第三章 一元微分的应用（一定有大题、选择题也可能有）

part Ⅱ 中值定理

1° 连续 ∃ m. M

2° m = M　f(x) ≡ C

如果 M为最大值，m 一定在内部

至少一个 f'(x)=0 在内部

Th1.(Rolle)
$$\begin{cases} f(x)\in[a,b] \\ 在 (a,b) 可导 \\ f(a)=f(b) \end{cases}$$

(定理证明题候选)

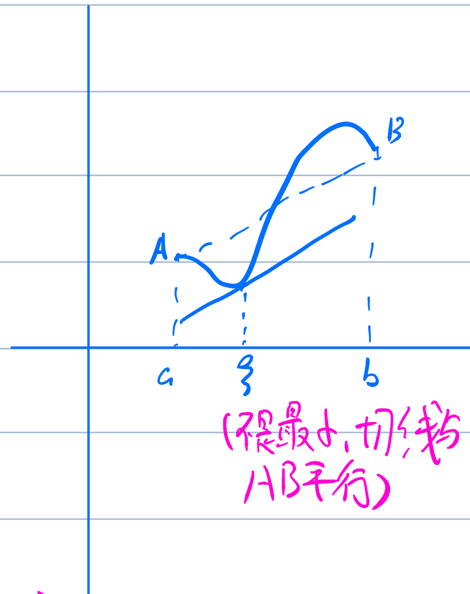
(定理证明 2017、2018 考了证明题)

罗尔定理非常不好，因为条件三、f(a)=f(b) 太少见了.

拉格朗日中值

Th2 (Lagrange)
$$\begin{cases} ① f(x)\in C[a,b] \\ ② f(x) 在 (a,b) 可导 \end{cases}$$

则 $\exists \xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



(保最小，切线与AB平行)

分析：L：y=f(x) 代表A-B的波浪线)

$$L_{AB}:\ y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$ (点斜式)

共同点、经过点A与B

即 $L_{AB}:\ y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

(拉格朗日中值定理辅助函数是曲减直)

证：令 φ(x) = 曲 − 直

$$= f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

加减乘、绝对不会改变连续性和可导性，
除法不定，因为分母可能是0，如果不是0，也不改变

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

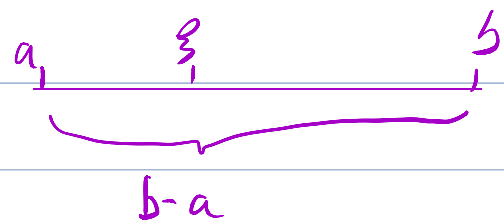
$\exists \xi \in (a,b)$，使 $\varphi'(\xi) = 0$

而 $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\therefore f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Note: ① 等价形式：

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$\Updownarrow$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b-a)](b-a) \quad (0 < \theta < 1)$$

(aξ的长度是ab几分之几，θ就等于几分之几)

即 $\theta = \dfrac{|\xi - a|}{|b-a|}$

(拉格) → (罗尔)

② 若 $f(a) = f(b)$，$L \Rightarrow R$ (罗尔是拉格朗日特殊情况)

③ $f(x)$可导 $\begin{cases} f(b)-f(a) \Rightarrow L \\ f(a)、f(c)、f(b) - 2次L \end{cases}$