清华大学大学数学竞赛培训教材

# 1，2，3，5 章及其经典习题

# 第一部分　例题精讲与习题

## 第一章　极限与连续性

### 1.1 基本概念与内容提要

1）.极限存在的条件：左极限等于右极限。

相关联的题型：（1）函数连续性和可导性的判断及应用；（2）求函数的间断点：①第一类间断点（左右极限存在）：a>可去间断点：左右极限存在且相等但函数在该点无定义或函数值不等于极限值。b>跳跃间断点：左右极限存在但不相等。②第二类间断点：除第一类间断点以外所有的间断点；（3）用定义求导数，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则函数在 $x_0$ 处可导且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。所以，判断可导性就是判断极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是否存在；(4)求函数的渐近线：①水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 y=A 是 f(x)的水平渐近线；②铅直（垂直）渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的铅直（垂直）渐近线；③斜渐近线：$y=kx+b$ 其中 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$；④斜渐近线最多有两条，水平渐近线最多有两条，水平渐近线与斜渐近线的总条数最多有两条。

2）. 连续函数的极限

3）.常用极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0),\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\lim\limits_{x\to+\infty}arc\cot x=0,$

$$\lim_{x\to-\infty}arc\cot x=\pi,,\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\lim_{x\to+\infty}e^x=\infty,\lim_{x\to0^+}x^x=1,\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

4）.极限的四则运算

5）恒等变形、约去零因子、有理化等常用化简方法

6）.极限存在准则（夹逼定理、单调有界定理）

7）.两个重要极限及其变形：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

8）.洛比达法则（**重点**），常与洛比达法则一起交替使用，常考的共有七种不定式极限：

①$\frac{0}{0}$型，常用方法：约去零因子；等价无穷小替换；变量代换；洛比达法则；恒等变形

②$\frac{\infty}{\infty}$型，常用方法：分子分母同时除以最高次幂项；变量替换；洛比达法则

③$\infty-\infty$型，常用方法：通分；倒代换；有理化

④$0\cdot\infty$型，常用方法：变形；变量代换；取倒数化为$\frac{\infty}{\infty}$型

⑤$0^0$型，常用方法：取对数化为$0\cdot\infty$型；恒等变形；变量代换

⑥$\infty^0$型，常用方法：取对数化为$0\cdot\infty$型；恒等变形消除不定式；利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；等价替换

⑦$1^{+\infty}$型，常用方法：取对数化为$0\cdot\infty$型；利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

9）．无穷小得比较

设$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0,\beta(x)\neq 0$，则$\alpha(x),\beta(x)$即为无穷小量，

（1）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为$\alpha(x)=o[\beta(x)]$，或者说当$x\to x_0$时$\beta(x)$是比$\alpha(x)$低阶的无穷小；

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$是与$\beta(x)$同阶的无穷小。特别的，当 C=1 时，称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$；

（3）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq 0)$，则称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$是与$\beta(x)$的 k 阶无穷小。

等价无穷小替换求极限（注意：有界函数与无穷小的积是无穷小）：等价无穷小是指在**乘积型极限**中，一个无穷小因式可以用与它等价的无穷小因式代替。

常用等价无穷小：当$x\to 0$时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^a-1\sim ax,a^x-1\sim x\ln a,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,\arcsin x\sim x,$$

$\arctan x\sim x$。注意：高阶无穷小、k 阶无穷小的判断及应用。

补充：无穷大量比较：

① 当 $n\to\infty$ 时，无穷大的阶数由低到高排列为：$\ln n, n^{\alpha}(\alpha>0), n^{\beta}(\beta>\alpha>0), a^{n}(a>0), n^{n}$；

② 当 $x\to\infty$ 时，无穷大的阶数由低到高排列为：$\ln x, x^{\alpha}(\alpha>0), x^{\beta}(\beta>\alpha>0), a^{x}(a>0), x^{x}$。

9）.利用泰勒公式、中值定理求极限，求极限常用迈克劳林公式有：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^5\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right)$$

10） .利用定积分的定义求极限

11） 证明数列极限存在的方法：①夹逼定理②单调有界定理③级数敛散法：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在④级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

补充：给定数列 $\{a_n\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)$ 收敛。

所以，判断数列的敛散性可以转化为判断级数的敛散性。

12） 抓大头公式：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0},n=m\\0,n<m\\\infty,n>m\end{cases}$，数列极限也可用。

13） 中值定理求极限：关键是将欲求的极限写成中值定理的形式，在求函数式具有规律比或其分子分母之项具有中值定理那样的关联或函数式非常复杂难以化简时，尤其是像求类未定的极限如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$，可以考虑使用中值定理。

14） 利用级数收敛的必要条件求极限：若 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$。

求极限可以转化为求定积分、判断级数的敛散性等。

## 1.2 例题选讲

例 1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$。

解：方法一：由拉格朗日中值定理得$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\xi}\left(\tan x-\sin x\right)$，其中$\xi$在$\sin x$与$\tan x$之间，当$x\to 0$时$\xi\to 0,e^{\xi}\to 1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}\left(\tan x-\sin x\right)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sec^2 x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)=3$$

方法二：先处理一下，在使用等价无穷小和洛比达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}=3$$

例 2.求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}dx$。

解：$\exists\xi\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$使得$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}dx=\dfrac{\xi^n}{2\left(1+\xi\right)}$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi^n}{2\left(1+\xi\right)}=0$

例 3.设$D_r:x^2+y^2\le r^2$，则$\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}e^{-x^2-y^2}\cos\left(x+y\right)dxdy=$___________.

解：$\exists\left(\xi,\eta\right)\in D_r$使得$\iint\limits_{D_r}e^{-x^2-y^2}\cos\left(x+y\right)dxdy=\pi r^2e^{-\xi^2-\eta^2}\cos\left(\xi+\eta\right)$，

当$r\to 0^+$时$\left(\xi,\eta\right)\to\left(0,0\right)$，

$$\therefore \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}e^{-x^2-y^2}\cos\left(x+y\right)dxdy=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}\pi e^{-\xi^2-\eta^2}\cos\left(\xi+\eta\right)=\pi$$

例 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}(\cos^2\dfrac{\pi}{n}+\cos^2\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\dfrac{n-1}{n}\pi)=$________________.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos^2\frac{2\pi}{n}+...+\cos^2\frac{n-1}{n}\pi\right)=\pi\int_0^1\cos^2\pi xdx$$

$$=\pi\int_0^1\frac{1+\cos 2\pi x}{2}dx=\pi\left.\frac{x+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x}{2}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

例 5.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\left[nC_n^k\right]^{-1}$。

解：当$k\le n-1$时，$\dfrac{n+1-k}{nC_n^k}=\dfrac{1}{n^2}\bullet\dfrac{k\left(k-1\right)\left(k-2\right)...2}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)...\left(n-k\right)}\le\dfrac{1}{n^2}$

$$\therefore 0\le\frac{n+1-k}{nC_n^k}\le\frac{1}{n^2}\left(k\le n-1\right)$$

$\therefore 0 \le \sum_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\left[nC_n^k\right]^{-1} \le \frac{n-1}{n^2}+\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n^2}$

即$0 < \sum_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\left[nC_n^k\right]^{-1} \le \frac{2n-1}{n^2}$，又$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2}=0$，

由夹逼定理得$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\left[nC_n^k\right]^{-1}=0$

例 6.证明：数列$\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\ldots$收敛，并求其极限。

证明：设该数列通项为$x_n$，则$x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}$，令$f\left(x\right)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$，

则 f(2)=2，$x_{n+2}=f\left(x_n\right),x_{n+2}-2=f\left(x_n\right)-f\left(2\right)$，由拉格朗日中值定理得：

存在$\xi$介于 x，2 之间，使得$f\left(x\right)-f\left(2\right)=f^{'}\left(\xi\right)\left(x-2\right)$，

$\because f`\left(x\right)=-\frac{1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}}$，

$\therefore \left|x_{n+2}-2\right|=\left|f\left(x_n\right)-f\left(2\right)\right|=\left|f^{'}\left(\xi_n\right)\right|\left|x_n-2\right|$，由题意得$0<x_n<7$，

$\therefore 0<\xi_n<7,\left|f`\left(\xi_n\right)\right|=\frac{1}{4\sqrt{7+\xi_n}\sqrt{7-\sqrt{7+\xi_n}}}<\frac{1}{4\sqrt{7}\sqrt{7-\sqrt{14}}}<1$

即$\alpha=\left|f^{'}\left(\xi_n\right)\right|$，则$\left|x_{n+2}-2\right|=\alpha\left|x_n-2\right|,0<\alpha<1$

$\therefore \left|x_{2k}-2\right|=\alpha^{k-1}\left|x_2-2\right|,$

由$0\le\left|x_{2k}-2\right|=\alpha^{k-1}\left|x_2-2\right|$且$\lim_{k\to\infty}\alpha^{k-1}\left|x_2-2\right|=0$，

由夹逼定理得$\lim_{k\to\infty}\left|x_{2k}-2\right|=0$即$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=2$，同理可得$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=2$，

所以，$\lim_{n\to\infty}x_n=2$，即原数列的极限为 2。

例 7.设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1,x<-1\\x^3,-1\le x<2\\x^2+4,x\ge 2\end{cases}$，又设$\alpha,\beta$分别是$y=f\left(x\right)$的反函数

$y=g\left(x\right)$的不可导点中横坐标最小者和最大者。求：

（1）求$\alpha,\beta$；（2）设$x_0\in\left(\alpha,\beta\right),x_{n+1}=\frac{2\left(1+x_n\right)}{2+x_n},n=0,1,2,\ldots$，求$\lim_{n\to\infty}x_n$。

解：（1）$\because g`\left(x\right)=\dfrac{1}{f`\left(x\right)}$，g(x)的不可导点即 $f`\left(x\right)$不存在或 $f`\left(x\right)=0$ 的点的取值，显然 $f^{'}\left(0\right)=0$，又$\because f\left(2\right)=8,\lim\limits_{x\to 2^{+}}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^{+}}\dfrac{x^{2}-4}{x-2}=4$，

$\lim\limits_{x\to 2^{-}}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^{-}}\dfrac{x^{3}-8}{x-2}=12,\therefore f`\left(2\right)$不存在，同理可得 $f`\left(-1\right)$不存在，$\therefore g\left(x\right)$在 $x_1=f\left(0\right)=0,x_2=f\left(-1\right)=-1,x_3=f\left(2\right)=8$处均不可导，

$\therefore \alpha=-1,\beta=8$

（2）由题意得 $x_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}\left(x_n-\sqrt{2}\right)$，

$\therefore \left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{2-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\left(2-\sqrt{2}\right)\left|x_n-\sqrt{2}\right|$，

$\therefore 0<\left|x_n-\sqrt{2}\right|\le\left(2-\sqrt{2}\right)^{n}\left|x_0-\sqrt{2}\right|$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{2}\right)^{n}\left|x_0-\sqrt{2}\right|=0$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{2}\right|=0,\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

例 8.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$。

解：$\therefore \dfrac{i^2}{n^2}<\dfrac{i^2+1}{n^2}<\dfrac{\left(i+1\right)^2}{n^2},\therefore$ 由介值定理得 $\exists \xi_i\in\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n}\right)$使得 $\xi_i^2=\dfrac{i^2+1}{n^2}$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\dfrac{n^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\xi_i^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

例 9.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}}{n\left(n+1\right)}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k$。

解：$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k-1\right)C_{n-1}^{k-1}+n\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n\left(n-1\right)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=n\left(n+1\right)\cdot 2^{n-2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=\frac{1}{4}$$

例 10.求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$。

解：由泰勒公式得 $\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\pi\int_0^1 x(1+x)dx=\frac{5}{6}\pi$$

例 11.当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ 关于 x 的阶为______。

解：$\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{1}{15}}\left(1+x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{15}}\left[1+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}+o\left(x^{\frac{5}{3}}\right)\right]$

$$\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}=x^{\frac{1}{15}}\left(1+x^{\frac{9}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{15}}\left[1+\frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}}+o\left(x^{\frac{9}{5}}\right)\right]$$

$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{15}}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}}+o\left(x^{\frac{5}{3}}\right)-o\left(x^{\frac{9}{5}}\right)\right]$是关于 x 的 $\frac{1}{15}+\frac{5}{3}=\frac{26}{15}$ 阶。

例 12.设函数 f(x)满足 $f(0)=1,\lim_{x\to\infty}f(x)=A$，且 $f`(x)=\frac{1}{e^x+|f(x)|}$ $(x>0)$，求证：$1\le A\le 1+\ln 2$。

证明：由 $f`(x)=\frac{1}{e^x+|f(x)|}>0$ 得 f(x)单调递增，$\therefore f(x)>f(0)=1$，

$$f`(x)=\frac{1}{e^x+|f(x)|}<\frac{1}{e^x+1},\therefore f(x)-f(0)\le\int_0^x\frac{dt}{e^t+1}=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2$$

$$\therefore 1\le f(x)\le 1+\ln 2+\ln\frac{e^x}{e^x+1},\therefore 1\le A\le 1+\ln 2。$$

例 13.求函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ 的表达式。

解：当 $\left|x\right|<1$ 时 f(x)=1；当 $\left|x\right|>2$ 时 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n}=\frac{x^2}{2}$；

当 $1<x<2$ 时 $f\left(x\right)=x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x$；

当 $-2<x<-1$ 时，若 n 为偶数 $f\left(x\right)=-x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=-x$，

若 n 为奇数 $f\left(x\right)=x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x,$

$\therefore$ 当 $-2<x<-1$ 时该极限不存在，即 $f\left(x\right)$ 不存在；

又 $f\left(1\right)=1, f\left(2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{n+1}}=2$，

当 $x=-1$ 时，若 n 为偶数 $f\left(-1\right)=1$，若 n 为奇数 $f\left(-1\right)=\frac{1}{2},\therefore f\left(-1\right)$ 不存在；

当 $x=-2$ 时，若 n 为偶数 $f\left(-2\right)=2$，若 n 为奇数 $f\left(-2\right)=1,\therefore f\left(-2\right)$ 不存在；

故，$f\left(x\right)=\begin{cases}1,-1<x\le 1,\\ x,1<x\le 2,\\ \frac{x^2}{2},x>2\text{或}x<-2\end{cases}$，其定义域为 $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$

例 14.已知 $x_n=\frac{3}{2}\bullet\frac{5}{4}\bullet\frac{17}{16}\bullet\ldots\bullet\frac{1+2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ =_________。

解：分子 $=\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{n-1}}+1\right)=2^{2^n}-1$，

分母 $=2^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}=2^{2^n-1}$,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)=2$。

真题演练：设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\dots\left(1+a^{2^n}\right)$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

答案：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$

例 15.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$。

解：由迈克劳林公式得：$\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right),e^{x^2}=1+x^2+o\left(x^2\right)$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right),\cos x-e^{x^2}=-\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)}{x^2\left[-\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]}=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}$$

例 16.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n-\ln n}{2\ln n}\bullet\frac{2n}{n-\ln n}}=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n-\ln n}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-\ln x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}\right)=e^2$$

例 17.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$

解：设 $S_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，则

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=\ln 2$$

例 18.设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=2011$，求$\alpha,\beta$的值。

解：$\because \dfrac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=\dfrac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\beta}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\beta-\alpha}}{1-(1-x)^{\beta}}=2011,\therefore \beta-\alpha>0,\beta\neq 0$$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\beta-\alpha}}{1-(1-x)^{\beta}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\beta-\alpha}}{\beta x}=\dfrac{1}{\beta}\lim\limits_{x\to 0}x^{\beta-\alpha-1}=2011$

$$\therefore \beta-\alpha-1=0,\frac{1}{\beta}=2011,\therefore \alpha=-\frac{2010}{2011},\beta=\frac{1}{2011}$$

例 19.已知有整数$n(n>4)$使极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^n+7x^4+2\right)^{\alpha}-x\right]=A\neq 0$，求$\alpha$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^n+7x^4+2\right)^{\alpha}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^{n\alpha}\left(1+7x^{4-n}+2x^{-n}\right)^{\alpha}-x\right]$

由极限的存在性得 $n\alpha=1, n=\dfrac{1}{\alpha}$，

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+7x^{4-n}+2x^{-n}\right)^{\alpha}-x\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+7t^{n-4}+2t^{n}\right)^{\alpha}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\left(7t^{n-4}+2t^{n}\right)}{t}=\alpha\lim_{t\to 0}\left(7t^{n-5}+2t^{n-1}\right)=A\neq 0,\therefore n=5,\alpha=\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$$

例 20.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dfrac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}$$

例 21.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+3)!}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right]=\frac{5}{3}$$

例 22.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\ldots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)$。

解：设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+k^2},\because \dfrac{k^2}{n^3+n^2}\le\dfrac{k^2}{n^3+k^2}\le\dfrac{k^2}{n^3+1}$

又 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

$$\therefore \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\left(n^3+n^2\right)}\le x_n\le\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\left(n^3+1\right)}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6\left(n^3+n^2\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6\left(n^3+1\right)}=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$$ 即 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

例 23.求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

$$\because \frac{1}{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{n},\therefore \frac{2n+2}{n+1}\le\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{2n+2}{n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2,\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$$

例 24.求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}$

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+(n-1)!}{n!}$

$$\because 0<\frac{1!+2!+\ldots+(n-1)!}{n!}<\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!}{n!}=\frac{2n-3}{n(n-1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n(n-1)}=0,\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+(n-1)!}{n!}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}=1$$

例 25.求 $\lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right|$

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right|=1$

例 26.设 f(x)在 R 上连续，$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，求证：$\exists\xi\in R$ 使得 $f(\xi)+\xi=0$。

证明：令 $F(x)=f(x)+x$，则 $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=+\infty$$

$\therefore \exists N>0$ 使得 $F(N)>0, F(-N)<0$，

由零点定理得：$\exists \xi\in R$ 使得 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)+\xi=0$

例 27.求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

解：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{n\left[\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}\right]\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right]}$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)\right]=\exp\left[\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln a+\frac{1}{2}\ln b}=\sqrt{ab}$$

例 28.若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=1$,

求 $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$。

解：$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)+f(1+2\sin x)-f(1)-2[f(1-3\tan x)-f(1)]}{x}$

$=f'(1)+\lim_{x\to0}\frac{f(1+2\sin x)-f(1)}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{f(1-3\tan x)-f(1)}{-3\tan x}\cdot\frac{-3\tan x}{x}$

$=1+f'(1)\cdot2-2f'(1)\cdot(-3)=1+2+6=9$

例29. 设 $F(x)$ 除 $x=0$ 与 $x=1$ 两点外，对全体实数有定义，且满足 $F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，求函数 $F(x)$。

解：$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$ (1)，将 $x$ 代换成 $\frac{x-1}{x}$，

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}\right)=F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{-1}{x-1}\right)=1+\frac{x-1}{x}=\frac{2x-1}{x} \qquad (2)$$

$x$ 代换成 $\frac{-1}{x-1}$，$F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F\left(\frac{\frac{-1}{x-1}-1}{\frac{-1}{x-1}}\right)=F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F(x)=1+\frac{-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$ (3)

(1)+(3)-(2)得

$$2F(x)=(1+x)+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x(x^2-1)+x(x-2)-(x-1)(2x-1)}{x(x-1)}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}$$

即 $F(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$

例 30.设 $a_n>0,n=1,2,3,\ldots,$

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

证明：$\because a_n>0,n=1,2,\ldots,\therefore\{x_n\}$ 单调增加，$x_1=1-\dfrac{1}{1+a_1}$,

$$x_2=1-\frac{1}{1+a_1}+\frac{1+a_2-1}{(1+a_1)(1+a_2)}=1-\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

设 $x_{n-1}=1-\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}$

$$x_n=x_{n-1}+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$=1-\frac{1+a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})(1+a_n)}+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$\therefore x_n<1,$ $\{x_n\}$单调有界，$\lim\limits_{x\to0}x_n$ 存在.

