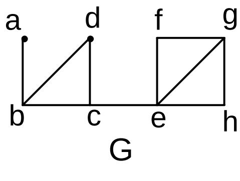
Ví dụ 26:  có 3 thành phần liên thông.

3.2. Định lý 1.8: Đồ thị G=(V, E) là liên thông khi và chỉ khi G có duy nhất một thành phần liên thông.

3.3. Đỉnh cắt và cầu:

➢ *Đỉnh cắt*: Nếu việc xóa đi một đỉnh $v \in V$ và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra một đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị xuất phát. Các đỉnh v như thế được gọi là đỉnh cắt (cut point) hay điểm khớp.

➢ *Cầu*: Nếu trong đồ thị G ta bỏ đi cạnh e sẽ tạo ra nhiều thành phần liên thông hơn G thì e được gọi là cầu (bridge).

Ví dụ 27: Tìm các đỉnh cắt và cầu trong đồ thị: 

➢ Đỉnh cắt của G: b, c, e.
➢ Cầu: ab, ce.

Chú ý: Không phải đồ thị nào cũng có đỉnh cắt và cầu.

3.4. Định lý 1.9: Trong mọi đồ thị G=(V, E) có ít nhất n = 02 đỉnh $(\|V\| = n \geq 2)$. Nếu $\forall\ v_1, v_2 \in V$ thỏa $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ thì G là đồ thị liên thông.

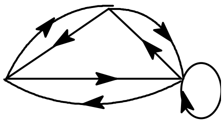
Hệ quả: Trong mọi đồ thị G=(V, E) có n đỉnh, nếu mọi đỉnh $v \in V$ có $d(v) \geq \frac{n}{2}$ thì G là đồ thị liên thông.

4. Tính liên thông trong đồ thị có hướng

4.1. Liên thông mạnh (Strongly connected)

Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu có đường đi từ a đến b và từ b đến a; $\forall$ a, b $\in$ đồ thị.

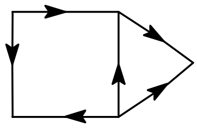
Vêdu 28:



4.2. Liên thông yếu (Weakly connected)

Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.

Vêdu 29:



Đồ thị có hướng G được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ.

4.3. Định lý 1.10: Nếu trong đồ thị G=(V, E) có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông với nhau.

Chứng minh

Giả sử đồ thị G=(V, E) có đúng hai đỉnh bậc lẻ v và w nhưng hai đỉnh này lại không liên thông với nhau. Khi đó v và w phải thuộc vào 2 thành phần liên thông G_1, G_2 khác nhau của G. Chẳng hạn $v \in G_1$ và $w \in G_2$. Theo giả thuyết do G chỉ có đúng 2 đỉnh bậc lẻ nên trong mỗi đồ thị con G_1 và G_2 chỉ có đúng một đỉnh bậc lẻ. Mâu thuẫn với tính chất số đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn. Vậy v và w phải liên thông với nhau.

4.4. Định lý 1.11: **(Định lý về điều kiện cần và đủ của một đồ thị lưỡng phân)**

Đồ thị G = (V, E) là một đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có độ dài chẵn.

Chứng minh

➢ Giả sử G = (V, E) là một đồ thị lưỡng phân và tập đỉnh V của G được chia

thành hai tập con V_1 và V_2. Khi đó, dọc theo chu trình bất kỳ của G thì các đỉnh thuộc tập V_1 và tập V_2 sẽ lần lượt nằm liên tiếp và xen kẻ nhau. Do đó, khi trở về đỉnh xuất phát đầu tiên, ta phải đi qua một số chẵn các đỉnh và do đó chiều dài của chu trình là một số chẵn.

➢ Ngược lại, giả sử rằng G là một đồ thị có tính chất là tất cả các chu trình của G đều có độ dài chẵn. Ta sẽ chứng minh tất cả các thành phần liên thông của G đều là đồ thị lưỡng phân và do đó G cũng là một đồ thị lưỡng phân.

Thật vậy, giả sử rằng G_1 là một thành phần liên thông của G và v_0 là một đỉnh của G_1. Với mỗi đỉnh $v \in G_1$ ta chọn một đường α nối v và v_0. Nếu đường α có độ dài chẵn thì ta đưa đỉnh v vào tập đỉnh V_1. ngược lại, nếu α có độ dài lẻ thì ta đưa v vào tập đỉnh V_2. Sự phân loại các đỉnh của G_1 không phụ thuộc vào cách chọn đường đi α. Thật vậy, nếu có hai đường α có độ dài chẳn và α' có độ dài lẻ nối 2 đỉnh v và v_0 thì đồ thị G_1 sẽ có chu trình với độ dài lẻ, mâu thuẫn với tính chất ban đầu là G chỉ có chu trình độ dài chẵn.

Với cách thiết lập hai tập hợp đỉnh V_1 và V_2 này, các đỉnh của đồ thị G_1 hoặc thuộc tập hợp đỉnh V_1 hoặc thuộc tập hợp đỉnh V_2. Bây giờ, ta chứng minh rằng chỉ có các cạnh nối các đỉnh không thuộc cùng một tập hợp đỉnh với nhau mà thôi. Thật vậy, giả sử rằng có 2 đỉnh v và u kề nhau trong G_1 thì chúng không thể thuộc cùng một tập hợp đỉnh V_1 hoặc V_2, nếu không ta có thể đi từ đỉnh v_0 đến đỉnh v rồi đi đến đỉnh u bằng cạnh vu rồi trở về đỉnh v_0

bằng một đường đi có độ dài lẻ. Điều này không xảy ra trong đồ thị G. Vậy G là đồ thị lưỡng phân với hai tập đỉnh rời nhau là V_1 và V_2 bằng cách mà ta đã xây dựng trên.

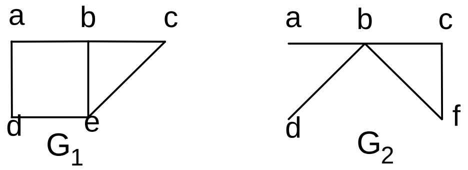
VI. Một số phép biến đổi đồ thị

1. Hợp của hai đồ thị

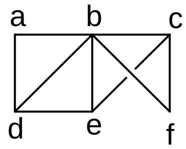
Hợp của hai đồ thị $G_1 = (V_1,E_1)$ và $G_2 = (V_2,E_2)$ là một đồ thị $G= (V, E)$ có tập hợp các đỉnh là $V = V_1 \cup V_2$ và tập hợp các cạnh là $E = E_1 \cup E_2$.

Ký hiệu: $G =G_1 \cup G_2$.

Ví dụ 30:



$\Rightarrow$



$G = G_1 \cup G_2$

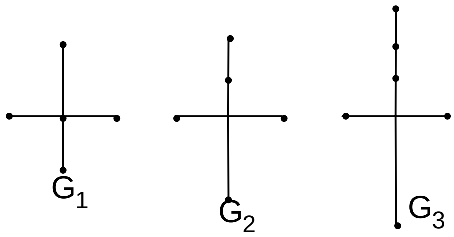
2. Phép phân chia sơ cấp

Cho đồ thị $G = (V,E)$, nếu ta bỏ đi một cạnh $e = uv$ của G và thêm vào một

đỉnh mới w cùng với 2 cạnh uw và wv thì phép toán trên được gọi là phép phân chia sơ cấp.

Hai đồ thị $G_1 = (V_1,E_1)$ và $G_2 = (V_2,E_2)$ được gọi là đồng phôi (homeomorphic) nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp.

Ví dụ 31:



G_2 và G_3 là đồng phôi vì cùng nhận được từ G_1. Rõ ràng G_2 và G_3 không đẳng cấu với nhau.

Chú ý: Hai đồ thị là đồng phôi thì chưa chắc đẳng cấu với nhau.

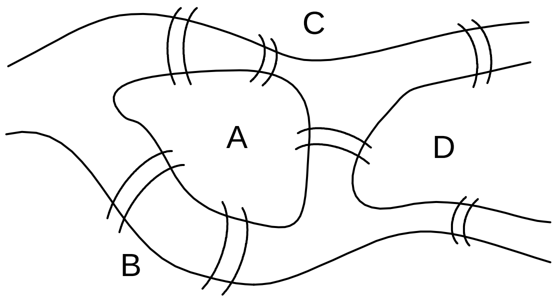
Chương II

CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI

I. Chu trình và đường đi Euler

1. Bài toán mở đầu :

Bài toán 7 cây cầu ở Königsberg: Thành phố Königsberg thuộc Phổ (bây giờ gọi là Kaliningrad thuộc Cộng hòa Liên bang Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel. Các vùng này gồm 2 vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa 2 nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ thứ XVIII, người ta đã xây 7 cây cầu nối các vùng lại với nhau như sơ đồ sau:



Vào chủ nhật, người dân ở đây thường đi bộ dọc theo các vùng trong thành phố. Họ tự hỏi "*Có thể xuất phát tại một điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả 7 cây cầu, mỗi cây một lần, rồi trở về điểm xuất phát được không?*"

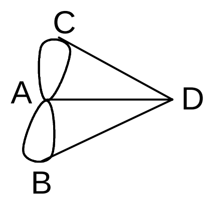
Nhà toán học Thụy Sĩ Leonard Euler đã nghiên cứu giải bài toán này. Lời giải của ông được công bố năm 1736. Bài toán này có thể được coi là một trong những ứng dụng đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

Ta có thể xây dựng đồ thị G = (V, E) mô tả bài toán như sau:

+ *Đỉnh*: Lấy các điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các vùng đất trong sơ đồ. **Đối tượng** của bài toán ở đây là một vùng đất trong sơ đồ. Vậy, mỗi đỉnh $v \in V$ biểu diễn cho một vùng đất. Đồ thị G sẽ có 4 đỉnh A, B, C, D tương ứng với 4 vùng đất.

+ *Cạnh*: Trong đồ thị G các đỉnh v_i và v_j được nối với nhau bằng một cạnh e đại diện cho một chiếc cầu nối giữa hai vùng đất. Đồ thị G sẽ có 7 cạnh tương ứng với 7 chiếc cầu nối giữa các vùng đất trong sơ đồ.

Euler đã nghiên cứu bài toán này, mô hình nó bằng một đa đồ thị, bốn vùng được biểu diễn bằng 4 đỉnh, các cầu là các cạnh như đồ thị sau:



Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu mỗi cầu không quá một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: "*Tồn tại hay không một chu trình đơn trong đa đồ thị G= (V, E) có chứa tất cả các cạnh?*"

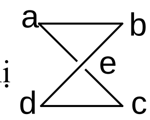
2. Định nghĩa

2.1. Chu trình Euler (Đồ thị Euler)

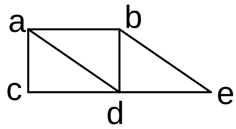
Cho G = (V,E) là một đa đồ thị liên thông. Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler. Đồ thị có chứa một chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler.

2.2. Đường đi Euler

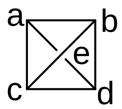
Cho G = (V,E) là một đa đồ thị liên thông. Đường đi Euler trong G là đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G.

Ví dụ 1: Đồ thị 

có chu trình Euler: a, b, e, d, c, e, a.

Ví dụ 2: Đồ thị 

không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler: a, c, d, a, b, e, d, b.

Ví dụ 3: Đồ thị 

không có chu trình Euler và đường đi Euler.

3. Chu trình và đường đi Euler trong đồ thị vô hướng

Khi giải bài toán cầu Königsberg, Euler đã phát hiện ra các tiêu chuẩn để khẳng định một đa đồ thị có chu trình và đường đi Euler hay không?

3.1. Định lý về chu trình Euler

Một đa đồ thị liên thông G =(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

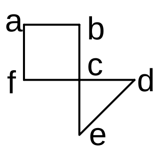
Chứng minh

($\Rightarrow$) Ta sẽ chứng minh nếu đồ thị G có chu trình Euler thì mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Thật vậy, trước tiên giả sử G có chu trình Euler bắt đầu từ đỉnh a và tiếp tục bằng cạnh liên thuộc với a, chẳng hạn ab, khi đó cạnh ab góp một vào deg (a). Mỗi lần khi chu trình đi qua một đỉnh, nó tăng thêm 2 đơn vị cho bậc của đỉnh đó. Vì chu trình đi vào một đỉnh bằng một cạnh liên thuộc và rời khỏi đỉnh này bằng một cạnh liên thuộc khác. Cuối cùng chu trình kết thúc ở đỉnh mà nó xuất phát, do đó nó tăng thêm một đơn vị vào deg (a). Nghĩa là deg (a) phải là một số chẵn. Đỉnh khác a cũng có bậc chẵn vì chu trình góp 2 đơn vị vào bậc của nó mỗi lần đi qua đỉnh này. Vậy, mỗi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi đỉnh của đa đồ thị liên thông G đều có bậc chẵn. Ta sẽ chứng minh tồn tại một chu trình Euler trong G.

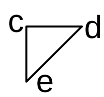
Thật vậy, ta sẽ xây dựng một chu trình đơn bắt đầu từ đỉnh a tùy ý của G. Gọi xo = a; Trước tiên, ta chọn tùy ý cạnh xox_1, x_1x_2, ..., $xn_{-1}xn$ càng dài càng tốt. Ví dụ, trong đồ thị G sau:



Ta bắt đầu tại a và chọn các cạnh liên tiếp ab, bc, cf, fa. Đường đi mà ta chọn sẽ kết thúc vì đồ thị có hữu hạn đỉnh. Đường đi này bắt đầu tại a với cạnh có dạng ax và kết thúc tại a với cạnh có dạng ya.

Điều này luôn xảy ra vì mỗi lần đường đi qua một đỉnh bậc chẵn, nó chỉ dùng một cạnh để vào đỉnh này và còn ít nhất một đỉnh để ra khỏi đỉnh này. Đường đi vừa nói trên có thể đi qua tất cả các cạnh hoặc có thể không. Nếu tất cả các cạnh được sử dụng thì ta nhận được chu trình Euler. Nếu không, ta gọi H là đồ thị con nhận được từ G bằng cách xóa các cạnh đã dùng và các đỉnh không liên thuộc với

các cạnh còn lại. Chẳng hạn với đồ thị trên, khi xóa đi chu trình a, b, c, f, a khỏi đồ thị trên, ta nhận được đồ thị con H.



Vì G là liên thông ⇒ H có ít nhất có một đỉnh chung với chu trình vừa bị xóa. Gọi w là đỉnh đó (trong ví dụ trên là đỉnh c). Mỗi đỉnh của H có bậc chẵn vì tất cả các đỉnh của G có bậc chẵn và với mỗi đỉnh ta đã xóa đi từng cặp liên thuộc để tạo ra H. Lưu ý rằng H có thể không liên thông. Bắt đầu từ đỉnh w ta xây dựng một đường đi đơn bằng cách chọn càng nhiều càng tốt như ta đã làm trong G. Đường này phải kết thúc tại w. Ví dụ trong đồ thị H nêu trên ta có chu trình con: c, d, e, c. Sau đó, ta tạo một chu trình trong G bằng cách ghép chu trình trong H và chu trình ban đầu trong G (điều này thực hiện được vì 2 chu trình có chung đỉnh w). Tiếp tục quá trình này cho đến khi tất cả các đỉnh được sử dụng. Quá trình này phải kết thúc vì đồ thị có hữu hạn đỉnh. Do đó, ta đã xây dựng được một chu trình Euler.

Bây giờ, trở lại bài toán 7 cây cầu ở Königsberg: có thể xuất phát từ một địa điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả các cầu (mỗi cầu đi qua đúng một lần) và trở về điểm xuất phát? Ta đã thấy đồ thị biểu diễn các cầu ở Königsberg có 4 đỉnh bậc lẻ. Do đó, theo định lý trên sẽ không có chu trình Euler trong đồ thị này. Điều này cũng có nghĩa là bài toán 7 cây cầu ở Königsberg không có lời giải. Hay nói cách khác, không có chu trình nào thỏa yêu cầu đặt ra.

3.2. Thuật toán Fleury tìm chu trình Euler

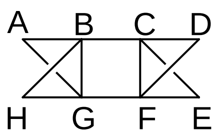
Để tìm một chu trình Euler trong một đa đồ thị có tất cả các đỉnh đều bậc chẵn, ta có thể sử dụng thuật toán Fleury như sau:

Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của đồ thị G và tuân theo hai qui tắc sau:

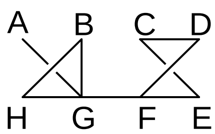
➢ *Qui tắc 1*: Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xóa cạnh đó đi, sau đó xóa đỉnh cô lập (nếu có).

➢ *Qui tắc 2:* Không bao giờ đi qua một cầu, trừ khi không còn cách đi nào khác để di chuyển.

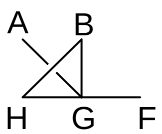
Ví dụ 4: Tìm một chu trình Euler trong đồ thị sau:



Xuất phát từ đỉnh A, giả sử ta chọn cạnh AB, BC, CF. Sau đó xóa 3 cạnh này, ta được đồ thị:



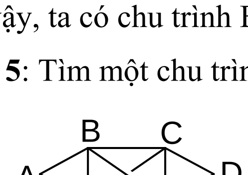
Đến đây, ta không thể chọn FG vì GF là một cầu, cho nên ta chọn FD, DC, CE, EF. Đến đây, ta được đồ thị sau:



Ta không còn cách chọn nào khác, nên phải chọn FG, GH, HB, BG, GA.

Như vậy, ta có chu trình Euler sau: A, B, C, F, D, C, E, F, G, H, B, G, A.

Ví dụ 5: Tìm một chu trình Euler của đồ thị sau:



Dễ thấy một chu trình Euler: A, B, C, D, E, C, F, B, E, F, A.

3.3. Định lý về đường đi Euler

Đa đồ thị liên thông G =(V, E) có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh:

(⇒) Giả sử đa đồ thị G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler. Ta sẽ chứng minh G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

Thật vậy, giả sử G có đường đi Euler từ a đến b, nhưng không có chu trình Euler. Cạnh đầu tiên của đường đi góp một đơn vị vào deg (a). Sau đó mỗi lần đường đi qua a lại góp thêm 2 đơn vị vào deg (a).

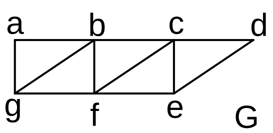
Chắc chắn đường đi không thể kết thúc tại a, cho nên deg(a) là số lẻ. Cạnh cuối cùng của đường đi góp một đơn vị vào deg(a) và mỗi lần đi qua b, nó cũng góp 2 đơn vị vào deg(b). Do đó, deg(b) là số lẻ. Các đỉnh trung gian đều có bậc chẵn vì mỗi lần đường đi tới rồi lại đi nên tăng hai đơn vị cho bậc của đỉnh đó. Vậy, đồ thị đã cho có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

(⇐) Giả sử đa đồ thị liên thông G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ. Ta sẽ chứng minh G có đường đi Euler.

