Case 5：高阶导数：

① 归纳法

1. $y=e^x\sin x$ ， $y^{(n)}$

解：$y'=e^x\sin x+e^x\cos x=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})$$

2、$y=\frac{1}{2x+3}$ ， $y^{(n)}$

解，$y=(2x+3)^{-1}$

$$y'=(-1)(2x+3)^{-2}\cdot 2$$

$$y''=(-1)(-2)(2x+3)^{-3}\cdot 2^2 \cdots$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\cdot 2^n}{(2x+3)^{n+1}}$$

记：$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

② 公式法：

$(uv)^{(n)}=C_n^0 u^{(n)}v+C_n^1 u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^n u v^{(n)}$

$y=x^2e^x \quad y^{(5)}(x)$

解：$y^{(5)}=C_5^0(e^x)^{(5)}\cdot x^2+C_5^1(e^x)^{(4)}\cdot 2x+C_5^2(e^x)^{(3)}\cdot 2$

$=x^2e^x+10xe^x+20e^x$

第三章：

part I 中值定理

一、预备知识

1、极值点 $y=f(x)\ (x\in D),\ x_0\in D$

① 设 $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<f(x_0)$

称 x_0 为极大点

② 设 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>f(x_0)$

x_0 为极小点

(一个函数在一点的导数有四种情况)

2

$$f'(a)\begin{cases} >0 \\ <0 \\ =0 \\ \text{不存在} \end{cases}$$

① $f'(a) > 0$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

思路：极限的保号性（极限正则去心邻域正）

$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

$$\begin{cases} f(x)<f(a), & x\in(a-\delta, a) \\ f(x)>f(a) & x\in(a, a+\delta) \end{cases}$$

$f'(a)>0 \Rightarrow$ 左小右大（a不是极值点）

② $f'(a)<0 \Rightarrow$ 左大右小（a不是极值点）

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$$

$$\begin{cases} f(x)>f(a) & x\in(a-\delta,\ a) \\ f(x)<f(a) & x\in(a,\ a+\delta) \end{cases}$$

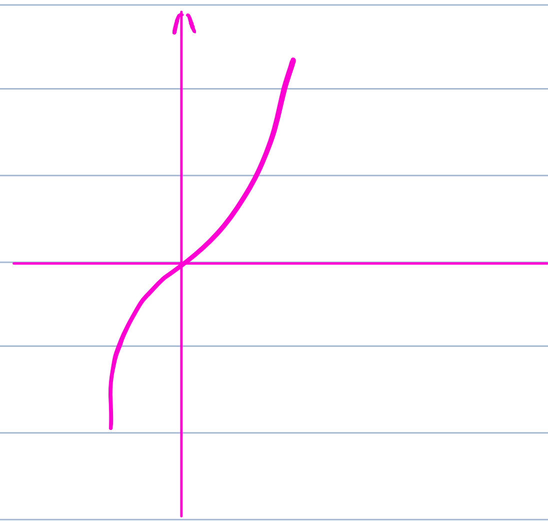
结论：① $x=a$ 为 $f(x)$ 极值点 $\Rightarrow$ $f'(a)=0$ 或不存在

② $f(x)$ 可导且 $x=a$ 为极值点 $\Rightarrow$ $f'(a)=0$

$\not\Leftarrow$

反例1. $y=x^3$，$y'(0)=0$

$x=0$ 不是极值点



反例2.

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 2x, & x\geq 0 \end{cases}$$

$f_-'(0)=1 \neq f_+'(0)=2$

$f'(0)$ 不存在

但 $x=0$ 不是极值点

二 中值定理

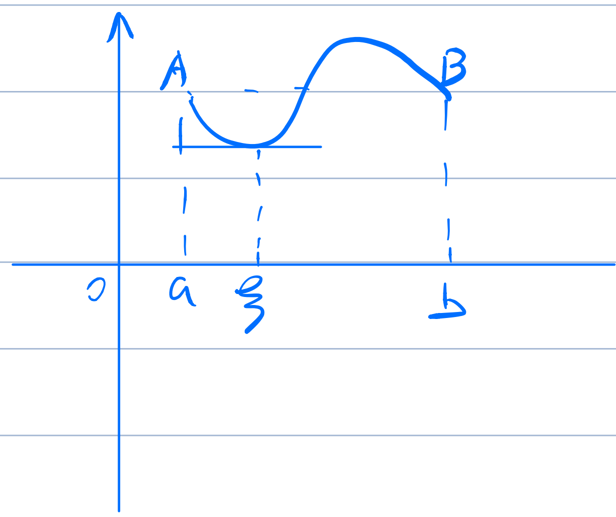
(这种尖角都不可导)　(这种叫光滑　处处可导)

这两条线都连续，但可导性可区别

Th: (Rolle) $\begin{cases} f(x) \in C[a,b] \\ f(x)\text{在}(a,b)\text{内可导(光滑性)} \\ f(a)=f(b) \end{cases}$

则，$\exists\ \xi \in \underline{(a,b)}$，使 $f'(\xi)=0$

开



证. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists\ m, M$

① $m=M$，$f(x)=C$

$\forall \xi \in (a,b)$　$f'(\xi)=0$

② $m<M$ (一个闭区间函数，左右可能取极值)

$\because f(a)=f(b)$ (因为左右相等，所以

$\therefore m$、M 至少一个在 (a,b) 内

设 $\exists \xi \in (a,b)$，$f(\xi)=M \Rightarrow f'(\xi)=0$ 或不存在

$\because f(x)$ 在 (a,b) 内可导 $\therefore f'(\xi)=0$