例 31. $n$ 为自然数, $f(x)$ 在[0, $n$]上连续， $f(0)=f(n)$，

试证：存在 $a,a+1\in[0,n]$，使 $f(a)=f(a+1)$。

证明：当 $n$=1, 存在 $a=0$,使 $f(0)=f(1)$,结论成立；

当 $n$>1,令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$, $g(x)$ 在[0, $n$-1]上连续, 存在最小值 m 和最大值 M，

$$\mathrm{m}\le\frac{1}{n}\left[g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)\right]\le\mathrm{M}$$

由介值定理,存在 $a\in[0,n-1]$ (即有 $a,a+1\in[0,n]$),使

$$g(a)=\frac{1}{n}\left[g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\cdots+f(n)-f(n-1)\right]=\frac{1}{n}\left[f(n)-f(0)\right]=0$$

即有 $a,a+1\in[0,n]$,使 $g(a)=f(a+1)-f(a)=0$,即 $f(a)=f(a+1)$.

例 32.如果 f(x)是$\left(-\infty,+\infty\right)$上的周期函数，且$\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$，求 f(x)。

解：对$\forall x\in\left(-\infty,+\infty\right),\exists T>0$使 $f\left(x\right)=f\left(x+nT\right)$

由$\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$得：$f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x+nT\right)=\lim\limits_{t\to\infty}f\left(t\right)=\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

例 33.求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left(x-\ln x\cdot\sin x\right)$

解：$x-\ln x\cdot\sin x=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\sin x\right)$，当$x\to+\infty$时$\dfrac{\ln x}{x}\to0,\sin x$有界，

$\dfrac{\ln x}{x}\sin x\to0,x-\ln x\cdot\sin x\to+\infty,\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left(x-\ln x\cdot\sin x\right)=\dfrac{\pi}{2}$

例 34.求$\lim\limits_{x\to\infty}x^4\left(\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$

解：$\because x\to\infty$时$\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\to0$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}x^4\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^4\tan\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^4\frac{\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}}{1+\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}\cdot\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)+\left(2x^2+5\right)\left(2x^2+7\right)}=\frac{3}{5}$$

例 35.求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(xe^x\right)-\cos\left(xe^{-x}\right)}{x^3}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\dfrac{xe^x+xe^{-x}}{2}\sin\dfrac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{xe^{x}+xe^{-x}}{2}\frac{xe^{x}-xe^{-x}}{2}}{x^{3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\left(e^{4x}-1\right)}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x}=-2$$

例 36.求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[n]{\left(x+a_{1}\right)\left(x+a_{2}\right)\ldots\left(a+a_{n}\right)}-x\right)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{a_{1}}{x}\right)\left(1+\frac{a_{2}}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{a_{n}}{x}\right)}-1\right)$

$$=\lim_{x\to +\infty}x\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{a_{1}}{x}\right)\left(1+\frac{a_{2}}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{a_{n}}{x}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+a_{1}t\right)\left(1+a_{2}t\right)\ldots\left(1+a_{n}t\right)-1}{nt}=\frac{a_{1}+a_{2}+\ldots+a_{n}}{n}$$

例 37.求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\ldots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{1+(x-1)}\right)\left(1-\sqrt[3]{1+(x-1)}\right)\ldots\left(1-\sqrt[n]{1+(x-1)}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}\left(x-1\right)\left[-\frac{1}{3}\left(x-1\right)\right]\ldots\left[-\frac{1}{n}\left(x-1\right)\right]}{\left(1-x\right)^{n-1}}=\frac{1}{n!}$$

例 38.求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[4]{x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1}-\sqrt[3]{x^{3}+x^{2}+x+1}\bullet\frac{\ln\left(x+e^{x}\right)}{x}\right]$

解：原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}}+\frac{1}{x^{4}}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\bullet\frac{x+\ln\left(\frac{x}{e^{x}}+1\right)}{x}\right]$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+t+t^{2}+t^{3}+t^{4}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(1+t+t^{2}+t^{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(t+t^{2}+t^{3}+t^{4}\right)-\frac{1}{3}\left(t+t^{2}+t^{3}\right)}{t}=-\frac{1}{12}$$

例 39.设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}, F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5, x_0>0, x_1=F(x_0,2x_0),\ldots,$
$x_{n+1}=F(x_n,2x_n), n=1,2,\ldots,$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限值。

证明：令 x=1 得：

$$F(1,y)=\frac{f(y-1)}{2}=\frac{1}{2}y^2-y+5, f(y-1)=y^2+2y+10=(y-1)^2+9,$$

$$\therefore f(y-x)=(y-x)^2+9, F(x,y)=\frac{(y-x)^2+9}{2x},$$

$$x_1=\frac{x_0^2+9}{2x_0}, x_{n+1}=\frac{x_n^2+9}{2x_n}, n=1,2,\ldots,$$

$$x_n>0, \therefore x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{9}{x_n}\right)\geq 3, \frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{x_n^2}\right)\leq 1 \text{即} 3\leq x_{n+1}\leq x_n$$

$\therefore\{x_n\}$ 单调递减且有下界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，对 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+9}{2x_n}$ 两边同时取极限得 $A=\dfrac{A^2+9}{2A}$，解得 $A=3$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

例 40.设 $a_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}}, a_2=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a_1},\ldots,a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\ldots a_n$。

解：设 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则 $a_1=\cos\dfrac{\theta}{2}, a_2=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}=\cos\dfrac{\theta}{2^2},\ldots$

由数学归纳法可得 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_1a_2\ldots a_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\cdot\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{2}{\pi}$$

例 41.设 $a_1=3, a_n=2a_{n-1}^2-1(n\geq 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n a_1a_2\ldots a_{n-1}}$。

解：由 $a_1=3>1, a_n=2a_{n-1}^2-1$ 及数学归纳法得 $a_n>1$

$$a_n^2-1=\left(a_n+1\right)\left(a_n-1\right)=2^2a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2-1\right)=2^4a_{n-1}^2a_{n-2}^2\left(a_{n-2}^2-1\right)$$

$$=\ldots=2^{2n-2}a_{n-1}^2a_{n-2}^2\ldots a_1^2\left(a_1^2-1\right)=2^{2n+1}a_{n-1}^2a_{n-2}^2\ldots a_1^2=2\left(2^na_1a_2\ldots a_{n-1}\right)^2$$

得 $\dfrac{a_n^2-1}{\left(2^na_1a_2\ldots a_{n-1}\right)^2}=2$，又 $a_n>1$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^na_1a_2\ldots a_{n-1}}=0$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(2^na_1a_2\ldots a_{n-1}\right)^2}=0$，

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\left(2^na_1a_2\ldots a_{n-1}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-1}{\left(2^na_1a_2\ldots a_{n-1}\right)^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2^na_1a_2\ldots a_{n-1}\right)^2}=2$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^na_1a_2\ldots a_{n-1}}=\sqrt{2}$

例 42. 设 $f''(0)$存在，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-xf(x)}{x^3}=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$的值。

解：由$1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-f(x)-xf'(x)}{3x^2}$得：

$1-f(0)=0\ \therefore\ f(0)=1$

由$1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-f(x)-xf'(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}-2f'(x)-xf''(x)}{6x}$得:

$f'(0)=0$, 由$1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}-\frac{2f'(x)}{x}-f''(x)}{6}$得:

$$-2-2\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}-f''(0)=6\ \therefore 3f''(0)=-8,\ f''(0)=-\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-\frac{8}{3}$$

例 43. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}$

$$\because\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

$$\therefore\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$$

例 44. 已知 $f(x)$ 在 $x=6$ 的邻域内为可导函数,

且 $\lim\limits_{x\to6}f(x)=0,\lim\limits_{x\to6}f'(x)=2010,$ 求极限 $\lim\limits_{x\to6}\frac{\int_6^x\left[t\int_t^6 f(u)du\right]dt}{(6-x)^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to6}\frac{\int_6^x\left[t\int_t^6 f(u)du\right]dt}{(6-x)^3}=\lim\limits_{x\to6}\frac{x\int_x^6 f(u)du}{-3\left(x-6\right)^2}$

$$=\lim_{x\to6}\frac{\int_x^6 f(u)du-xf\left(x\right)}{-6\left(x-6\right)}=\lim_{x\to6}\frac{-2f\left(x\right)-xf'\left(x\right)}{-6}=2010$$

例 45. 求极限 $\lim\limits_{t\to0}\frac{1+te^{\frac{1}{t}}}{te^{\frac{1}{t}}-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{t}}$.

解：$\lim\limits_{t\to0}\frac{1+te^{\frac{1}{t}}}{te^{\frac{1}{t}}-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{t}+e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{t}}-\frac{2}{\pi t}\arctan\frac{1}{t}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+e^x}{e^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{e^x-\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-\frac{4}{\pi\left(1+x^2\right)^2}}=1$$

例 46. 计算：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x e^t\cos tdt-x-\frac{x^2}{2}}{\left(x-\tan x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos tdt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos tdt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\cdot\dfrac{1}{2}x}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x-\tan x-x\tan^2 x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-1}{3x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x\sin x}{6x}=\frac{2}{3}$$

例 47. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$

解：$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\ln(1-2x)=-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)=-2x-2x^2+o(x^2)$$

由此得到：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)-[1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)]}{[2x-2x-2x^2+o(x^2)]x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}=\dfrac{1}{24}$

例 48. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导函数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)>0$．在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x))$（$x\neq 0$）作曲线的切线，此切线在 $x$ 轴上的截距记作 $\mu$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ f(\mu)}{\mu\ f(x)}$

解：过点 $(x, f(x))$ 的曲线 $y=f(x)$ 的切线方程为：$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$

注意到由于 $f'(0)=0$，$f''(0)>0$，所以 $x\neq 0$ 时 $f'(x)\neq 0$．因此切线在 $x$ 轴上的截距为：$\mu=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\mu=\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0$；

将 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处展成泰勒公式得：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2，\xi_1 在 0 与 x 之间；$$

将 $x=\mu$ 代入得：

$$f(\mu)=f(0)+f'(0)\mu+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\mu^2=\frac{1}{2}f''(\xi_2)\mu^2，\xi_2 在 0 与 \mu 之间；$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x\ f(\mu)}{\mu\ f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}f''(\xi_2)\mu^2}{\mu\cdot\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(\xi_2)}{f''(\xi_1)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mu}{x}=\frac{f''(0)}{f''(0)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\frac{f'(x)}{x}+f''(x)}=\frac{f''(0)}{f''(0)+f''(0)}=\frac{1}{2}$$

例 49. 设当$x\to 1$时, $1-\dfrac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$是$x-1$的等价无穷小, 则$m=$____

解：$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^m-mx+m-1}{x^{m+1}-x^m-x+1}=\frac{m-1}{2}=1$$

$\therefore m=3$

例 50. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2n}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{3n}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n\cdot n}}\right)$

解：$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{2n}}+\frac{1}{n+\sqrt{3n}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n\cdot n}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{3}{n}}}+\cdots+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}}}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^1\frac{2tdt}{1+t}=2\left[t-\ln\left(1+t\right)\right]\Big|_0^1=2-2\ln 2$$

例 51. 已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=C\neq 0$，试确定常数$n$和$C$的值。

解：法 1：$\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)]+[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)]=2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3),$$

又$\because \dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o\left(x^2\right),\therefore \arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，

$$\therefore\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-(2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3))}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^n}=C$$

可知：$n=3$，$C=-\dfrac{4}{3}$.

法 2：运用洛必达法则可知：

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{-4x^2}{1-x^4}}{nx^{n-1}}=-\dfrac{4}{n}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^{n-1}}=C$

故 $n=3$，$C=-\dfrac{4}{3}$.

例 52. 设 $f(x)=\sin x(1+\sin x)(2+\sin x)\ldots(2010+\sin x)$，求 $f'(0)$

解：设 $f(x)=\sin xg(x),g(x)=(1+\sin x)(2+\sin x)\ldots(2010+\sin x)$

则 $f'(x)=\sin xg'(x)+\cos xg(x),\therefore f'(0)=g(0)=2010!$

例 53. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n}=\int_0^1 e^x dx=e-1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\geq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1}=e-1$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=e-1$$

例 54. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x\geq1$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，

证明：（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leq1+\dfrac{\pi}{4}$。

证明：(1) $\because f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}>0\therefore f(x)$ 递增, $\therefore f(x)\geq f(1)=1,$

$$\therefore 0<f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}\leq\frac{1}{1+x^2}\therefore\int_1^x f'(x)dx\leq\int_1^x\frac{1}{1+x^2}dx$$

即 $f(x)-1\leq\arctan x-\dfrac{\pi}{4}, f(x)\leq1-\dfrac{\pi}{4}+\arctan x$

$$\therefore 1\leq f(x)\leq\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\pi}{4}+\arctan x\right)=1+\frac{\pi}{4}$$

f(x) 单调且有界，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

（2）由 $f\left(x\right)\le 1-\dfrac{\pi}{4}+\arctan x$ 得：

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)\le \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\pi}{4}+\arctan x\right)=1+\frac{\pi}{4}$$

例 55. 设函数 $y=y(x)$ 是由 $x^3+y^3-3axy=0$（$a>0$）确定，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}$。

解：由题意得：当 $x\to+\infty$ 时 $y\to-\infty$ 且

$$\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=x^3+y^3=3axy, x+y=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2},$$

$$\frac{y}{x}=-1+\frac{3ay}{x^2-xy+y^2}=-1+\frac{6ay}{x^2+y^2+\left(x-y\right)^2}\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=-1$$

例 56. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+\dfrac{1}{1}}+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{n+\dfrac{1}{2}}+...+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}{n+\dfrac{1}{n}}\right]$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}{n+\dfrac{1}{k}}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}{n}=\int_0^1\ln\left(1+x\right)dx=2\ln 2-1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+\frac{1}{k}}\ge\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n}$$

$$=\int_0^1\ln\left(1+x\right)dx=\ln 2-1\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+\frac{1}{k}}=2\ln 2-1$$

例 57. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

解：由麦克劳林公式得：$\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$

$$\tan(\tan x)=\tan x+\frac{(\tan x)^3}{3}+o\left(x^3\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+o\left(x^3\right)$$

$$=x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{(\sin x)^3}{3!}+o\left(x^3\right)=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3+o\left(x^3\right)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)}=2$$

例 58. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数。

解：$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}\right)-\ln n}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\ldots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}}=e^{\frac{1+2+\ldots+n}{n}}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

例 59. 设数列$\{x_n\}$满足：$n\sin\frac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\frac{1}{n+1}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=$________。

STOLZ(施托尔茨定理)：

设$\{y_n\}$严格单增，且$y_n\to+\infty$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a(-\infty\le a\le+\infty)$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$

推论：

(1）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}{n-(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在($x_n$>0)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

由（1）可证$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n$

(3）设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$存在($x_n$>0)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\dfrac{x_{n-2}}{x_{n-3}}\cdots\dfrac{x_1}{1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$

证明 显然，$\because n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}\therefore x_n\to1$；

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}=1$$

例 60. 设$x_0>0$，$x=\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}$（$n=1,2,3,\ldots$）. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求之.