Thật vậy, giả sử G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là a và b. Khi đó trong đồ thị mới G' = G ∪ ab, tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn. Do đó, theo định lý Euler, tồn tại một chu trình Euler trong G'. Trong chu trình này bỏ cạnh ab, ta được đường đi Euler trong G.

Như vậy, trong một đa đồ thị liên thông có 2 đỉnh bậc lẻ thì đường đi Euler trong đồ thị đó sẽ nhận 2 đỉnh bậc lẻ làm các điểm đầu mút.

Ví dụ 6: Xét đồ thị sau:



Trong G có 2 đỉnh bậc lẻ là g và e. Do đó, một đường đi Euler trong G sẽ nhận g và e làm 2 đỉnh đầu mút. Chẳng hạn: g, a, b, g, f, b, c, f, e, c, d, e.

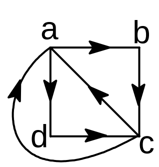
Ví dụ 7: Chứng minh rằng ta có thể xếp tất cả các con cờ của bộ cờ Đôminô thành một vòng khép kín.

(Xem như bài tập - Sinh viên tự chứng minh).

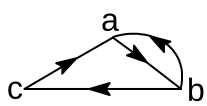
4. Chu trình và đường đi Euler đối với đồ thị có hướng

4.1. Định lý về chu trình Euler: Đồ thị có hướng G = (V, E) có chứa một chu trình Euler khi và chỉ khi G là liên thông yếu, đồng thời bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh là bằng nhau.

Chứng minh: Tương tự định lý Euler đối với đồ thị vô hướng (*Xem như bài tập - Sinh viên tự chứng minh*).

Ví dụ 7: Đồ thị 

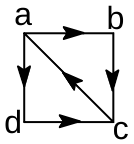
có chu trình Euler: a, b, c, a, d, c, a.

Ví dụ 8: Đồ thị 

không có chu trình Euler.

4.2. Định lý về đường đi Euler: Cho G =(V,E) là một đa đồ thị có hướng. G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler ⇔ G là liên thông yếu, đồng thời bậc vào và bậc ra của các đỉnh là bằng nhau, trừ 2 đỉnh, một đỉnh có bậc vào lớn hơn bậc ra một đơn vị, còn đỉnh kia có bậc vào nhỏ hơn bậc ra một đơn vị.

Chứng minh: Tương tự định lý Euler đối với đồ thị vô hướng (*Xem như bài tập - Sinh viên tự chứng minh*).

Ví dụ 9: Đồ thị 

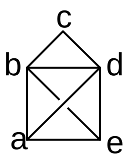
có đường đi Euler: a, b, c, a, d, c.

II. Chu trình và đường đi Hamilton

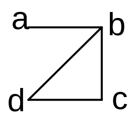
1. Chu trình Hamilton

1.1. Định nghĩa

Một chu trình sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G =(V,E) (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần) được gọi là chu trình Hamilton. Đồ thị G=(V,E) có chứa chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton.

Ví dụ 11: Đồ thị 

có chu trình Hamilton là: a, b, c, d, e, a.

Ví dụ 12: Đồ thị 

không có chu trình Hamilton vì mọi chu trình chứa mọi đỉnh của đồ thị đều phải đi qua cạnh ab 2 lần.

1.2. Điều kiện đủ để tồn tại chu trình Hamilton

Định lý Ore (1960): Cho G = (V,E) là một đơn đồ thị liên thông với n đỉnh $(n \geq 3)$ và nếu: $deg(v) + deg(w) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không liền kề v, w trong G. Khi đó G có chu trình Hamilton.

Chứng minh: Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

Giả sử G thỏa $deg(v) + deg(w) \geq n$; $\forall v,w$ không liền kề trong G nhưng G không có chu trình Hamilton. Khi đó ta có thể ghép thêm vào G những cạnh cho đến khi nhận được một đồ thị con H của Kn sao cho H không có chu trình Hamilton, nhưng với mọi cạnh $e \in Kn$ nhưng $e \notin H$, ta có (H + e) có chu trình Hamilton. Việc ghép thêm cạnh vào G là hoàn toàn thực hiện được và không ảnh hưởng gì đến điều kiện của giả thiết.

Do $H \neq Kn$ nên tồn tại $a, b \in V$ sao cho $ab \notin H$ nhưng H + ab có chu trình Hamilton C. Bản thân H không có chu trình Hamilton mà H + ab có chu trình Hamilton $\Rightarrow ab \in C$. Giả sử ta liệt kê các đỉnh của H trong chu trình C như sau:

$$a(=v_1) \rightarrow b(=v_2) \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow ... \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n;\ 3 \leq i \leq n.$$

Khi đó, nếu cạnh $bv_i \in H$, ta có thể kết luận $av_{i-1} \notin H$ vì nếu cả hai bv_i và av_{i-1} cùng nằm trong H, ta có chu trình:

$$b \to v_i \to v_{i+1} \to \ldots \to v_{n-1} \to v_n \to a \to v_{i-1} \to v_{i-2} \to \ldots \to v_3$$

Chu trình này nằm trong H, điều này mâu thuẫn vì H không có chu trình Hamilton. Vì vậy, $\forall$ vi ($3 \le i \le n$) chỉ có một trong 2 cạnh: bvi hoặc avi_{-1} nằm trong H.

Do đó: degH(a) + degH(b) < n.

Với degH(a): bậc của a trong H.

Ta có $\forall$ v $\in$ V: degH(v) $\ge$ degG(v) = deg(v) (vì G là đồ thị con của H)

$\Rightarrow$ với cặp đỉnh không liền kề trong G: a, b ta có: deg(a) + deg(b) < n.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết: deg(v) + deg(w) $\ge$ n; $\forall$ v, w không liền kề.

Vậy, G có chứa chu trình Hamilton.

➢ **Hệ quả**: (Định lý Dirac, 1952)

Nếu đơn đồ thị G = (V,E) có n đỉnh ($n \ge 3$) và deg(v) > $\frac{n}{2}$; $\forall$ v $\in$ V thì G có chu trình Hamilton.

1.3. Định lý Pósa về chu trình Hamilton

G = (V, E) là một đơn đồ thị có $\|V\| = n \ge 3$. Giả sử rằng với mỗi số $1 \le k < \frac{n-1}{2}$ ta có không quá k - 1 đỉnh có bậc không lớn hơn k, và trong trường hợp n là số lẻ ta có không quá $\frac{n-1}{2}$ đỉnh có bậc không vượt quá $\frac{n-1}{2}$. Khi đó đồ thị G có một chu trình Hamilton.

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh định lý này bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử G không có chu trình Hamilton, ta có thể giả sử rằng nếu thêm một cạnh bất kỳ nối 2 đỉnh không kề nhau của G thì đồ thị thu được sẽ có một chu trình Hamilton. Đồ thị G như vậy được gọi là có tính chất cực đại.

Nếu G không thỏa tính chất cực đại, ta có thêm vào G các cạnh mới bằng cách nối các cặp đỉnh không kề nhau, lúc đó ta sẽ thu được một đồ thị không có chu trình Hamilton có tính chất cực đại như đã mô tả ở trên và vẫn không ảnh hưởng gì đến giả thuyết của bài toán ban đầu.

Do tính chất cực đại của đồ thị nên giữa hai đỉnh tuỳ ý không kề nhau của đồ thị luôn tồn tại một đường Hamilton nối hai đỉnh này. Có thể đó là đường Hamilton thu được từ chu trình Hamilton xuất hiện khi thêm vào một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau này.

Ký hiệu $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ là một đường Hamilton (không khép kín) trong G. Cho $k = 2, 3, \cdots, n-1$. Ta có nếu vk được nối với v_1 bởi một cạnh thì vk_{-1} không được nối với vn bởi cạnh nào cả, nếu không thì:

$$(v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_n, v_{n-1}, \cdots, v_{k+1}, v_k, v_1)$$

là một chu trình Hamilton. Từ đó ta có:

$$d(v_1) + d(v_n) \le n - 1$$

Trong đồ thị G mỗi đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$ kề với tất cả các đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Thật vậy, giả sử có đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$, không mất tính tổng quát giả sử đỉnh v_1 với $d(v_1) \geq \frac{n-1}{2}$ không kề với đỉnh vn có bậc $d(v_n) \geq \frac{n}{2}$. Giả sử $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ là một đường Hamilton nối v_1 với vn. Ký hiệu các đỉnh lân cận của v_1 là $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_S}$ với $s = d(v_1)$. Khi đó vn không kề với $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \cdots, v_{i_S-1}$, và ta có

$$\frac{n}{2} \leq d(v_n) \leq (n-1-s) = (n-1-d(v_1))$$

Suy ra: $\frac{n}{2} \leq d(v_n) \leq (n-1-s) = (n-1-d(v_1)) \leq \frac{n-1}{2}$ (!)

Trong G tồn tại những đỉnh có bậc $\leq \frac{n-1}{2}$, nếu không G có chu trình Hamilton theo định lý Dirac. Ký hiệu Δ là bậc cao nhất trong các đỉnh của G có bậc nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. và p là số các đỉnh có bậc nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Khi đó theo giả thuyết của định lý ta có $p \leq \Delta \leq \frac{n-1}{2}$. Ta sẽ chứng minh rằng $p < \Delta < \frac{n-1}{2}$.

Ký hiệu q là số các đỉnh có bậc lớn hơn Δ, ta có:

$$q = n - p \geq n - \Delta > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} > \Delta.$$

Giả sử u_1 là một đỉnh có bậc là Δ, trong số $n - \Delta > \Delta$ đỉnh có bậc lớn hơn $\frac{n}{2}$ tồn tại ít nhất một đỉnh gọi là un không kề với u_1. Khi đó bậc của u_1 không thể là $\frac{n-1}{2}$ được, nếu không thì u_1 phải kề với un như trên đã chứng minh. Do đó, ta có: $d(u_1) = \Delta < \frac{n-1}{2}$.

Theo giả thuyết của định lý, số đỉnh có bậc không vượt quá Δ sẽ nhỏ hơn Δ, do đó $\Delta < \frac{n-1}{2}$. Ta có $p < \Delta$.

Xét đường Hamilton $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ nối u_1 với un. Ký hiệu các đỉnh lân cận của u_1 là $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_S}$ với $s = \Delta = d(u_1)$. Khi đó có một trong các đỉnh $u_{i_1-1}, u_{i_2-1}, \cdots, u_{i_S-1}$ gọi là u_{i_0-1} có bậc là $d(u_{i0-1}) \geq \frac{n-1}{2}$. Ở phần trên ta đã chứng minh được khi đó u_{i0-1} phải kề với un. Ta được chu trình Hamilton: $(u_1 u_2 \cdots u_{i_0-1} u_n u_{n-1} \cdots u_{i_0})$ là điều vô lý. Mâu thuẫn này đã kết thúc phần chứng minh của ta.

2. Phương pháp tìm chu trình Hamilton

Cho một đồ thị G =(V,E). Để tìm một chu trình Hamilton trong đồ thị G, ta thực hiện theo 4 qui tắc sau:

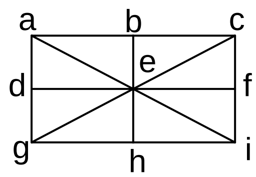
➢ *Qui tắc 1*: Nếu tồn tại một đỉnh v của G có $d(v) \leq 1$ thì đồ thị G không có chu trình Hamilton.

➢ *Qui tắc 2:* Nếu đỉnh v có bậc là 2 $(d(v)=2)$ thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton.

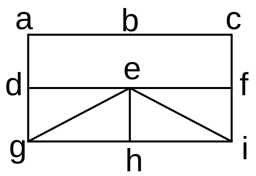
➢ *Qui tắc 3:* Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.

➢ *Qui tắc 4:* Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.

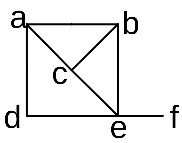
Ví dụ 13: Tìm một chu trình Hamilton của đồ thị:



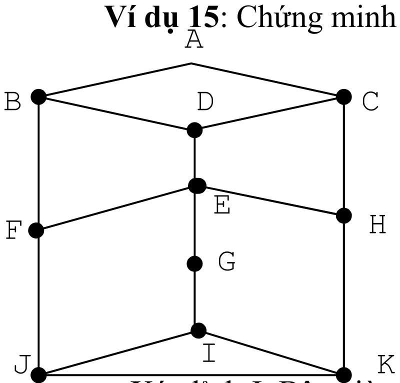
Xuất phát từ đỉnh a. Ta có deg(a) = 3, cho nên ta chỉ giữ lại 2 cạnh liên thuộc với a: ta chọn ab và ad, do đó ta bỏ cạnh ae (theo quy tắc 4). Tương tự tại b, ta bỏ cạnh be tại c ta bỏ cạnh ce (theo quy tắc 4). Khi đó ta có đồ thị:



Tại đỉnh f, ta bỏ cạnh fe. Tại đỉnh i ta bỏ cạnh ie, tại đỉnh h ta bỏ cạnh hg (theo quy tắc 4) tại đỉnh e, ta bắt buộc đi theo eg, gd (theo quy tắc 2). Tại đỉnh a ta phải chọn cạnh da (theo quy tắc 2). Vậy, ta có chu trình Hamilton: **a, b, c, f, i, h, e, g, d, a**.

Ví dụ 14: Đồ thị  không có chu trình Hamilton vì: deg(f) = 1.

Ví dụ 15: Chứng minh rằng đồ thị sau không có chu trình Hamilton:



+ Giả sử đồ thị có một chu trình Hamilton H.

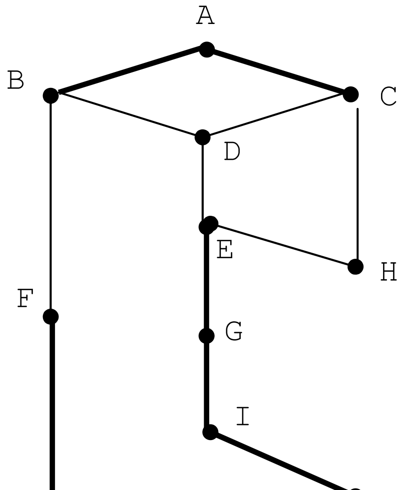
+ Vì $d(A)=d(G)=2$ nên H phải chứa các cạnh AB, AC, GE và GI (theo qui tắc 2).

+ Xét đỉnh I: Do tính chất đối xứng của hình vẽ ta có thể giả sử cạnh $IK \in H$, xóa cạnh IJ (theo qui tắc 4).

+ Xét đỉnh J: Bây giờ $d(J)=2$ nên hai cạnh JF và JK phải thuộc vào H.

+ Xét đỉnh K: ta đã chọn 2 cạnh KI và KJ nên xóa KH (theo qui tắc 4) và xóa cạnh EF (do quy tắc 3).

Đồ thị bây giờ trở thành:

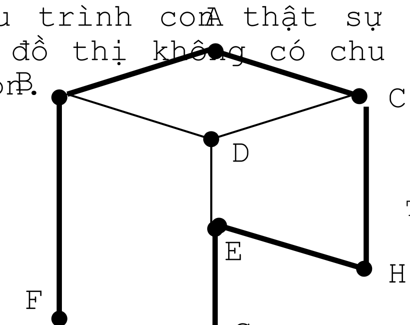


Dễ dàng thấy các cạnh FB, HE, HC phải

Thuộc chu trình Hamilton H. Ta nhận được

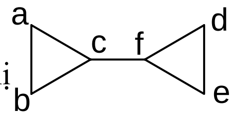
Một chu trình con thật sự trong H (Vô lý).

Theo qui tắc 2 ta có các cạnh FB, HE, HC phải thuộc chu trình Hamilton H. Khi đó, ta có một chu trình con thật sự trong H. Vậy đồ thị không có chu trình Hamilton.

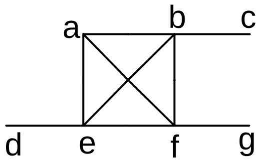


3. Đường đi Hamilton

3.1. Định nghĩa: Đường đi sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G = (V,E) (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần) được gọi là đường đi Hamilton.

Ví dụ 16: Đồ thị 

có đường đi Hamilton: a, b, c, f, d, e.

Còn đồ thị: 

không có đường đi Hamilton. Vì đường đi Hamilton phải bắt đầu và kết thúc tại 2 trong 3 đỉnh treo: c, d, g.

3.2. Định lý König: Mọi đồ thị G =(V, E) có hướng đầy đủ (đồ thị vô hướng tương ứng của G là đầy đủ) đều có đường Hamilton.

Chứng minh:

Xét đồ thị có hướng G =(V, E). Gọi $\alpha = v_1\ v_2 \cdots v_{k-1}\ v_k \quad (k > 0)$ là một đường đi sơ cấp trong G.

Nếu mọi đỉnh của G đều thuộc α thì α chính là đường Hamilton cần tìm. Ngược lại, nếu có một đỉnh $v \notin \alpha$ thì trong G phải tồn tại một đường sơ cấp α_1 thuộc một trong 3 dạng sau:

+ $x\, v_1 \cdots v_k$ (1)

+ $v_1 \cdots v_i\ x\, v_{i+1} \cdots v_k$ (2)

+ $v_1 \cdots v_k x$ (3)

Ta sẽ chứng minh rằng nếu α_1 không có dạng (1) và (2) thì phải có dạng (3).

Thật vậy:

+ Nếu α_1 không có dạng (1) $\Rightarrow \overrightarrow{v_1 x} \in G$

+ Nếu α_1 không có dạng (2) $\Rightarrow \overrightarrow{x v_i} \notin G$ với $i = 2..k \quad \Rightarrow \overrightarrow{v_i x} \in G;\ i = 2..k$

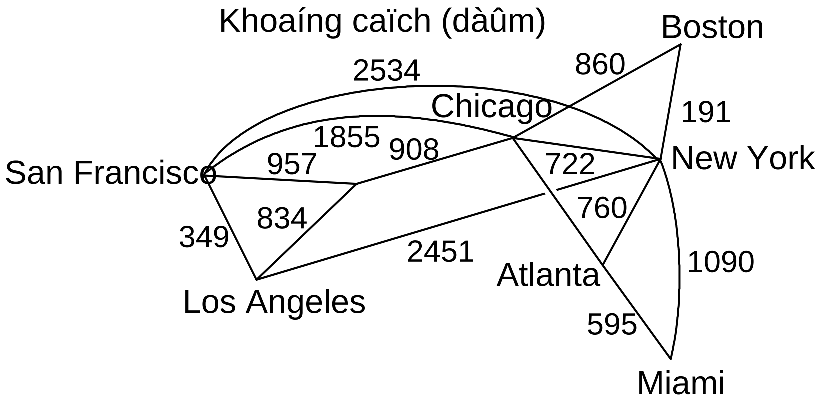
$\Rightarrow \overrightarrow{v_1 x} \in G;\quad i = 1..k$ nghĩa là α_1 có dạng (3).

