

中国科学技术大学 少年班学院 通讯: [luosw@mail.ustc.edu.cn](mailto:luosw@mail.ustc.edu.cn)

# 带相同电荷的导体可以相互吸引 ——基于电像法的理论推导和 Mathematica 多次迭代数值模拟 计算

罗四维 PB23000013 杨璨恩 PB23000051

June 2, 2024

**摘要** 两个带相同电荷的导体能否相互吸引？这是一个看上去违背 Coulomb 定律的命题，但是，如果考虑导体的静电感应，这有可能发生。笔者从一个点电荷和一个球壳的体系引入，得到了两个带同种电荷的导体可能相互吸引的结论，并将拓展到两个球体的体系，用 Mathematica 软件多次迭代，通过数值模拟计算，得到了两个同种电荷导体球壳可能相互吸引的结论。文章的末尾通过查阅相关理论计算方法，给出了本文所采用迭代方法的可能缺陷。

**关键词** 导体球；数值模拟；静电感应；电像法

## 1 引言

两个带相同电荷的导体能否相互吸引？如果这两个导体都是点电荷，显然根据 Coulomb 定律

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

它们之间一定排斥。但是，如果考虑其他情况，当静电感应存在时，问题的答案有可能发生改变。我们先对这个结论作出一个定性的分析。不妨设两个导体  $Q_1, Q_2$  都带有正电荷，如果导体  $Q_1$  的某端足够尖锐，大量正电荷会聚集在这一端，此时将这一端靠近导体  $Q_2$ ，当它们的距离足够近时，导体  $Q_2$  靠近导体  $Q_1$  尖端的一侧可能被感应出负电荷，进而产生引力。如果这部分的引力大于整体的斥力，那么宏观上导体  $Q_1, Q_2$  就有可能相互吸引。我们即将在之后得到如果  $Q_1$  是导体球壳， $Q_2$  是点电荷的理论计算推导；以及  $Q_1, Q_2$  均为导体球壳的有关数值计算和本计算方法可能存在的理论缺陷的相关说明。

## 2 导体球壳和点电荷的简单情况

考虑导体球壳  $Q_1$ ，半径为  $R$ ，点电荷  $Q_2$  与球壳圆心的距离是  $d$ 。我们的目的是求出  $Q_1, Q_2$  之间的静电力。

利用叠加原理，我们将这个体系等价为两个体系的叠加：（1）导体球壳接地的体系（2）单一导体球壳体系，球心带电  $Q - q''$ ，其中  $q''$  为（1）中球面的感应总电荷。我们先通过对（1）进行分析得到  $q''$ 。

### 2.1 导体球接地部分

根据体系对称性，假设在球心与  $Q_2$  连线上，距离球心  $d'$  处放置像电荷  $q'$  来代替导体球上的感应电荷，可以保证边界条件导体球的电压  $U = 0$  不变。[?] 中利用两个点电荷的等势面是球体（Apollonius 球）的结论，带入边界条件  $U = 0$ ，得到了结果

$$d' = \frac{R^2}{d}, \quad q' = -\frac{R}{d} Q_2.$$

为了计算导体球的受力，我们需要先明确其上的电荷分布情况。换句话说，我们需要求出它的面电荷密度  $\sigma$ 。以  $Q_1$  圆心和  $Q_2$  连线为  $z$  轴，建立球坐标系，设  $P(r, \theta, \varphi)$  到  $Q_2, q'$  距离分别为  $R_1, R_2$ ，则  $P$  点电势

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{R}{dR_2} \right).$$

其中  $R_1 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$ ,  $R_2 = \sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta}$ . 根据  $\mathbf{E} = -\nabla U$  得到

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{d}{R_1^3} - \frac{Rd'}{dR_2^3} \right) \sin \theta,$$

以及

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r - d \cos \theta}{R_1^3} - \frac{R(r - d' \cos \theta)}{dR_2^3} \right].$$

根据边界条件得到球面的感应电荷面密度为

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \epsilon_0 E_r |_{r=R}, \\ &= \frac{Q_2}{4\pi} \left[ \frac{R - d \cos \theta}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{R}{d}(R - d' \cos \theta)}{(R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right], \\ &= -\frac{Q_2}{4\pi} \frac{d^2/R - R}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