分析：证明数列极限存在的方法：①夹逼定理②单调有界定理③级数敛散法：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在④级数收敛的必要条件：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。给定数列$\left\{a_n\right\}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在的充要条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)$收敛，所以，判断数列的敛散性可以转化为判断级数的敛散性。下面对各种解法给出示例。

证明：方法一（单调有界定理）. 由题意得$x_n>0$，对于一切的$n$恒有

$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}>1$，$x_n=2-\dfrac{2}{2+x_{n-1}}<2$，因此知数列$\{x_n\}$有界；又

$$x_{n+1}-x_n=(2-\frac{2}{2+x_n})-(2-\frac{2}{2+x_{n-1}})$$

$$=2(\frac{1}{2+x_{n-1}}-\frac{1}{2+x_n})=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)}$$

$$x_n-x_{n-1}=\frac{2(x_{n-1}-x_{n-2})}{(2+x_{n-2})(2+x_{n-1})},\ldots,\quad x_2-x_1=\frac{2(x_1-x_0)}{(2+x_0)(2+x_1)}$$

于是可知$x_{n+1}-x_n$与$x_1-x_0$同号，故当$x_1>x_0$时数列$\{x_n\}$单调递增；当$x_1<x_0$时数

列$\left\{x_n\right\}$单调递减. 即数列$\left\{x_n\right\}$为单调数列，从而数列$\left\{x_n\right\}$必有极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}=\dfrac{2(1+A)}{2+A}$，解之得$A=\sqrt{2}$，

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

方法二（级数敛散法）由方法一得$1<x_n<2$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2+x_n}=\frac{2-x_{n-1}^2}{\left(2+x_{n-1}\right)\left(3+2x_{n-1}\right)}$$

$$x_n-x_{n-1}=\frac{2-x_{n-1}^2}{2+x_{n-1}},\therefore\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right|=\frac{1}{3+2x_{n-1}}<\frac{1}{5}<1$$

由正项级数的比值判别法得：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$绝对收敛，

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$收敛，以下同方法一。

方法三（级数收敛的必要条件）

$$\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}=\frac{\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}-\sqrt{2}}{\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\square\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}=\left(3-2\sqrt{2}\right)\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}$$

由正项级数的比值判别法得：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}$绝对收敛

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}=0$即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

例 61. 设$f_n\left(x\right)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+...+\left(-1\right)^{n-1}C_n^n\cos^n x$，求证：

（1）对于任意自然数 n，方程$f_n\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内仅有一解；

（2）设$x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$满足$f_n\left(x_n\right)=\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$。

证明：（1）$f_n\left(x\right)=1-\left(1-\cos x\right)^n$, $f_n\left(x\right)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续，

$f_n\left(0\right)=1, f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$根据介值定理得$\exists x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$使得$f_n\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$。

由 $f_n'(x)=-n\sin x(1-\cos x)^{n-1}<0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 得 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递减，故根 $x_n$ 唯一。

（2）$\because f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{e}>\frac{1}{2}=f_n(x_n)=\frac{1}{2}$$

故 $\exists N>0$ 当 n>N 时 $f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)>f_n(x_n)$，由 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递减得

$\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\arccos\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$

例 62. 设函数 f(x) 可导，且 f(0)=0, $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f\left(x^n-t^n\right)dt$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$。

解：令 $u=x^n-t^n$ 则 $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f\left(x^n-t^n\right)dt=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)du$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)du}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^n\right)x^{n-1}}{2nx^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^n\right)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^n\right)-f(0)}{x^n}=\frac{f'(0)}{2n}$$

例 63. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln xdx}=e^{-1}$

例 64. 设函数 f(x) 在 (-L, L) 上连续，在 x=0 处可导且 $f'(0)\neq0$；

（1）求证：对于任意给定的 0<x<L，存在 $0<\theta<1$ 使得 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$；

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta$。

（1）证明：设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt$，则 F(0)=0, F(x) 在 [0, x] 上可微，由拉格朗日中值定理得 $F(x)-F(0)=F'(\theta x)x, 0<\theta<1$ 即

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$$

（2）解：由（1）得 $\dfrac{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt}{2x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta$

令 $x\to 0^+$ 由 f(0) 存在且 $f'(0)\neq 0$ 得上式的：

左边= $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{4x}=\dfrac{1}{2}f'(0)$

右边= $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta=\dfrac{1}{2}f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$

例 65. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\bullet\dfrac{\ln\left(x+e^x\right)}{x}\right]$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\bullet\dfrac{x+\ln\left(\dfrac{x}{e^x}+1\right)}{x}\right]$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+t+t^2+t^3+t^4\right)^{\frac{1}{4}}-\left(1+t+t^2+t^3\right)^{\frac{1}{3}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(t+t^2+t^3+t^4\right)-\frac{1}{3}\left(t+t^2+t^3\right)}{t}=-\frac{1}{12}$$

例 66. 求函数 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域。

解：要求 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域，只需求出函数的最大值与最小值即可．注意到函数 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 为偶函数，故只需考虑 $x\geq 0$ 的情况．为计算方便，令 $t=x^2$，得到 $g(t)=e^{-t}\sin t$，$t>0$，显然，$g(t)$ 与 $f(x)$ 有相同的值域．求 $g(t)$ 的驻点：$g'(t)=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

令 $g'(t)=0$，得到驻点 $t_k=\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，其对应的函数值为

$$g(t_k)=e^{-(\frac{\pi}{4}+k\pi)}\sin(\frac{\pi}{4}+k\pi)=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-(\frac{\pi}{4}+k\pi)}$$

显然，当 $k=2m(m=0,1,2,\cdots)$ 时，$g(t_{2m})>0$，其中最大值为 $g(t_0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$；

当 $k=2m+1(m=0,1,2,\cdots)$ 时，$g(t_{2m})<0$，其中最大值为 $g(t_1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$.

于是得到函数 $g(t)$ 的值域，亦即函数 $f(x)$ 的值域为：$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}},\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$）.

例 67. 若 $f(x)\in C[a,b]$ 且对任意 $x\in[a,b]$ 存在相应的 $y\in[a,b]$ 使得 $\left|f(y)\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|f(x)\right|$，证明：至少存在一点 $x_0$ 使 $f(x_0)=0$。

证明：假设$\forall x\in[a,b]$有$f(x)\neq 0$，则$f(x)>0$或$f(x)<0$仅取其一。不妨设$f(x)>0,\forall x\in[a,b]$，由 f(x) 在$[a,b]$上连续得 f(x) 有最小值，记$f(x_0)=\min f(x)$，由题意得$\exists\xi\in[a,b]$使得

$f(\xi)=|f(\xi)|\leq\frac{1}{2}|f(x_0)|<f(x_0)$而这与$f(x_0)$是最小值矛盾。

## 1.3.练习题

1.求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^n$。

2.求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1+2}{n^3}+\dots+\frac{1+2+\dots+n}{n^3}\right)$。

3.求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\dots\cos\frac{x}{2^n}$。

4.求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$，其中 a>0,b>0。

5.求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)(x>0)$。

6.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$。

7.设$a>0,x_1>0$，定义$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right),n=1,2,\dots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

8. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{e^{2x^2}-2e^{x^2}+1}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，在$x=0$处连续，则$a=$_____

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$______________

10. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]$。

11. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2^x-1}\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]=4$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$__________

12. 已知曲线$y=f(x)$在点$(1,0)$处的切线在$y$轴上的截距为$-1$,

求$\lim\limits_{n\to\infty}[1+f(1+\dfrac{1}{n})]^n$

13. 若当$x\to0$时，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f''(t)dt$的导数与$x^2$为等价无穷小，求$f''(0)$。

14. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$

15. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

16. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1{}^x+a_2{}^x+\ldots+a_n{}^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}},a_i>0,i=1,2,\ldots$。

17. 设函数 f(x)在点 a 处可微，且$f(a)\neq0$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$。

18. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\cdot\sqrt{n^2-(n-1)^2}]$。

19. 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+c(1-e^{-x^2})}=2$，则$a=$__________。

20. 设要使函数$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，则$a=$________ .

21. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{e^{2x}-1}=3$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$__________________。

22. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\ldots+\dfrac{\sin\pi}{n+1}\right]$

23. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

24.

# 第二章　微分学

## 2.1.基本概念与内容提要

1. 导数的概念：$f^{'}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2. 平面曲线的切线和法线方程

3. 一元求导法则

（1）. 参数方程的导数：$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$所确定的函数的一阶、二阶导数分别是：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{`}(t)}{x^{`}(t)},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^{`}(t)y^{"}(t)-y^{`}(t)x^{"}(t)}{\left[x^{`}(t)\right]^3}$$

（2）. 求隐函数的导数的方法：①方程两边同时对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，求导时 $y^{`}$ 别忘了；②公式法：由 $F(x,y)=0$ 得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ ③利用微分形式不变性，对方程两边同时取微分，然后解出 $\frac{dy}{dx}$。

（3）. 反函数求导：$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y^{`}},\frac{d^2x}{dy^2}=\left(\frac{1}{y^{`}}\right)^{`}_x\bullet\frac{dx}{dy}=-\frac{y^{"}}{\left(y^{`}\right)^3},$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=-\left(\frac{y^{`}}{y^{"}}\right)^{`}_x\bullet\frac{dx}{dy}=\frac{3\left(y^{"}\right)^2-y^{`}\bullet y^{'''}}{\left(y^{`}\right)^5}$$

（4）. 高阶导数的求法：①求一元函数的高阶导数：利用直接法、函数的麦克劳林展开

式或递推公式，$\left(uv\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}\bullet v^{(k)}$ 。
展开成幂级数（两种方法、两种类型）之后直接求导。
②求分式有理函数的高阶导数：先将有理假分式通过多项式除法化为整式与有理真分式之和，再将有理真分式写成部分分式之和，最后仿$\left(x^m\right)^{(n)}$的表达式写出给定的有理函数的 n 阶导数；③求由三角函数通过四则运算构成函数的高阶导数：利用三角函数中积化和差与倍角公式把函数的次数逐次降低，最后变成$\sin kx,\cos kx$之和或之差的形式，再用公式$\sin^{(n)}kx=k^n\sin\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

$\cos^{(n)}kx=k^n\cos\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$，将给定函数的 n 阶导数写出来。

几个常见高阶导数公式：$\sin^{(n)}kx=k^n\sin\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

$$\cos^{(n)}kx=k^n\cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right),\left(\frac{1}{x}\right)^{`}=\left(-1\right)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$\left(\ln x\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(n-1\right)!}{x^n}$$

$$\left(x^n\right)^{(k)}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}x^{n-k}\left(1\le k\le n\right),\left(x^n\right)^{(k)}=0\left(k>n\right)$$

4. 必须掌握的三种常见变限函数求导是：

⑴ $y=\int_{g(x)}^{h(x)}f\left(t\right)dt$，则 $y`=f\left[h\left(x\right)\right]h^{'}\left(x\right)-f\left[g\left(x\right)\right]g`\left(x\right)$；

⑵ $y=\int_0^x f\left(x\right)g\left(t\right)dt$，则 $y=f\left(x\right)\int_0^x g\left(t\right)dt$，
$y`=f`\left(x\right)\int_0^x g\left(t\right)dt+f\left(x\right)g\left(x\right)$；

⑶① $y=\int_0^x f\left(xt\right)dt$，方法是变量代换，令$u=xt$,则$t=\dfrac{u}{x},dt=\dfrac{1}{x}du$，

$$y=\frac{\int_0^{x^2}f\left(u\right)du}{x},y`=\frac{2x^2f\left(x^2\right)-\int_0^{x^2}f\left(u\right)du}{x^2};$$

② $y=\int_0^x f\left(x-t\right)dt$，方法也是变量代换，令 $u=x-t$, 则 $t=x-u,dt=-du$，$y=\int_0^x f\left(u\right)du,y`=f\left(x\right)$

5. 利用导数判断函数单调性：导函数大于 0 原函数递增，导函数小于 0 原函数递减。
6. 极值的判别方法
（1） 极值的定义

例.设 f(x)在 x=0 的某邻域内连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 x=0 处 f(x)（　　）

A．不可导　　B．可导，且 $f'(0)\neq 0$　　C．取得极大值　　D．取得极小值

解：由极限的存在性得 f(0)=0，又由极限的保号性得：$x\in \overset{0}{U}(0),\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$，$\therefore f(x)>0=f(0)$，f(0)是极小值。

（2） 利用导数判断单调性后得出极值点：导函数在极值点的左右符号不同

（3） 用高阶导数判断极值：设 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，若 $f''(x_0)>0$ 则 $f(x_0)$ 为极小值；若 $f''(x_0)<0$ 则 $f(x_0)$ 为极大值

7. 函数的最值：闭区间内最值可能出现在极值点、断点

8. 函数图象的凹凸性与二阶导数有关：正凹负凸；凹凸性改变的点（二阶导数改变符号的点）即为拐点。

补充：不动点为 $f(x)=x$ 点；零点为 $f(x)=0$ 的点；驻点为 $f'(x)=0$ 的点；极值点为 $f'(x)$ 改变符号的点；拐点为 $f''(x)$ 改变符号的点。

6. 多元函数微分学及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$　　$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}$dz具有形式不变性。

偏导数的几何意义：$f_x'(x_0,y_0)$和$f_y'(x_0,y_0)$分别表示曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$在点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$处的切线对$x$轴和$y$轴的斜率。函数的连续性和可微、可导必须会用定义判断。

连续的混合高阶偏导数与求导顺序无关。

二元函数的偏导数存在是连续的既不充分又不必要条件。

二元函数存在两个偏导数是可微的必要不充分条件。

偏导数连续是函数可微的充分不必要条件。函数连续是可微的必要不充分条件。

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：$z=f[u(t),v(t)]$　　$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$　　$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，　$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$　　$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$　$,\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$　$,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

7. 多元函数微分学在几何上的应用：

1). 空间曲线$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$,

曲线在点$M$处的切向量为$\vec{\mathrm{T}}=\{\phi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0)\}$，同时也是法平面的法向量，

在点$M$处的法平面方程：$\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

2).空间曲线y=y$\left(x\right),z=z\left(x\right)$在点$\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$处的切向量$\vec{\mathrm{T}}=\left\{1,\ \mathrm{y}'\left(x_0\right),z'\left(x_0\right)\right\}$, 切线方程为

$\dfrac{\left(x-x_0\right)}{1}=\dfrac{\left(y-y_0\right)}{\mathrm{y}'\left(x_0\right)}=\dfrac{\left(z-z_2\right)}{z'\left(x_0\right)}$,法平面方程为$\left(x-x_0\right)+\mathrm{y}'\left(x_0\right)\left(y-y_0\right)+\mathrm{z}'\left(x_0\right)\left(z-z_2\right)=0$

3). 若空间曲线方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,过该曲线的曲面束方程为$F(x,y,z)+\lambda G(x,y,z)=0$

则切向量$\vec{T}=\left(F_x',F_y',F_z'\right)\times\left(G_x',G_y',G_z'\right)=\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\}$,

切线方程为$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}}$,

法平面方程：$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}(z-z_0)=0$

（还有一种方法自己到书上去查）

4). 曲面z=f$\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,\ y_0\right)$处的法向量$\vec{n}=\left\{f_x'\left(x_0,y_0\right),f_y'\left(x_0,y_0\right),-1\right\}$,

切平面方程$z-z_0=f_x'\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f_y'\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)$

法线方程$\dfrac{x-x_0}{f_x'\left(x_0,y_0\right)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'\left(x_0,y_0\right)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

5). 曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$处的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向$l$的方向导数为：$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi$，

其中$\phi$为$x$轴到方向$l$的转角。方向导数与方向有关，$\frac{\partial f}{\partial(-l)}=-\frac{\partial f}{\partial l}$

对u=f$(x,y,z)$，$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为$l$的方向角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$，它与方向导数的关系是：

$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\,f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\phi\cdot\vec{i}+\sin\phi\cdot\vec{j}$为$l$方向上的单位向量。

$\frac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad}f(x,y)$在$l$上的投影。沿梯度方向函数的方向导数最大，函数变化最快。

8. 多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C,\Delta=B^2-AC$

则：当$\Delta<0$时，$\begin{cases}A<0, f(x_0,y_0)\text{为极大值}\\ A>0, f(x_0,y_0)\text{为极小值}\end{cases}$；当$\Delta>0$时，无极值；当$\Delta=0$时，不确定

拉格朗日乘法求极值：

函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下极值的求法：令$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

由$\begin{cases}F_x^{'}(x,y)=f_x^{'}(x,y)+\lambda\varphi_x^{'}(x,y)=0\\ F_y^{'}(x,y)=f_y^{'}(x,y)+\lambda\varphi_y^{'}(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$，求解的**驻点**$(x_0,y_0)$就可能是极值点，三元函数同理。

9.高数中处理中值定理的四种思维定势

1）在题设条件下若函数 f(x)二阶或二阶以上可导，“不管三七二十一”，把 f(x)在指定点展开成泰勒公式再说。

2）在题设条件或欲证结论中有定积分的表达式时，则先用积分中值定理对该积分式处理一下再说。

3）在题设条件下若函数 f(x)在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可导，且 f(a)=0 或 f(b)=0 或 f(a)=f(b)=0，则先用拉格朗日中值定理或洛尔定理处理一下再说。