III. Bài toán đường đi ngắn nhất

1. Mở đầu

Trong thực tế, nhiều bài toán có thể mô hình bằng đồ thị có trọng số. Đó là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán một con số (nguyên hoặc thực) gọi là trọng số ứng với cạnh đó. Ví dụ ta cần mô hình một hệ thống đường hàng không. Mỗi thành phố được biểu diễn bằng một đỉnh, mỗi chuyến bay là một cạnh nối 2 đỉnh tương ứng. Nếu trong bài toán đang xét ta cần tính đến khoảng cách giữa các thành phố thì ta cần gán cho mỗi cạnh của đồ thị cơ sở trên khoảng cách giữa các thành phố tương ứng. Nếu ta quan tâm đến thời gian của mỗi chuyến bay thì ta sẽ gán các thời lượng này cho mỗi cạnh của đồ thị cơ sở...

Đồ thị biểu diễn khoảng cách giữa một số thành phố của nước Mỹ.



Bài toán đặt ra là *tìm đường đi ngắn nhất từ thành phố này đến thành phố khác*. Hay nói theo ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị: *ta cần tìm đường đi có tổng trọng số (ngắn) nhỏ nhất từ đỉnh này đến một đỉnh khác của đồ thị.*

2. Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất

2.1. Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất

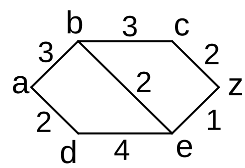
Có một số thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trên một đồ thị có trọng số.

Ở đây ta sẽ sử dụng thuật toán Dijkstra, do nhà toán học người Hà Lan: E.Dijkstra đề xuất năm 1959.

Chúng ta sẽ áp dụng thuật toán Dijkstra đối với đồ thị vô hướng. Đối với đồ thị có hướng, ta chỉ cần thay đổi một chút.

Trước khi giới thiệu thuật toán, ta xét ví dụ sau:

Tính độ dài của đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh a và z trong đồ thị có trọng số sau:



Đối với đồ thị này, ta dễ dàng tìm được đường đi ngắn nhất từ a đến z bằng cách thử trực tiếp. Tuy nhiên, ta sẽ phát triển một số ý tưởng giúp ta hiểu thuật toán Dijkstra dễ dàng hơn. Ta sẽ tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh kế tiếp cho đến khi đạt tới đỉnh z. Xuất phát từ đỉnh a, ta thấy chỉ có 2 đỉnh b và d liên thuộc với a. Nên chỉ có hai đường đi xuất phát từ a đến b và d là ab và ad với độ dài tương ứng là 3 và 2. Do đó, d là đỉnh gần a nhất.

Bây giờ, ta tìm đỉnh tiếp theo gần a nhất trong tất cả các đường đi qua a và d. Đường đi ngắn nhất từ a tới b là ab với độ dài 3. Đường đi ngắn nhất từ a đến e là a, b, e với độ dài 5. Đường đi ngắn nhất từ a đến c là a, b, c với độ dài 6. Khi đó ta có 2 đường đi từ a đến z qua c và e là a, b, c, z với độ dài 8; a, b, e, z với độ dài 6. Vậy, đường đi ngắn nhất từ a đến z là: a, b, e, z với độ dài 6.

Ví dụ trên đã minh họa những nguyên tắc chung dùng trong thuật toán Dijkstra. Đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến z có thể tìm được bằng cách thử trực tiếp. Nhưng phương pháp này không áp dụng được đối với đồ thị có nhiều cạnh.

Bây giờ, ta nghiên cứu bài toán tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa a và z trong đơn đồ thị liên thông, vô hướng và có trọng số.

Thuật toán Dijkstra được thực hiện bằng cách tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến đỉnh đầu tiên, từ a đến đỉnh thứ hai,... cho đến khi tìm được độ dài ngắn nhất từ a đến z.

Thuật toán này dựa trên một dãy các bước lặp. Một tập đặc biệt các đỉnh được xây dựng bằng cách cộng thêm một đỉnh trong mỗi bước lặp. Thủ tục gán nhãn được thực hiện trong mỗi lần lặp đó.

Trong thủ tục gán nhãn này, đỉnh w được gán nhãn bằng độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến w và chỉ đi qua các đỉnh thuộc tập đặc biệt. Một đỉnh được thêm vào tập này là đỉnh có nhãn nhỏ nhất so với các đỉnh chưa có trong tập đó.

Cụ thể của thuật toán Dijkstra như sau:

- Gán cho đỉnh a nhãn bằng 0; còn các đỉnh khác bằng ∞. Ta ký hiệu:

Lo(a) = 0; Lo(v) = ∞; $\forall$ v $\neq$ a (đây là bước lặp thứ 0).

- Gọi Sk là tập đặc biệt các đỉnh sau bước lặp thứ k của thủ tục gán nhãn. Chúng ta bắt đầu bằng So = ϕ. Tập Sk được tạo thành từ Sk_{-1} bằng cách thêm vào đỉnh u $\notin$ Sk_{-1} mà có nhãn nhỏ nhất.

- Sau khi đỉnh u được ghép vào Sk, ta sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc Sk sao cho Lk(v) (nhãn của đỉnh v tại bước k) là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến v mà đường đi này chỉ chứa các đỉnh thuộc Sk (tức là các đỉnh đã thuộc tập đặc biệt cùng với đỉnh u).

Giả sử v là một đỉnh không thuộc Sk. Để sửa nhãn của v, ta chọn Lk(v) là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến v và chỉ chứa các đỉnh thuộc Sk. Để ý rằng đường đi ngắn nhất từ a đến v chỉ chứa các phần tử của Sk hoặc là đường đi ngắn nhất từ a đến v chỉ chứa các phần tử của Sk_{-1} hoặc là đường đi ngắn nhất từ a đến u trong bước (k−1) cộng với độ dài cạnh uv. Tức là:

$$\mathbf{Lk(a,v) = \min\{Lk_{-1}(a,v);\ Lk_{-1}(a,u) + w(uv)\}}$$

Thủ tục này được lặp bằng cách liên tiếp thêm các đỉnh vào tập đặc biệt các đỉnh cho tới khi đạt tới đỉnh z. Khi thêm z vào tập đặc biệt các đỉnh thì nhãn của nó bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến z.

Thuật toán Dijkstra có thể được trình bày dưới dạng giải mã (pseudo - code) như sau:

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

Procedure Dijkstra (G: đơn đồ thị liên thông có trọng số dương);

{G có các đỉnh a = vo; v_1, v_2, ..., vn = z và trọng số w(vi,vj) với w(vivj) = ∞ nếu vivj không là một cạnh của G}.

for i = 1 to n

L(vi): = ∞

L(a): = 0

S: = ϕ

{Ban đầu các nhãn được khởi tạo sao cho nhãn của a bằng không, các đỉnh khác bằng ∞; S = ϕ}

While z $\notin$ S

begin

u: đỉnh không thuộc S có L(u) nhỏ nhất

S: = S $\cup$ {u}

for tất cả các đỉnh v không thuộc S

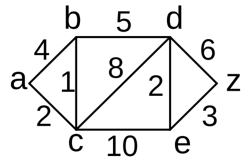
if L(u) + w(uv) < L(v) then

L(v): = L(u) + w(uv)

{thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất, và sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S}

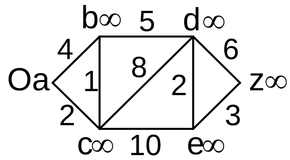
end {L(z) = Độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới z}.

Ví dụ 17: Dùng thuật toán Dijkstra, tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z trong đồ thị sau:



+ Ta có: V = {a,b,c,d,e,z}; S = ϕ.

+ Tại bước lặp thứ 1: ta gán 0 cho đỉnh a và gán ∞ cho các đỉnh còn lại. L(a) = 0.

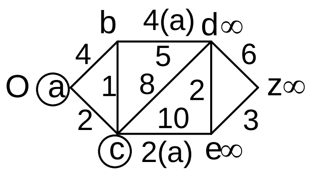


+ Trong các đỉnh không thuộc S = {a} và kề với a có 2 đỉnh b và c. Ta có:

L(b) = min {∞, L(a) + w(ab)} = min {∞, 0 + 4} = 4.

L(c) = min {∞, L(a) + w(ac)} = min {∞, 0 + 2} = 2.

Ta có: L(c) nhỏ nhất nên c $\in$ S. $\Rightarrow$ S = {a,c}.



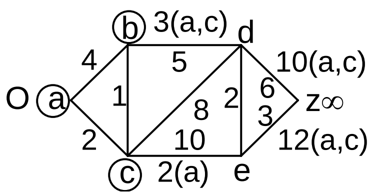
+ Trong các đỉnh không thuộc S mà kề với c có 3 đỉnh là b, d, e.

L(b) = min {4, L(c) + w(cb)} = min{4,2+1} = 3.

L(e) = min {∞, L(c) + w(ce)} = min{∞,12} = 12.

L(d) = min{∞,L(c) + w(cd)} = min{∞,2 + 8} = 10.

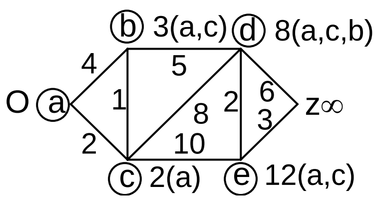
Ta có: L(b) nhỏ nhất nên b $\in$ S $\Rightarrow$ S = {a,b,c}.



+ Trong các đỉnh không thuộc S mà kề với b là d.

L(d) = min{10,L(b) + w(bd)} = min{10,3 + 5} = 8

$\Rightarrow$ d $\in$ S: S = {a,b,c,d}

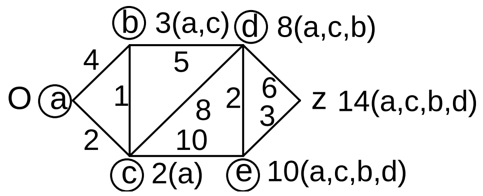


+ Trong các đỉnh kề với d mà không thuộc S, có: e,z.

L(e) = min{12, L(d) + w(de)} = min{12, 8+2} = 10

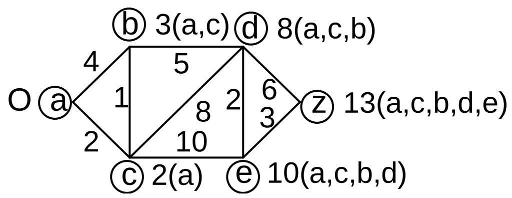
L(z) = min{∞, d(d) + w(dz)} = min{∞, 8+6} = 14

⇒ e ∈ S: S = {a,b,c,d,e}.



+ Các đỉnh kề với e mà không thuộc S: z.

L(z) = min{14, L(e) + w(ez)} = min{14, 10+3} = 13.



Vậy, đường đi ngắn nhất từ a đến z là: a, c, b, d, e với độ dài 13.

2.2. Định lý: Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trong đơn đồ thị liên thông, có trọng số.

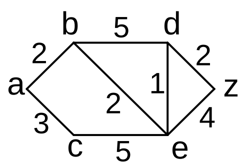
IV. Thuật toán Hedetniemi

Một trong những thuật toán tìm đường đi ngắn nhất ngoài thuật toán Dijkstra như đã trình bày, là thuật toán Hedetniemi. Thuật toán này đầu tiên do Hedetniemi đề xuất và Arlignhaus, Nysteren là những người đã phát triển thuật toán này. Thuật toán Hedetniemi đầu tiên được công bố vào năm 1990.

Trước khi giới thiệu thuật toán Hedetniemi, ta có khái niệm ma trận "liền kề" A = (aij) của một đồ thị G liên thông có trọng số với các đỉnh v_1, v_2, ..., vn như sau:

$$\text{Với} \quad aij = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i = j \\ x \text{ nếu } i \neq j \text{ và } x = w(vivj) \\ \infty \text{ nếu } vivj \notin G \end{cases}$$

Ví dụ 18: Ta có đồ thị G sau:



Theo thứ tự các đỉnh a, b, c, d, e, z. Ta có ma trận "liền kề" của G như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & 5 & 2 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Phép cộng ma trận Hedetniemi

Cho $A = (aij)_{m \times n}$ và $B = (bij)_{n \times p}$. Khi đó tổng ma trận Hedetniemi là ma trận $C = (Cij)_{m \times p}$ với $Cij = \min\{ai_1 + b_{1j}, ai_2 + b_{2j}, ..., ain + bnj\}$. Ký hiệu: $C = A \dashv\vdash B$.

Ví dụ 19: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \dashv\vdash B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \dashv\vdash \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 20: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \dashv\vdash B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

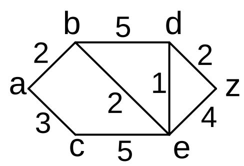
2. Thuật toán Hedetniemi

Để tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh bất kỳ của một đơn đồ thị liên thông có trọng số G, gọi A là ma trận "liền kề" của G được xác định theo trên. Ký hiệu: $A^2 = A \dashv\vdash A$; $A^3 = A^2 \dashv\vdash A$... Khi đó ta lần lượt tính A^2, A^3,... cho đến AK sao cho: $AK \neq AK^{-1}$ và $AK = AK^{+1}$.

Ta có định lý sau: đối với đơn đồ thị liên thông có trọng số gồm n đỉnh, nếu ma trận Hedetniemi $AK \neq AK^{-1}$ và $AK = AK^{+1}$ thì A biểu diễn tập hợp các độ dài đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của G khi đó phần tử aij của AK là độ dài đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh vi và vj.

3. Ví dụ

Tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh a và z của đơn đồ thị G sau:



Ta có ma trận "liền kề" của G là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & 5 & 2 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & 6 & 9 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 8 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A^5$$

$\Rightarrow$ Độ dài khoảng cách ngắn nhất từ a đến z là 7. Để tìm đường ngắn nhất từ a đến z ta thấy trong A^4:

$$a_{16}^{(4)} = a_{14}^{(3)} + a_{46}$$

$\Rightarrow$ đường đi trước khi đến z phải qua d.

Ta lại có: $a_{14}^{(3)} = a_{15}^{(2)} + a_{54}$

$\Rightarrow$ trước khi đến d, phải qua e.

Ta cũng có: $a_{15}^{(2)} = a_{12} + a_{25}$

$\Rightarrow$ đi qua b.

Vậy, đường đi ngắn nhất từ a đến z: a, b, e, d, z.

Chương III

ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

I. Đồ thị phẳng

1. Bài toán mở đầu

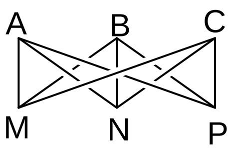
Để nghiên cứu về đồ thị phẳng, ta bắt đầu bằng việc xét bài toán "***Ba nhà ba giếng***" như sau:

Có ba nhà ở gần ba cái giếng, từ mỗi nhà có đường đi thẳng đến từng giếng, nhưng không có đường nối thẳng các nhà với nhau, cũng như không có đường nối thẳng các giếng với nhau. Có lần bất hòa với nhau, họ tìm cách làm các đường khác đến giếng sao cho các đường này đôi một không giao nhau. Họ có thực hiện được ý định đó không?

Ta xây dựng đồ thị G = (V, E) mô tả đầy đủ các thông tin của bài toán:

\+ *Đỉnh*: Lấy các điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các gia đình và các giếng nước. **Đối tượng** của bài toán ở đây được chia làm hai loại là **gia đình** và **giếng nước**. Vậy, mỗi đỉnh $v \in V$ biểu diễn cho một gia đình hoặc một giếng nước.

\+ *Cạnh*: Trong đồ thị G các đỉnh v_i và v_j được nối với nhau bằng một cạnh nếu có đường nối thẳng (trực tiếp) từ một gia đình đến một giếng nước. Vậy, mối quan hệ giữa 02 đối tượng ở đây là mối quan hệ **đường đi**. Mỗi cạnh $e \in E$ nối 2 đỉnh v_i (đại diện cho 01 gia đình) và v_j (đại diện cho một giếng nước) trong G nếu có đường đi trực tiếp từ gia đình v_i đến giếng nước v_j. Ta có đồ thị G như sau:



Khi giải quyết bài toán trên ta cần đến khái niệm đồ thị phẳng như sau:

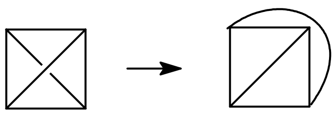
2. Đồ thị phẳng

2.1. Định nghĩa

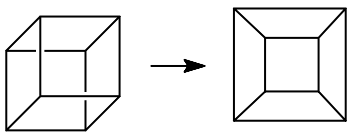
Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau ở điểm không phải là điểm mút của mỗi cạnh. Hình vẽ như vậy được gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

2.2. Các ví dụ

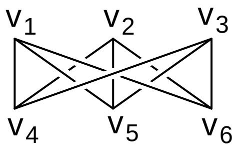
Ví dụ 1: K_4 là đồ thị phẳng vì có thể vẽ lại như sau:



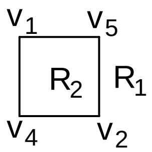
Ví dụ 2: Q_3 cũng là đồ thị phẳng vì:



Ví dụ 3: Ta sẽ xét xem đồ thị lưỡng phân $K_{3,3}$ có là đồ thị phẳng không?

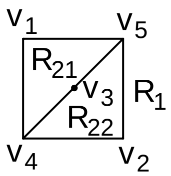


Ta sẽ chứng minh $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng. Thật vậy, ta thấy trong một biểu diễn phẳng bất kỳ của $K_{3,3}$ thì v_1 và v_2 đều nối với v_4 và v_5. Bốn đỉnh này tạo thành một đường khép kín chia mặt phẳng ra làm hai miền R_1 và R_2 như sau:



Ta còn lại đỉnh v_6. Có 3 trường hợp đối với v_6:

+ Nếu v_6 nằm trong R_1 thì cạnh nối v_3 với v_6 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác.



+ Nếu v_6 nằm trong R_{21}: cạnh nối v_6 với v_5 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác.

- Nếu v_6 nằm trong R_{22}: cạnh nối v_6 với v_1 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác.

$\Rightarrow$ v_3 không thể nằm trong R_2.

Tương tự ta cũng chứng minh được nếu v_3 nằm trong R_1 thì đồ thị cũng không phẳng.

Vậy, $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng.

Khi ta kết luận $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng, ta cũng đã giải quyết được bài toán ***"ba nhà ba giếng"***. Không có đường đi nào nối mỗi nhà với 3 giếng mà không cắt nhau. Hay nói cách khác, ba nhà ba giếng nói trên không thể nối với nhau trên một mặt phẳng mà không cắt nhau.

3. Công thức Euler

Ta thấy khi biểu diễn phẳng một đồ thị, ta chia mặt phẳng thành các miền, kể cả miền vô hạn. Euler đã chứng minh rằng tất cả các biểu diễn phẳng của một đồ thị đều chia mặt phẳng thành cùng một số miền như nhau. Euler cũng đã tìm ra mối liên hệ giữa số miền; số đỉnh và số cạnh của một đồ thị phẳng.

