Th3 (Cauchy)

柯西中值

$\begin{cases} ① f(x), g(x) \in C[a,b] \\ ② (a,b) 内可导 \\ ③ g'(x) \neq 0 \ (a<x<b) \end{cases}$ 闭区间连续 开区间可导 几乎中值定理标志

内部没有导数为0的点

则. $\exists \xi \in (a,b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Notes:

① $g'(x) \neq 0 \ (a<x<b) \Rightarrow \begin{cases} g'(\xi) \neq 0 \\ g(b)-g(a) \neq 0 \end{cases}$

与这个矛盾

($g(b)-g(a)=0$ 罗尔符合)

罗尔定理, 区间里至少有一个点等于0

第三个条件只有1个作用, 防止分母取0.

② $g'(a)=0$ 或 $g'(b)=0$ 不影响 Cauchy

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$

(代入原式即可理解)

X 等价证明 因为两个 ξ 未必同一个

③ If $g(x)=x$, $C \Rightarrow L$

型一

$f'(\xi)=0$ (Rolle

拉 L: $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

C: $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$

证: 令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$

$\varphi(a)=0=\varphi(b)=0$

$\exists\ \xi\in(a,b),\ \varphi'(\xi)=0$

而 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

$\therefore f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$

$f(x)\in C[a,b]$, (a,b) 可导

$f(c)\ f(b)>0$, $f(a)\ f(\frac{a+b}{2})<0$

证: $\exists\ \xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=0$

1°. $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$

$\exists\ x_1\in(a,\frac{a+b}{2})$, $f(x_1)=0$

2° $f(\frac{a+b}{2})f(b)<0$

$\exists x_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ $f(x_2)=0$

3°、 $\because f(x_1)=f(x_2)$

$\therefore \exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$，使

$f'(\xi)=0$

2. $f(x) \in C[0,2]$，$(0,2)$内可导

$3f(0)=f(1)+2f(2) \Rightarrow$ 分

小数值相加

证：$\exists \xi \in (0,2)$、$f'(\xi)=0$

1°、 $f(x) \in C[1,2] \Rightarrow f(x)$在$[1,2]$上

取 m，M $3m \le f(1)+2f(2) \le 3M$

$\Rightarrow m \le \frac{f(1)+2f(2)}{3} \le M$

$\exists c \in [1,2]$，使 $f(c)=\frac{f(1)+2f(2)}{3}$

$\Rightarrow f(1)+2f(2)=3f(c)$

2° $f(0)=f(c)$

$\exists \xi \in (0,c) \subset (0,2)$ 使 $f'(\xi)=0$

3、 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导、奇函数

$f'(1)=1$、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

证 $\exists \xi \in (-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=0$

$f(x)$ 连续

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A \Rightarrow f(a)=b$

$f'(a)=A$

1° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow f(0)=0$, $f'(0)=1$

2° $\because f(x)$ 奇函数

求导改变奇偶性

$\therefore f'(x)$ 偶函数

因 $f'(1)=1 \Rightarrow f'(-1)=1$

3°、$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=1$

$\exists \xi_1 \in (-1,0)$，$\xi_2 \in (0,1)$

使 $f''(\xi_1)=0$ $f''(\xi_2)=0$

$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=0$

型二、只有 ξ 无 a,b

① 还原法

$\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$

还原法就是这样

(分析 把 ξ 写成 x 求还原函数)

例1，$f(x) \in C[0,1]$，$(0,1)$ 可导，

$f(1)=0$

证：$\exists \xi \in (0,1)$ 使

$\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

分析：$x f'(x) + 2f(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{2}{x} = 0$

$\Rightarrow [\ln f(x)]' + (\ln x^2)' = 0$

$\Rightarrow [\ln x^2 f(x)]' = 0$

证：令 $\varphi(x) = x^2 f(x)$

$\because \varphi(0) = \varphi(1) = 0$

$\therefore \exists \xi \in (0,1)$，使 $\varphi'(\xi)=0$

而 $\varphi'(x)=2x f(x) + x^2 f'(x)$

$\therefore 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$

导区间开!!!

$\because \xi \neq 0$

$\therefore 2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

2、$f(x) \in C(a,b)$，(a,b) 内可导

$f(a)=f(b)=0$

证：$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$

分析：$f'(x) - 2f(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 2 = 0 \Rightarrow [\ln f(x)]' + (\ln e^{-2x})' = 0$

必须有ln

令 $p(x) = e^{-2x} f(x)$

$\because f(a)=f(b)=0$

$\therefore \varphi(a)=\varphi(b)=0$

$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

而 $\varphi'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$

$=e^{-2x}[f'(x)-2f(x)]$

$\therefore e^{-2\xi}[f'(\xi)-2f(\xi)]=0$

$\because e^{-2\xi}\neq 0$

$\therefore f'(\xi)-2f(\xi)=0$