如：(1) 若 f(a)=0，则 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，或

$f(x)=\int_a^x f`(t)dt-f(a)=\int_a^x f`(t)dt$

⑵若 f(a)=f(b)=0 可得①$\exists\xi\in(a,b), f^{'}(\xi)=0$

② $f(x)=f(x)-f(a)=f^{'}(\xi_1)(x-a), f(x)=f(x)-f(b)=f^{'}(\xi_2)(x-b)$

4）对定限或变限函数，若被积函数或其主要部分为复合函数，则先做变量代换使之成为简单形式再说。

例：设函数 f(x)在[a, b]上有连续的导数，且$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f`(x)\right|$，求证：

$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\le M$。

证明：由思维 3，$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)$,

$f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$，$\therefore |f(x)|\le M(x-a),|f(x)|\le M(b-x)$

$\therefore \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx=\frac{(b-a)^2}{4}M$

$\therefore \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\le M$ 。

10.零点定理证明：

1）. 一般用连续函数介值定理证。证明（或由已知）f(x) 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\,f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$。

2). 证明 f(x) 至多几个零点：设函数 f(x) 有 k 个零点，则 $f'(x)$ 有 k-1 个零点，$f''(x)$ 有 k-2 个零点，……，$f^{(k-1)}(x)$ 有 1 个零点，$f^{(k)}(x)$ 没有零点。

注：函数只有连续性，考虑用零点定理、介值定理。函数一阶可导考虑用罗尔定理、中值定理。函数二阶或二阶以上可导，考虑用泰勒公式或对低一阶用中值定理或罗尔定理。

11. 中值定理证明：

第一积分中值定理：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$

第二积分中值定理：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(\xi)\int_a^b f(x)dx$ 又叫广义积分中值定理。

1）. 欲证结论：至少存在一点 $\xi$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题。

思路一：验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，由该定理即可得证；

思路二：验证 $\xi$ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点，用费马定理即可得证。

2）. 欲证结论：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=k$ 及其代数式的命题。

思路提示：①作辅助函数 $F(x)$；②验证 $F(x)$ 满足罗尔定理条件；③由定理的结论即可得证。

构造辅助函数的方法：（1）原函数法：

①将欲证结论中的 $\xi$ 换成 x；②通过恒等变形将结论化为易消除导数符号的形式（或称之为易积分形式）；③用观察法或积分法求出原函数（即不含导函数的式子），为简便积分常数取作 0；④移项使等式一边为 0，则另一边即为所求辅助函数。

（2）常数 k 值法：①令常数部分为 k；②恒等变形，使等式一端为 a 及 f(a) 构成的代数式，另一端为 b 及 f(b) 构成的代数式；③分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式，若是只要把端点 a 改成 x，相应的函数值 f(a) 改成 f(x)，则换变量后的端点表达式就是所求辅助函数 F(x)。

3）. 欲证结论：至少存在一点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 且 $\xi\ne\eta$ 满足某种关系式的命题。

思路：**使用两次拉格朗日中值定理或者柯西中值定理，或者一次拉格朗日中值定理、一次柯西中值定理，然后再将它们做某种运算。**

4）. 用拉格朗日中值定理求极限：关键是将欲求的极限写成中值定理的形式。

例：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$。

解：由拉格朗日中值定理得$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\xi}\left(\tan x-\sin x\right)$，其中$\xi$在$\sin x$与$\tan x$之间，当$x\to 0$时$\xi\to 0,e^{\xi}\to 1$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}\left(\tan x-\sin x\right)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sec^2 x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)=3$$

5）.用积分中值定理求极限

例 1.求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}dx$。

解：$\exists\xi\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$使得$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}dx=\dfrac{\xi^n}{2\left(1+\xi\right)}$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi^n}{2\left(1+\xi\right)}=0$

例 2.设$D_r:x^2+y^2\le r^2$，则$\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}e^{-x^2-y^2}\cos\left(x+y\right)dxdy=$____________.

解：$\exists\left(\xi,\eta\right)\in D_r$使得$\iint\limits_{D_r}e^{-x^2-y^2}\cos\left(x+y\right)dxdy=\pi r^2e^{-\xi^2-\eta^2}\cos\left(\xi+\eta\right)$，

当$r\to 0^+$时$\left(\xi,\eta\right)\to\left(0,0\right)$，

$$\therefore\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}e^{-x^2-y^2}\cos\left(x+y\right)dxdy=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}\pi e^{-\xi^2-\eta^2}\cos\left(\xi+\eta\right)=\pi$$

6）. 用泰勒公式求极限

7）. 泰勒公式的乘法和长除法：

例：将$\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{e^x}$展开到$x^3$项。

解：方法一：$\ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),e^{-x}=1-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$，

$$\therefore\frac{\ln\left(1+x\right)}{e^x}=e^{-x}\ln\left(1+x\right)=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]\bullet\left[1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]$$

$$=\left(x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3\right)+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

方法二：长除法$\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{e^x}=\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{1-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}=x-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)$。

练习：用长除法可得 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o\left(x^5\right)}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o\left(x^5\right)}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^5\right)$

8）．泰勒公式在微分有关证明题中的应用：泰勒公式是高等数学的一个重要内容，它在近似计算、极限运算、微积分证明、级数与广义积分的敛散性判断等方面有着广泛的应用。泰勒公式建立了函数及其导数之间的联系，使用时，**展开点通常选择在区间的端点、中点、极值点和已知点。**常考的一些题型有：①利用泰勒展开式求高阶导数②求极限③判断级数的敛散性④判断无穷小的阶数⑤利用展开式进行证明，常与连续函数的介值定理、最大值和最小值定理、费马定理等中值定理结合使用。

若函数 f(x)在含有 $x_0$ 的某个开区间(a,b)内存在 n+1 阶的导数，则当 x 在(a,b)内时，f(x)可以表示为

$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\dfrac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+R_n\left(x\right)$ 其 中 $R_n\left(x\right)=\dfrac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$ 叫做拉格朗日余项，这里 $\xi$ 是介于 x 与 $x_0$ 之间的某个值。或者 $R_n\left(x\right)=o\left[\left(x-x_0\right)^n\right]\left(x\to x_0\right)$ 叫做皮亚诺余项。在证明题中一般用带拉格朗日余项的泰勒公式。

9）.泰勒公式在微分问题中关于等式的证明

例1.　设函数 f(x)在[a,b]上有三阶连续导数，试证：存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得

$$f\left(b\right)=f\left(a\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-a\right)+\frac{1}{24}f'''\left(\xi\right)\left(b-a\right)^3$$

此题可用 k 值法构造辅助函数来解决。在此使用泰勒公式来证明。

思路分析：题目给的条件很简单，又是三阶（高阶）可导，具备泰勒公式的条件，关键是怎样选择合适的 $x_0$ 点。观察到结论中出现了 $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，不妨取 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，而 a,b 是两个特殊点，也应满足泰勒公式。

证明：由条件得：f(X)在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}\in\left(a,b\right)$ 处的泰勒公式为

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''\left(\xi\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3$$

这里 $\xi$ 介于 x 与 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 之间。

当 x=a，x=b 时分别有

$$f\left(a\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''\left(\xi_1\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \qquad (1)$$

$$f\left(b\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''\left(\xi_2\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \qquad (2)$$

其中，$\xi_1$介于 a 与$\frac{a+b}{2}$之间，$\xi_2$介于$\frac{a+b}{2}$与 b 之间。

式（2）减去（1）得

$$f(b)-f(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{48}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right](b-a)^3$$

因为 $f'''(x)$ 在 [a,b] 上连续，由介值定理得：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $2f'''(\xi)=f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)$

所以 $f(b)-f(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$

在证明微分中的等式问题时，其条件都是高阶（二阶或二阶以上）可导或可微，其关键是要根据已知条件，选择恰当的$x_0$，然后使用泰勒公式，就可得到所要的结论。

10） 泰勒公式在微分问题中关于不等式的证明

例2. 设函数 f(x)在[0,1]上二次可微，且 f(0)=f(1)=0，$\min_{0\le x\le 1}f(x)=-1$，求证：存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)\ge 8$。

思路分析：f(x)在[0,1]上二次可微且有最小值$-1\ne 0$，所以在(0,1)内一定有极值点，该点的导数为 0。又高阶可导，想到泰勒公式，要证的结论中无一阶导数，故选最小值点为$x_0$。

证明：由题意，不妨设$x_0\in(0,1)$为 f(x)在[0,1]上的最小值点，则 $f(x_0)=-1, f'(x_0)=0$。f(x)在$x_0$处的泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

即 $f(x)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，这里$\xi$ 介于 x 与$x_0$之间。

分别令 x=0,1 得：$f(0)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2, f(1)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$

其中$0<\xi_1<x_0<\xi_2<1$，由 f(0)=f(1)=0 得 $f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}, f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$

所以，当$x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时 $f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}\ge 8$，当$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时 $f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}\ge 8$

综上所述，存在一点$\xi\in(0,1)$使得 $f''(\xi)\ge 8$。

另解：由题意得 $f''(x)$ 在 [0,1] 上连续，$\therefore$ 由介值定理得 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f''(\xi)\ge\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$，$\therefore f''(\xi)\ge\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\ge\frac{2}{x_0(1-x_0)}\ge 8$

在证明微分问题的不等式问题时，其条件只要是高阶（二阶或二阶以上）可导或可微，利用泰勒公式处理问题时，其关键是要根据已知条件，选择恰当的$x_0$，将泰勒公式进行适当的放大或缩小，就可以接近目标，使问题得以解决。

（11）.泰勒公式在微分问题中其他问题的证明

例 3.设函数 f(x)在 R 上三阶可导，且 $f^{(3)}(x)$ 和 f(x)有界，求证：$f'(x), f''(x)$ 也有界。

思路分析：该题条件是函数 f(x) 高阶（三阶）可导，应能想到利用泰勒公式求解。其关键是如何选择合适的 $x_0$ 点，并要选择在某处将函数展开，并恰好约掉多余项，利用 $f^{(3)}(x)$ 和 f(x)有界的条件，从而得到结论。注意到 x+1,x-1 与 x 正好相差 1 和-1，不妨取 $x_0 = x$,且 x 取 $x+1, x-1$时，利用泰勒公式，约掉其中一个未知量，即可得到另一个未知量的结论。

证明：根据题目条件，f(x)在 $x_0$ 处的泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi)(x-x_0)^3$$

这里 $\xi$ 介于 x 与 $x_0$ 之间。分别取 $x_0 = x$,且 x 取 $x+1, x-1$有：

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(\xi_1), \\ f(x-1) &= f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(\xi_2), \end{aligned} \quad \text{其中 } x-1 < \xi_2 < x < \xi_1 < x+1$$

两式相加消去 $f'(x)$得

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}\left[ f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1) \right]$$

两式相减消去 $f''(x)$得

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[ f(x+1) - f(x-1) \right] - \frac{1}{12}\left[ f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1) \right]$$

由 $f^{(3)}(x)$ 和 f(x)有界，可知 $f'(x), f''(x)$ 也有界。

这类问题的证明，使用泰勒公式时有一定的技巧性，要多注意归纳、总结，才能灵活使用泰勒公式解决问题。

（12）利用泰勒展开式判断级数的敛散性：

例：判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性。

解：$\because \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \therefore \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$，三个级数都收敛，故原级数也收敛。

在判断级数的敛散性时，可以利用泰勒公式展开，很容易判断一般项趋于 0 的速度，在级数敛散性的题目中用泰勒公式判断应用很广且是一种有效的方法。

12.中值定理的常用方法总结：

1）.所证式仅与ξ相关

**①观察法与凑方法**

例 1 :设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=f'(0)=0$

试证至少存在一点$\zeta\in(a,b)$使得$f''(\zeta)=\dfrac{2f'(\zeta)}{1-\zeta}$.

分析：把要证的式子中的 $\zeta$ 换成 $x$，整理得$f''(x)-xf''(x)-2f'(x)=0\cdots(1)$

由这个式可知要构造的函数中必含有$f'(x)$，从$xf''(x)$ 找突破口

因为$[xf'(x)]'=xf''(x)+f'(x)$，那么把(1)式变一下：

$f''(x)-f'(x)-[xf''(x)+f'(x)]=0\Rightarrow f''(x)-f'(x)-[xf'(x)]'=0$

这时要构造的函数就看出来了$F(x)=(1-x)f'(x)-f(x)$

**②原函数法**

例 2 :设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$ 内可导，$f(a)=f(b)=0$，又$g(x)$在$[a,b]$上连续

求证：$\exists\zeta\in(a,b)$使得$f'(\zeta)=g(\zeta)f(\zeta)$.

分析：这时不论观察还是凑都不容易找出要构造的函数，于是换一种方法

现在把与$f$ 有关的放一边，与$g$ 有关的放另一边，同样把 $\zeta$ 换成 $x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=g(x)\overset{\text{两边积分}}{\Rightarrow}\ln f(x)=\int g(x)dx+\ln C\Rightarrow f(x)=Ce^{\int g(x)dx}$$

$\Rightarrow f(x)e^{-\int g(x)dx}=C$ 现在设$C=0$，于是要构造的函数就很明显了

$F(x)=f(x)e^{-\int g(x)dx}$

**③一阶线性齐次方程解法的变形法**

对于所证式为$f'+pf=0$型，（其中$p$为常数或$x$ 的函数）

可引进函数$u(x)=e^{\int pdx}$，则可构造新函数$F(x)=f\cdot e^{\int pdx}$

例：设$f(x)$在$[a,b]$有连续的导数，又存在$c\in(a,b)$，使得$f'(c)=0$

求证：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

分析：把所证式整理一下可得：$f'(\xi)-\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}=0$

$\Rightarrow[f(\xi)-f(a)]'-\dfrac{1}{b-a}[f(\xi)-f(a)]=0$，这样就变成了$f'+pf=0$型

引进函数$u(x)=e^{\int-\frac{1}{b-a}dx}=e^{-\frac{x}{b-a}}$ （令C=0），于是就可以设$F(x)=e^{\frac{x}{b-a}}[f(x)-f(a)]$

注：此题在证明时会用到$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow f(b)=f(a)$ 这个结论

2）. 所证式中出现两端点

**①凑拉格朗日**

例 3 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导

证明:至少存在一点$\zeta\in(a,b)$使得$\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)$.

分析：很容易就找到要证的式子的特点，那么可以试一下，不妨设

$F(x)=xf(x)$,用拉格朗日定理验证一下

$$F'(\zeta)=f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$$

**②柯西定理**

例 4 设$0<x_1<x_2$，$f(x)$在$[x_1,x_2]$可导，证明在$(x_1,x_2)$至少存在一点$c$，使得

$$\frac{1}{e^{x_1}-e^{x_2}}\begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(c)-f'(c)$$

分析：先整理一下要证的式子$\dfrac{e^{x_1}f(x_2)-e^{x_2}f(x_1)}{e^{x_1}-e^{x_2}}=f(c)-f'(c)$

这题就没上面那道那么容易看出来了

发现$e^{x_1}f(x_2)-e^{x_2}f(x_1)$是交叉的，变换一下，分子分母同除一下$e^{x_1+x_2}$

$\dfrac{\dfrac{f(x_2)}{e^{x_2}}-\dfrac{f(x_1)}{e^{x_1}}}{\dfrac{1}{e^{x_2}}-\dfrac{1}{e^{x_1}}}$于是这个式子一下变得没有悬念了

用柯西定理设好两个函数就很容易证明了

**③k 值法**

仍是上题

分析：对于数四，如果对柯西定理掌握的不是很好上面那题该怎么办呢？（$k$ 值法）

第一步是要把含变量与常量的式子分写在等号两边

设$\dfrac{e^{x_1}f(x_2)-e^{x_2}f(x_1)}{e^{x_1}-e^{x_2}}=k$ 整理得$e^{-x_1}[f(x_1)-k]=e^{-x_2}[f(x_2)-k]$

很容易看出这是一个对称式，也是说互换$x_1x_2$还是一样的

那么进入第二步，设$F(x)=e^{-x}[f(x)-k]$，验证可知$F(x_1)=F(x_2)$

记得回带$k$，用罗尔定理证明即可。

以此题为例已经是规范的形式了，现在就看常量的这个式子

**④泰勒公式法**

老陈常说的一句话，管它是什么，先泰勒展开再说。当定理感觉都起不上作用时，泰勒法往往是可行的，而且对于有些题目，泰勒法反而会更简单。

3)、所证试同时出现ξ和η

**①两次中值定理**

例 5 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$ 内可导，$f(a)=f(b)=1$

试证存在$\zeta$，$\eta\in(0,1)$使得$e^{\eta-\zeta}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

分析：首先把$\zeta$与$\eta$分开，那么就有$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\zeta}$

一下子看不出来什么，那么可以先从左边的式子下手试一下

很容易看出$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=[e^{\eta}f(\eta)]'$，设$F(x)=e^{x}f(x)$

利用拉格朗日定理可得$F'(\eta)=\dfrac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}$再整理一下

$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$只要找到$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$与$e^{\zeta}$的关系就行了

这个更容易看出来了，令$G(x)=e^x$则再用拉格朗日定理就得到

$$G'(\zeta)=e^{\zeta}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$$

**②柯西定理（与之前所举例类似）**

有时遇到ξ和η同时出现的时候还需要多方考虑，可能会用到柯西定理与拉氏定理的结合使用，在习题里经常出现类似的题。

## 2.2.例题选讲

例 1.是否存在可微函数 f(x)使得$f\left[f\left(x\right)\right]=1+x^2+x^4-x^3-x^5$，若存在，请求出 f(x)的解析式；若不存在，请给出证明。