那么球面感应电荷总量为

$$\begin{aligned} q'' &= \iint_{Q_1} \sigma_e dS, \\ &= \iint_{Q_1} -\frac{Q_2}{4\pi} \frac{d^2/R - R}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} R d\theta d\varphi, \\ &= -\frac{Q_2(d^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{d\theta}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= -\frac{R}{d} Q_2 = q'. \end{aligned}$$

在体系 (1) 下, 作用在  $Q_2$  上的力, 等价于  $q'$  对  $Q_2$  的静电力, 是

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_2 q' \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 (d - d')^2} = -\frac{RdQ_2^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 (d^2 - R^2)^2}.$$

## 2.2 对偶部分

在子体系 (2) 下, 因为  $q'' = q'$ , 其受力

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_2(Q_1 - q'')\hat{z}}{4\pi\epsilon_0 d^2}.$$

## 2.3 对力性质的相关分析

根据叠加原理可以得到,

$$\mathbf{F} = \frac{Q_2(Q_1 - q'')\hat{z}}{4\pi\epsilon_0 d^2} - \frac{RdQ_2^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 (d^2 - R^2)^2} = -\frac{Q_2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2 Rd}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{Q_1 d + Q_2 R}{d^3} \right).$$

其中的负号表示吸引, 因此如果  $\frac{Q_2 Rd}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{Q_1 d + Q_2 R}{d^3} > 0$ , 自然这两个同时带正电的导体相互吸引! 这等价于

$$Q_1 d^5 - 2Q_1 R^2 d^3 - 2Q_2 R^3 d^2 + Q_1 R^4 d + Q_2 R^5 > 0,$$

上式可看成关于  $d$  的五次多项式  $f(d) = Q_1 d^5 - 2Q_1 R^2 d^3 - 2Q_2 R^3 d^2 + Q_1 R^4 d + Q_2 R^5$ , 因为  $Q_1 > 0$ , 当  $d$  充分大时, 一定存在  $d$  满足条件. 或者把上式看成关于  $Q_1$  的一次函数, 得到当  $Q_1 < \frac{R^3(2d^2 - R^2)}{d(d^2 - R^2)^2}$

时, 相互吸引.

无论是对  $d$  还是对  $Q_1$  的分析, 我们都有在某种条件下, 两者互相吸引的结论. 如果代入数据  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ , 那么

$$f(d) = d^5 - 2d^3 - 2d^2 + d + 1.$$

在 Geogebra 软件内作图, 得到  $f(d)$  的图像如图 1. 通过观察图像可以发现, 在  $d$  较小和较大时, 均会出现  $f(d) > 0$  的现象. 这表明导体球壳  $Q_1$  和点电荷  $Q_2$  之间完全有可能相互吸引!

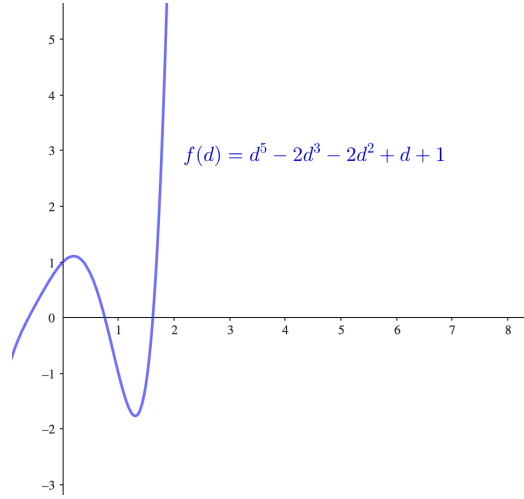


Figure 1: 赋值后的  $f(d)$  图像.

自此, 我们通过对导体球壳和点电荷体系的分析, 利用电像法, 得到了两个同种电荷导体球壳可能相互吸引的结论. 我们可以把点电荷想象成导体球, 那么两个导体球之间有没有可能相互吸引呢? 从前例我们可能发现, 导体球  $Q_2$  半径足够小时, 有可能相互吸引.

