1 基本方程

1.1 流体微团与随体导数

这里的基本方程主要为对质量守恒，动量守恒，能量守恒方程的推导。

推导的是建立在流体质点或者流体微团的假设基础之上，我们认为流体为连续介质，其中最小的为流体质点和流体微团，流体质点为可以代表流体基本性质的代表点，包括流体密度，流体单位质量的包含动量，流体单位质量包含能量三个。我们使用图 1.1 说明流体微团的意义。

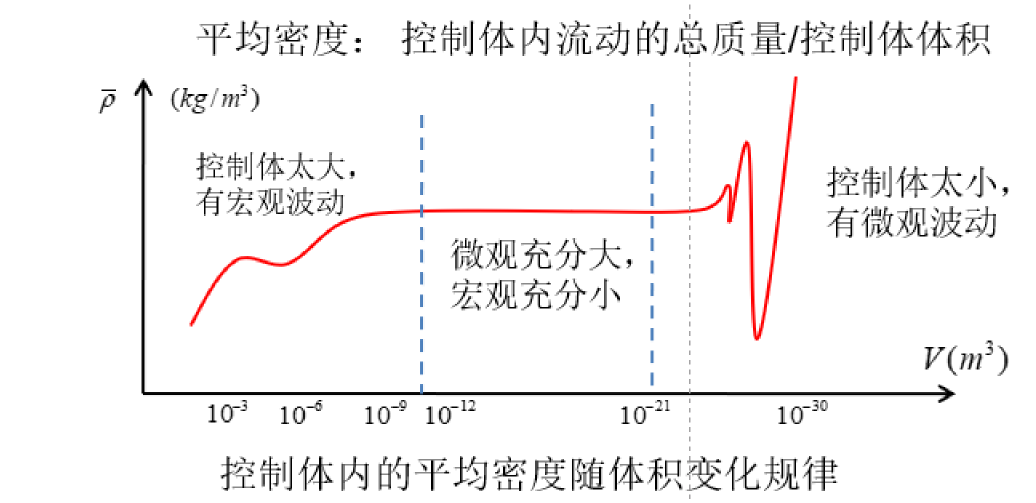

图 1.1: 控制体内平均密度随着体积变化规律

这里给出三种物理量的表示方法：

质量密度 ρ：单位体积内的质量大小

动量密度 $\boldsymbol{\theta}$ ：单位体积内质量所携带的动量大小

能量密度 E: 单位体积内物体所携带的能量大小

三者的表达式分别为：

质量密度为：ρ

动量密度为：$\boldsymbol{\theta} = \rho \times \boldsymbol{V}$

能量密度：$E = C_v \rho T + 1/2\rho(w^2 + u^2 + v^2)$

这里需要解释的是，动量为矢量，我们在计算的过程中需要考虑方向，而能量与质量为标量。另外这里的 C_v 为单位质量的某物质温度升高 $1k$ 所需要吸收的热量。从而可以说明能量密度中前者所指的为内能，后者为动能，w, u, v 分别是微团 x, y, z 三个方向的速度分量。

另外一个需要说明的为随体导数。对流体描述有欧拉法和拉格朗日法，每个流体质点的物理量是随着时间和位置发生变化的流体微团的物理量可以用 $f(x, y, z, t)$，则根据全微分的方法有：

$$df(x, y, z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

在公式的两边同时除以 dt 就可以得到：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

其中的 $\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ $\frac{dz}{dt}$ 分别为 x,y,z 方向的速度分量，可以用矢量 $\boldsymbol{V}$ 表示。另外令 $\nabla=\frac{1}{\partial x}+\frac{1}{\partial y}+\frac{1}{\partial z}$ 为拉普拉斯算子。所以就可以得到随体导数的公式：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{V}.\nabla f$$

