Case3 $\frac{\infty}{\infty}$ $\begin{cases} \text{洛必达法则} \\ \Rightarrow \text{确定型} \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b_n x^n + \cdots b_0}{a_m x^m + \cdots a_0} \begin{cases} =0, & n<m \\ \infty, & n>m \\ \dfrac{b_n}{a_m}, & n=m \end{cases} \end{cases}$

Case4 $\infty - \infty$ 有分母、通分

例1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

例2:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \quad (\infty-\infty)$$

(无分母，转化为别的型)

$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \quad (\infty \times 0)$$

(有一个到分母)

$$=\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

= 洛必达法则

例3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\quad(\infty-\infty)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$$

Part Ⅱ 连续与间断

一、defs.

1、连续

① 一点连续 if $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ 称 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续

Note：$f(x)$ 在 $x=a$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$

② 闭区间连续

If $\begin{cases} f(x)\text{在}(a,b)\text{内处处连续} \\ f(a)=f(a+0),\ f(b)=f(b-0) \end{cases}$

称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，记 $f(x)\in C[a,b]$

☆ 间断

If $\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)$ 称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的间断点

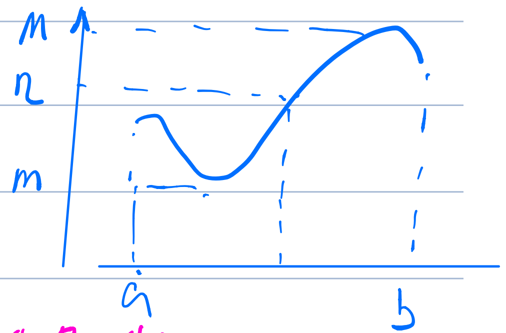
分类：

第一类：$f(a-0)$、$f(a+0)$ $\exists$、(一定细分)

$\begin{cases} f(a-0)=f(a+0)\ (\neq f(a)) & a\text{为可去间断点} \\ f(a-0)\neq f(a+0) & a\text{为跳跃间断点} \end{cases}$ ☆

第二类 $f(a-0)$、$f(a+0)$ 任一个不存在

二、闭区间连续函数性质



continue 表达连续

$f(x)\in C[a,b]$

(最值性质：闭区间连续一定有最小值最大值)

1、$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow\exists\, m, M$

(有界性质：有上界有下界$\Leftrightarrow$有界)

2、$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow\exists k>0$、使 $|f(x)|\le K$

(零点定理：$f(a)f(b)<0\Rightarrow\exists f(c)=0$)

3、$f(x)\in[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0\Rightarrow \underline{c\in(a,b)}$
零点、开区间

使 $f(c)=0$

介质：在$[m,M]$间的值

介质定理

4、$f(x)\in C[a,b]$，$\forall\eta\in[m,M]$

$\exists \xi \in \underbrace{[a,b]}_{\text{闭区间}}$，使 $f(\xi)=\eta$

(位于 m 和 M 之间的值，f(x) 均可取到且最少一次)

Ps：高等数学中、闭区间证明介质定理是老祖宗

Notes：① $f(x)\in C[a,b]$，$\xi \in \underbrace{(\quad)}_{\text{开区间}}$ …⇒ 零点定理

例 1：$\underbrace{f(x)\in C[0,1]}_{\text{函数闭区间}}$　$f(0)=0$，$f(1)=1$

证　$\exists c \in \underbrace{(0,1)}_{\text{开区间⇒零定}}$ 使 $f(c)=1-c$

令 $\varphi(x)=f(x)-1+x$

$\varphi(0)=-1$　$\varphi(1)=1$

$\because \varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$

$\therefore \exists c\in(0,1)$ 使 $\varphi(c)=0 \Rightarrow f(c)=1-c$

② $f(x)\in C[a,b]$ 若 $\begin{cases} \xi \in [a,b] \\ \text{函数值之和} \end{cases} \Rightarrow$ 介

例 2：$f(x)\in \underline{C[0,2]}$ 闭区间连续

$\underbrace{f(0)+2f(1)+3f(2)=6}_{\text{和→更加确认介}}$，证 $\exists \xi \in \underbrace{[0,2]}_{\text{闭区间(介质)}}$

使得 $f(\xi)=1$

$f(x) \in C[0,2] \Rightarrow \exists\, m, M$

$6m \le f(0) + 2f(1) + 3f(2) \le 6M$

$\Rightarrow m \le 1 \le M$

$\exists \xi \in [0,2]$ 使 $f(\xi) = 1$