解：令$g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]-x=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5, g\left(-1\right)=6\neq 0$，

当$x\neq -1$时$g\left(x\right)=\dfrac{1-x^6}{1+x}$，由 g(x)=0 得 x=1(x=-1 舍去)，$\therefore x=1$是 g(x)=0 的唯一解。令 f(1)=t，则 g(1)=f(t)-1=0，$\therefore f\left(t\right)=1$，

则$g\left(t\right)=f\left(1\right)-t=0 \therefore t=1, f\left(1\right)=1 \because g`\left(x\right)=f`\left[f\left(x\right)\right]f`\left(x\right)-1$，

$\therefore g`\left(1\right)=\left[f`\left(1\right)\right]^2-1\geq -1$，另一方面$g`\left(x\right)=-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4$，

$g`\left(1\right)=-3$与$g`\left(1\right)\geq -1$矛盾，所以不存在满足题意的 f(x)。

例 2.设$f\left(x\right)\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$，且$f`\left(x\right)\neq 0$，

证明：$\exists\xi,\eta\in\left(a,b\right)$使得$\dfrac{f'\left(\xi\right)}{f'\left(\eta\right)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$。

证明：

例 3.设函数 f(x)在 R 上可微，且 f(0)=0，$\left|f`\left(x\right)\right|\leq p\left|f\left(x\right)\right|, 0<p<1$，

证明：$f\left(x\right)\equiv 0,x\in R$。

证明：由拉格朗日中值定理得 $f\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(0\right)=f^{'}\left(\xi_1\right)x,\xi_1$ 介于 0，x 之间，

$\therefore$当 $x\in\left[0,1\right]$时，$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f^{'}\left(\xi_1\right)\right|x\le\left|f^{'}\left(\xi_1\right)\right|\le p\left|f\left(\xi_1\right)\right|,\xi_1\in\left[0,x\right]$，

$\therefore\left|f\left(\xi_1\right)\right|\le p\left|f\left(\xi_2\right)\right|,\xi_2\in\left[0,\xi_1\right],\ldots,\therefore\left|f\left(x\right)\right|\le p^n\left|f\left(\xi_n\right)\right|$，

$\xi_n\in\left[0,\xi_{n-1}\right]\subset\left[0,\xi_{n-2}\right]\subset\ldots\subset\left[0,1\right],\because f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$上有界，又$0<p<1,\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0,\therefore\lim\limits_{n\to\infty}p^n\left|f\left(\xi_n\right)\right|=0,$

$\therefore f\left(x\right)\equiv 0,x\in\left[0,1\right],f\left(1\right)=0$

当 $x\in\left[1,2\right]$时，同上$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|=\left|f`\left(\eta_1\right)\right|\left(x-1\right)\le\left|f`\left(\eta_1\right)\right|$

$\therefore\left|f\left(x\right)\right|\le p\left|f\left(\eta_1\right)\right|\le p^2\left|f\left(\eta_2\right)\right|\le\ldots\le p^n\left|f\left(\eta_n\right)\right|,$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}p^n\left|f\left(\eta_n\right)\right|=0,\therefore f\left(x\right)\equiv 0,x\in\left[1,2\right]$

依次可得 $f\left(x\right)\equiv 0,x\in\left[0,+\infty\right)$

当 $x\in\left[-1,0\right]$时$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(x\right)-f\left(0\right)\right|=\left|f^{'}\left(\zeta_1\right)x\right|\le\left|f^{'}\left(\zeta_1\right)\right|$

$\therefore\left|f\left(x\right)\right|\le p\left|f\left(\zeta_1\right)\right|\le p^2\left|f\left(\zeta_2\right)\right|\le\ldots\le p^n\left|f\left(\zeta_n\right)\right|,$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}p^n\left|f\left(\zeta_n\right)\right|=0,\therefore f\left(x\right)\equiv 0,x\in\left[-1,0\right]$

同理，依次可得 $f\left(x\right)\equiv 0,x\in\left(-\infty,0\right]$，所以 $f\left(x\right)\equiv 0,x\in R$

例 4.设函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left|x\right|^{3n}}$，则 f(x)在 R 上的不可导点为____________。

解：当$\left|x\right|<1$时 $f\left(x\right)=1$，当$\left|x\right|=1$时 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$，

当$\left|x\right|>1$时 $f\left(x\right)=\left|x\right|^3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left|x\right|^{-3n}}=\left|x\right|^3$

$\therefore f\left(x\right)=\begin{cases}\left|x\right|^3,\text{当}\left|x\right|>1\text{时},\\1,\text{当}\left|x\right|\le 1\text{时},\end{cases}$，显然 f(x)的不可导点为 $x=\pm 1$

例 5.当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，求证：$\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$。

证明：令 $f\left(x\right)=\tan x\sin x-x^2$，

则 $f`\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x-2x\ge 2\sqrt{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\bullet\sin x}-2x=2\tan x-2x>0$

$\therefore f\left(x\right)$递增，$\therefore f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，即$\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$

例 6.求 $f\left(x\right)=\int_0^x\left[1+\dfrac{\left(x-t\right)}{1!}+\dfrac{\left(x-t\right)^2}{2!}+\ldots+\dfrac{\left(x-t\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\right]e^{nt}dt$ 的 n 阶导数。

解：设 $g_k\left(x\right)=\int_0^x\dfrac{\left(x-t\right)^k}{k!}e^{nt}dt$，则 $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}g_k\left(x\right)$，

$$\because g_k^{'}\left(x\right)=\int_0^x\frac{\left(x-t\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}e^{nt}dt=g_{k-1}\left(x\right)$$

$$\therefore g_k^{\left(k\right)}\left(x\right)=g_{k-1}^{\left(k-1\right)}\left(x\right)=\ldots=g_1^{'}\left(x\right)=g_0\left(x\right)=\int_0^x e^{nt}dt=\frac{e^{nx}-1}{n}$$

$g_k^{\left(k+1\right)}\left(x\right)=e^{nx}$，当 n>k 时 $g_k^{\left(n\right)}\left(x\right)=n^{n-k-1}\bullet e^{nx}$，由 $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}g_k\left(x\right)$得：

$$f^{\left(n\right)}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n-1}g_k^{n}\left(x\right)=e^{nx}\sum_{k=0}^{n-1}n^{n-k-1}=e^{nx}\left(n^{n-1}+n^{n-2}+\ldots+n+1\right)$$

例 7.设 f(x)在$\left[1,+\infty\right)$上由连续的二阶导数，$f\left(1\right)=0,f^{'}\left(1\right)=1$，且二元函数 $z=\left(x^2+y^2\right)f\left(x^2+y^2\right)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

求：（1）f(x)；（2）f(x) 在$\left[1,+\infty\right)$上的最大值。

解：（1）设$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则$z=r^2f\left(r^2\right)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2rf\left(r^2\right)\cdot\frac{x}{r}+r^2f^{'}\left(r^2\right)\cdot 2r\cdot\frac{x}{r}=2xf\left(r^2\right)+2xr^2f^{'}\left(r^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f\left(r^2\right)+\left(8x^2+2r^2\right)f^{'}\left(r^2\right)+4x^2r^2f^{''}\left(r^2\right)$$

$$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f\left(r^2\right)+\left(8y^2+2r^2\right)f^{'}\left(r^2\right)+4y^2r^2f^{''}\left(r^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4f\left(r^2\right)+12r^2f^{'}\left(r^2\right)+4r^4f^{''}\left(r^2\right)$$

$$\therefore f\left(r^2\right)+3r^2f^{'}\left(r^2\right)+r^4f^{''}\left(r^2\right)=0,$$

令$r^2=e^x$，则 $f\left(e^x\right)+3e^xf^{'}\left(e^x\right)+e^{2x}f^{''}\left(e^x\right)=0$

令 $g(x)=f(e^x)$，则 $g`(x)=e^x f'(e^x), g''(x)=e^x f'(e^x)+e^{2x} f''(e^x)$

$\therefore g''(x)+2g`(x)+g(x)=0$，解得 $g(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}$

$\therefore f(e^x)=g(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}, f(x)=\dfrac{c_1+c_2\ln x}{x}$

由 $f(1)=0, f'(1)=1$ 得 $c_1=0, c_2=1, \therefore f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

（2） $f`(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 1<x<e 时 $f`(x)>0$，当 x>e 时 $f`(x)<0$

$\therefore f(x)$ 在 $[1,e]$ 上递增，在 $[e,+\infty)$ 上递减，$\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(e)=\dfrac{1}{e}$。

例 8.设 x(t)是方程 $5x''+10x'+6x=0$ 的解，证明：函数 $f(t)=\dfrac{x^2(t)}{1+x^4(t)}(t\in R)$ 有最大值，并求出此最大值。

解：解原微分方程：特征根方程为 $5r^2+10r+6=0$，解得 $r=-1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}i$，

则 $x(t)=e^{-t}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{5}}{5}t+c_2\sin\dfrac{\sqrt{5}}{5}t\right)$，

又 $f(t)=\dfrac{x^2(t)}{1+x^4(t)}=\dfrac{1}{x^2(t)+\dfrac{1}{x^2(t)}}\le\dfrac{1}{2}$

对于 $\forall t\in R$，若 $x(t)\equiv 0$，则 $f(t)\equiv 0$，最大值为 0；

若 $x(t)\not\equiv 0$，则 $c_1, c_2$ 不全为 0，不妨设 $c_1>0$，取 $t_k=-2\sqrt{5}k\pi, k\in N$

则 $x(t_k)=e^{2\sqrt{5}k\pi}c_1$，当 $k\to+\infty$ 时，$t_k\to-\infty, x(t_k)\to+\infty$

又 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0<1, \lim\limits_{t\to-\infty}x(t)=+\infty>1$，

由连续函数的介值定理得：$\exists t_0\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $x(t_0)=1$，此时 $f(t_0)=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore x(t)\not\equiv 0$ 时，f(t)的最大值为 $\dfrac{1}{2}$。

综上，当 $x(t)\equiv 0$ 时最大值为 0，当 $x(t)\not\equiv 0$ 时最大值为 $\dfrac{1}{2}$。

例 9.设 $P(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^m\right)^n$，其中 m,n 是正整数，则 $P(1)=$____________。

解：$\left(1-x^m\right)^n=(1-x)^n\left(1+x+x^2+...+x^{m-1}\right)^n$

令 $u(x)=(1-x)^n,v(x)=\left(1+x+x^2+...+x^{m-1}\right)^n$，则 $P(x)=\frac{d^n}{dx^n}(uv)$

$\therefore P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$，当 k>0 时 $u^{(n-k)}=(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k-1)!}(1-x)^k$，

$u^{(n-k)}(1)=0,\therefore P(1)=C_n^0 u^{(n)}(1)v^{(0)}(1)=(-1)^n \cdot n! \cdot m^n$

例 10.设 $f(x)=\left(x^2-3x+2\right)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，求 $f^{(n)}(2)$

解：$f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，

令 $g(x)=(x-2)^n,h(x)=(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，则 $f(x)=g(x)h(x)$

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)$$

$$\therefore f^{(n)}(2)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(n-k)}(2)h^{(k)}(2)=C_n^0 g^{(n)}(2)h^{(0)}(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}n!$$

例 11.求一函数 f(x)，使其在任一有限区间上有界，且满足 $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$

解：令 x=0 得 f(0)=0，对原方程求导得：$f'(x)-\frac{1}{4}f'\left(\frac{x}{2}\right)=1-2x$

$$f''(x)-\frac{1}{8}f''\left(\frac{x}{2}\right)=-2,f^{(3)}(x)-\frac{1}{2^4}f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)=0,...$$

令 x=0 得 $f(0)=0,f'(0)=\frac{4}{3},f''(0)=-\frac{16}{7},f^{(3)}(0)=0,...,$

$$f^{(n)}(0)=0(n\geq 3)$$

$$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+...=\frac{4}{3}x-\frac{8}{7}x^2$$

例 12.设 f(x)在 R 上无穷阶可导，且满足（1）$\exists L>0$ 使得 $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq L,n\in N,x\in R$

（2） $f\left(\frac{1}{n}\right)=0, n\in N^*$，求证： $f(x)=0, x\in R$。

证明：记 $x_n=\frac{1}{n}, n\in N^*$，由题意得 $f(x), f`(x), f''(x),..., f^{(n)}(x)$ 在 x=0 处连续，$\therefore f(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，

$\because f(x_n)=f(x_{n+1})$，由罗尔定理得 $\exists y_n\in(x_{n+1}, x_n)$ 使 $f'(y_n)=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0, f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f'(y_n)=0$

$\because f'(y_n)=f'(y_{n+1})$，由罗尔定理得 $\exists z_n\in(y_{n+1}, y_n)$ 使 $f''(z_n)=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0, f''(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f''(z_n)=0$

同理，可得 $f^{(3)}(0)=0,..., f^{(n)}(0)=0,$

$\therefore f(0)=f`(0)=f''(0)=...=f^{(n)}(0)=0$

对 $\forall x\in R$ 有 $f(x)=f(0)+f`(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+...+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \xi$ 介于 0,x 之间，$\therefore f(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, |f(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right|\le\frac{L}{n!}|x|^n$

$\because$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}=e^{|x|}$收敛，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0, \therefore f(x)\equiv 0$

例 13.设 f(x)在[a,b]上二阶可导， $f'(a)=f'(b)=0$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$使得

$$\left|f''(\xi)\right|\ge 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

证明：将 f(x)在 x=a,x=b 处用泰勒公式展开得

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2, \xi_1$介于 x,a 之间，

$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2, \xi_2$介于 x,b 之间，

$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2$,

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2$

两式相减得 $f(b)-f(a)=\frac{1}{8}(b-a)^2\left[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right]$

设$\left|f''(\xi)\right|=\max\left\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\right\}$，则

$\left|f(b)-f(a)\right|=\frac{1}{8}(b-a)^2\left[\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\right]$

$\le\frac{1}{8}(b-a)^2\left[\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right]\le\frac{1}{4}(b-a)^2\left|f''(\xi)\right|$

$\therefore\left|f''(\xi)\right|\ge 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}$

例 14.已知函数 f(x)在[a,b]上二阶可导，对于[a,b]内每一点 x，有 $f(x)f''(x)\ge 0$，且在[a,b]的任一子区间上 f(x)不恒等于 0，求证：f(x)在[a,b]中至多有一个零点。

证明：方法一：设 f(x)在[a,b]上有两个零点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$，

令 $g(x)=f(x)f`(x)$，则 $g`(x)=\left[f`(x)\right]^2+f(x)f''(x)\ge 0$

$\therefore g(x)$单调递增，$\because g(x_1)=g(x_2)=0,\therefore\forall x\in[x_1,x_2]$有 $g(x)=0$，

$\therefore f(x)f`(x)=0$，积分得$\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2=C$，由 $f(x_1)=0$ 得 C=0，

$\therefore\forall x\in[x_1,x_2]$有 $f(x)=0$，与题意在[a,b]的任一子区间上 f(x)不恒等于 0 矛盾

方法二：设 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$是 f(x)在[a,b]上的两个相邻零点，即在$(x_1,x_2)$之间无其他零点，不妨设对 $\forall x\in(x_1,x_2)$有 f(x)>0，则 $f''(x)\ge 0$

$\therefore f`(x)$在$(x_1,x_2)$上递增，在 $x_1$ 的右邻域内 $f(x)>0=f(x_1)$,

$\therefore f'(x_1)=f'(x_1+)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>0$

在 $x_2$ 的左邻域内 $f(x)>0=f(x_2)$,

$\therefore f'(x_2)=f'(x_2-)=\lim\limits_{x\to x_2^-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}<0$

$\because x_1 < x_2, f`(x)$递增，$\therefore f'(x_1) < f'(x_2)$，与$f'(x_1) > 0 > f'(x_2)$矛盾。

例 15. $f(x)$在$[a,b]$上连续在$(a,b)$内可导且$f(a)=f(b)=0$

求证：存在$\xi\in(a,b)$使$\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

证明：令$F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，

$F(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导,且$F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理得$\exists\xi\in(a,b)$使$F'(\xi)=0$，即$\xi e^{\frac{\xi^2}{2}}f(\xi)+e^{\frac{\xi^2}{2}}f'(\xi)=0,$

$\because e^{\frac{\xi^2}{2}}\neq 0, \therefore \xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

例 16. 设一元函数$u=f(r)$当$0<r<+\infty$时有连续的二阶导数，且$f(1)=0, f'(1)=1$，又$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，试求$f(r)$的表达式。

$$\because u=f(r(x,y,z)),\ u_x=f'\cdot\frac{x}{r}\quad (f':f'(r))$$

$$u_{xx}=\frac{f'}{r}+x(\frac{f''}{r}-\frac{f'}{r^2})\cdot\frac{x}{r}=\frac{f'}{r}+\frac{x^2 f''}{r^2}-\frac{x^2 f'}{r^3}$$

对称地，$u_{yy}=\frac{f'}{r}+\frac{y^2 f''}{r^2}-\frac{y^2 f'}{r^3}, u_{zz}=\frac{f'}{r}+\frac{z^2 f''}{r^2}-\frac{z^2 f'}{r^3}$

$$\therefore u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f''+2\frac{f'}{r}=0$$

令$\mathrm{P}=f', \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}=-\frac{2}{r}, \ln P=\ln\frac{1}{r^2}+\ln C=\ln\frac{C}{r^2}$

$$P=f'(r)=\frac{C}{r^2}=\frac{1}{r^2}(\because f'(1)=1)\therefore f(r)=-\frac{1}{r}+C=-\frac{1}{r}(\because f(1)=0)$$

注 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，称为（三维）**拉普拉斯方程**，又名**调和方程**、**位势方程**，是一种偏微分方程。因为由法国数学家拉普拉斯首先提出而得名。在一般条件下解拉普拉斯方程超出考试范围。本题是讨论特殊条件下的拉普拉斯方程求解问题。

补充题 1：设$u=f(\sqrt{x^2+y^2})$,且$u$满足（二维）拉普拉斯方程,

求$u=f(x,y)$的表达式。

分析：函数$u=f(x,y)$是$x^2+y^2$的函数，可以考虑用极坐标进行转化，利用求微分方程的方法得到表达式。

解：令$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则$u=f(x,y)=f(r)$，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f`(r)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{y^2}{r^3}f`(r)$同理可得$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2}{r^3}f`(r)$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0,\frac{f''(r)}{f'(r)}=-\frac{1}{r}$$ 积分得

$$\ln f'(r)=-\ln r+\ln c_0, f'(r)=\frac{c_0}{r}, f(r)=c_0\ln r+c_1$$

$$u=\frac{1}{2}c_0\ln\left(x^2+y^2\right)+c_1=c_2\ln\left(x^2+y^2\right)+c_1$$

补充题 2：$u=f(x,y)$，试求出（二维）拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

在极坐标系下的表达式。

例 17. 设$u=f(x,y,z)$，$f$是可微函数，若$\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}$，证明$u$仅为 $r$ 的函数，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

利用球坐标变换：设$x=r\sin\phi\cos\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\operatorname{cosn}\phi$

以下只需证明$\frac{\partial f}{\partial\phi}=\frac{\partial f}{\partial\theta}=0$即可。

$$\frac{\partial f}{\partial\phi}=f'_x r\cos\phi\cos\theta+f'_y r\cos\phi\sin\theta-f'_z r\operatorname{sins}\phi$$

令$\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}=t$，则$\frac{\partial f}{\partial\phi}=tr(x\cos\phi\cos\theta+y\cos\phi\sin\theta-zr\sin\phi)$

$$=tr^2(\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta+\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta-\cos\phi\sin\phi)=0$$

类似可证$\frac{\partial f}{\partial\theta}=0$。

例 18. 设函数$u(x, y)$的所有二阶偏导数都连续，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$且$u(x, 2x)=x$，$u'_1(x, 2x)=x^2$，求$u''_{11}(x, 2x)$.