### 3 两个导体球壳的电像法及其迭代公式

#### 3.1 基本迭代方法

对于处理各自带一定总电荷的导体球的问题, 文 [?] 指出, 可以先假设二者各有一个未知的初始电荷, 迭代得到一系列像电荷, 对内部的未知电荷求和, 回到初始电荷, 得到所有的电荷分布. 因为像电荷都满足

$$d' = \frac{R^2}{d}, \quad q' = -\frac{R}{d}Q_2,$$

构成等比数列, 其迭代一定收敛. 直接推广得到电荷的迭代关系如下

$$\begin{cases} q_1(i) = -\frac{R_1}{d_2(i-1)}q_2(i-1), \\ q_2(i) = -\frac{R_2}{d_1(i-1)}q_1(i-1), \\ x_1(i) = \frac{R_1^2}{d_2(i-1)}, \\ x_2(i) = \frac{R_2^2}{d_1(i-1)}, \\ d_1(i) = d - x_1(i), \\ d_2(i) = d - x_2(i). \end{cases}$$

其中  $R_1, R_2$  分别是两球半径,  $d$  是两球球心的距离,  $x_1(i), x_2(i)$  分别是两球内的第  $i$  电荷到球心的距离,  $q_1(i), q_2(i)$  是它们的电荷量. 初始条件  $q_1(0) = Q_1, q_2(0) = Q_2$ .

然而, 这种方法并不能够很好地用 Mathematica 软件进行迭代: 涉及到的函数太多了, 之后的计算也不易进行. 所以我们采用一种全新的迭代方式.

### 3.2 改良迭代方法

我们重新考虑两个导体球壳构成的体系. 我们的像电荷需要满足如下两个边界条件 (1) 导体球表面等电势 (2) 球  $Q_1, Q_2$  表面的电场强度通量分别为  $\frac{Q_1}{\varepsilon_0}, \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$ . 设镜像电荷组成的集合是  $M$ , 则对  $M$  中的任何一个镜像电荷  $q_M$ , 满足 (1)  $q_M$  要么在球壳 A 内, 要么在球壳 B 内, 不妨在 A 内 (2)  $q_M$  与 A 内其他所有镜像电荷的代数和为  $Q_1$  (3)  $q_M$  要么在 A 的球心, 要么在 B 球内存在镜像电荷, 他们在球壳 A 上的合电势为 0 (4)  $q_M$  在球 B 内存在镜像电荷, 其与  $q_M$  在球壳 B 上的合电势为 0.

因此, 我们采取如下的迭代方式构造镜像电荷列  $\mathcal{M}$ . 设  $M_1, M_2$  分别是两球中心, 分别带电荷  $Q_1, Q_2$  的点电荷, 作为  $\mathcal{M}$  的初始条件. 对第  $k$  次迭代, 我们在  $\mathcal{M}$  中按照顺序增加两个电荷: 第一个电荷是  $M_k$  在不同于自身所在球的镜像, 按照

$$d' = \frac{R^2}{d}, \quad q' = -\frac{R}{d} Q_2,$$

确定. 第二个电荷在不同于自身所在球的球心, 电荷量是第一个电荷的相反数. 如此迭代扩充集合  $\mathcal{M}$ , 则当  $k \rightarrow +\infty$  时,  $\mathcal{M} \rightarrow M$ . 实际计算中, 如果新增加的电荷  $q_k < 10^{-3} \min\{Q_1, Q_2\}$ , 基本对电场没有什么影响. 因此在实际模拟的时, 迭代次数  $n$  一般是有限的.

### 3.3 相互作用力计算方法

设有效的像电荷为  $\mathcal{M} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ , 计算得到空间电势分布为

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}.$$

利用  $\mathbf{E} = -\nabla U$  求得球 A, B 分别的面电荷密度  $\sigma$  随单一球坐标下  $\theta$  的关系

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r|_{r=R} = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} = -\varepsilon_0 \lim_{\Delta r \rightarrow 0^+} \frac{U(r + \Delta r) - U(r - \Delta r)}{2\Delta r}.$$

再利用

$$\mathbf{F} = \iint_{Q_1} \iint_{Q_2} \frac{\sigma_A dS \sigma_B dS}{4\pi\varepsilon_0 \|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B\|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B).$$

计算得到球壳  $Q_1, Q_2$  之间的作用力.

