(三)、无穷小性质

1、一般性质:

① $\alpha \to 0,\ \beta \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta \to 0 \\ \alpha\beta \to 0 \\ k\alpha \to 0 \end{cases}$

② $|\alpha| \le M,\ \beta \to 0 \Rightarrow \alpha\beta \to 0$

③ $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = \underbrace{A}_{\text{常数}} + \underbrace{\alpha}_{x\text{的表达式}}\ (\alpha \to 0)$

2、等价性质

① $\begin{cases} \alpha \sim \alpha\ (\alpha\text{等价于}\alpha) \\ \alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha \\ \alpha \sim \beta,\ \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma \end{cases}$

☆ ② $\alpha \sim \alpha',\ \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = A$

$\Rightarrow \lim \frac{\beta}{\alpha} = A$

3、$x \to 0$:

① $x \sim \sin x \sim \tan x$
$\sim \arcsin x \sim \arctan x$
$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$

② $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

③ $(1+x)^a-1 \sim ax$

4、两个重要极限

1. $\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$

2. $\lim\limits_{\Delta\to0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e$

☆ 型三：不定型

$$\begin{cases} \frac{0}{0}、1^{\infty}\ (\text{重中之重}) \\ \frac{\infty}{\infty}、0\times\infty、\infty-\infty、\infty^{0}、0^{0} \end{cases}$$

Case1: $\frac{0}{0}$

Notes: ( ) 表示表达式

① 三绝招

$$\begin{cases} u(x)^{v(x)} \Rightarrow e^{v(x)\ln u(x)} \\ (\quad)-1 \Rightarrow \begin{cases} e^{\Delta}-1\sim\Delta \\ (1+\Delta)^{a}-1\sim a\Delta\ (\Delta\to0) \end{cases} \\ \ln(\quad) \Rightarrow \ln(1+\Delta)\sim\Delta\ (\Delta\to0) \end{cases}$$

② 误区：加减法使用无穷小替换出错

口诀：乘法尽管使用（无穷小替换）

加减法精确度够则用，不够则不用

精确度：分子分母转换成x时候，次数是否一致，

解释：精确度不同，趋向于0速度不在同一层次，

③方法 ┌ 等价无穷小

罗必达法则（不可滥用）（底数有x，指数有x基本不用）

麦克劳林公式

PS：

A．罗必达法则一定适用于$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型。

但是，变换后式子必须比变换前简单，否则不用

B．使用罗必达法则后极限存在，否则不用。

例2：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

（分子有理化）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\times\frac{1}{\sqrt{1+x\cos x}+\sqrt{1+\sin x}}$ （x两边分别求极限）

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$

$=-\frac{1}{6}$

例3: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\cdot\sin x}{\text{arc}^4x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sim\sim\sim}{x^4}$

统一

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\cdot\sin x}{\sin^4x}$

$\underline{\underline{\sin x=t}}$ $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$

卡点：三角函数计算不熟
幂函数计算不熟

例4: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\sin x}-1}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}$

$=-\dfrac{1}{4}$ (三绝招)

Case 2: 1^{∞} $\quad \underbrace{(\ )}_{\to1}^{\overbrace{(\ )}^{\to\infty}}$ 底数趋1，指数趋穷

求远两步: $\begin{cases}\text{凑 } (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} & \lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e \\ \text{恒等变形}\end{cases}$

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{2x}=e$, $a=?$

$左=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{2x\times\frac{3a}{x-a}}$

无一写一，凑形

$=e^{6a\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-a}}=e^{6a}=e$

$a=\frac{1}{6}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arcsin^3 x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{1}{\arcsin^3 x}\times\frac{\sin x-x}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}$

$=e^{-\frac{1}{6}}$

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x^2\cdot\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}$ $(\infty\times 0)$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t} e^{\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\cos t-1}{t^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$