解：$u(x,2x)=x$两边对$x$求导，得到：$u'_1(x,2x)+2u'_2(x,2x)=1$，代入 $u'_1(x,2x)=x^2$求得：

$u'_2(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$；

$u'_1(x,2x)=x^2$两边对$x$求导，得到：$u''_{11}(x,2x)+2u''_{12}(x,2x)=2x$；

$u'_2(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$两边对$x$求导，得到 $u''_{21}(x,2x)+2u''_{22}(x,2x)=-x$.

以上两式与$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$联立，又二阶导数连续，所以$u''_{12}=u''_{21}$，故 $u''_{11}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$

例 19. 设变换$\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$把方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial y}=0$，求$a$.

解：计算一、二阶偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{a}{2\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{a}{\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=(1-\frac{a^2}{4})\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2-a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

于是有 $\begin{cases}1-\frac{a^2}{4}=0\\ 2-a\neq 0\end{cases}$，所以 $a=-2$.

例 20. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 点处的 100 阶导数值.

解：方法 1：利用莱布尼兹公式

$$f^{(100)}(x)=x^2[\ln(1+x)]^{(100)}+100[\ln(1+x)]^{(99)}\cdot(2x)+\frac{100\times 99}{2}[\ln(1+x)]^{(98)}\cdot 2,$$

而 $[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}$， $[\ln(1+x)]''=-\frac{1}{(1+x)^2}$， $[\ln(1+x)]'''=\frac{2!}{(1+x)^3}$，

$[\ln(1+x)]^{(4)}=-\frac{3!}{(1+x)^4},\cdots$，由归纳可得：$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$，故

$[\ln(1+x)]^{(98)}=-\frac{97!}{(1+x)^{98}}$；所以 $f^{(100)}(0)=-990\times 97!$.

方法 2：利用泰勒公式 $f(x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\cdots-\frac{x^{100}}{98}+\cdots$

故 $\frac{1}{100!}f^{(100)}(0)=-\frac{1}{98}$， $f^{(100)}(0)=-990\times 97!$.

例 21. 设 $f(u,v)$ 有一阶连续偏导数，$z=f(x^2-y^2,\cos(xy))$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，证明：$\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\sin\theta=2x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)$.

解：设：$u=x^2-y^2$，$v=\cos(xy)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial y}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=2\frac{\partial z}{\partial u}(x\cos\theta-y\sin\theta)-\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)\cdot(y\cos\theta+x\sin\theta)$$

类似可得 $\frac{\partial z}{\partial r}=-2r\frac{\partial z}{\partial u}(x\sin\theta+y\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial v}r\sin(xy)\cdot(y\sin\theta-x\cos\theta)$，代入原式左边得：

$$\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\sin\theta=2\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial u}(x\cos\theta-y\sin\theta)-\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\sin(xy)(y\cos\theta+x\sin\theta)$$

$+2\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\sin\theta(x\sin\theta+y\cos\theta)-\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)\sin\theta(y\sin\theta-x\cos\theta)=2x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)$

例 22. 已知函数 z=z(x, y) 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，设 $\begin{cases}u=x\\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\\ \phi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\end{cases}$，对函数 $\phi=\phi(u,v)$，求证：$\frac{\partial\phi}{\partial u}=0$。

证明：由题意得 $x=u, y=\frac{u}{1+uv}$，则 $\phi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ 是 u, v 的复合函数，则

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{(1+uv)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\because\frac{y}{x}=\frac{1}{1+uv}\therefore\frac{\partial\phi}{\partial u}=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{x^2z^2}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{x^2}=0$$

例 23. 设整数 n>1，求证：$\frac{1}{2ne}<\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{ne}$。

证明：先证右边，$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)$,即$\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$

令$x=\frac{1}{n}\in(0,1), f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$，$f'(x)=-\ln(1-x)>0$

$\therefore f(x)$在（0,1）上递增，$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$得证。

再证左边，$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$,即$\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0$

则$g(x)=x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln(1-x)-x, g'(x)=\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2-x}+\frac{1}{1-x}-1$

$g''(x)=\dfrac{x\left(x^2+5x+5\right)}{(2-x)^2(1-x)^2}>0\therefore g'(x)$在（0,1）上递增，

$\therefore g'(x)>g'(0)=0\therefore g(x)$在（0,1）上递增，$g(x)>g(0)=0$

$\therefore \dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}>0$得证。

故，$\dfrac{1}{2ne}<\dfrac{1}{e}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{1}{ne}$。

例 24. 证明不等式$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证明： 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

令 $f'(x)=0$，得到驻点 $x=0$．由 $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ 可知 $x=0$ 为极小值点，亦即最小值点，最小值为 $f(0)=0$，于是对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)\geq 0$，即所证不等式成立.

例 25. 证明：当$0<x<1$时，$\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

证明：令 $F(x)=(1+x)e^{-2x}+x-1$，则$F'(x)=e^{-2x}-2(1+x)e^{-2x}+1=1-(2x+1)e^{-2x}$，

$F''(x)=-2e^{-2x}+2(2x+1)e^{-2x}=4xe^{-2x}$

由于在$(0,1)$上$F''(x)>0$，故知$F'(x)$在$[0,1]$上单调递增，又$F'(0)=0$，

故$F'(x)>0$，从而函数$F(x)$也在$[0,1]$上单调递增，且由$F(0)=0$可知当$x\in(0,1)$时$F(x)>F(0)=0$，即$\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$。

例 26. 试确定 a 值，使方程$\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x^2)=a$在[-1，1]上有两个相异的实根。

解：令$f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x^2)$,则f(x)在[-1，1]上是偶函数，则 f(x)=a 在（0，1]上仅有一个根。在（0，1]上 $f'(x)=x-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{1+x^2}<0$，

$\therefore f(x)$在（0，1]上单调递减，

$\therefore f(x)$的最小值是 $f(1)=\dfrac{1}{2}-\ln 2$，最大值是 $f(0)=0$

由题意得$\dfrac{1}{2}-\ln 2\leq a<0$

例 27. 设正值函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，求函数

$$F(x)=\int_1^x[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)]f(t)dt$$ 的最小值点。

解：$F'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[(\dfrac{2}{x}+\ln x)\displaystyle\int_1^x f(t)dt-\int_1^x(\dfrac{2}{t}+\ln t)f(t)dt\right]$

$$=(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})\int_1^x f(t)dt+(\frac{2}{x}+\ln x)f(x)-(\frac{2}{x}+\ln x)f(x)=(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})\int_1^x f(t)dt$$

注意到：在 $[1,+\infty)$ 上 $f(x)>0$，因此当 $x>1$ 时，$\int_1^x f(t)dt>0$.

令 $F'(x)=0$ 得 $-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=0$，解得此方程的唯一驻点 $x=2$；又当 $1<x<2$ 时，$F'(x)<0$；当 $2<x$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在点 $x=2$ 处取得最小值 $F(2)$.

例 28. 设 $F(x)=-\dfrac{1}{2}(1+e^{-1})+\displaystyle\int_{-1}^1|x-t|e^{-t^2}dt$，试证明在区间 $[-1,1]$ 上 $F(x)$ 有且仅有两个实根.

证明：$F(x)=-\dfrac{1}{2}(1+e^{-1})+\displaystyle\int_{-1}^x(x-t)e^{-t^2}dt+\int_x^1(t-x)e^{-t^2}dt$

$$=-\frac{1}{2}(1+e^{-1})+x\int_{-1}^x e^{-t^2}dt-\int_{-1}^x te^{-t^2}dt+\int_x^1 te^{-t^2}dt-x\int_x^1 e^{-t^2}dt$$

由 $-\displaystyle\int_{-1}^x te^{-t^2}dt+\int_x^1 te^{-t^2}dt=e^{-x^2}-e^{-1}$，

$$\int_x^1 e^{-t^2}dt=\int_x^0 e^{-t^2}dt+\int_0^1 e^{-t^2}dt=-\int_0^x e^{-t^2}dt-\int_0^{-1}e^{-t^2}dt$$

代入得：$F(x)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}e^{-1}+e^{-x^2}+2x\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$

由于 $e^{-x^2}$ 是偶函数，所以 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 是奇函数，$2x\int_0^x e^{-t^2}dt$ 是偶函数，于是知 $F(x)$ 为偶函数.

又注意到：$F(0)=\dfrac{e-3}{2e}<0$，

$$F(1)=-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2e})+2\int_0^1 e^{-t^2}dt>-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2e})+2\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{3}{2}-\frac{5}{2e}>0$$

$$F'(x)=-2xe^{-x^2}+2xe^{-x^2}+2\int_0^x e^{-t^2}dt>0\ (x>0)$$

因此函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根；又由 $F(x)$ 为偶函数，故 $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 内同样有且仅有一个实根. 于是知函数 $F(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上有且仅有两个实根.

例 29.设常数 $k>\ln 2-1$，证明：当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)>0$.

证明：设函数 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1\ (x>0)$，故要证 $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)>0$，只需证：当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $1<x$ 时，$f(x)>0$.

显然：$f'(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2k}{x}=\dfrac{1}{x}(x-2\ln x+2k)$，

命 $\varphi(x)=x-2\ln x+2k$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$. 当 $x=2$ 时，$\varphi'(x)=0$，$x=2$ 为唯一驻点；

又$\varphi''(x)=\dfrac{2}{x^2}$，$\varphi''(2)=\dfrac{1}{2}>0$，所以$x=2$为$\varphi(x)$的唯一极小值点，
故$\varphi(2)=2(1-\ln 2)+2k=2[k-(\ln 2-1)]>0$为函数$\varphi(x)$的最小值（$x>0$），
即当$x>0$时$f'(x)>0$，从而$f(x)$严格单调递增.又因$f(1)=0$，
所以当$0<x<1$时，$f(x)<0$；当$1<x$时,$f(x)>0$.
故，$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)>0$。

例 30. 设 f(x)二次可微，f(0)=f(1)=0，$\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=2$，证明：$\min\limits_{0\le x\le 1} f''(x)\le -16$。

证明：函数 f(x)在[0,1]上连续，有最大值和最小值，又因最大值是 2，端点处函数值是 0，故最大值在(0,1)内部取得。即存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=2$，于是$f(x_0)$是极大值，$\therefore f'(x_0)=0$，
在$x=x_0$处按泰勒公式展开，$\exists \xi,\eta\in(0,1)$使得

$$0=f(0)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=2+\frac{1}{2}f''(\xi){x_0}^2$$

$$0=f(1)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=2+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2$$

$$\therefore \min_{0\le x\le 1} f''(x)\le \min\left\{f''(\xi),f''(\eta)\right\}=\min\left\{-\frac{4}{{x_0}^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}$$

$$\le -2\left[\frac{1}{{x_0}^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\right]\le -\frac{4}{x_0(1-x_0)}\le -16$$

例 31. 如果 f(x)在[a,b]上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$使得$\left|f''(\xi)\right|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$。

证明：应用泰勒公式将$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$分别在点 a,b 处展开，注意到

$f'(a)=f'(b)=0$，$\exists\xi_1,\xi_2,a<\xi_1<\dfrac{a+b}{2}<\xi_2<b$使得

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(a)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2,f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(b)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$两式相减得$f(b)-f(a)+\dfrac{1}{8}\left[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right](b-a)^2=0$

$$\therefore\frac{4\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}=\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\le\frac{1}{2}\left[\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right]\le\left|f''(\xi)\right|$$

其中当$\left|f''(\xi_1)\right|\ge\left|f''(\xi_2)\right|$时$\xi=\xi_1$；当$\left|f''(\xi_2)\right|\ge\left|f''(\xi_1)\right|$时$\xi=\xi_2$

例 32. 设 f(x)在$[0,1]$上有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$，且当$x\in(0,1)$时

$\left|f''(x)\right|\le M$，求证：$\left|f'(x)\right|\le\frac{1}{2}M$。

分析：对于函数具有二阶或二阶以上连续导数，且最高阶导数的大小或上下界已知的命题可以考虑用泰勒公式。方法是写出比最高阶低一阶的函数展开成泰勒公式，适当选取等式两边的变量，根据已知条件对展开式进行放缩。

证明：由题意将 f(x)在任一点 $x_0$ 处展开成一阶泰勒公式得：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$ 其中 $\xi$ 在 x，$x_0$ 之间。

令 x=0，则 $\exists\xi_1,0<\xi_1<x_0\le1,f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1){x_0}^2$

令 x=1，则

$\exists\xi_2,0<\xi_2<x_0\le1,f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$

将上面两式相减得：$f'(x_0)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1){x_0}^2-f''(\xi_2)(1-x_0)^2\right]$

又 $x\in(0,1)$ 时 $\left|f''(x)\right|\le M$，

$\therefore\left|f'(x_0)\right|\le\frac{M}{2}\left[{x_0}^2+(1-x_0)^2\right]=\frac{M}{2}\left(2{x_0}^2-2x_0+1\right)\le\frac{M}{2}$

由于 $x_0$ 的任意性知 $\left|f'(x)\right|\le\frac{1}{2}M$。

例 33. 设 f(x)在 $[0,1]$ 上是非负单调递减的连续函数，且 0<a<b<1,

证明：$\int_0^a f(x)dx\ge\frac{a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

证明：由积分中值定理得：$\int_0^a f(x)dx=af(\xi_1)\ge af(a),\xi_1\in[0,a]$,

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi_2)\le(b-a)f(a),\xi_2\in[a,b]$,

$\therefore\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx\ge f(a)\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\therefore\int_0^a f(x)dx\ge\frac{a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

例 34. 设函数 f(x)在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$ 及 $\left|f''(x)\right|\le8$，

求证：$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le(b-a)^2$。

证明：把 f(a)、f(b)分别在 $x=\frac{a+b}{2}$ 点处展开得：

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(x_1)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(x_1)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中$x_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),x_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$因为$f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$，两式相加得：

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{8}\left[f^{''}\left(x_1\right)+f^{''}\left(x_2\right)\right]\left(b-a\right)^2=0$$

$$\therefore\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|=\frac{1}{16}\left|f^{''}\left(x_1\right)+f^{''}\left(x_2\right)\right|\left(b-a\right)^2$$

$$\le\frac{1}{16}\left[\left|f^{''}\left(x_1\right)\right|+\left|f^{''}\left(x_2\right)\right|\right]\left(b-a\right)^2\le\left(b-a\right)^2$$

例 35. 设 f(x)在$\left[a,b\right]$上二阶可导且$\left|f^{''}\left(x\right)\right|\le M$， $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，$b-a\le1$，求证：

$\left|f\left(a\right)+f\left(b\right)\right|\le\frac{1}{4}M$。

证明：把 f(a)、f(b)分别在$x=\frac{a+b}{2}$点处展开，结合$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$得：

$$f\left(a\right)=f^{'}\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f^{''}\left(x_1\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f\left(b\right)=f^{'}\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f^{''}\left(x_1\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