实际计算中, 为了计算  $Q_2$  对  $Q_1$  的作用力, 也可以在已有的电场下进行计算. 利用  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$ , 得到  $Q_2$  对  $Q_1$  的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = \iint_{Q_1} \sigma \mathbf{E}_t dS = \iint_{Q_1} \sigma \left( \mathbf{E} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} \right) dS.$$

## 4 利用 Mathematica 软件进行数值模拟

### 4.1 迭代像电荷的变化趋势研究和 $N$ 的确定

先考虑简单情况, 当  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ m}$ , 两球最近距离  $d = 0.5 \text{ m}$  时, 我们将  $\mathcal{M}$  中的第  $n$  个电荷  $q_n$ , 计算  $\lg \frac{q_n}{q_0} = \lg q_n$ , 得到  $\lg q_n$  与  $n$  的变化关系如图 2.

通过观察图像可以发现, 迭代的像电荷  $q_n$  的大小与迭代次数  $n$  对数下降. 在  $n$  约为 600 时,  $q_n < 10^{-3} Q_1$ , 此时可以认为迭代完成了. 本论文的所有案例的  $N$  大约都在几百左右. 一般设定在  $q_n < 10^{-3} \min\{Q_1, Q_2\}$  时停止迭代.

### 4.2 对相同半径相同电荷导体球的情况

如果  $Q_1, Q_2$  作为导体球壳, 半径相同, 我们可以从理论上分析得到它不能吸引的结论. 考虑  $Q_1$  球上的正电荷, 其发出的电场线的去处要么是  $Q_1$  的负电荷, 要么是  $Q_2$  的负电荷, 要么是无穷远. 如果是  $Q_1$  的负电荷, 说明  $Q_1$  上有两点电势不同, 这和  $Q_1$  是导体相矛盾! 如果终止在导体球  $Q_2$  上的负电荷, 说明  $U_1 > U_2$ , 反过来  $U_2 > U_1$ , 矛盾! (3) 所以只能终止在无穷远, 说明球上电势高于无穷远电势. 如果在  $Q_1$  上还存在负电荷, 和上面的讨论类似, 可以得到无穷远电势高于球面电势, 矛盾! 所以  $Q_1, Q_2$  表面没有负电荷! 所以二者不可能相互吸引.

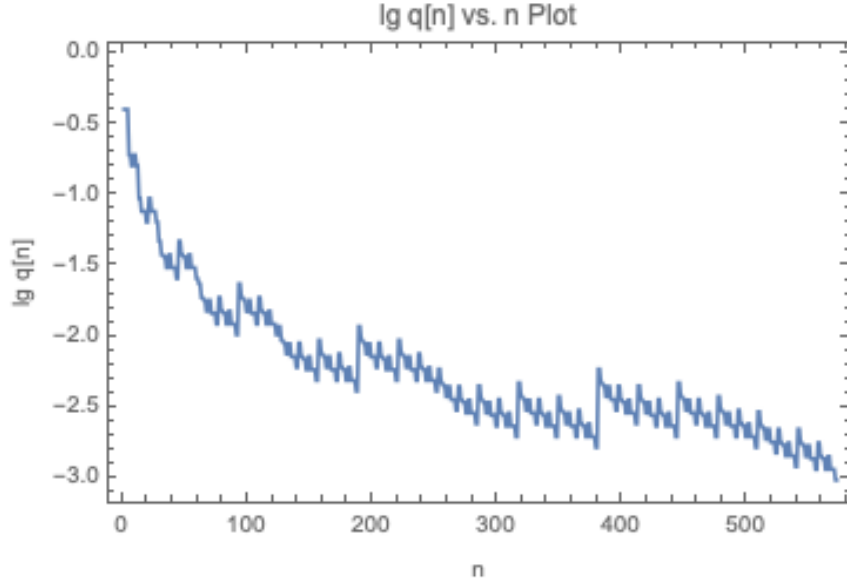


Figure 2: Mathematica 模拟出  $\lg q_n$  与  $n$  之间的关系.