3.1. Định lý 1 (Công thức Euler về đồ thị phẳng - liên thông)

Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh. Gọi r là số miền (regions) trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó:

$$\mathbf{r = e - v + 2} \quad \text{hay} \quad \mathbf{v - e + r = 2.}$$

Chứng minh: Giả sử ta đã có biểu diễn phẳng của G. Ta sẽ chứng minh bằng cách xây dựng một dãy các đồ thị con của G: G_1, G_2, ..., Ge = G bằng cách ghép thêm một cạnh vào đồ thị ở bước trước. Điều này là làm được vì ta có thể lấy bất kỳ một cạnh của G để được G_1. Sau đó, ta nhận được Gn_{+1} từ Gn bằng cách thêm vào Gn một cạnh có một đỉnh liên thuộc với Gn và một đỉnh khác liên thuộc với cạnh mới đó. Điều này luôn làm được do G là liên thông. Ta sẽ nhận được đồ thị G sau e bước (vì G có e cạnh).

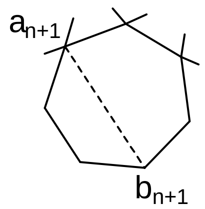
Gọi rn, en và vn tương ứng là số miền, số cạnh và số đỉnh của biểu diễn phẳng của Gn; n = 1, ..., e.

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp:

- Đối với G_1 ta có: $e_1 = 1$; $v_1 = 2$; $r_1 = 1$. Do đó: $r_1 = e_1 - v_1 + 2$.

- Giả sử đã có rn = en − vn + 2. Gọi $an_{+1}bn_{+1}$ là cạnh ghép thêm vào Gn để có Gn_{+1}. Khi đó có hai trường hợp có thể xảy ra:

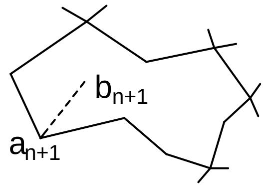
+ Nếu cả hai đỉnh an_{+1} và bn_{+1} đều thuộc Gn:



Do Gn_{+1} là đồ thị phẳng nên $an_{+1}bn_{+1}$ không thể cắt bất cứ cạnh nào của Gn_{+1} ⇒ an_{+1} và bn_{+1} phải nằm trên biên của miền chung R ⇒ cạnh $an_{+1}bn_{+1}$ chia R ra làm hai miền con. Khi đó: rn_{+1} = rn + 1; en_{+1} = en + 1.

Vn_{+1} = vn ⇒ $rn_{+1} = en_{+1} - vn_{+1} + 2$.

+ Nếu một trong an_{+1} hoặc bn_{+1} không phụ thuộc Gn: Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $an_{+1} \in$ Gn và $bn_{+1} \notin$ Gn. Khi đó ta thấy khi thêm cạnh $an_{+1}bn_{+1}$ vào Gn để được Gn_{+1} sẽ không thêm miền mới nào vì an_{+1} phải ở trên miền có an_{+1} ở trên biên của nó.



Do đó: rn_{+1} = rn; vn_{+1} = vn + 1; en_{+1} = en + 1 ⇒ $rn_{+1} = en_{+1} - vn_{+1} + 2$.

Vậy, ∀n = 1, 2, ..., e ta luôn có: rn = en − vn + 2

hay r = e – v + 2.

Ví dụ 4: Cho G là một đơn đồ thị liên thông có 8 đỉnh và mỗi đỉnh đều có bậc là 3. Khi đó biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Giải: Ta có: v = 8, theo giả thiết mỗi bậc có đỉnh bằng 3 nên ta có tổng số bậc của đỉnh: 3v = 8.3 = 24, mà tổng số bậc của đỉnh = 2e ⇒ 2e = 24 ⇒ e = 12 ⇒ số miền của G: r = e – v + 2 = 12 – 8 + 2 = 6.

3.2. Hệ quả 1

Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh; v ≥ 3. Khi đó: e ≤ 3v − 6.

Chứng minh:

Trong một đồ thị phẳng, liên thông thì:

+ Mỗi miền r được bao bởi ít nhất là 3 cạnh,

+ Mỗi cạnh nằm trên nhiều nhất 2 miền.

Vậy trong một đồ thị phẳng, ta có: : $3r \le 2e$ hay : $r \le \frac{2}{3}e \quad (1)$

Mặt khác, theo định lý Euler về đồ thị phẳng liên thông, ta có:

$$v - e + r = 2 \;\;\Rightarrow\;\; r = e - v + 2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$\frac{2}{3}e \ge e - v + 2 \;\;\Rightarrow\;\; 2e \ge 3e - 3v + 6 \Rightarrow e \le 3v - 6$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng đồ thị K_5 là không phẳng.

Giải: Ta có đồ thị K_5 có 5 đỉnh và 10 cạnh $\Rightarrow$ bất đẳng thức $e \le 3v - 6$ không đúng với K_5. Do đó, K_5 là đồ thị không phẳng.

3.3. Hệ quả 2

Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh; $v \ge 3$ và không có chu trình độ dài 3. Khi đó $e \le 2v - 4$.

Chứng minh

Trong một đồ thị phẳng, liên thông e cạnh, v đỉnh; $v \ge 3$ và không có chu trình độ dài 3 thì:

+ Mỗi miền r được bao bởi ít nhất là 4 cạnh,

+ Mỗi cạnh nằm trên nhiều nhất 2 miền.

Vậy trong một đồ thị phẳng, ta có: : $4r \le 2e$ hay : $r \le \frac{1}{2}e \quad (1)$

Mặt khác, theo định lý Euler về đồ thị phẳng liên thông, ta có:

$$v - e + r = 2 \quad \Rightarrow \quad r = e - v + 2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$\frac{1}{2}e \ge e - v + 2 \quad \Rightarrow \quad e \ge 2e - 2v + 4 \Rightarrow e \le 2v - 4$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng $K_{3,3}$ là không phẳng.

Giải: Ta có $K_{3,3}$ không có chu trình độ dài 3. Hơn nữa, $K_{3,3}$ có 6 đỉnh và 9 cạnh $\Rightarrow$ e = 9 và $2v - 4 = 8$. Điều này không thỏa hệ quả 2 $\Rightarrow$ $K_{3,3}$ không phẳng.

3.3. Hệ quả 3

Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh thì G phải có ít nhất một đỉnh w có $d(w) \le 5$.

Chứng minh

Theo nhận xét của hệ quả 1, chúng ta có trọng một đồ thị phẳng liên thông thì ta có bất đẳng thức:

$$3r \le 2e \quad (1)$$

Giả sử G là một đồ thị phẳng, liên thông có e cạnh, v đỉnh mà $\forall w \in V$ đều có $d(w) \ge 6$. Điều này có nghĩa là mỗi đỉnh của G sẽ là đầu mút của ít nhất 6 cạnh và mỗi cạnh liên thuộc với 2 đỉnh. Từ đó, ta có:

$$6v \le 2e \qquad \text{hay} \qquad 3v \le e \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, chúng ta có:

$$3r + 3v \le 3e \quad \Rightarrow \quad r + v \le e \quad \Rightarrow \quad r + v - e \le 0\,(!).$$

Vậy trong một đồ thị phẳng, liên thông có e cạnh, v đỉnh thì phải có ít nhất một đỉnh w có $d(w) \le 5$.

3.4. Định lý 2 (Công thức Euler về đồ thị phẳng bất kỳ)

Cho G là một đơn đồ thị phẳng với e cạnh, v đỉnh và có $k \geq 1$ thành phần liên thông. Gọi r là số miền (regions) trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó:

$$\mathbf{v - e + r = k + 1.}$$

Đây chính là công thức Euler cho một đồ thị phẳng bất kỳ.

(Sinh viên tự chứng minh - xem như bài tập).

4. Định lý Kuratowski

Định lý Kuratowski cho ta điều kiện cần và đủ để một đồ thị là phẳng. Định lý này liên quan đến phép phân chia sơ cấp của đồ thị.

Nhắc lại phép phân chia sơ cấp của đồ thị: Cho G là một đồ thị, nếu bỏ đi cạnh ab của G và thêm vào đỉnh mới c cùng với 2 cạnh ac và cb. Phép toán đó gọi là phép phân chia sơ cấp. Hai đồ thị nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp được gọi là đồng phôi với nhau.

Dễ thấy, nếu G_1 và G_2 là hai đồ thị đồng phôi thì: G_1 phẳng $\Leftrightarrow$ G_2 phẳng.

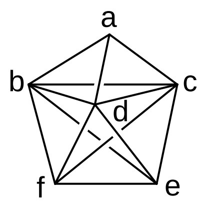
4.1. Định lý Kuratowski

Đồ thị G là không phẳng khi và chỉ khi G chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

Chứng minh định lý này tương đối phức tạp nên ta không trình bày ở đây.

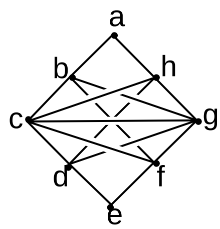
4.2. Các ví dụ:

Ví dụ 7: Xét đồ thị G:

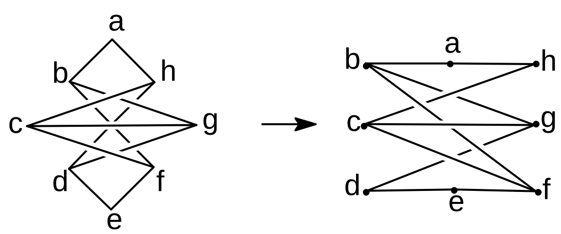


Nếu ta xóa đỉnh a của G, đồng thời xóa đi cạnh ab, ac, ad thì ta được một đồ thị con của G là đồ thị K_5 vì đồ thị con của G khi đó có 5 đỉnh b, c, d, e, f mà các đỉnh đều có bậc 4 $\Rightarrow$ G không phẳng.

Ví dụ 8: Xét đồ thị G có:



Nếu ta bỏ đi các cạnh bc, cd, fg, gh ta được đồ thị con của G:



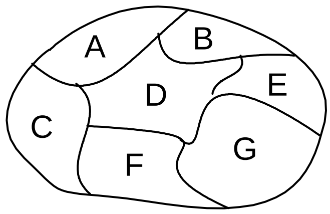
Đồ thị này đồng phôi với $K_{3,3}$ $\Rightarrow$ G không phẳng.

II. Bài toán tô màu đồ thị

1. Bài toán mở đầu

Khi tô màu một bản đồ, hai miền có chung biên giới được tô bằng hai màu tùy ý, miễn là khác nhau. Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, ta có thể tô mỗi miền bằng một màu khác nhau. Rõ ràng, điều này là không cần thiết vì đối với nhiều bản đồ, ta có thể dùng số màu ít hơn số miền nhưng vẫn đảm bảo hai miền kề nhau có màu khác nhau. Do đó bài toán đặt ra là "**Xác định số màu tối thiểu cần có để tô màu một bản đồ sao cho hai miền kề nhau có màu khác nhau**".

Ví dụ 9: Ta có bản đồ:



Đối với bản đồ này, ta cần ba màu là đủ (hai màu là không đủ).

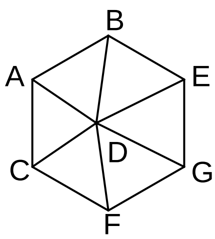
Để tô màu một bản đồ, chúng ta sẽ chuyển bản đồ về dưới dạng đồ thị. Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị. Trong đó:

+ Mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh của đồ thị.

+ Các cạnh nối hai đỉnh nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này có biên giới chung. Hai miền chung nhau chỉ một điểm, không được coi là kề nhau.

Đồ thị nhận được từ bản đồ bằng cách xây dựng trên được gọi là **đồ thị đối ngẫu** của bản đồ đang xét.

Ví dụ bản đồ nêu trên có đồ thị đối ngẫu như sau:



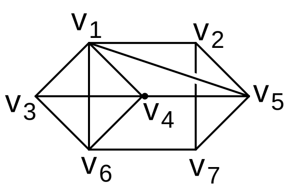
2. Tô màu đồ thị

2.1. Định nghĩa

➢ Tô màu một đơn đồ thị là việc gán màu cho các đỉnh của nó sao cho hai đỉnh liền kề có màu khác nhau. Mỗi đồ thị có thể có nhiều cách tô màu khác nhau.

➢ Số màu hay sắc số (Chromatic number) của một đồ thị G là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu G. Ký hiệu: $\chi(G)$.

Ví dụ 10: Xét đồ thị G:



Để tô màu đồ thị G, trước hết ta thấy v_1 có bậc cao nhất, $deg(v_1) = 5$ cho nên ta cho v_1 có màu a. $deg(v_5) = 4 \Rightarrow$ cho v_5 có màu b. Cho v_4 màu c. Vì $deg(v_4) = 4$ và v_4, v_5 kề nhau $\Rightarrow$

v_6 có màu c. Còn v_3 có màu d. Còn lại 2 đỉnh v_2 và v_7. Ta thấy v_2 kề với v_1 và v_5 $\Rightarrow$ cho v_2 màu c; v_7 không kề với v_1 nên ta cho v_7 màu a.

Vậy ta có đỉnh:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
màu:	a	c	d	c	b	b	a

$\Rightarrow$ ta sử dụng 4 màu để tô màu G.

Ta thấy G có 4 đỉnh v_1, v_3, v_4, v_6 đôi một kề nhau $\Rightarrow \chi(G) \geq 4$. Theo trên ta chỉ dùng 4 màu $\Rightarrow \chi(G) = 4$.

2.2. **Định lý**: Mọi đơn đồ thị đầy đủ K_n đều có: $\chi(Kn) = n$.

Chứng minh

Khẳng định được chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh của đồ thị.

➢ *Trường hợp cơ sở :* Với n = 1, K_1 có 1 đỉnh nên phải dùng 1 màu để tô.

➢ *Giả thiết quy nạp*: Giả sử khẳng định đúng với n = k. Nghĩa là mội đơn đồ thị đủ có k đỉnh đều có $\chi(Kk) = k$. Ta cần khẳng định tính đúng đắn của định lý đối với n = k + 1. Nghĩa là $\chi(Kk_{+1}) = k + 1$.

Giả sử Kk_{+1} là một đơn đồ thị đầy đủ với tập đỉnh:

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$$

Ta loại khỏi Kk_{+1} một đỉnh tuỳ ý (chẳng hạn đỉnh vk_{+1}) cùng các cạnh liên thuộc với đỉnh này. Đồ thị con nhận được là một đơn đồ thị đầy đủ có k đỉnh. Theo giả thuyết quy nạp chúng ta có $\chi(Kk) = k$.

Bây giờ ta "khôi phục" lại đỉnh vk_{+1} cùng với các cạnh liên thuộc với nó, tức là "trở lại" đồ thị Kk_{+1}. Vì đỉnh vk_{+1} kề với tất cả các đỉnh còn lại nên để tô màu cho vk_{+1} ta phải sử dụng một màu mới. Do đó: $\chi(Kk_{+1}) = k + 1$.

3. Một số định lý về tô màu đồ thị

3.1. Định lý 1

Mọi chu trình độ dài lẻ đều có sắc số là 3.

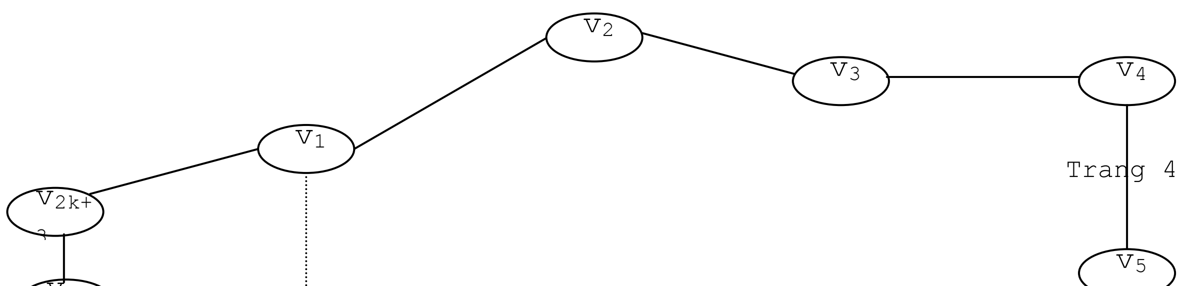
Chứng minh

Giả sử α là một chu trình độ dài lẻ tuỳ ý. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên n để $|\alpha| = 2n + 1$. Giả sử dãy các đỉnh của α là: $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}, v_{2n+1}\}$. Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n.

➢ *Trường hợp cơ sở :* Với n = 1. Chu trình α gồm 3 đỉnh v_1, v_2, v_3. Do mỗi đỉnh $v_i (1 \leq i \leq 3)$ đều kề với 2 đỉnh còn lại, nên ta phải dùng đúng 3 màu khác nhau để tô cho α vì 2 đỉnh kề nhau tuỳ ý đều phải có màu khác nhau.

➢ *Giả thiết quy nạp*: Giả sử khẳng định đã đúng với $n \leq k$, nghĩa là với một chu trình α_1 tuỳ ý với độ dài 2n + 1 $(1 \leq n \leq k)$ đều có sắc số bằng 3. Ta chỉ cần chỉ ra rằng với n = k + 1 khẳng định vẫn đúng. Nghĩa là chu trình α có độ dài 2(k + 1) + 1 cũng có sắc số bằng 3.

Giả sử α là chu trình có độ dài lẻ tùy ý có độ dài bằng 2(k + 1) + 1 và có tập đỉnh: $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2k}, v_{2k+1}, v_{2k+2}, v_{2k+3}\}$ ta mô tả chu trình α như hình vẽ sau:

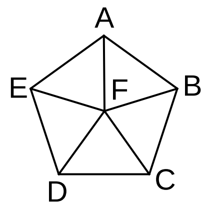


Nối đỉnh v_1 với đỉnh v_{2k+1} ta được chu trình α_1 với độ dài lẻ là 2k + 1. Theo giả thuyết quy nạp thì α_1 có sắc số là 3 và 02 đỉnh v_1 và v_{2k+1} phải có màu khác nhau. Chẳng hạn v_1 được tô bằng màu M_1 và đỉnh v_{2k+1} được tô bằng màu M_2. Khi đó, để tô đỉnh v_{2k+2} ta có thể dùng lại màu M_1 và tô đỉnh v_{2k+3} ta có thể dùng lại màu M_2. Nghĩa là không cần dùng thêm màu mới. Vậy sắc số của α là 3 và định lý đã được chứng minh.

3.2. Định lý 2

Nếu G có chứa một đồ thị con đẳng cấu với Kn thì $\chi(G) \geq n$.

Ví dụ 11: Tìm sắc số của đồ thị G:



Ta có: G chứa K_3 nên $\chi(G) \geq 3$.

Ta lại có F có bậc lớn nhất nên ta tô F màu 1, A màu 2, B màu 3. Khi đó C phải tô màu 2 và D tô màu 3. Còn lại đỉnh E kề với A, F, D đã có đủ 3 màu 1, 2, 3. Do đó, E phải có màu 4.

