最基本单位
- C
- x^a
- a^x
- $\log_a x$
- $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$
- $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$

构成：
- 四则
- 复合

(函数由最基本单位以构成的2种方式构成)

二、求导工具

(一)基本公式

1、$(C)'=0$；

2、$(x^a)'=ax^{a-1}$

3、$(a^x)'=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$

4、$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

5. ① $(\sin x)' = \cos x$

② $(\cos x)' = -\sin x$

③ $(\tan x)' = \sec^2 x$

④ $(\cot x)' = \csc^2 x$

⑤ $(\sec x)' = \sec x \tan x$

⑥ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

6. ① $(\mathrm{arc}'x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

③ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

④ $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

(二) 四则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2 ① $(uv)' = u'v + uv'$　　④ $\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

② $(ku)' = ku'$

③ $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

如：$f(x) = x(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)$　$f'(0)$?

法一：$f'(x) = (x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100) +$
$x(x+2)\cdots(x+100) + \cdots + x\cdots(x-99)$

$f'(0) = 100!$　正号负号各占一半

法二：$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

(多项式皆处连续) $= \lim_{x\to 0}(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)$

求连续函数极限

极限值等于函数值 $= 100!$

法三. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'(v) - uv'}{v^2}$

(三) 复合：

Th. $y=f(u)$ 可导, $u=\varphi(x)$ 可导 且 $\varphi'(x)\neq 0$

则 $y=f[\varphi(x)]$ 可导. 且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

$$=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

同阶无穷小

证: $\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\neq 0 \Rightarrow \Delta u=O(\Delta x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

∵同阶无穷小,可以相互替换

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

$$=f'(\varphi x)\cdot\varphi'(x)$$

如: $y=\ln^3(1+x^2)+\sin e^{2x}$

$$y'=[\ln^3(1+x^2)]'+(\sin e^{2x})'$$

$= 3\ln^2(1+x)\cdot\frac{2x}{1+x^2} + \cos e^{2x}\cdot e^{2x}\cdot 2$

(四) 反函数求导

一个函数有反函数，首先要单调.

$y=f(x) \Rightarrow x=\varphi(y) \Rightarrow$ ~~$y=\varphi(x)$~~

例1. 求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 反函数

解: $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow x+\sqrt{1+x^2}=e^y$

$-x+\sqrt{1+x^2}=e^{-y}$

这两式子相乘=1

所以他们两是倒数关系.

$\Rightarrow \overset{\text{相减}}{2x} = e^y - e^{-y}$

$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$ ✓、x与y一定不交换

导数就是变化率)

Th、$y=f(x)$可导,且 $f'(x)\neq 0$ ，$x=\varphi(y)$ 为反函数

告诉我们这个函数是单调的！

则 $x=\varphi(y)$ 可导，且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

证：$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\neq 0$

$\Rightarrow \Delta y = O(\Delta x)$

$$\varphi'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$$