采用 Mathematica 进行数值模拟, 计算得当  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ m}$ , 两球最近距离  $d = 0.5 \text{ m}$  时, A 球的面电荷密度  $\sigma$  随着  $\frac{100\theta}{\pi}$  的分布如图 2.

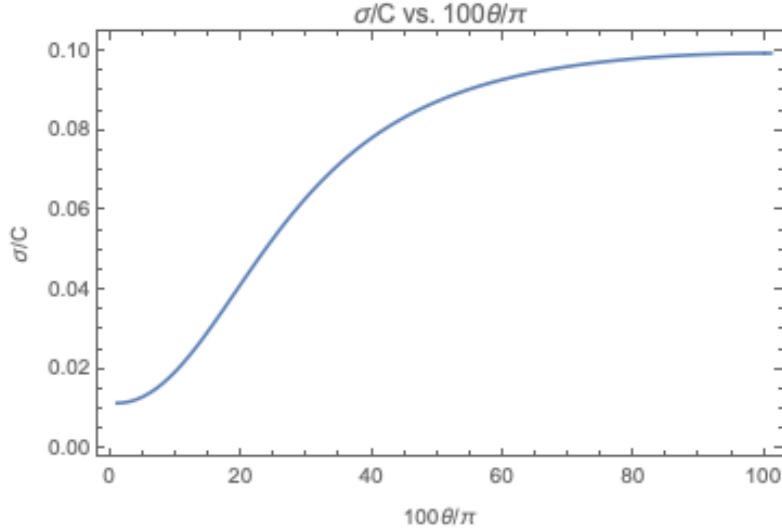


Figure 3: Mathematica 模拟出相同半径相同电荷导体球 A 面电荷密度  $\sigma$  随与  $z$  轴夹角  $\frac{100\theta}{\pi}$  的变化关系.

根据图像可以得到, 导体球 A 上只有正电荷, 这和理论证明的结果相吻合. 因为导体球上根本没有负电荷, 所以根本不可能两球吸引!

### 4.3 对不同电荷相同半径导体球的情况

考虑在上例中, 仅更改  $Q_2 = 2 \text{ C}$ , 计算面电荷分布情况, 并计算出  $Q_1$  受  $Q_2$  的力. 得到图 4  $\sigma$  的分布情况. 可以发现, 当  $\theta$  较小时, 也就是靠近  $Q_2$  的地方, 出现了一些负电荷. 此时则需要通过具体力的计算来判断二者是否吸引.

为了简化数值模拟的计算, 我们对力的求法加以改进. 根据对称性, 导体球 B 对导体球 A 作用力一定和  $z$  轴平行, 因此有

$$\mathbf{F}_{21} = \iint_{Q_1} \sigma \left( \mathbf{E} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} \right) dS = \iint_{Q_1} \sigma \mathbf{E} dS - \frac{\hat{z}}{2\epsilon_0} \iint_{Q_2} \sigma^2 \cos \theta dS.$$

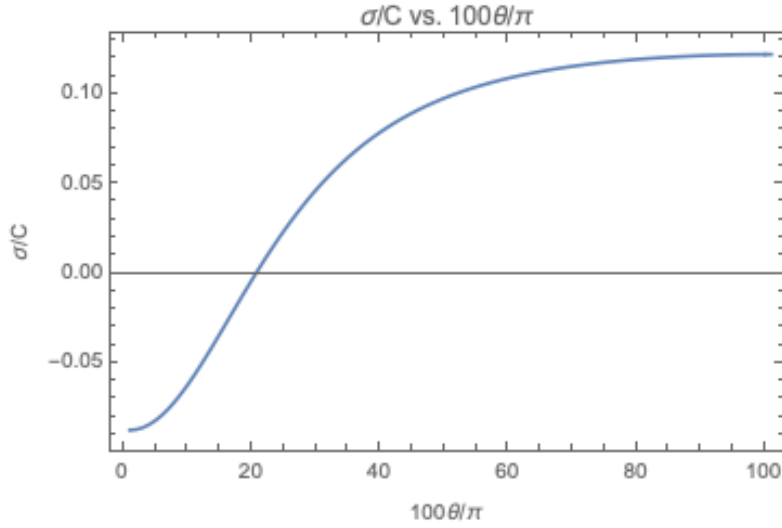


Figure 4: Mathematica 模拟出  $Q_2 = 2 \text{ C}$  时导体球 A 面电荷密度  $\sigma$  随与  $z$  轴夹角  $\frac{100\theta}{\pi}$  的变化关系.