两式相加得：$f\left(a\right)+f\left(b\right)=\frac{1}{8}\left[f^{''}\left(x_1\right)+f^{''}\left(x_2\right)\right]\left(b-a\right)^2$

$$\therefore\left|f\left(a\right)+f\left(b\right)\right|=\frac{1}{8}\left|\left[f^{''}\left(x_1\right)+f^{''}\left(x_2\right)\right]\right|\left(b-a\right)^2$$

$$\le\frac{1}{8}\left[\left|f^{''}\left(x_1\right)\right|+\left|f^{''}\left(x_2\right)\right|\right]\left(b-a\right)^2\le\frac{1}{4}M$$

例 36. 设$f^{''}\left(x\right)\le0,x\in\left[0,1\right]$，证明：$\int_0^1f\left(x^2\right)dx\le f\left(\frac{1}{3}\right)$。

证明：把$f\left(x^2\right)$在$x=\frac{1}{3}$点处展开得

$$f\left(x^2\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f^{'}\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}f^{''}\left(\xi\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\because f^{''}\left(x\right)\le0,\therefore f\left(x^2\right)\le f\left(\frac{1}{3}\right)+f^{'}\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

两边同时积分得$\int_0^1f\left(x^2\right)dx\le\int_0^1f\left(\frac{1}{3}\right)dx+\int_0^1f^{'}\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=f\left(\frac{1}{3}\right)$

例 37. 设函数 f(x)>0， $f^{''}\left(x\right)\le0$，证明：$f\left(x\right)\le\frac{2}{b-a}\int_a^bf\left(x\right)dx$。

证明：设函数在 $x=x_0$ 处取得最大值，把最大值点在任意点处展开得：

$$f\left(x_0\right)=f\left(x\right)+f^{'}\left(x\right)\left(x_0-x\right)+\frac{1}{2}f^{''}\left(\xi\right)\left(x_0-x\right)^2\le f\left(x\right)+f^{'}\left(x\right)\left(x_0-x\right)$$

两边积分得 $\int_a^b f\left(x_0\right)dx\le\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_a^b f^{'}\left(x\right)\left(x_0-x\right)dx$

$$\therefore\left(b-a\right)f\left(x_0\right)\le\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_a^b\left(x_0-x\right)df\left(x\right)$$

$$=2\int_a^b f\left(x\right)dx-\left(b-x_0\right)f\left(b\right)-\left(x_0-a\right)f\left(a\right)\le2\int_a^b f\left(x\right)dx$$

$$\therefore f\left(x_0\right)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx$$

因为 $f\left(x_0\right)$ 是 f(x) 的最大值，所以 $f\left(x\right)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx$。

例 38. 设函数 f(x) 在 [a, b] 上二阶连续可导，且 $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0,f\left(x\right)\ne0$，

证明：$\int_a^b\left|\frac{f^{''}\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right|dx\ge\frac{4}{b-a}$。

证明：令 $\left|f\left(x_0\right)\right|=M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|$，由 $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ 得 $x_0\in\left(a,b\right)$

在区间 $\left[a,x_0\right],\left[x_0,b\right]$ 上分别用拉格朗日中值定理得

$$f^{'}\left(x_1\right)=\frac{f\left(x_0\right)}{x_0-a},x_1\in\left(a,x_0\right),f^{'}\left(x_2\right)=\frac{f\left(x_0\right)}{x_0-b},x_2\in\left(x_0,b\right)$$

$$\therefore\int_a^b\left|\frac{f^{''}\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right|dx\ge\frac{1}{M}\int_a^b\left|f^{''}\left(x\right)\right|dx\ge\frac{1}{M}\left|\int_a^b f^{''}\left(x\right)dx\right|\ge\frac{1}{M}\left|\int_{x_1}^{x_2}f^{''}\left(x\right)dx\right|$$

$$=\frac{1}{M}\left|f^{'}\left(x_2\right)-f^{'}\left(x_1\right)\right|=\frac{1}{M}\left|\frac{f\left(x_0\right)}{x_0-b}-\frac{f\left(x_0\right)}{x_0-a}\right|=\left|\frac{1}{b-x_0}+\frac{1}{x_0-a}\right|$$

$$=\frac{b-a}{\left(b-x_0\right)\left(x_0-a\right)}\ge\frac{4}{b-a}$$

例 39. 设函数 f(x) 在 [0, 1] 上有一阶连续导函数，且 f(0)=f(1)=0，求证：$\left|\int_0^1 f\left(x\right)dx\right|\le\frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{'}\left(x\right)\right|$。

证明：令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|$，由拉格朗日中值定理得：

$$f\left(x\right)-f\left(0\right)=f^{'}\left(x_1\right)\left(x-0\right)\text{即}f\left(x\right)=f^{'}\left(x_1\right)x\because M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|,$$

$$\therefore\left|f\left(x\right)\right|\le Mx\therefore\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f\left(x\right)\right|dx\le M\int_0^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{8}M$$

同理 $f\left(1\right)-f\left(x\right)=f^{'}\left(x_2\right)\left(1-x\right)$ 即 $f\left(x\right)=-f^{'}\left(x_2\right)\left(1-x\right)$

$\therefore\left|f(x)\right|\le M(1-x)\therefore\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(x)\right|dx\le M\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)dx=\frac{1}{8}M$

$\therefore\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\int_0^1\left|f(x)\right|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f(x)\right|dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(x)\right|dx\le\frac{1}{4}M=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$

例 40. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$ 且不恒为 0，$0\le f(x)\le M$，求证：

$$\left[\int_a^b f(x)\cos xdx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\sin xdx\right]^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\ge\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$$

证明：构造辅助函数

$$F(t)=\left[\int_a^t f(x)\cos xdx\right]^2+\left[\int_a^t f(x)\sin xdx\right]^2+\frac{M^2(t-a)^4}{12}-\left[\int_a^t f(x)dx\right]^2$$

$$F'(t)=2f(t)\cos t\int_a^t f(x)\cos xdx+2f(t)\sin t\int_a^t f(x)\sin xdx$$

$$+\frac{1}{3}M^2(t-a)^3-2f(t)\int_a^t f(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}M^2(t-a)^3-2f(t)\int_a^t f(x)\left[1-\cos(x-t)\right]dx$$

$$\ge\frac{1}{3}M^2(t-a)^3-2M^2\int_a^t\left[1-\cos(x-t)\right]dx$$

$$=2M^2\left[\frac{1}{6}(t-a)^3-t+a+\sin(t-a)\right]$$

令 $g(t)=\frac{1}{6}(t-a)^3-t+a+\sin(t-a),g'(t)=\frac{1}{2}(t-a)^2-1+\cos(t-a)$

$g''(t)=t-a-\sin(t-a)\ge0,\therefore g'(t)$ 单调递增，$g'(t)\ge g'(a)=0,\therefore g(t)$ 单调递增，

$g(t)\ge g(a)=0,\therefore F'(t)\ge0\therefore F(t)$ 单调递增，

$\therefore F(b)\ge F(a)=0$ 即

$$\left[\int_a^b f(x)\cos xdx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\sin xdx\right]^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\ge\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$$

例 41. 设 $x\in[0,1],p>1$，求证：$2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le1$。

证明：设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则 $f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$ 令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\frac{1}{2}$，当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 时 $f'(x)>0$，

$\therefore$ f(x) 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上递减，在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上递增，$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{1-p}$ 是函数的最小值，又 $f(0)=f(1)=1$，所以 $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le1$。

例 42. 已知函数 f(x) 在 $[0,2]$ 上二次连续可微，f(1)=0，$M=\max_{x\in[0,2]}\left|f''(x)\right|$，证明：

$\left|\int_0^2 f\left(x\right)dx\right| \le \frac{M}{3}$。

证明：f(x)在 x=1 处展开得 $f\left(x\right)=f^{'}\left(1\right)\left(x-1\right)+\frac{1}{2}f^{''}\left(\xi\right)\left(x-1\right)^2$

$\therefore f^{'}\left(1\right)\left(x-1\right)-\frac{1}{2}M\left(x-1\right)^2 \le f\left(x\right) \le f^{'}\left(1\right)\left(x-1\right)+\frac{1}{2}M\left(x-1\right)^2$

$\therefore -\frac{M}{3}=\int_0^2\left[f^{'}\left(1\right)\left(x-1\right)-\frac{1}{2}M\left(x-1\right)^2\right]dx \le \int_0^2 f\left(x\right)dx$

$\le \int_0^2\left[f^{'}\left(1\right)\left(x-1\right)+\frac{1}{2}M\left(x-1\right)^2\right]dx=\frac{M}{3}\ \therefore \left|\int_0^2 f\left(x\right)dx\right| \le \frac{M}{3}$

例 43. 设 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在（0，1）内二阶可导，且 $f''(x)\neq 0$，满足 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$。证明：$f(x)$ 在[0，1]上恰好有两个零点。

证:因为 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不能同号，从而由闭区间上连续函数的性质知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点。

假定 $x=\alpha$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的唯一零点，不妨设当 $0<x<\alpha$ 时，$f(x)<0$，当 $\alpha<x<1$ 时，$f(x)>0$，则 $\int_0^1(x-\alpha)f(x)dx\ \ 0$，但是 $\int_0^1(x-\alpha)f(x)dx=0$，矛盾。所以，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点。

如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有 3 个零点，设为 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=$，则罗尔定理知，存在点 $a\in(x_1,x_2),b\in(x_2,x_3)$，使 $f'(a)=0,f'(b)=$。对 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$，这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾。所以，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恰好有两个零点。

例 44. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $\left|f(x)\right|\le M_0$，$0<\left|f''(x)\right|\le M_2$，（$a\le x\le +\infty$）. 证明 $\left|f'(x)\right|\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

证明：对任意 $x\in[a,+\infty)$，及任意的 $h>0$，使得 $x+h\in(a,+\infty)$，于是有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(\xi)h^2\text{，其中 }\xi\in[x,x+h].$$

即 $f'(x)=\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-\frac{h}{2}f''(\xi)$；故

$$\left|f'(x)\right|\le\frac{2M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2\quad,\quad(x\in[a,+\infty),h>0)$$

令 $g(h)=\frac{2M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$，下面求其最小值：由 $g'(h)=-\frac{2M_0}{h^2}+\frac{1}{2}M_2=0$

得到 $h_0=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. $g''(h)=\frac{4M_0}{h^3}>0$，所以 $g(h)$ 在 $h_0=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ 处得极小值，亦即最小值

且最小值为 $g(h_0)=2\sqrt{M_0M_2}$，

故 $\left|f'(x)\right|\le 2\sqrt{M_0M_2}\quad(x\in[a,+\infty))$

例 45. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$，

试证明：对于任意给定的正数 $a$ 和 $b$，在开区间 $(0,1)$ 内存在不同的 $\xi$ 和 $\eta$，使得 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$

证明：取数 $\mu\in(0,1)$，由连续函数介值定理知，存在 $C\in(0,1)$，使得 $f(C)=\mu$. 在区间 $[0,C]$ 与 $[C,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理有

$$f'(\xi)=\frac{f(C)-f(0)}{C-0}=\frac{\mu}{C}，\quad 0<\xi<C$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(C)}{1-C}=\frac{1-\mu}{1-C}，\quad C<\eta<1$$

显然 $\xi\neq\eta$；于是

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{a}{\frac{\mu}{C}}+\frac{b}{\frac{1-\mu}{1-C}}=\frac{aC(1-\mu)+b\mu(1-C)}{\mu(1-\mu)}=\frac{b\mu+C(a-b\mu-a\mu)}{\mu(1-\mu)}$$

注意到 $\mu=\frac{a}{a+b},1-\mu=\frac{b}{a+b}$ 且 $\mu,1-\mu\in(0,1)$，代入上式得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}}=a+b.$$

例 46. 设函数在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\left|f(x)\right|dx。$$

证明：设 $M=\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$ 由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a),a<\xi_1<x,$$
$$f(x)=f'(\xi_2)(x-b),x<\xi_2<b$$

$$\therefore\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f'(\xi_1)\right|(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f'(\xi_2)\right|(b-x)dx$$

$$\leq M\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx\right]=M\cdot\frac{1}{4}(b-a)^2$$

$$\therefore M=\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\left|f(x)\right|dx$$

例 47. 设函数 f(x) 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且满足 $\left|f(x)\right|\leq a,\left|f''(x)\right|\leq b(a>0,b>0)$，证明：对任意 $x\in(0,1)$ 有 $\left|f'(x)\right|\leq 2a+\frac{b}{2}$。

证明：利用泰勒公式，对 $\forall x\in(0,1)$ 有

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2,\xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2,\xi_2\in(x,1)$$

$$\therefore f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2\right]$$

$$\left|f'(x)\right|=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2\right]\right|$$

$$\le\left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\frac{1}{2}\left|f''(\xi_2)(1-x)^2\right|+\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)x^2\right|$$

$$\le 2a+\frac{1}{2}b\left[x^2+(1-x)^2\right]\le 2a+\frac{b}{2}$$

例 48. 设 f(x)在$[0,1]$上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0,$
$\min\limits_{x\in(0,1)}f(x)=-1$，证明：$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8$。

证明：由 $f(0)=f(1)=0,\min\limits_{x\in(0,1)}f(x)=-1$ 得 $\exists a\in(0,1)$ 使得
$f(a)=-1,f'(a)=0$，利用泰勒公式展开得：

$$f(0)=f(a)-f'(a)a+\frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2,\xi_1\in(0,a)$$

$$f(1)=f(a)+f'(a)(1-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-a)^2,\xi_2\in(a,1)$$

$$\therefore f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2},f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}$$

$$\therefore \max_{x\in[0,1]}f''(x)\ge\max_{x\in[0,1]}\left\{\frac{2}{a^2},\frac{2}{(1-a)^2}\right\}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(1-a)^2}\ge\frac{2}{a(1-a)}\ge 8$$

例 49. 设 f(x)在$[a,b]$上有二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0,$则在$(a,b)$内必存在一点$\xi$
使得$\left|f''(\xi)\right|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$。

证明：由泰勒公式得：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$

$$=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2,\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$$

$$=f(b)+\frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2,\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

$$\therefore f(b)-f(a)=\frac{1}{8}\left[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right](b-a)^2$$

$$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{1}{8}\left[\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right](b-a)^2$$

令$\left|f''(\xi)\right|=\max\left\{f''(\xi_1)，f''(\xi_2)\right\}$，则$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{1}{4}\left|f''(\xi)\right|(b-a)^2$

故$\left|f''(\xi)\right|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$

例 50. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上具有连续的二阶导数，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]=f''(\xi)$

证明：将函数$f(x)$在点$x_0=\frac{a+b}{2}$处作泰勒展开，并分别取$x=a$和$x=b$得到

$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-\frac{a+b}{2})^2$，其中$\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$；

$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-\frac{a+b}{2})^2$，其中$\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$.

两式相加得到$f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)](\frac{b-a}{2})^2$

由于$f''(x)$连续，由介值定理知，存在$\xi\in[\xi_1,\xi_2]$，使得$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，从而得：

$$f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi)$$

即$f''(\xi)=\frac{4}{(b-a)^2}[f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$.

例 51. 设函数$f(x)$在闭区间$[-2,2]$上具有二阶导数，$\left|f(x)\right|\le1$，且 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，证明：存在一点$\xi\in(-2,2)$，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

证明：在区间$[-2,0]$和$[0,2]$上分别对函数$f(x)$应用拉格朗日中值定理得

$\exists\eta_1\in(-2,0)$使$f'(\eta_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}$；$\exists\eta_2\in(0,2)$使$f'(\eta_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}$.