1.2 守恒方程推导与其中物理量的解释

守恒方程的推导遵循自然界的三大守恒定律，即质量守恒，动量守恒，以及能量守恒。图 1.2 给出流体微团。

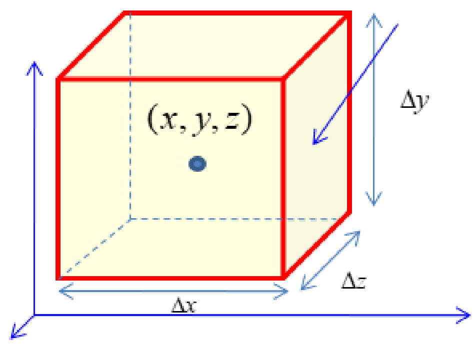

图 1.2: 穿过单位面积面元的质量通量

给出的流体微团的体积可以表示为 $\Delta x\Delta y\Delta z$, 时间为 Δt, 流过的物理量通量可以表示为 F，从不同方向通过控制体的质量通量可以表示为 $F_{\rho x},F_{\rho y},F_{\rho z}$, 所以经过推导可以得到下面公式：

$$(\rho(t+\Delta t)-\rho(t))\Delta x\Delta y\Delta z+(\Delta F_{x\rho}\Delta y\Delta z+\Delta F_{y\rho}\Delta x\Delta z+\Delta F_{z\rho}\Delta x\Delta y)\Delta t=0$$

从而可以得到质量的守恒方程，对于方程，我们左右同时除以 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$, 同时将控制体的 Δx 等趋于流体微团既可以得到 dx,dy,dz,dt, 从而得到如下公式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-(\frac{\partial F_{x\rho}}{\partial x}+\frac{\partial F_{y\rho}}{\partial y}+\frac{\partial F_{z\rho}}{\partial z})$$

类似的，我们可以得到动量守恒方程和能量守恒方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t}=-(\frac{\partial F_{x\theta}}{\partial x}+\frac{\partial F_{y\theta}}{\partial y}+\frac{\partial F_{z\theta}}{\partial z})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-(\frac{\partial F_{xE}}{\partial x}+\frac{\partial F_{yE}}{\partial y}+\frac{\partial F_{zE}}{\partial z})$$

这里得到的一个结果是，通量的变化量，也就是散度是导致净通量变换的原因。有一个非常中要的问题是要搞清楚这里的通量 F 在每个守恒公式中代表的意义。顾名思义，这里的通量指的是单位时间通过单位面积面元的质量，动量，以及能量。我们暂时只考虑 x 方向的面元，这里沿着 x 方向的速度为 u，那么单位时间通过的质量可以表示为

$$F_{\rho u} = \rho u \Delta t \Delta s$$

这里是单位面元，单位时间，所以可以得到沿着 x 方向的质量的通量为：$F_{\rho u} = \rho u$ 同理，我们可以得到沿着其他两个方向的质量通量。

下面研究动量通量，首先给出关于动量与牛顿第二定律的若干定义：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}t$$

对动量得研究我们依旧沿着 x 轴方向，流场速度为 u, 所以可以得到如下公式：

$$\boldsymbol{F_{\theta x}} = \rho u \boldsymbol{V} + \boldsymbol{p}$$

其中第 $\rho u \boldsymbol{V}$ 是流体质量自身携带得动量，但是同时质量得动量变化也与其受力有关，即 $m\Delta \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}\Delta t$, 在单位时间内，动量得变化量就等于力本身。图 1.3 所示，为单位面元受力情况，流体在这种情况下只受压力 $\boldsymbol{p}$, 所以得到上面得动量通量式子。

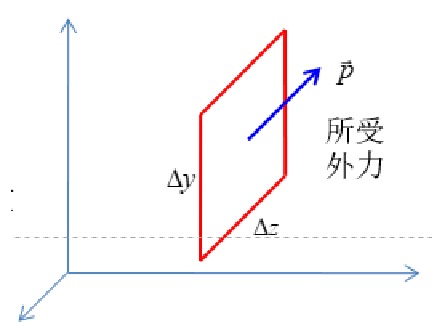

图 1.3: 动量通量受力图

需要弄明白其中 $\boldsymbol{p}$ 得表示，即流动流体内部压强得分布，流动流体压强不同于静止流体，我们知道静流体一点压强是水深得函数。但是流体流动，就会产生粘滞力，即流体得内摩擦力。从而在流体流动方向上压强是不一样得。