其中

$$\oiint_{Q_2} \sigma^2 \cos \theta dS = R_1^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sigma^2 \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R_1^2 \int_0^\pi \sigma^2 \cos \theta \sin \theta d\theta,$$

可以通过 Riemann 和的计算求得, 只需要明确  $\oiint_{Q_1} \sigma \mathbf{E} dS$  的计算即可. 采用球坐标进行计算, 设  $\mathbf{E}|_{r=R} = E_r(\theta)\mathbf{e}_r + E_\theta(\theta)\mathbf{e}_\theta$ , 则

$$\oiint_{Q_1} \sigma \mathbf{E} dS = \hat{z} \oiint_{Q_1} \sigma (E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta) dS = 2\pi R_1^2 \hat{z} \int_0^\pi \sigma \sin \theta (E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta) d\theta.$$

一样可以化为 Riemann 和进行计算.

综合以上内容可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= \oiint_{Q_1} \sigma \mathbf{E} dS - \frac{\hat{z}}{2\varepsilon_0} \oiint_{Q_2} \sigma^2 \cos \theta dS, \\ &= 2\pi R_1^2 \hat{z} \int_0^\pi \sigma \sin \theta (E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta) d\theta - \frac{\pi R_1^2 \hat{z}}{\varepsilon_0} \int_0^\pi \sigma^2 \cos \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

通过 Mathematica 的计算可以得到, 图 4 情况对应的

$$F = -1.91327 \times 10^9 \text{ N}.$$

其中负号代表排斥!

如果我们增大  $Q_2$  到 10 C, 再通过 Mathematica 的计算可以得到此时的作用力

$$F = +1.08622 \times 10^{10} \text{ N}.$$

此时的作用力是正值, 代表两球吸引! 这个例子说明了: 相同大小, 带有不同量同种电荷的导体球可以相互吸引!

#### 4.4 对不同半径相同电荷导体球的情况

如果控制两导体球  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$ , 改变导体球的半径, 会不会产生两个导体球壳相互吸引的情况呢? 在同样的程序中更改  $R_2$ , 当  $R_2 = 0.8 \text{ m}$  时,

$$F = -1.27076 \times 10^9 \text{ N},$$

二者相互排斥. 如果继续减少  $R_2$  到 0.5 m, 有

$$F = -1.38513 \times 10^9 \text{ N},$$

仍然不够, 设  $R_2 = 0.1 \text{ m}$ , 此时有

$$F = +2.04922 \times 10^8 \text{ N}.$$

二者互相吸引!

## 5 针对迭代方法结果的分析 and 讨论

### 5.1 相互作用力的有关讨论

根据牛顿第三定律, 导体球 A 对导体球 B 的作用力和导体球 B 对导体球 A 的作用力等大反向, 在刚才的计算中替换导体球 AB 的位置, 得到

$$F' = 2.11589 \times 10^8 \text{ N},$$

两者误差接近 4%, 可能是因为迭代的电荷不够多导致, 但是二者已经相对接近, 可以认为二者几乎一样. 此时对 B 球而言, 面电荷密度  $\sigma$  随  $\theta$  呈现图 5 所示的“双峰分布”, 在靠近 A 球出感应出了大量的正电荷, 这和预期的情况相同, 因为感应电荷的吸引作用大于整体的排斥作用, 导致了两个导体球产生了相互吸引的情况