Ta tìm sắc số của G: Do G có chứa chu trình lẻ (ABCDEA) nên ta có các đỉnh A, B, C, D, E phải được tô bằng 3 màu. Mặt khác, đỉnh F kề với tất cả các đỉnh A, B, C, D, E nên ta phải dùng màu thứ 4 để tô cho F. Vậy: $\chi(G) = 4$.

Chú ý:

- Nếu G' là một đồ thị con của G thì $\chi(G) \geq \chi(G')$.
- Nếu dùng k màu để tô màu G thì không cần quan tâm đến những đỉnh có bậc nhỏ hơn k.

3.3. Định lý 3

Một đơn đồ thị G = (V, E) có thể tô bằng 2 màu khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.

Chứng minh

- *Điều kiện cần:* Giả sử G là đồ thị 2 sắc (có thể tô tất cả các đỉnh của G bằng 2 màu) ngưng trong G lại có một chu trình lẻ α. Khi đó theo định lý 1, sắc số của α phải là 3. Mặt khác theo định lý 2 ta có $\chi(G) \geq \chi(\alpha) = 3$. Do đó, sắc số của G ít nhất phải là 3. Ta suy ra điều mâu thuẫn với giả thuyết, nên G không có chu trình độ dài lẻ.
- *Điều kiện đủ:* Giả sử đồ thị G không có chu trình độ dài lẻ. Ta cần chứng minh rằng G là đồ thị 2 sắc. Ta bắt đầu tô dần các đỉnh của G theo quy tắc sau:

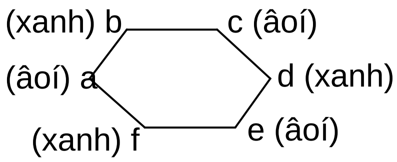
+ Tô M_1 cho đỉnh $w \in V$ bất kỳ.

+ Nếu một đỉnh $u \in V$ nào đó đã được tô bằng M_1, ta sẽ dùng màu M_2 để tô cho tất cả các đỉnh kề với u và ngược lại nếu đỉnh $u \in V$ nào đó đã được tô bằng M_2, ta sẽ dùng màu M_1 để tô cho tất cả các đỉnh kề với u.

Vì G là đồ thị hữu hạn nên đến một lúc nào đó tất cả các đỉnh của G sẽ phải được tô màu và mỗi đỉnh của G không thể cùng lúc vừa được tô bằng M_1 vừa được tô bằng M_2. Thật vậy, giả sử trong G tồn tại đỉnh v mà theo nguyên tắc nó vừa được tô bằng M_1 đồng thời cũng được tô bằng M_2. Khi đó v phải kề với đỉnh s được tô bằng M_1 và đỉnh t được tô bằng M_2, nên khi đó các đỉnh v, s, t phải nằm trên một chu trình độ dài lẻ. Như vậy mâu thuẫn với giả thuyết nên đỉnh v không tồn tại.

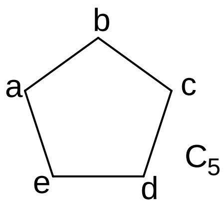
Ví dụ 12: Xét đồ thị vòng Cn (n ≥ 3).

➢ Khi n chẵn, chẳng hạn n = 6. Ta có:



Dễ thấy khi đó $\chi(C_6) = 2$ vì ta có thể tô màu như trên. Rõ ràng C_6 không có chu trình lẻ.

➢ Khi n lẻ, chẳng hạn n = 5. Ta có:



C_5 có chứa chu trình lẻ $\Rightarrow \chi(C_5) \geq 3$. Dễ thấy $\chi(C_5) = 3$.

Tổng quát: $\begin{cases} \chi(Cn) = 2 \text{ nếu n chẵn } (n \geq 3) \\ \chi(Cn) = 3 \text{ nếu n lẻ } (n \geq 3) \end{cases}$

3.4. Định lý 4 (Định lý bốn màu) (định lý Appel-Haken, 1976)

Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số không lớn hơn 4. Định lý này là định lý đầu tiên được chứng minh với sự hỗ trợ của máy vi tính.

4. Thuật toán Welch-Powell về tô màu đồ thị

Để tô màu một đồ thị G, ta có thể sử dụng thuật toán Welch-Powell như sau:

➢ Sắp xếp các đỉnh G theo bậc giảm dần.

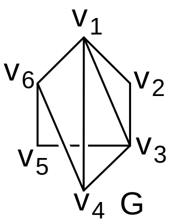
➢ Dùng một màu để tô đỉnh đầu tiên và cũng dùng màu này để tô màu các đỉnh liên tiếp trong danh sách mà không kề với đỉnh đầu tiên.

➢ Bắt đầu trở lại đầu danh sách, tô màu thứ hai cho đỉnh chưa được tô và lập lại quá trình trên cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu.

➢ **Chú ý**: Thuật toán Welch-Powell chưa cho ta sắc số của một đồ thị G, nó chỉ giúp ta một cách tiếp cận để tìm sắc số của một đồ thị. Để tìm sắc số của một đồ thị thì sau khi tô màu xong ta phải sử dụng các định lý, các tính chất đã học của lý thuyết đồ thị để khẳng định số màu được dùng là ít nhất và từ đó suy ra sắc số của đồ thị. Bài toán tìm sắc số của một đôè thị là một bài toán khó và không phải đồ thị nào cũng tìm được sắc số của nó một cách dễ dàng.

Ví dụ 13: Về sử dụng thuật toán Welch-Powell.

Dùng thuật toán Welch-Powell để tô màu và tìm sắc số của đồ thị sau:



Ta có đỉnh:	v_1	v_3	v_4	v_6	v_2	v_5
bậc:	4	4	3	3	2	2
màu	a	b	c	b	c	a

Ta lại có G chứa đồ thị con đẳng cấu với K_3 bao gồm các đỉnh v_1, v_2, $v_3 \Rightarrow \chi(G) \geq 3$.

Do G có chứa đồ thị con là K_3 nên theo định lý 2 ta có $\chi(G) \geq 3$. Ta có thể dùng 3 màu để tô G là ít nhất $\Rightarrow \chi(G) = 3$.

5. Ứng dụng của bài toán tô màu

Bài toán tô màu có nhiều ứng dụng trong thực tế. Chẳng hạn: việc xếp lịch thi cho sinh viên, phân chia tần số phát sóng của các đài phát thanh truyền hình, bố trí các con vật trong sở thú...

Ví dụ 14: Hãy lập lịch thi cho các sinh viên trong một trường đại học sao cho không có sinh viên nào phải thi 02 môn trong cùng một buổi thi. Chẳng hạn, có 7 môn cần xếp lịch thi được đánh số lần lượt từ 1 đến 7 và các cặp môn sau có chung sinh viên dự thi:

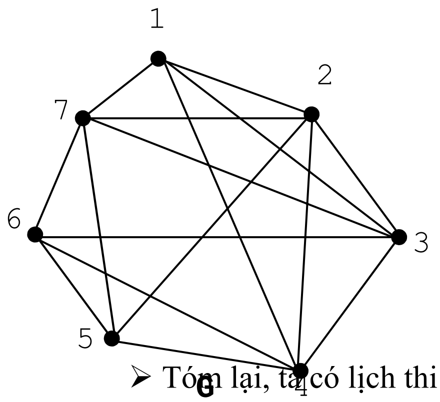
+ 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7.
+ 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7.
+ 3 và 4, 3 và 7.
+ 4 và 5, 4 và 6.
+ 5 và 7.
+ 6 và 7.

Giải Xây dựng đồ thị G = (V, E) mô tả bài toán:

➢ Mỗi đỉnh $v_i \in V \quad \left(i = \overline{1..7}\right)$ đại diện cho môn thi thứ i.

➢ Mỗi cạnh $e \in E$ nối 2 đỉnh vi và vj nếu có sinh viên phải thi cả hai môn được biểu diễn bằng 2 đỉnh này.

Ta có đồ thị G =(V, E) như sau:



➢ Để lập lịch thi ta sẽ tiến hành tô màu cho G theo thuật toán Welch-Powell như sau:

Đỉnh	2	3	4	7	1	5	6
Bậc:	5	5	5	5	4	4	4
Màu:	M_1	M_2	M_3	M_3	M_4	M_2	M_1

➢ Ta thấy G có chứa đồ thị con K_4 nên dùng 4 màu để tô cho G là ít nhất. Vậy $\chi(G) = 4$

➢ Tóm lại, ta có lịch thi như sau:

Buổi thi	**Môn thi**
I	2, 6
II	3, 5
III	4, 7
IV	1

Chương IV

CÂY

I. Một số khái niệm cơ bản

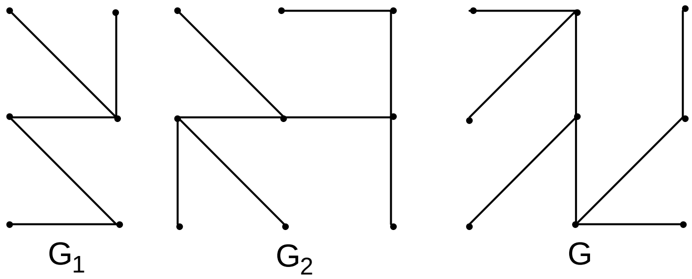
1. Cây (Tree)

1.1. Định nghĩa

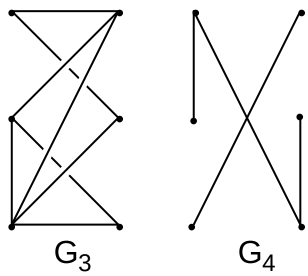
Cây là một đồ thị vô hướng, liên thông và không có chu trình sơ cấp.

Do cây không có chu trình sơ cấp, nên cây không thể có cạnh bội và khuyên. Vậy mọi cây là đơn đồ thị.

1.2. Các ví dụ



G_1 và G_2, G là các cây.



G_3 và G_4 không là cây.

+ G_3 có chứa chu trình nên G_3 không là cây,

+ G_4 không liên thông nên G_4 không là cây.

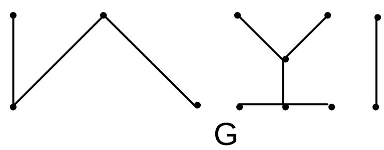
2. Rừng (Forest)

2.1. Định nghĩa

Rừng là đồ thị vô hướng không có chu trình.

Từ định nghĩa, ta thấy rừng là một đồ thị có nhiều thành phần liên thông mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

2.2. Ví dụ



G là một rừng và G có 3 thành phần liên thông.

3. Định lý về điều kiện đủ của cây

Nếu trong đồ thị vô hướng G, mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất thì G là một cây.

Chứng minh

Giả sử G là một cây ta sẽ chứng minh mọi cặp đỉnh trong G đều tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất. Thật vậy:

➢ Nếu trong G tồn tại một đường đi α giữa hai đỉnh v và w và α không là đường đi sơ cấp. Khi đó trên đường đi α sẽ tồn tại ít nhất một đỉnh u được đi lặp lại. Khi đó trong G sẽ có một chu trình:

$$\beta = u \cdots v_j v_{j+1} \cdots u \qquad (1)$$

➢ Mặt khác, giả sử trên G có 2 đường sơ cấp khác nhau α_1 và α_2 nối 2 đỉnh v và w. Được liệt kê lần lượt như sau:

$$\alpha_1 = vv_1v_2 \cdots v_n w \qquad \text{và} \qquad \alpha_2 = vv'_1\, v'_2 \cdots v'_n\, w$$

+ Gọi i là chỉ số bé nhất của các đỉnh trên đường đi sao cho $v_i v_{i+1} \neq v'_i\, v'_{i+1}$

+ Gọi j là chỉ số bé nhất $(j \geq i)$ sao cho tồn tại một chỉ số $k \geq i$ để $v'_k = v_j$.

Ta thấy rằng các chỉ số i, j và k như thế là tồn tại và khi đó trong G tồn tại một chu trình:

$$\beta' = v_i v_{i+1} \cdots v_j v'_{k-1} \cdots v'_i \equiv v_i \qquad (2)$$

Vậy từ (1) và (2), ta có: Nếu trong đồ thị vô hướng G, mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất thì G là một cây.

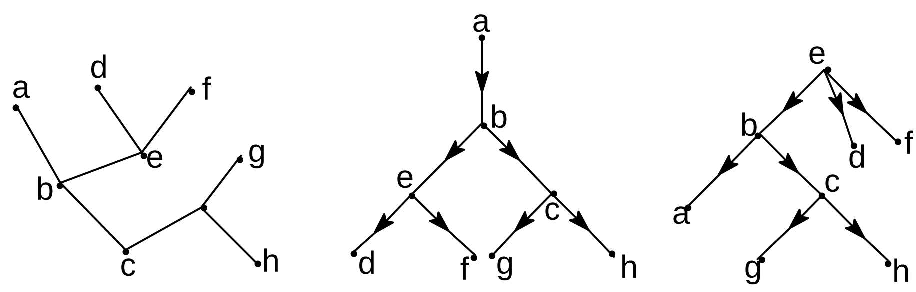
4. Cây có gốc

4.1. Định nghĩa

Trong một cây, nếu ta chọn một đỉnh đặc biệt gọi là gốc của cây và định hướng các cạnh trên cây từ gốc đi ra thì ta được một đồ thị có hướng gọi là cây có gốc.

➢ **Chú ý:** Cùng một cây, nếu ta chọn gốc khác nhau thì cây có gốc thu được sẽ khác nhau.

4.2. Ví dụ



T_1 **T_2** **T_3**

+ T_1 là một cây,

+ T_2 là cây có gốc a,

+ T_3 là cây có gốc e,

+ T_2 và T_3 là các cây có gốc được sinh ra từ cây T_1.

4.3. Một số khái niệm

Cho T là một cây có gốc, v là một đỉnh khác gốc của T.

➢ Cha của v là đỉnh u $\in$ T sao cho có một cạnh có hướng duy nhất từ u $\rightarrow$ v. Khi đó, u được gọi là cha của v; v là con của u.

➢ Các đỉnh có cùng cha được gọi là anh em.

➢ Tổ tiên của một đỉnh khác gốc là các đỉnh trên đường đi từ gốc đến đỉnh đó.

➢ Con cháu của v là các đỉnh có v là tổ tiên.

➢ Các đỉnh của cây không có con được gọi là lá.

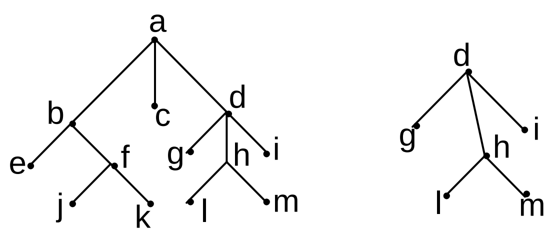
➢ Các đỉnh có con được gọi là đỉnh trong.

➢ Trong một cây, cho a là một đỉnh. Cây con với gốc a là đồ thì con của cây đang xét, bao gồm a và các con cháu của nó cùng tất cả các cạnh liên thuộc với các con cháu của a.

➢ Mức của một đỉnh v trong một cây có gốc T là khoảng cách từ gốc đến v.

➢ Mức lớn nhất của một đỉnh bất kỳ trong cây gọi là chiều cao của cây.

Ví dụ



đỉnh d có các con là g, h, i.

Đồ thị bên phải là một cây con của cây bên trái.

5. Định lý Daisy Chain

Giả sử T là một đồ thị có n đỉnh. Khi đó, 6 mệnh đề sau là tương đương:

(1): T là một cây,

(2): T không có chu trình và có n - 1 cạnh.

(3): T là một đồ thị liên thông và nếu hủy bất kỳ một cạnh nào của nó cũng làm mất tính liên thông.

(4): Giữa 2 đỉnh bất kỳ của T , luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất nối 2 đỉnh này.

(5): T không có chu trình và nếu thêm một cạnh mới nối 2 đỉnh bất kỳ của T thì sẽ tạo ra một chu trình.

(6): T liên thông và có n - 1 cạnh.

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh định lý này theo quy trình vòng tròn như sau: $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(6)\Rightarrow(1)$

- $(1)\Rightarrow(2)$: Vì T là một cây nên T là đồ thị liên thông. Hơn nữa, ta có thể xem T là một cây có gốc. Khi đó, mọi đỉnh trên cây đều có bậc vào là 1 ngoại trừ đỉnh gốc có bậc vào là 0. T có n đỉnh nghĩa là có n - 1 đỉnh khác gốc. Vậy T liên thông và có n -1 cạnh.

- $(2)\Rightarrow(3)$: Vì T không có chu trình nên mỗi thành phần liên thông của T phải là một cây. Giả sử T có $k\geq 1$ thành phần liên thông. Gọi ni là số đỉnh thuộc thành phần liên thông thứ i $(i=1..k)$, theo mệnh đề (2) ta có số cạnh của thành phần liên thông thứ i là ni - 1.

Theo giả thuyết ta có: $\sum_{i=1}^{k} n_i - 1 = n - k = n-1$.Đẳng thức này chỉ xảy ra khi k =1, nghĩa là T có 1 thành phần liên thông nghĩa là T liên thông.

Bây giờ, nếu hủy đi một cạnh của T, ta nhận được một đồ thị T’ có n - 2 cạnh và T’ không có chu trình vậy T’ cũng là một cây: vô lý.

- $(3)\Rightarrow(4)$: Gọi v và w là 2 đỉnh bất kỳ của T. Vì T liên thông nền tồn tại một đường đi nối chúng. Giả sử có 2 đường khác nhau cùng nối v với w, khi đó nếu ta hủy đi một cạnh bất kỳ thuộc trên đường thứ nhất nhưng không thuộc đường thứ hai thì vẫn không làm mất tính liên thông của T. Điều này mâu thuẫn với tính chất (3).

- $(4)\Rightarrow(5)$: Nếu T có một chu trình nối 2 đỉnh phân biệt v và w, khi thêm vào một cạnh mới nối 2 đỉnh này thì rõ ràng có 2 đường đi khác nhau cùng nối 2 đỉnh v và w. Mâu thuẫn với (4). Vậy T không có chu trình.

Bây giờ, thêm một cạnh nối 2 đỉnh v và w của T. Theo giả thuyết trong T có một đường đi trong T (không chứa cạnh mới) nối v và w. Rõ ràng, đường này thêm cạnh mới sẽ tạo thành chu trình.

- $(5)\Rightarrow(6)$: Xét hai đỉnh bất kỳ v và w của T. Thêm vào T một cạnh mới nối 2 đỉnh này sẽ tạo thành chu trình (giả thuyết). Hủy cạnh mới này khỏi chu trình, ta được một đường trong T nối 2 đỉnh v và w. Vậy T liên thông và không có chu trình. Theo giả thuyết T có n đỉnh nên T có n - 1 cạnh.

- $(6)\Rightarrow(1)$: Giả sử T có chu trình và có n - 1 cạnh. Hủy một cạnh khỏi chu trình này vẫn không làm mất tính liên thông của T. Nếu đồ thị nhận được vẫn còn chu trình, ta lại hủy bỏ một cạnh trong chu trình mới,cứ thế tiếp tục cho đến khi nhận được một đồ thị liên thông không có chu trình. Đồ thị này là một cây có n đỉnh nhưng có ít hơn n - 1 cạnh (mâu thuẫn). Vậy T không có chu trình, nghĩa là T là một cây.

