$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

$\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)=0$

$[\ln f(x)]'+[\ln e^{g(x)}]'=0$

$\varphi(x)=f(x)e^{g(x)}$

$f(x),g(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导，
$f(a)=f(b)=0$

证：$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

③分组法

$f(\frac{1}{2})=1$

例1 $f(x)\in C[0,1]$，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$

开区间零点、 无导数，用闭区间连续性

证：① $\exists\, c\in(0,1)$，$f(c)=c$

② $\exists\,\xi\in(0,1)$，$f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

证：① $h(x)=f(x)-x$

$h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$，$h(1)=-\frac{1}{2}<0$

$\exists C \in (\frac{1}{2}, 1)$ $C(0,1)$，使 $h(c)=0$

$\Rightarrow f(c)=c$

分析：$f'(x)-f(x)=1-x$

$f'(x)-1-[f(x)-x]=0$

$[f(x)-x]'-[f(x)-x]=0$

$h'-h=0$

$h'-1=0 \Rightarrow [h(x)]'+[\ln e^{-x}]'=0$

② 令 $\varphi(x)=e^{-x}[f(x)-x]$

$\because f(0)=0,\ f(1)=1$

$\therefore \varphi(0)=\varphi(1)=0$

型三 有 ξ 有 ab

① ξ 与 a,b 可分

方法：ξ与a,b分离⇒a,b侧 $\begin{cases} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - L \\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} - C \end{cases}$

1. $f(x) \in C[a,b]$，(a,b)内可导$(a>0)$

证 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

$$\xi f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a}$$

(a,b侧)

从等式右边下手来得到所有可能，L、C.

证. 令 $g(x)=\ln x$，$g'(x)=\frac{1}{x} \neq 0$

$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

2. $0<a<b$，证 $\exists \xi \in (a,b)$ 使

$$ae^b - be^a = (a-b)(1-\xi)e^\xi$$

分析：$(1-\xi)e^\xi = \frac{ae^b - be^a}{a-b}$

$(1-\xi)e^\xi = \frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{\quad}$ →

② ξ与 a,b不可分、一凑

方法：$\xi \to x$
去分母、移项 $\Big\} \Rightarrow$ 式子$=0$

$\Rightarrow (\overset{?}{\sim\sim})'=0$ (不要分)

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$

证令 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$

$\exists\, \xi \in (a,b)$

使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例1 $f(x)\cdot g(x) \in C[a,b]$，$(a,b)$内可导，$g'(x)\neq 0$ $(a<x<b)$，证：

$\exists\, \xi \in (a,b)$，使 $\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

分析：$f(x)g'(x)-f(a)g'(x)$
$-f'(x)g(b)+f'(x)gx=0$

(一共三种 基础只能讲两种)

型四. 双中值

Case1. 仅有 $f'(\xi)$、$f'(\eta)$

方法：
- ① 找三点
- ② 两次L.

$\Rightarrow [f(x)g(x)-f(a)g(x)-f(x)g(b)]' = 0$

令 $\varphi(x) = f(x)g(x) - f(a)g(x) - f(x)g(b)$

$\varphi(a) = -f(a)g(b)$. $\varphi(b) = -f(a)g(b)$

1. $f(x) \in C[0,1]$，$(0,1)$内可导.

$f(0) = f(1) = 0$. $f(x) \neq 0$

证、$\exists\, \xi\, \eta \in (0,1)$

使 $f'(\xi) > 0$ $f'(\eta) < 0$

证 $\because f(x) \neq 0$、$\therefore \exists\, c \in (0,1)$ 使 $f(c) \neq 0$

不妨设 $f(c) > 0$

$\exists\, \xi \in (0,c)$、$\eta \in (c,1)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} > 0$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}<0$$

2、$f(x)\in C[0,1]$，$(0,1)$内可导。
$f(0)=0$，$f(1)=1$，
证、
① $\exists c\in(0,1)$，$f(c)=1-c$

② $\exists \xi\ \eta\in(0,1)$ $f'(\xi)\cdot f'(\eta)=1$

证：① $\varphi(x)=f(x)-1+x$

$\varphi(0)=-1<0$，$\varphi(1)=1>0$

$\therefore \exists c\in(0,1)$，使 $\varphi(c)=0 \Rightarrow f(c)=1-c$

② $\exists \xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1-c}{c}$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{c}{1-c}$$