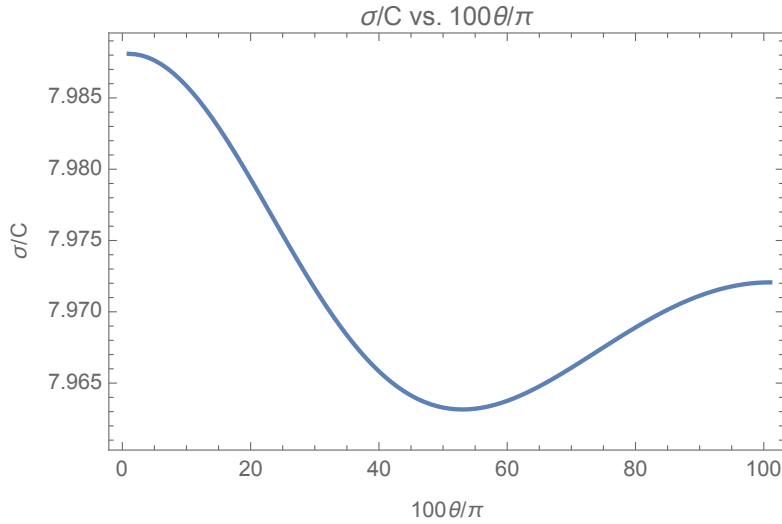


Figure 5: Mathematica 模拟出导体球 B 面电荷密度  $\sigma$  随与  $z$  轴夹角  $\frac{100\theta}{\pi}$  的变化关系.

### 5.2 已有数值计算方法的改进分析

在具体的数值计算时发现,  $E_\theta$  的计算值相比  $E_r$ , 差了  $10^5$  倍, 几乎可以视为 0! 具体的原因可以解释为, 在利用像电荷模拟实际电场分布时, 由于经典屏蔽现象, 在球 A 表面的电场均与面元垂直, 并且根据  $\sigma = \epsilon_0 E_r$  的计算也可以得到, 我们实际的计算可以通过化简, 变为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\pi R_1^2 \hat{z}}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma^2 \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

但是, 本文采用有限的像电荷来模拟总电场, 所以为了更加精确的计算, 我们仍然采用分别计算三个积分的方法进行计算.

### 5.3 本文计算可能的拓展

采用本文的数值模拟方法, 能否画出  $F$  随  $R_2$  或者  $Q_2$  变化的图线呢? 能否得到什么时候是引力, 什么时候是斥力的一般性结论呢?

### 5.4 和理论结果的验证可行性分析

为了检验数值模拟情况的合理性, 我们查找了相关理论研究成果. 文 [?] 给出了  $d = 0$  时, 两球之间相互作用力的定量公式, 其中需要用到双 Gamma 函数  $\psi(z)$  和复变无穷级数的相关计算, 能否将理论值和数



值模拟值进行对比呢?

上面是针对本研究不足的一些讨论.

## 6 结论

本文通过对一个导体球和一个点电荷的相互作用以及两个导体球壳之间的相互作用, 利用 Mathematica 进行数值模拟, 得到了带有相同电荷的两个导体可以相互吸引的结论.

## References

- [1] 胡友秋等. 电磁学与电动力学 (上册) [M]. 科学出版社, 2014.
- [2] 严雪飞. 特殊的电像法研究多个导体球的相互作用 [J]. 大学物理, 2011, 30(3): 44-44.
- [3] Lekner John. 2012 Electrostatics of two charged conducting spheres. *Proc. R. Soc. A.* **468**: 2829-2848.