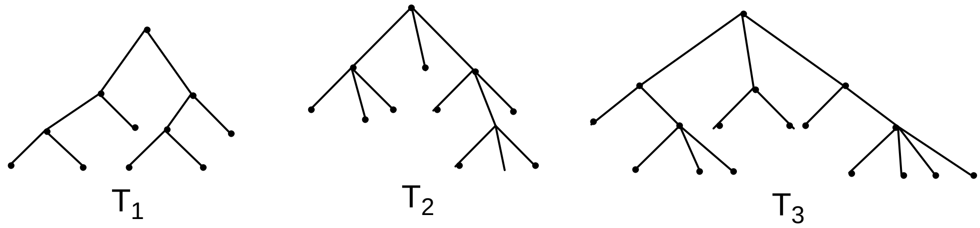
6. Cây m-phân

6.1. Định nghĩa

Cây có gốc được gọi là cây m-phân nếu tất cả các đỉnh trong của nó không có hơn m con. Cây được gọi là m-phân đầy đủ nếu mọi đỉnh trong của nó có đúng m con.

Cây 2-phân được gọi là cây nhị phân.

6.2. Ví dụ



+ T_1: cây nhị phân đầy đủ

+ T_2: cây tam phân đầy đủ

+ T_3: cây tứ phân (không đầy đủ).

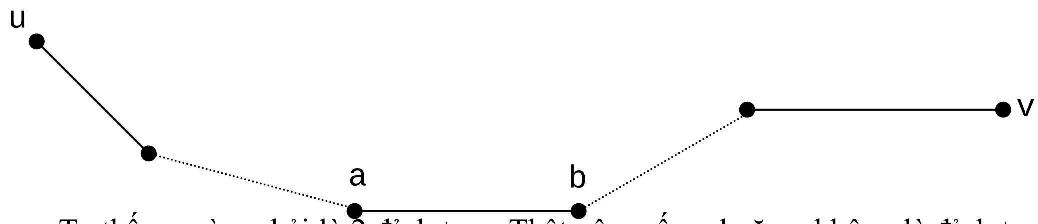
II. Một số tính chất của cây

1. Tính chất 1

Nếu T là một cây có n đỉnh $(n \geq 2)$ thì T phải có ít nhất 2 đỉnh treo.

Chứng minh

Giả sử a và b là một cạnh của T. Gọi α là đường sơ cấp dài nhất trên T chứa cạnh ab. Chẳng hạn:



Ta thấy u và v phải là 2 đỉnh treo. Thật vậy, nếu u hoặc v không là đỉnh treo thì nó phải là đầu múc của 1 cạnh xu (hoặc vy) nào đó. Khi đó, sẽ tồn tại đường α' chứa cạnh ab có độ dài lớn hơn α (Vô lý). Vậy u và v phải là 2 đỉnh treo.

2. Tính chất 2

Cây m-phân đầy đủ với i đỉnh trong sẽ có tất cả n = m.i + 1 đỉnh.

Chứng minh

Mỗi đỉnh từ gốc là con của một đỉnh trong. Mỗi đỉnh trong có m con, mà có i đỉnh trong ⇒ có m.i đỉnh khác gốc ⇒ cây có tất cả (m.i + 1) đỉnh.

3. Tính chất 3

Cho T là cây m-phân đầy đủ có i là số các đỉnh trong và l là số các lá của đỉnh này. Ta có:

3.1. Nếu T có n đỉnh thì $i = \dfrac{n-1}{m}; l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$

3.2. T có i đỉnh trong thì n = m.i + 1; l = (m – 1)i + 1

3.3. T có l lá thì n = m.i + 1 và n = l + i.

(Tính chất này xem như bài tập - Sinh viên tự chứng minh)

III. Cây nhị phân và phép duyệt cây

1. Định nghĩa

Duyệt cây là đưa ra một danh sách liệt kê tất cả các đỉnh của cây, mỗi đỉnh một lần. Có 3 phép duyệt cây thường dùng là duyệt tiền tự (PreOrder), duyệt trung tự (InOrder) và duyệt hậu tự (PostOrder). Cả ba phương pháp duyệt trên đều được định nghĩa đệ quy đối với cây nhị phân (mỗi nút có tối đa 2 con lần lượt được gọi là con trái và con phải của nút).

1.2. Định nghĩa phép duyệt tiền tự (PreOrder)

1. Duyệt nút gốc,

2. Duyệt con trái theo phương pháp duyệt tiền tự,

3. Duyệt con phải theo phương pháp duyệt tiền tự,

1.3. Định nghĩa phép duyệt trung tự (InOrder)

1. Duyệt con trái theo phương pháp duyệt trung tự,

2. Duyệt nút gốc,

3. Duyệt con phải theo phương pháp duyệt trung tự,

1.4. Định nghĩa phép duyệt hậu tự (PostOrder)

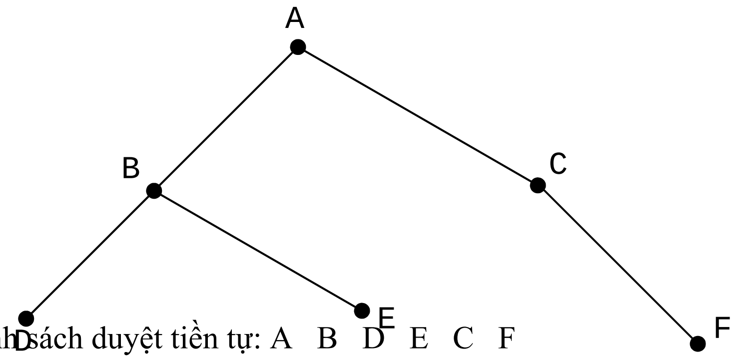
1. Duyệt con trái theo phương pháp duyệt hậu tự,

2. Duyệt con phải theo phương pháp duyệt hậu tự,

3. Duyệt nút gốc.

2. Ví dụ

Duyệt cây nhị phân sau theo tiền tự, trung tự, hậu tự



- Danh sách duyệt tiền tự: A B D E C F
- Danh sách duyệt trung tự: D B E A C F
- Danh sách duyệt hậu tự: D E B F C A

3. Ký pháp nghịch đảo Ba Lan (Reverse Polish Notation - RPN)

3.1. Cây biểu thức số học

Cây biểu thức số học là một cây nhị phân, trong đó:

+ Mỗi nút trong biểu diễn cho một toán tử 2 ngôi θ.

+ Mỗi nút lá biểu diễn cho một toán hạng của biểu thức.

Nếu nút trong biểu diễn cho toán tử 2 ngôi θ và có 2 con:

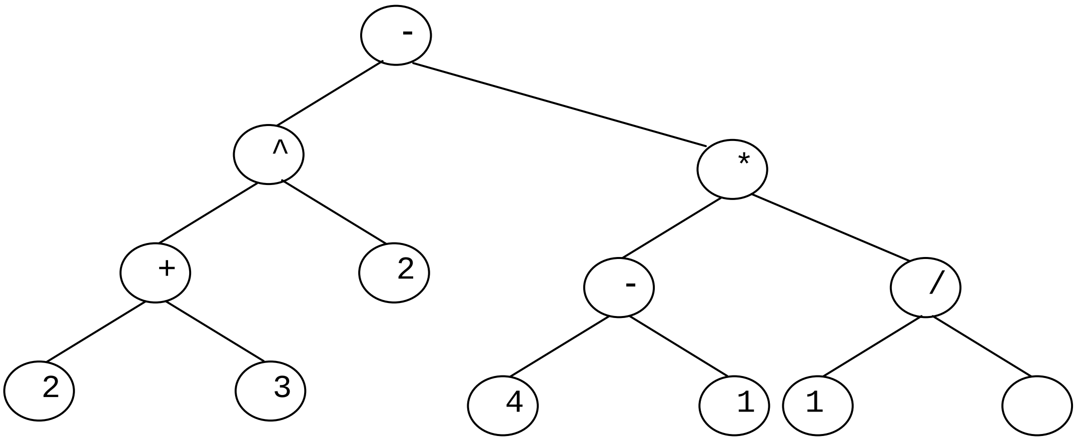
+ Con trái biểu diễn cho biểu thức E_1,

+ Con phải biểu diễn cho biểu thức E_2,

khi đó nút trong này biểu diễn cho biểu thức số học $E_1\ \theta\ E_2$

Ví dụ: Xét biểu thức số học $E = (2+3)^\wedge 2 - (4-1) * (15/5)$

Được biểu diễn bằng cây biểu thức số học sau:



Đối với cây biểu thức số học nếu duyệt tiền tự ta được biểu thức tiền tố, duyệt trung tự ta được biểu thức trung tố và duyệt hậu tự ta được biểu thức hậu tố của biểu thức số học ban đầu.

+ Biểu thức tiền tố: - ^ + 2 3 2 * - 4 1 / 15 5

+ Biểu thức trung tố: 2 + 3 ^ 2 - 4 - 1 * 15 / 5

+ Biểu thức hậu tố: 2 3 + 2 ^ 4 1 - 15 5 / * -

3.2. Ký pháp nghịch đảo Ba Lan (RPN)

Trong máy tính để tính giá trị của biểu thức E người ta sử dụng biểu thức dạng hậu tố gọi là ký pháp nghịch đảo Ba Lan (Reverse Polish Notation - RPN) của biểu thức E.

Trong máy tính giá trị của biểu thức E được tính bằng cách lưu các số của biểu thức E được biểu diễn theo ký pháp RPN vào trong một bộ nhớ Stack (Stack là một cấu trúc lưu trữ có tính chất là phần tử nào được lưu trữ trước thì được lấy ra sau).

Mỗi khi một toán tử được đưa vào thì máy sẽ lấy 2 toán hạng ở đầu Stack ra, áp dụng phép toán được biểu diễn bởi toán tử cho 2 toán hạng này rồi lại đẩy kết quả vào stack, cứ như thế cho đến khi đạt được kết quả sau cùng.

Quá trình tính giá trị cho biểu thức E ở ví dụ trên được mô tả bởi hình vẽ:

Biểu thức nhập dưới dạng ký pháp PRN:

E = 2 3 + 2 ^ 4 1 - 15 5 / * -

Quá trình lưu trữ của cấu trúc Stack như sau:

16
-
9
*

3
/
5
15
3
-
1
4
25
^
2
5
+
3
2

Stack

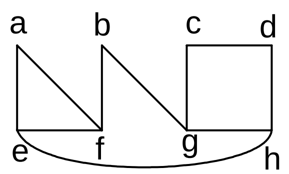
IV. Cây khung

1. Định nghĩa

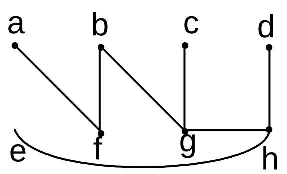
Cho G là một đơn đồ thị. Một cây được gọi là cây khung của G nếu nó là một đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh của G.

2. Ví dụ

Cho đơn đồ thị G sau:



Một cây khung tạo ra từ G bằng cách xóa đi các cạnh tạo ra chu trình đơn: ae, ef và cd là:



3. Định lý

Một đơn đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó có cây khung.

Chứng minh

➢ Giả sử G có cây khung T ⇒ T chứa tất cả các đỉnh của G. Vì T là cây nên luôn có đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của T. Mà T là đồ thị con chứa tất cả các đỉnh của G ⇒ luôn tồn tại đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ trong G. Vậy G liên thông.

➢ Giả sử G là liên thông. Nếu G không phải là một cây ⇒ G có chu trình đơn. Xóa đi một cạnh trong chu trình đơn này. Khi đó, đồ thị nhận được có số cạnh ít hơn G nhưng số đỉnh vẫn bằng số đỉnh của G và vẫn liên thông. Nếu đồ thị con này không là cây thì nó còn chứa chu trình đơn. Lặp lại quá trình trên, ta lại xóa đi một cạnh của chu trình đơn này. Quá trình cứ tiếp tục cho đến khi không còn chu trình đơn nào. Điều này luôn thực hiện được vì ta chỉ xét các đồ thị hữu hạn. Khi quá trình kết thúc, ta nhận được một cây khung của G.

4. Cây khung bé nhất

4.1. Định nghĩa

Cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông, có trọng số là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.

4.2. Thuật toán Prim

Thuật toán Prim được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1957. Thuật toán Prim được dùng để tìm cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông có trọng số.

Thuật toán Prim bắt đầu bằng việc chọn một cạnh bất kỳ có trọng số nhỏ nhất, đặt nó vào cây khung. Sau đó, lần lượt ghép vào cây các cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với một đỉnh của cây và không tạo ra chu trình trong cây. Thuật toán dừng lại khi (n – 1) cạnh được ghép vào cây.

➢ **Chú ý**: Có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất ứng với một đồ thị liên thông và có trọng số.

Thuật toán Prim dưới dạng giả mã:

Procedure Prim (G: đồ thị liên thông có trọng số với n đỉnh).

T: = cạnh có trọng số nhỏ nhất.

for i = 1 to n – 2.

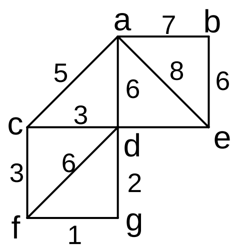
begin

e:= cạnh có trọng số tối thiểu liên thuộc với một đỉnh trong T và không tạo ra chu trình trong T nếu ghép nó vào T.

T: = T với e được ghép vào

end {T là cây khung nhỏ nhất của G}.

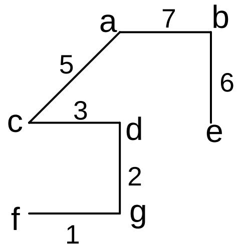
Ví dụ: Dùng thuật toán Prim để tìm cây khung nhỏ nhất trong đơn đồ thị có trọng số sau:



Ta có:

Bước chọn	Cạnh	Trọng số
①	fg	1
②	gd	2
③	dc	3
④	ca	5
⑤	ab	7
⑥	be	6
	Tổng cộng	**24**

Khi đó ta có cây bao trùm nhỏ nhất:



4.3. Thuật toán Kruskal

Để tìm cây khung nhỏ nhất của một đơn đồ thị liên thông có trọng số. Ta còn có thể dùng thuật toán Kruskal.

Để thực hiện thuật toán Kruskal, ta xuất phát từ việc chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất của đồ thị. Sau đó lần lượt ghép thêm vào các cạnh có trọng số tối thiểu và không tạo thành chu trình với các cạnh đã được chọn. Thuật toán dừng lại khi (n – 1) cạnh được chọn.

Thuật toán Kruskal dưới dạng giả mã:

Procedure Kruskal (G: đồ thị n đỉnh, liên thông có trọng số).

T: = đồ thị rỗng

for i: = 1 to n – 1

begin

e: = một cạnh bất kỳ của G với trọng số nhỏ nhất và không tạo ra chu trình trong T, khi ghép nó vài T.

T: = T với cạnh e đã được ghép vào.

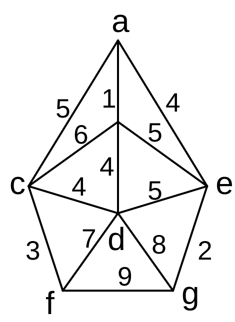
end {T là cây khung nhỏ nhất}.

➢ ***Sự khác nhau giữa thuật toán Prim và thuật toán Kruskal.***

- Trong thuật toán Prim, ta chọn các cạnh có trọng số nhỏ nhất, liên thông với các đỉnh đã thuộc cây và không tạo ra chu trình.

- Trong thuật toán Kruskal, ta chọn các cạnh có trọng số tối thiểu mà không nhất thiết phải liên thuộc với các đỉnh của cây và không tạo ra chu trình.

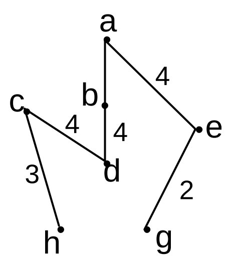
Ví dụ: Dùng thuật toán Kruskal, tìm cây bao trùm ngắn nhất của đồ thị sau:



Ta xây dựng cây bao trùm ngắn nhất theo các bước:

Bước chọn	Cạnh	Trọng số
①	ab	1
②	eg	2
③	cf	3
④	ae	4
⑤	bd	4
⑥	cd	4
	Tổng cộng	**24**

Khi đó, ta có cây bao trùm nhỏ nhất:



➢ **Lưu ý**: Cây khung cực đại của một đồ thị vô hướng, liên thông, có trọng số là cây khung có trọng số lớn nhất.

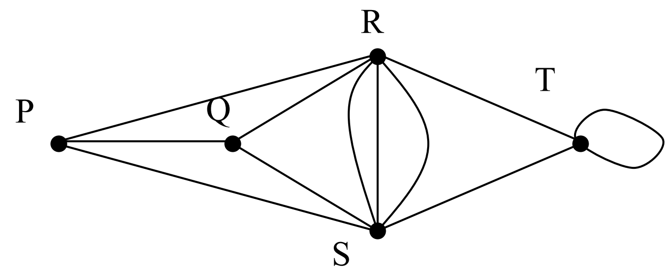
BÀI TẬP CHƯƠNG 1: *ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ*

Bài 01. Tìm số đỉnh, số cạnh, bậc của mỗi đỉnh trong các đồ thì vô hướng sau: (chỉ rõ đỉnh cô lập và đỉnh treo, nếu có)

a.

b.

c.



Bài 02. Xác định số định, số cạnh, số bậc vào và số ra của mỗi đỉnh đối với các đồ thị có hướng:

a.

b.

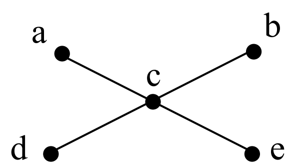
c.

Bài 03. Hãy vẽ các đồ thị :

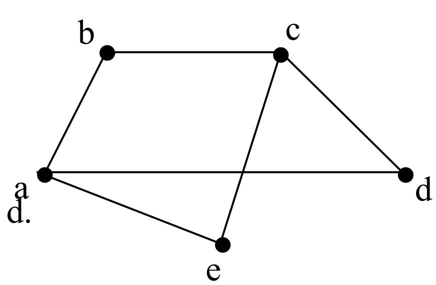
a. K_7 b. $K_{1,8}$ c. $K_{4,4}$ d. C_7 e. W_7

Bài 04. Xét xem các đồ thị sau có là đồ thị lưỡng phân không:

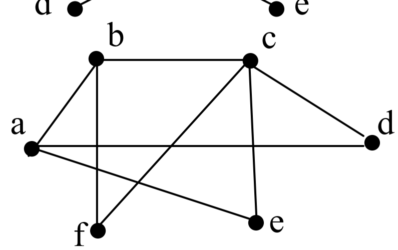
a.



b.



c.



d.

e

Bài 05. Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh, cạnh?

a. Kn   b. Cn   c. Wn   d. $Km_{,n}$

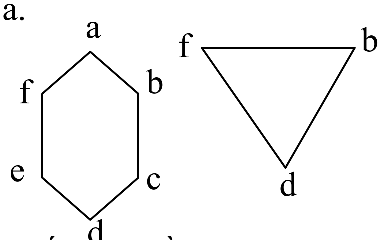
Bài 06. Một đồ thị vô hướng có các đỉnh có các bậc lần lượt là: 4, 3, 3, 2, 2. Tính số cạnh và vẽ đồ thị này.

Bài 07. Tính số đỉnh của một đồ thị đều bậc 4 và có 10 cạnh.

Bài 08. Một đồ thị có 100 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 50. Tính số cạnh của nó.

Bài 09. Tìm hợp các cặp đồ thị (giả sử các cạnh có các đầu mút trùng nhau là như nhau) :

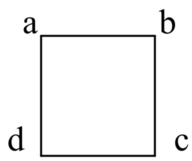
a.   b.



Bài 10. Nếu đơn đồ thị G có 15 cạnh và $\overline{G}$ có 13 cạnh khi đó G và $\overline{G}$ có bao nhiêu đỉnh ?

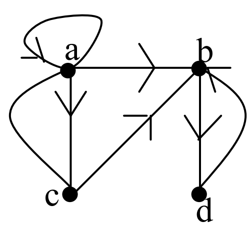
Bài 11. Biểu diễn các đồ thị sau bằng ma trận liền kề:

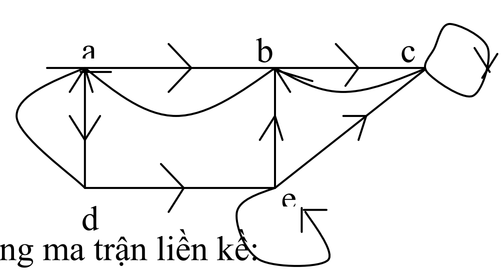
a.   b.



d

c.   d.





Bài 12. Biểu diễn các đồ thị sau bằng ma trận liền kề:

a. K_4 b. $K_{1,4}$ c. $K_{2,3}$ d. C_4 e. W_4 f. Q_3

Bài 13. Vẽ các đồ thị có hướng biểu diễn bằng các ma trận liền kề sau:

$$\text{a.}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad \text{b.}\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\qquad \text{c.}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\1&0&2&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

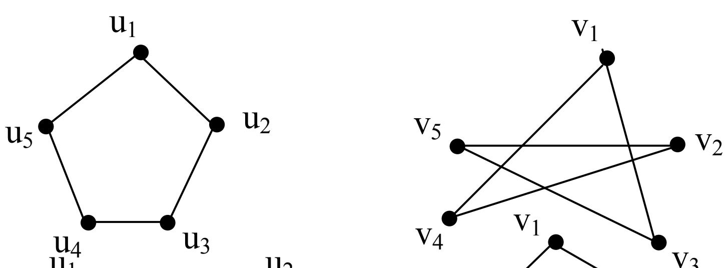
Bàøi 14. Vẽ các đồ thị vô hướng biểu diễn bằng ma trận liền kề:

$$\text{a.}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&4\\3&4&0\end{bmatrix}\qquad \text{b.}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&0&3&0\\0&3&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

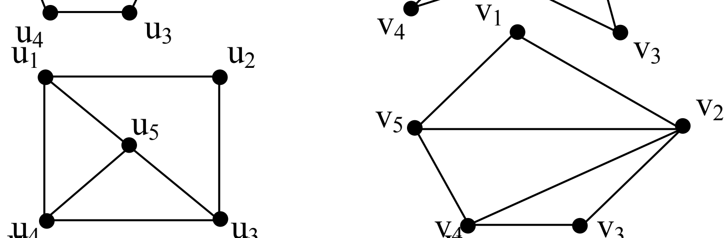
Bài 15. Hãy xét xem các cặp đồ thị sau có đẳng cấu với nhau không?

a.

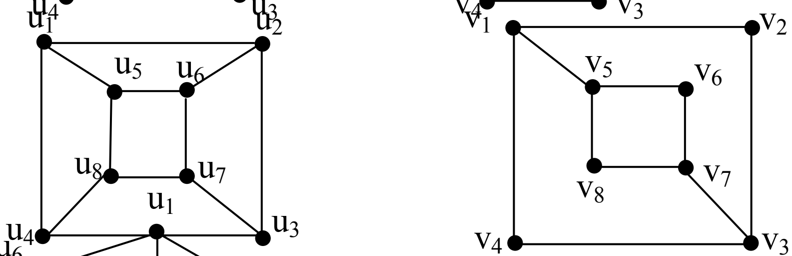
b.



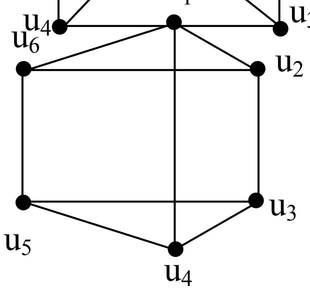
c.



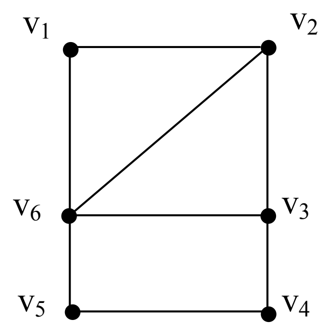
d.



e.



f.



Bài 16. Vẽ đồ thị bù của các đồ thị sau:

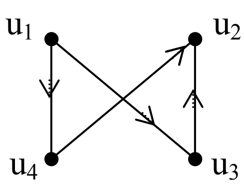
a. b. c.

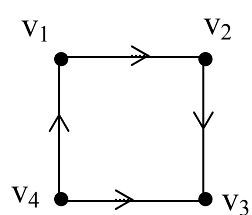
Bài 17. Tìm các đồ thị tự bù có 4 đỉnh.

Bài 18. Với số nguyên nào thì Cn tự bù?

Bài 19. Các cặp đồ thị có hướng sau có đẳng cấu với nhau không?

a.

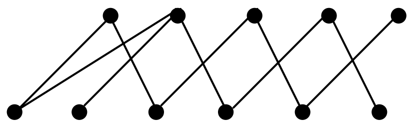




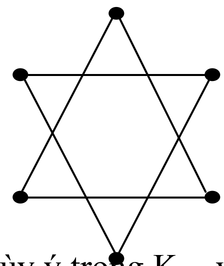
b.

Bài 20. Các đồ thị sau có liên thông không ?

a.



b.

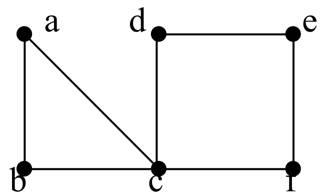


Bài 21. Tìm số đường đi độ dài n giữa 2 đỉnh liền kề tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của n sau :

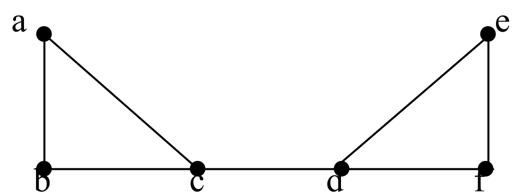
a. n = 2 b. n = 3 c. n = 4 d. n = 5

Bài 22. Tìm tất cả các đỉnh cắt và cầu của đồ thị :

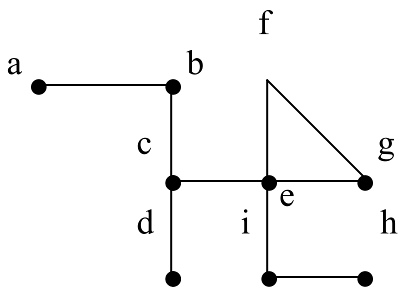
a.



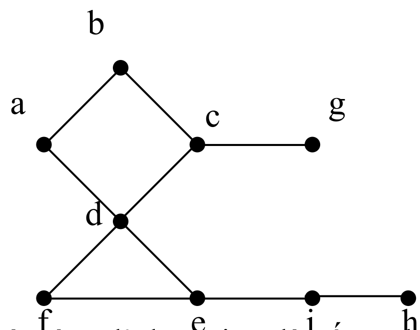
b.



c.



d.



Bài 23 : Cho G là một đơn đồ thị và có n đỉnh, gọi m là số cạnh của G. Chứng minh rằng :

$$m > \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Rightarrow \text{G liên thông.}$$

Bài 24 : Vẽ các đồ thị

a. đều bậc 3 có 10 đỉnh.

b. đều bậc 4 có 8 đỉnh.

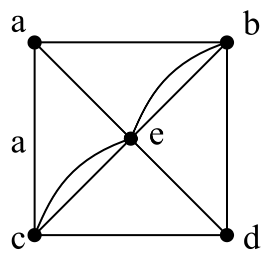
BÀI TẬP CHƯƠNG II: *CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI*

Bài **01.** Các đồ thị sau có chu trình Euler, đường đi Euler hay không? Nếu có hãy xây dựng chu trình, đường đi đó.

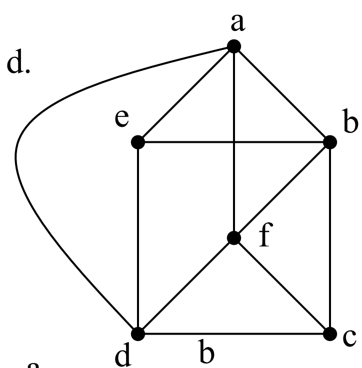
a.

b.

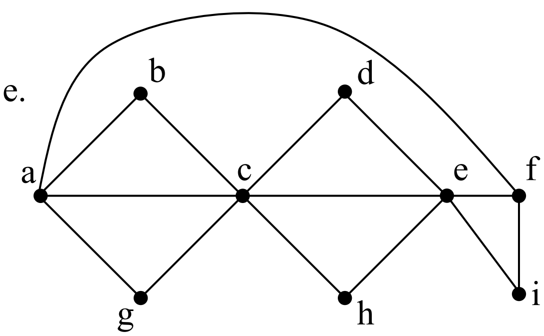
c.



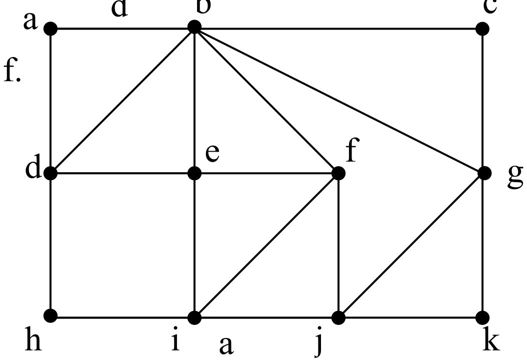
d.



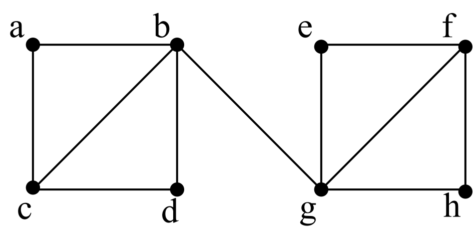
e.



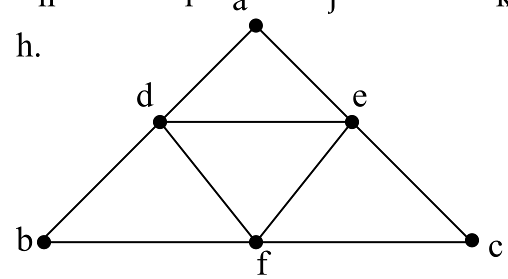
f.



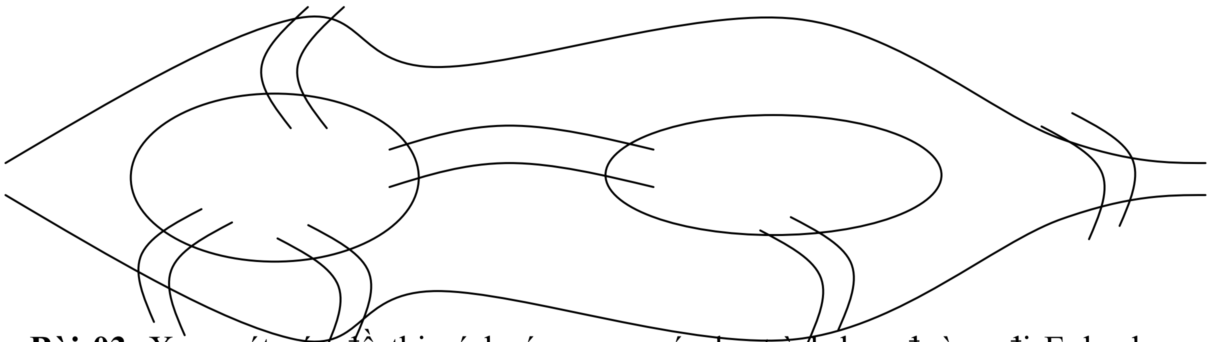
g.



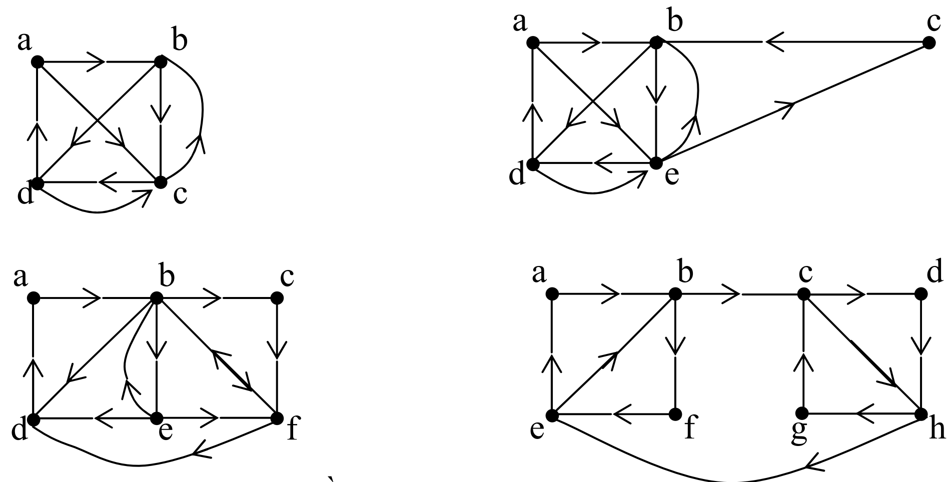
h.



Bài 02. Một người nào đó có thể đi qua những chiếc cầu như trên hình vẽ sau, mỗi chiếc cầu đi qua đúng 1 lần và lại trở về nơi xuất phát được không?



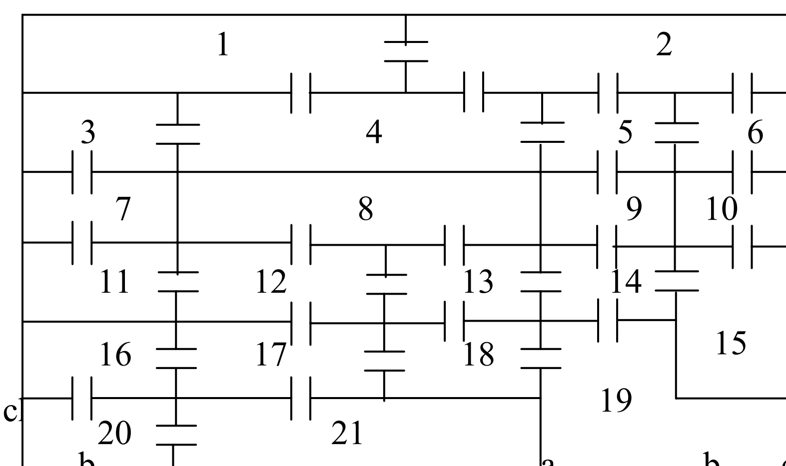
Bài 03. Xem xét các đồ thị có hướng sau, có chu trình hay đường đi Euler hay không? Nếu có, hãy xây dựng chu trình và đường đi đó.



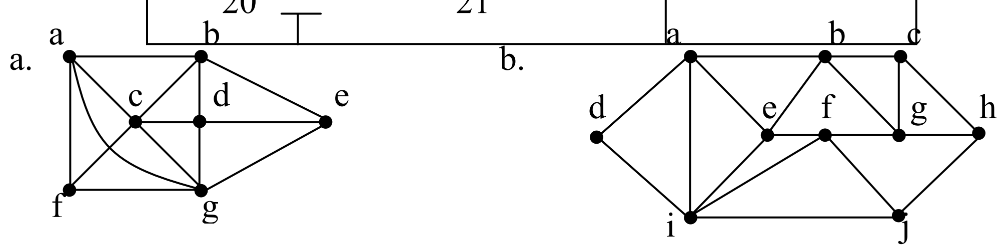
Bài 04. Với giá trị nào của n, các đồ thị sau có chu trình Euler:

a. Kn b. Cn c. Wn d. $Kn_{,n}$

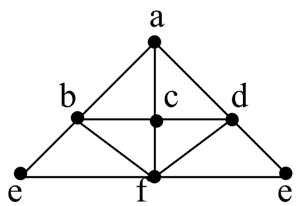
Bài 05. Một ông vua đã xây dựng một lâu đài để cất báu vật. Người ta tìm thấy sơ đồ của lâu đài như sau với lời căn dặn: muốn tìm báu vật, chỉ cần từ một trong các căn phòng bên ngoài cùng (số 1, 2, 6, 10...) đi qua tất cả các cửa phòng, mỗi cửa chỉ một lần. Báu vật được giấu sau cánh cửa cuối cùng. Hãy tìm nơi giấu báu vật.



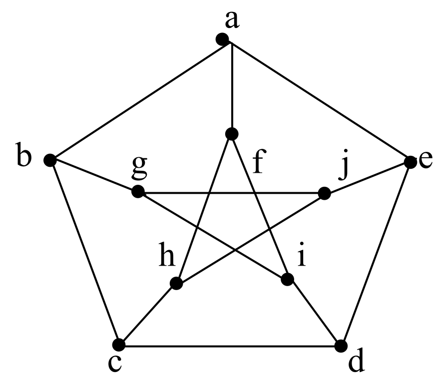
Bài 06. Tìm các c hị sau:



b.



d.



Đồ thị Petersen

Bài 07. Cho ví dụ về:

a. Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton.

b. Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton nhưng hai chu trình này không trùng nhau.

c. Đồ thị có chu trình Euler nhưng không có chu trình Hamilton.

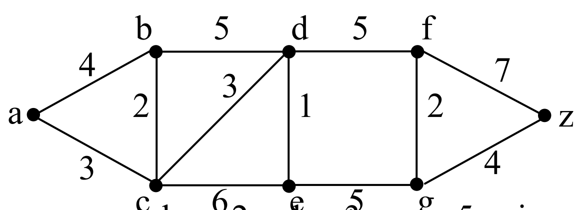
d. Đồ thị có chu trình Hamilton nhưng không có chu trình Euler.