## 补充信息: 迭代模拟的 Mathematica 代码

为了方便读者复现我们的数据模拟过程, 笔者在附录附上了本文所用 Mathematica 迭代的代码供查阅.

```
1 centerA = {0, 0, 0};
  radiusA = 0.8;
3 radiusB = 1;
  dist = 0.5;
5 centerB = {radiusA + radiusB + dist, 0, 0};
  chargeA = 1;
7 chargeB = 1;
  M = {{chargeA, centerA}, {chargeB, centerB}};
9 k = 1;
  chargesList = {};
11 While[True,
    If[Norm[M[[k, 2]] - centerA] < radiusA,
13      b = Norm[M[[k, 2]] - centerB]; newCharge1 = -radiusB*M[[k, 1]]/b;
        newCharge2 = radiusB*M[[k, 1]]/b;
15      lambda = radiusB*radiusB/b/(b - radiusB*radiusB/b);
        a = Norm[M[[k, 2]] - centerA]; newCharge1 = -radiusA*M[[k, 1]]/a;
17      newCharge2 = radiusA*M[[k, 1]]/a;
        lambda = radiusA*radiusA/a/(a - radiusA*radiusA/a);];
19 AppendTo[
    M, {newCharge1,
21      If[Norm[M[[k, 2]] - centerA] < radiusA,
          centerB/(1 + lambda) + M[[k, 2]]*lambda/(1 + lambda),
23      centerA/(1 + lambda) + M[[k, 2]]*lambda/(1 + lambda)]];
    AppendTo[
25      M, {newCharge2,
          If[Norm[M[[k, 2]] - centerA] < radiusA, centerB, centerA]}}];
27 AppendTo[chargesList, Abs[newCharge1]];
    AppendTo[chargesList, Abs[newCharge2]];
29 If[Abs[newCharge1] < 0.001*chargeA ||
      Abs[newCharge2] < 0.001*chargeB, Break[]];
31 k++;]
ListLinePlot[
33 Transpose[{Range[Length[chargesList]], Log10[chargesList]}],
  PlotRange -> All, Frame -> True, FrameLabel -> {"n", "lg q[n]"},
35 PlotLabel -> "lg q[n] vs. n Plot"]
  ElectricFieldAtPoint[charge_, pos_, P_] := (9*100000000*charge/Norm[P -
    pos]);
37 ElectricFieldTotal[P_] :=
```

```

Total[ElectricFieldAtPoint[#1, #2, P] & @@@ M];
39 f[r_, theta_, phi_] := {r*Cos[theta], r*Sin[theta]*Cos[phi],
    r*Sin[theta]*Sin[phi]};
41 El[r_, theta_,
    phi_] := (ElectricFieldTotal[f[1.00001*r, theta, phi]] -
43     ElectricFieldTotal[f[0.99999*r, theta, phi]])/0.00002/r;
sig[theta_, phi_] := -8.854*10^{-12}* El[radiusA, theta, phi];
45 thetaValues = Range[0, Pi, Pi/100];
electricFieldVsThetaA =
47 Table[sig[theta, Pi/2][[1]], {theta, thetaValues}];
ListLinePlot[electricFieldVsThetaA, PlotRange -> All, Frame -> True,
49 FrameLabel -> {"100\[Theta]/\[Pi]", "\[Sigma]/C"},
    PlotLabel -> "\[Sigma]/C vs. 100\[Theta]/\[Pi]"
51 thetaValues = Range[0, Pi, Pi/1000];
IntegList1 = {};
53 For[i = 1, i <= 999, i++,
    AppendTo[IntegList1,
55     sig[thetaValues[[i]] + Pi/2000, Pi/2][[1]]^2*
        Cos[thetaValues[[i]] + Pi/2000]*Pi/1000* Sin[thetaValues[[i]] + Pi/2000]
    ]
57 Integ1 = Pi*radiusA*radiusA/8.854*10^{12}*Total[IntegList1];
IntegList2 = {};
59 For[i = 1, i <= 999, i++,
    AppendTo[IntegList2,
61     -sig[thetaValues[[i]] + Pi/2000, Pi/2][[1]]*
        Cos[thetaValues[[i]] + Pi/2000]*Pi/1000*
63     El[radiusA, thetaValues[[i]] + Pi/2000, Pi/2]* Sin[thetaValues[[i]] + Pi
        /2000]]
    Ea[theta_] := ElectricFieldTotal[f[radiusA, 1.00001*theta, Pi/2]] -
        ElectricFieldTotal[f[radiusA, 0.99999*theta, Pi/2]];
65 Et[theta_] := -(1/radiusA)*Ea[theta]/0.00002/theta
Integ2 = 2 Pi*radiusA*radiusA*Total[IntegList2];
67 IntegList3 = {};
For[i = 1, i <= 999, i++,
69 AppendTo[IntegList3,
    sig[thetaValues[[i]] + Pi/2000, Pi/2][[1]]*
71     Sin[thetaValues[[i]] + Pi/2000]*Pi/1000*
        Et[thetaValues[[i]] + Pi/2000]* Sin[thetaValues[[i]] + Pi/2000]]
73 Integ3 = 2 Pi*radiusA*radiusA* Total[IntegList3];
F = Integ2 - Integ3 - Integ1;
75 F[[1]]

```