Bài 08. Với giá trị nào của n, các đồ thị sau có chu trình Hamilton:

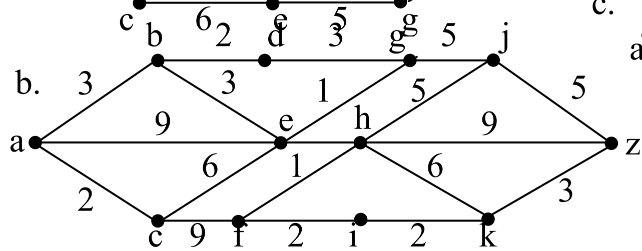
a. Kn b. Cn c. Wn d. $Kn_{,n}$

Bài 09. Tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa **a** và **z** trong các đồ thị có trọng số sau:

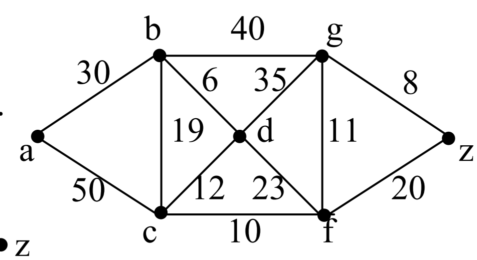
a.



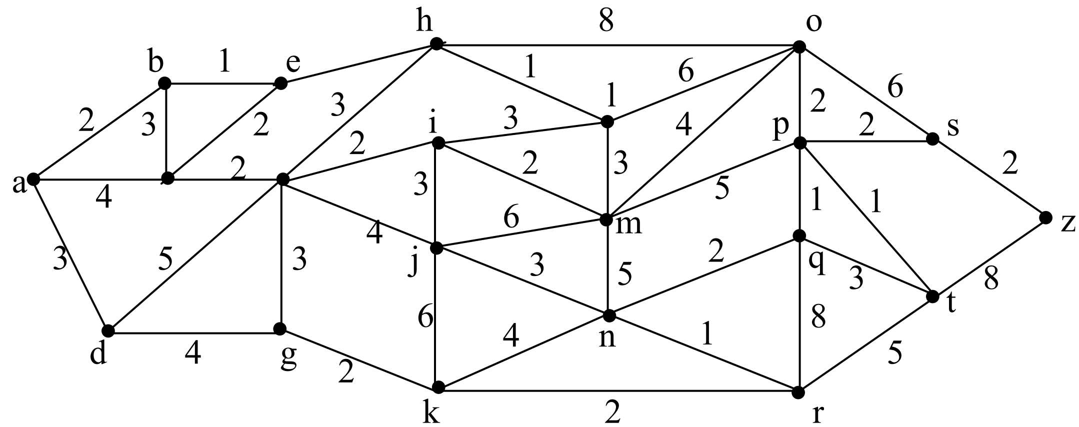
b.



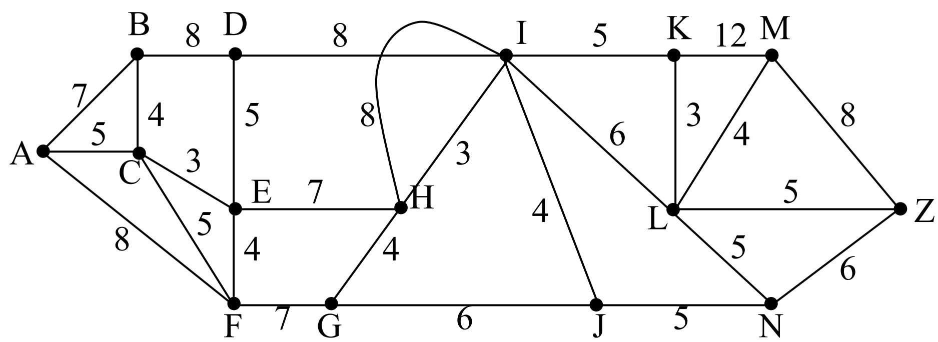
c.



d.



Bài 10. Tìm đường đi ngắn nhất giữa **a** và **z** của đồ thị sau, với điều kiện:



a. Đi qua đỉnh **H**.

b. Chứa cạnh **IJ**.

Bài 11. Dùng thuật toán Hedetniemi, tìm đường đi ngắn nhất giữa **a** và **z** trong các đồ thị của bài **9a** và **9c**.

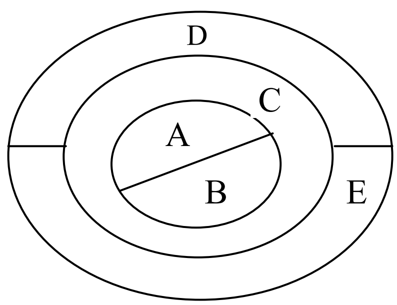
BÀI TẬP CHƯƠNG III:

ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒTHỊ

1) Xây dựng đồ thị đối ngẫu và tô màu các bản đồ sau:

a.

b.



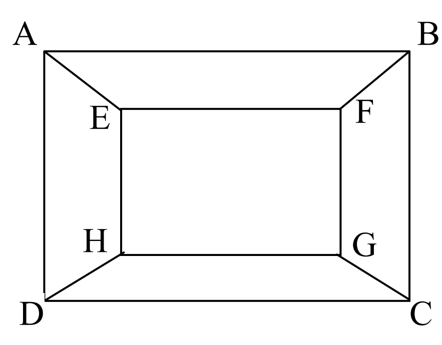
c.

2) Tìm sắc số của các đồ thị sau:

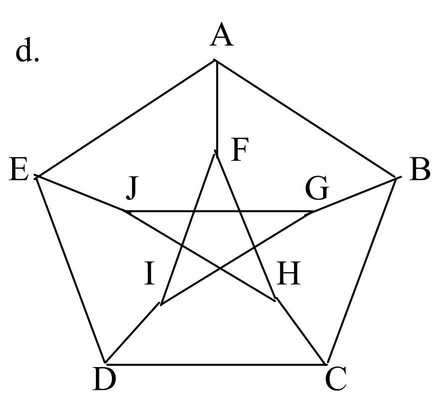
a.

b.

c.



d.



e.

3) Tìm sắc số của các đồ thị sau:

a. b.

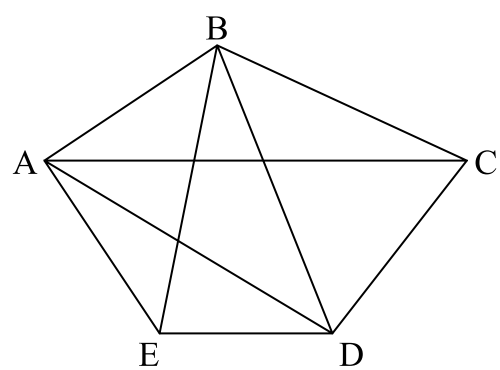
c. d.

4) Tìm sắc số của các đồ thị:

a. Kn b. Cn c. Wn d. $Kn_{,n}$

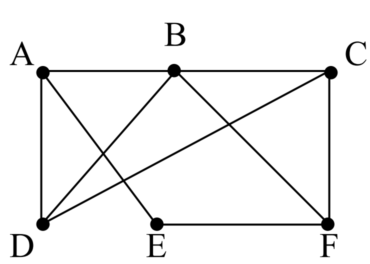
5) Các đồ thị sau có là phẳng hay không? Nếu có hãy vẽ nó không có cạnh cắt nhau:

a. b.



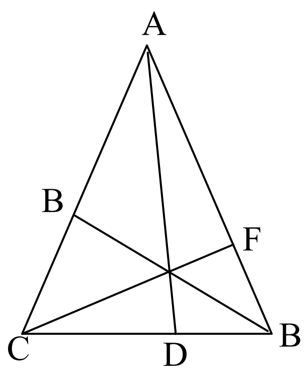
c. d.

e.

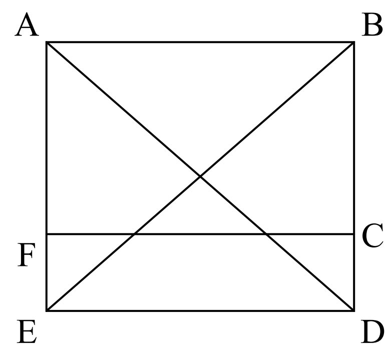


f.

g.

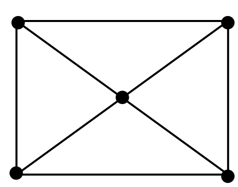


h.



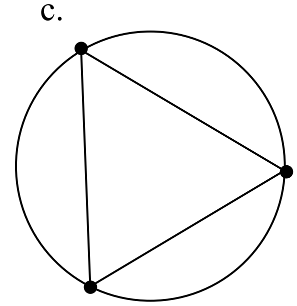
6) Tìm số đỉnh, cạnh và miền của các đồ thị sau:

a.



b.

c.



7) Vẽ đồ thị phẳng liên thông với 6 cạnh và 3 miền.

8) Vẽ đồ thị phẳng liên thông với 4 đỉnh và 5 miền.

9) Vẽ đồ thị phẳng liên thông với 6 đỉnh và 7 cạnh.

10. Chứng minh các đồ thị sau là không phẳng:

a.

b.

c.

11) Một người giữ thảo cầm viên muốn sắp xếp các con vật sống theo thói quen tự nhiên của chúng. Nhưng ông ta không thể cho tất cả các con vật sống chung một chỗ vì chúng có thể ăn thịt lẫn nhau. Dấu chấm trong bảng sau chỉ ra những con vật có thể ăn thịt lẫn nhau. Số nơi nhỏ nhất người giữ thảo cầm viên cần để nuôi các con vật là bao nhiêu?

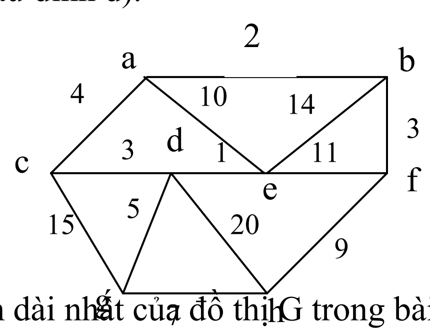
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**
a		●			●					●
b	●			●			●			
c								●		●
d		●				●				
e	●								●	
f				●						●
g		●								
h			●						●	
i					●			●		●
j	●		●			●			●	

12) Chứng minh rằng một âån đồthị với n đỉnh có sắc số là n thì đồ thị có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

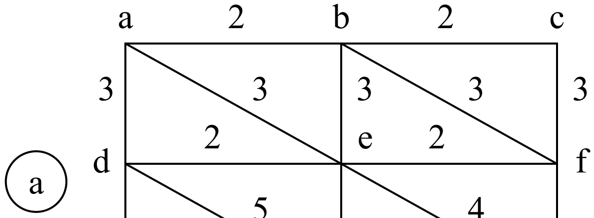
Bài tập chương IV

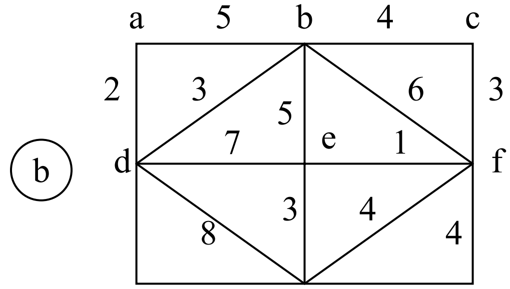
CÂY

1. Vẽ tất cả các cây (không đẳng cấu với nhau) có 3 đỉnh, 4 đỉnh, 5 đỉnh và 6 đỉnh.
2. Tìm mọi cây T sao cho:
   a. T là một đồ thị đều.
   b. đồ thị bù của T cũng là một cây.
3. Tìm cây bao trùm ngắn nhất của đồ thị G sau bằng thuật toán Kruskal và thuật toán Prim (bắt đầu từ đỉnh d).

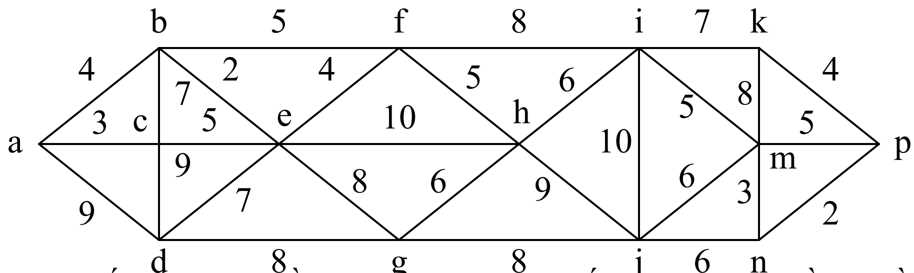


4.Tìm cây bao trùm dài nhất của đồ thị G trong bài 3.
5. Dùng thuật toán Kruskal và thuật toán Prim tìm cây bao trùm ngắn nhất của các đồ thị sau:





6. Tìm số tối đa các đỉnh của một cây m-phân có chiều cao h.
7. Tìm cây bao trùm nhỏ nhất chứa cạnh km của đồ thị sau:



8. CMR nếu một đơn đồ thị vô hướng G có tất cả các cạnh đều là cầu thì G là một cây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO MÔN SỐ HỌC

1. Apostol, T. M. (1976). Introduction to Analytic Number Theory. Spinger - Verlag, NewYork. MSTV: $\begin{matrix}51273\\ A645\end{matrix}$
2. Barnett, I. A. (1969). Elements of Number Theory. Prindle, Weber and Schmid, Inc., Boston, Massachusetts. MSTV: $\begin{matrix}513\\ B259\end{matrix}$
3. Hungerford, T. WW. (1997). Abstract Algebra: An Introduction. Sauler College Publishing, Orlando, Florida.
4. Rose, H. E. (1999). A Course in Number Theory. Oxford University Press, NewYork.
5. Uspensky, J. V. (1939). Elementary Number Theory Mc. Graw - Hill book Company, Inc., NewYork and London. MSTV: $\begin{matrix}5127\\ U86\end{matrix}$
6. Bùi Huy Hiền (1985). Bài tập Đại số và Số học. Tập I. Nhà xuất bản Giáo dục.
7. Hà Huy Khoái (1997). Nhập môn số học thuật toán. Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.
8. Hoàng Chúng (1997). Số học - Bà Chúa của Toán học. Nhà xuất bản Giáo dục.
9. Lại Đức Thịnh (1970). Số luận. Tập I, II. Nhà xuất bản Giáo dục. MSTV: $\begin{matrix}513\\ Th312\end{matrix}$
10. Ngô Thúc Lanh (1986). Đại số và Số học. Tập I - Nhà xuất bản Giáo dục.
11. Trần Đình Hiển (1997). Giáo trình Lý thuyết số. Nhà xuất bản Giáo dục.

TÀI LIỆU THAM KHẢO MÔN TOÁN RỜI RẠC

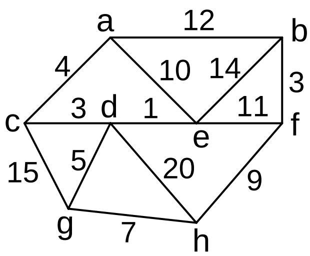
1. Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - Hà Nội 1997.
2. Nguyễn Đức Nghĩa - Nguyễn Tô Thành, Toán rời rạc, Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
3. Hoàng Chúng, Đại cương về toán học hữu hạn, Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.
4. Nguyễn Cam - Chu Đức Khánh, Lý thuyết đồ thị, Nhà xuất bản trẻ, 1998.
5. Giáo trình Toán rời rạc I, Đại học Mở TP.HCM, 1993.
6. TSKH Vũ Đình Hòa, Định lý và vấn đề về đồ thị hữu hạn, Nhà xuất bản Giáo dục, 2001.
7. TSKH Vũ Đình Hòa, Một số kiến thức cơ sở về Graph hữu hạn, Nhà xuất bản Giáo dục, 2001.
8. Đặng Huy Ruận, Lý thuyết đồ thị và ứng dụng, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - Hà Nội 2000.
9. Robin J. Wilson, Introduction to Graph Theory, Fourth Editon, Longman Publisher, 1996. MSTV: PĐCH 2221.
10. Ralph P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics, 3rd Edition, Addison - Wesley Publishing Company, 1994.
11. Richard Johnsonbaugh, Discrete Mathematics, Second Edition, Macmillan Publishing Company, Newyork, 1992.
12. John A. Dossey, Discrete Mathematics, 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, NewYork, 1993.
13. John G. Michaels and Kenneth H. Rosen, Applications of Discrete Mathematics, Mc. Graw - Hill, Inc., 1994.
14. John E. Manro, Discrete Mathematics for Computing, Thomas Nelson Publisher, 1992.
15. Gary Chartrand and Ortrud R. Oellermann, Applied and Algorithmic Graph Theory, Mc. Graw - Hill, Inc., 1993.

Bài tập chương IV: CÂY

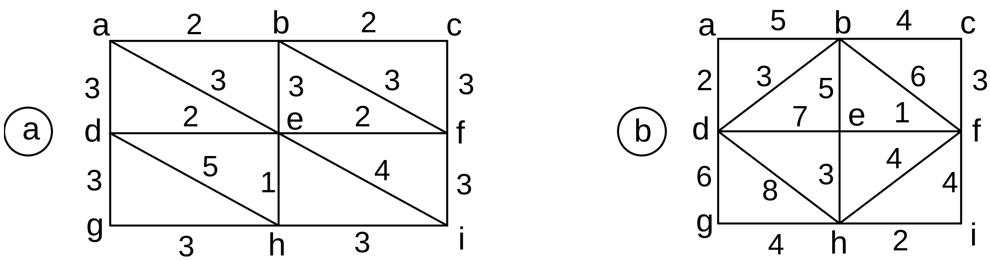
1. Vẽ tất cả các cây (không đẳng cấu với nhau) có 3 đỉnh, 4 đỉnh, 5 đỉnh và 6 đỉnh.
2. Tìm mọi cây T sao cho:

   a. T là một đồ thị đều.

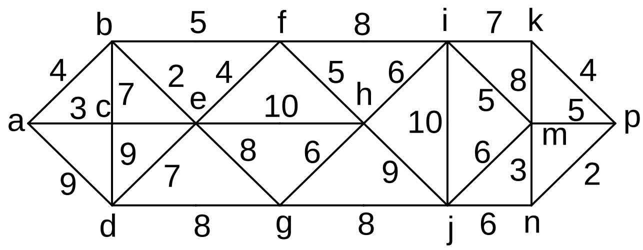
   b. Đồ thị bù của T cũng là một cây.
3. Tìm cây bao trùm ngắn nhất của đồ thị G sau bằng thuật toán Kruskal và thuật toán Prim (bắt đầu từ đỉnh d).



4. Tìm cây bao trùm dài nhất của đồ thị G cho trong bài 3.
5. Dùng thuật toán Kruskal và thuật toán Prim tìm cây bao trùm ngắn nhất của các đồ thị sau:



6. Tìm số tối đa các đỉnh của một cây m-phân có chiều cao h.
7. Tìm cây bao trùm nhỏ nhất chứa cạnh km của đồ thị sau:



MỤC LỤC

Trang

Chương I

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

Chương II

CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI

Chương III
ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Chương IV
CÂY