注意到$\left|f(x)\right|\le1$，因此$\left|f'(\eta_1)\right|=\left|\frac{f(0)-f(-2)}{2}\right|\le1$，$\left|f'(\eta_2)\right|\le1$. 命

$$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$$

则$F(x)$在区间$[-2,2]$上可导，且

$$F(\eta_1)=[f(\eta_1)]^2+[f'(\eta_1)]^2\le2，\quad F(\eta_2)=[f(\eta_2)]^2+[f'(\eta_2)]^2\le2，\quad F(0)=4$$

故$F(x)$在区间$[\eta_1,\eta_2]$上的最大值$F(\xi)=\underset{x\in(\eta_1,\eta_2)}{Max}\{f(x)\}\ge4$，且$\xi\in(\eta_1,\eta_2)$. 由费马引理知

$F'(\xi)=0$． 而 $F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$
故 $F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]$
由于 $F(\xi)=[f(\xi)]^2+[f'(\xi)]^2\geq 4$，所以 $f'(\xi)\neq 0$，从而 $f(\xi)+f''(\xi)=0$．
例 52. 设 f(x)在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，f(0)=0，证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 $\xi$ 使得 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$。

证明：由泰勒公式得：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$

$$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$$

$$\therefore\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}\left[f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2dx$$

$\because f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有最小值 m 和最大值 M，故

$$\frac{2}{3}a^3m=m\int_{-a}^{a}x^2dx\leq\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2dx\leq M\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{2}{3}a^3M$$

即 $m\leq\dfrac{\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2dx}{\frac{2}{3}a^3}\leq M$，由介值定理得，$\exists\xi\in[-a,a]$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2dx}{\frac{2}{3}a^3}\ \therefore\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2dx=\frac{1}{3}a^3f''(\xi)$$

$$\therefore a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$$

例 53. 设 $f''(x)$ 连续且 $f''(x)>0,f(0)=f'(0)=0$，u(x)是曲线 y=f(x)在点(x,f(x))处的切线在 x 轴上的截距，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)}f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$。

分析：当 $x\to 0$ 时所求极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，可考虑用等价无穷小和洛必达法则，因此要对变上限函数的定积分求导，所以先要求出 $u(x),u'(x)$，进而可利用 $f(x),f'(x)$ 的泰勒公式求得极限。
解：曲线 $y=f(x)$ 在点(x,f(x))处的切线方程为：$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，

注意到由于 $f'(0)=0$，$f''(x)>0$，所以 $x\neq 0$ 时 $f'(x)>0$. 令 Y=0 得切线

在 $x$ 轴上的截距为：$u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，且

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{f^{'}(x)}{f^{''}(x)}=0,u^{'}(x)=\frac{f(x)f^{''}(x)}{\left[f^{'}(x)\right]^{2}},$$

将 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处展成泰勒公式得：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$$，$\xi_1$ 在 0 与 $x$ 之间；

将 $x=u(x)$ 代入得：

$$f\left[u(x)\right]=\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left[u(x)\right]^2$$，$\xi_2$ 在 0 与 $u(x)$ 之间；

$$\therefore f^{'}(x)=f^{''}(\xi_1)x,f^{''}(x)=f^{''}(\xi_1),\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)}{x}=1-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2}{f^{''}(\xi_1)x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore u(x)\sim\frac{1}{2}x\left(x\to 0^+\right),f\left[u(x)\right]=\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left[u(x)\right]^2\sim\frac{1}{8}f''(\xi_2)x^2$$

$$\therefore\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)dt}{\int_0^{x}f(t)dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left[u(x)\right]}{f(x)}\cdot\frac{f(x)f^{''}(x)}{\left[f^{'}(x)\right]^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left[u(x)\right]\cdot f^{''}(x)}{\left[f^{'}(x)\right]^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{''}(\xi_1)}{\left[f^{''}(\xi_1)\right]^2x^2}\cdot\frac{1}{8}f''(\xi_2)x^2=\frac{1}{8}$$

例 54.若 $a\le f(x)\le b,x\in[a,b]$ 且 $\left|f(x)-f(y)\right|\le k|x-y|$，其中 k 为常数且 0<k<1，设 $x_1\in[a,b],x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\ldots$，证明：

（1）存在唯一的 $x\in[a,b]$ 使得 f(x)=x；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

分析：证明存在性的方法有很多，一般来说，和函数有关的可以利用连续函数的介值定理，和导数有关的可以利用中值定理。

证明：（1）由 $\left|f(x)-f(y)\right|\le k|x-y|$ 知 f(x)连续，所以 g(x)=f(x)-x 连续，由于 $a\le f(x)\le b,\therefore g(a)\ge 0,g(b)\le 0$，由介值定理得：$\exists x\in[a,b]$ 使得 g(x)=0 即 f(x)=x。假设另有 $x_0\ne x$ 且 $f(x_0)=x_0$，则 $|x_0-\quad|\quad|x(\in\ )\quad {}_0f(\ )|\ -x|\quad|\ |f\le_0\quad|$ 矛盾。这就说明，存在唯一的 $x\in[a,b]$ 使得 f(x)=x。

（2）$|x_n-x|=\left|f(x_{n-1})-f(x)\right|\le k|x_{n-1}-x|\le k^2|x_{n-2}-x|\le\ldots\le k^{n-1}|x_1-x|$

$\therefore|x_n-x|\le k^{n-1}|x_1-x|,k<1,\because 0\le\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|\le\lim\limits_{n\to\infty}k^{n-1}|x_1-x|=0$ 由夹逼定理

得$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - x| = 0, \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

例 55. 设 f(x)在$[a,b]\left(0 \le a < b \le \frac{\pi}{2}\right)$上连续，在(a,b)上可导，证明：在(a,b)内至少存在两点$\xi_1, \xi_2$使得$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2} = f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$。

证明：由柯西中值定理得$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b - \sin a} = \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}, a < \xi_1 < b$

同理可得$\frac{f(b)-f(a)}{\cos b - \cos a} = \frac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2}, a < \xi_2 < b$

$\therefore \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b - \sin a) = \frac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2}(\cos b - \cos a)$

$\therefore \frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1} f'(\xi_1) = -f'(\xi_2)\frac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a}$

即$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2} = f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$

例 56. 设函数 f(x)在 R 上有界且导数连续，又对于任意实数 x 有$|f(x) + f`(x)| \le 1$，证明：$|f(x)| \le 1$。

证明：令$g(x) = e^x f(x), g`(x) = e^x[f(x) + f`(x)] \therefore |g`(x)| \le e^x$，

即$-e^x \le g`(x) \le e^x$，积分得$-\int_{-\infty}^{x} e^t dt \le \int_{-\infty}^{x} g`(t)dt \le \int_{-\infty}^{x} e^t dt$

即$-e^x \le e^x f(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} e^x f(x) \le e^x \therefore -1 \le f(x) \le 1 \therefore |f(x)| \le 1$

例 57. 设$f`(x)$在[a,b]上连续，f(x)在(a,b)内二阶可导，

$f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x)dx = 0$，求证：

（1）在(a,b)内至少存在一点$\xi$使得$f'(\xi) = f(\xi)$；

（2）在(a,b)内至少存在一点$\eta(\eta \ne \xi)$使得$f''(\eta) = f(\eta)$。

证明：（1）法一. 由积分中值定理得：$\exists c \in (a,b)$使得

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) = 0, \therefore f(c) = 0$，设$g(x) = e^{-x}f(x)$，

则 g(x) 在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且$g(a) = g(b) = g(c) = 0$，由罗尔定理得：$\exists \xi_1 \in (a,c), \xi_2 \in (c,b)$使得$g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$，而$g`(x) = e^{-x}[f`(x) - f(x)]$，

所以，在(a, b)内至少存在一点$\xi$使得$f'(\xi)=f(\xi)$。

法二. 令$h(x)=f(x)-\int_a^x f(t)dt$，则$h(a)=h(b)=0$，由罗尔定理得：$\exists\xi\in(a,b)$使得$h'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=f(\xi)$。

（2）由（1）得$f'(\xi_1)-f(\xi_1)=0, f'(\xi_2)-f(\xi_2)=0,$

令$F(x)=e^x\left[f`(x)-f(x)\right]$，则F(x)在[a, b]上连续，在(a, b)内可导，

且$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，由罗尔定理得$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使得$F'(\eta)=0$，

又$F'(x)=e^x\left[f''(x)-f(x)\right]$，所以$f''(\eta)=f(\eta)$且$\eta\neq\xi$。

例 58. 若函数 f(x), g(x)在[a, b]上连续，在(a, b)上可导，且$g`(x)\neq 0$，

证明：存在$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$。

证明：令$h(x)=f(a)g(x)+f(x)g(b)-f(x)g(x)$，

则$h(a)=h(b)=f(a)g(b)$，又 h(x) 在[a, b]上连续，在(a, b)上可导，由罗尔定理得：存在$\xi\in(a,b)$使得$h'(\xi)=0$，

又$h`(x)=f(a)g`(x)+f`(x)g(b)-f(x)g`(x)-f`(x)g(x)$

故，存在$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$。

例 59.将均匀的抛物形体$\Omega: x^2+y^2\le z\le 1$放在水平桌面上，证明：当形体处于稳定平衡时，它的轴线与桌面的夹角为$\theta=\arctan\sqrt{\dfrac{3}{2}}$。

解:当重心最低时，物体处于稳定平衡状态。由于

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},\ M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1 z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

于是$\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{2}{3}$。所以，物体的重心为$P\left(0,0,\dfrac{2}{3}\right)$。

求点 P 到抛物面$z=x^2+y^2$的最短距离。作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2+\lambda(x^2+y^2-z),$$

$$\text{由}\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\left(z-\dfrac{2}{3}\right)-\lambda=0\end{cases}\quad\text{解得 }x=y=\frac{1}{\sqrt{12}},z=\frac{1}{6}。$$

记$Q\left(\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{6}\right)$，则$\overrightarrow{QP}=\left[-\frac{1}{\sqrt{12}},-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{2}\right]=\sqrt{\frac{5}{12}}\left[-\sqrt{\frac{1}{5}},-\sqrt{\frac{1}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$。

所以，$\sin\theta=\cos\gamma=\sqrt{\frac{3}{5}}$，故$\tan\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}$，因此$\theta=\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$。

例 60.设函数 $f(u)$ 可导且 $f'(u)\neq 0$，证明：旋转曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的法线与转轴相交。

证:方法 1　设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 则 $z=f(u)$。因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{u}$，

所以旋转面上 $P(x,y,z)$ 点处的法线 $l$ 的方程为

$$\frac{X-x}{\frac{x}{u}f'(u)}=\frac{Y-y}{\frac{y}{u}f'(u)}=\frac{Z-z}{-1}。$$

易见旋转面的转轴为 z 轴，其方程为$\begin{cases}X=0,\\Y=0.\end{cases}$解它们联立的方程组得$l$ 与 z 轴相交且交点

为$\left(0,0,z+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{f'(\sqrt{x^2+y^2})}\right)$。

方法 2　设 $u=\sqrt{x^2+y^2},z=f(u)$，于是旋转面在点 $P(x,y,z)$ 处的法线 1 的方向向理可取为 $s=[xf'(u),yf'(u),-u]$，而旋转面转轴为 z 轴，其方向向量为 $k=(0,0,1)$，又 z 轴上点 $O(0,0,0)$ 到 1 上点 $P(x,y,z)$ 的向量为 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，由于三向量 $k,s,\overrightarrow{OP}$ 的混合积

$$[k,s,\overrightarrow{OP}]=\begin{vmatrix}0&0&1\\xf'(u)&yf'(u)&-u\\x&y&z\end{vmatrix}=0$$

所以法线 1 与 z 轴共面。若 P 为 $(0,0,f(0))$，则 P 点已在 z 轴上。否则，$P(x,y,z)\neq(0,0,f(0))$，因为 $f'(u)\neq 0$，故必有 k 与 s 不平行。于是，1 与 z 轴共面又不平行，则 1 与 z 轴必为相交。

例 61. 求 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$在$S=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=1\right\}$上的最大值与最小值.

解：方法 1：令 $F(x,y,\lambda)=x^2+2x^2y+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$，并令：

$$\begin{cases}F_x=2x+4xy+2\lambda x=0\\F_y=2x^2+2y+2\lambda y=0\\F_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}\text{解得：}\begin{cases}x=0\\y=\pm 1\end{cases}\text{及}\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\\y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases},$$

从而得 6 个可能极值点：

$(0,1)$，　$(0,-1)$，　$(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，　$(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$，　$(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，　$(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$

对应函数值分别为：1，1，$1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，$1-\frac{4}{9}\sqrt{3}$，$1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，$1-\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

故函数的最大值为$1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，最小值为$1-\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

方法 2：将 $x^2+y^2=1$ 代入函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 可将函数化为一元函数：

$F(y):=(1-y^2)^2+2(1-y^2)y+y^2=1+2y-2y^3$（$-1\le y\le 1$）

$F'(y)=2-6y^2$，令 $F'(y)=0$ 解得驻点 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

且由 $F(-1)=1$， $F(1)=1$， $F(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=1+\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$， $F(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=1-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$

可知函数的最大值为 $1+\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$，最小值为 $1-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$.

例 62.

## 2.3 练习题

1.设 $\pi$ 为不共线的三点 A,B,C 组成的平面，O 为原点，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha},\overrightarrow{OB}=\vec{\beta},\overrightarrow{OC}=\vec{\gamma},$ 则 $\vec{n}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$ 与平面 $\pi$ 的夹角为________________。

2.若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导,且 $f(x)=f(x+4),\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,求 $f'(5)$

3.当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$ 与 $ax^n$ 是等价无穷小,求 $a$ 与 $n$

4. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(x^2)dx$， $g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，（　　）

（A） $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶但非等价无穷小；　（B） $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小；

（C） $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更高阶的无穷小；　（D） $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更低阶的无穷小

5. 设摆线方程为 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$，则此曲线在 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 处的法线方程为__________ .

6. 设 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=$__________。

7. 选择（1）. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有（　　）

（A）1 条；　（B）2 条；　（C）3 条；　（D）4 条.

8. 设 $u=f(x,y,z)$， $\varphi(x^2,y,z)=0$， $y=\sin x$，其中 $f,\varphi$ 具有连续的一阶偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\ne 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

9. $a$， $b$， $c$ 为何值时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\dfrac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}=c$ 成立？

10. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$__________________ .

11. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 $f$ 、$\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________ .

12. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，$g$ 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2 \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}$ （$t>1$）所确定，求 $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=9}$ .

14.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$， 使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$。

15. 设 $f$ 在 $[0,2]$ 上可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=f(2)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=0$。

16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $4\int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx=f(0)$，求证：在开区间 $(0,1)$ 内存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=0$.

17.设 f(x) 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，

$2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=f(2)$。证明：存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$。

18. 设 f(x) 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，f(a)=f(b)=0，证明：对于任意的实数 $\alpha$ 都存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$。

19. 设 $x\in[0,1],p>1$，求证： $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1$。

20. 设 $f(x),g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，且 $\forall x\in(a,b),f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$，又 f(X) 在 $(a,b)$ 内有两个零点 $x_1,x_2$。证明：$\exists x_0\in(a,b)$ 使 $g(x_0)=0$。

21. 设 f(x) 是区间 $[0,1]$ 上的非负可导函数，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，

证明：在 (0, 1) 内存在唯一的 $\xi$ 使得 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx$。

22. 设函数在 $[0,a]$ 上有二阶连续导数，且 $|f''(x)|\le M$，又 f(x) 在 (0, a) 内取得最大值。证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$。

23. $n\in N,x\in(0,1)$，证明： $x^n(1-x)<\frac{1}{ne}$。

24. 设函数 f(x) 在 $[0,1]$ 上可导，$0<f(x)<1$ 且 $f'(x)\neq 1$，证明：在 (0, 1) 内必有唯一的点 $x_0$ 使 $f(x_0)=x_0$。

25. 证明：曲线 $y=e^x$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的交点不多于三个。

26. 设 C 是常数，函数 f(x)满足下列两个等式，$\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=C,$

$\lim\limits_{x\to\infty} f'''\left(x\right)=C,$求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'\left(x\right)=0,\lim\limits_{x\to\infty} f''\left(x\right)=0$。

27. 设函数 f(x)在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，其中 a>0 且 f(a)=0，证明：在(a,b)内至少存在一点$\xi$使得 $f\left(\xi\right)=\dfrac{b-\xi}{a}f'\left(\xi\right)$。

28. 设 f(x)在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，$f\left(a\right)=a,\int_a^b f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$，求证：在(a,b)内至少存在一点$\xi$使得 $f'\left(\xi\right)=f\left(\xi\right)-\xi+1$。

29.在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，是函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$ 的方向导数最大。

30.

# 第四章　无穷级数

## 4.1.基本概念与内容提要

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$收敛性相同。若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$。若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$不一定发散。

**若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$必发散**。

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛不能得到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛。

等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$,当$|q|<1$时收敛且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\dfrac{1}{1-q}$;当$|q|\ge 1$时发散。

P 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，当 p>1 时收敛，当$0<p\le 1$发散。其中调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+k}$发散，其中 k 为正常数。级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在。

如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必发散。

改变一个级数的任意有限项，不改变其敛散性，但在收敛时原级数的和改变。收敛级数加括号后仍收敛于原级数和。若加括号后所得级数发散，则原级数也发散。

**正项级数审敛法：**

1.正项级数的收敛准则:$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Leftrightarrow \mathrm{S_n} \le M$

2.正项级数比较判别法：大收小必收，小散大必散。

若$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l\left(l > 0\right)$,则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散。

若$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$,则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。若$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$,则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

解题时常将级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$比较，以判定$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性。

3.根值判别法：设：$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$，则当$0 \le \rho < 1$时，级数收敛；当$\rho > 1$时，级数发散；当$\rho = 1$时，不确定。注意：$\rho$=0时级数也收敛。

4.比值判别法：设：$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$，则当$0 \le \rho < 1$时，级数收敛；当$\rho > 1$时，级数发散；当$\rho = 1$时，不确定。注意：$\rho$=0时级数也收敛。

5.积分判别法：$f\left(x\right)$是在$\left[1, +\infty\right)$上单调递减的正项连续函数，

则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(n\right)$与广义积分$\int_1^{+\infty} f\left(x\right) dx$具有相同的收敛性。

广义积分$\int_1^{+\infty} f\left(x\right) dx$的敛散性的判别方法与正项级数的相同。

6.定义法：$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \lim_{n\to\infty} s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$(或$-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases} u_n \ge u_{n+1} \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$，那么级数收敛且其和$s \le u_1$,其余项$r_n$的绝对值$\left|r_n\right| \le u_{n+1}$。交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^n a_n$ **判断收敛一般用下述方法：**

（1）莱布尼兹定理：如果交错级数满足$a_n \ge a_{n+1}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$那么级数收敛且其和$s \le a_1$,其余项$r_n$的绝对值$\left|r_n\right| \le a_{n+1}$。如果$\left\{a_n\right\}$不满足条件，则一般可改用：

（2）取通项的绝对值所构成的级数，若收敛则原级数绝对收敛；若此绝对值所构成的级数用比值法或根值法判定发散，则通项不趋于 0，原级数发散。

（3）拆项或并项的方法，将通项拆成两项，若以此两项分别作通项的级数均收敛，则原级数收敛；若一级数收敛另一发散，则原级数发散。若并项后的级数发散，则原级数也发散。

（4）如果能立即看出$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$必发散。

**绝对收敛与条件收敛：**

若$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛且称为绝对收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$发散但$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛则称为条件收敛。

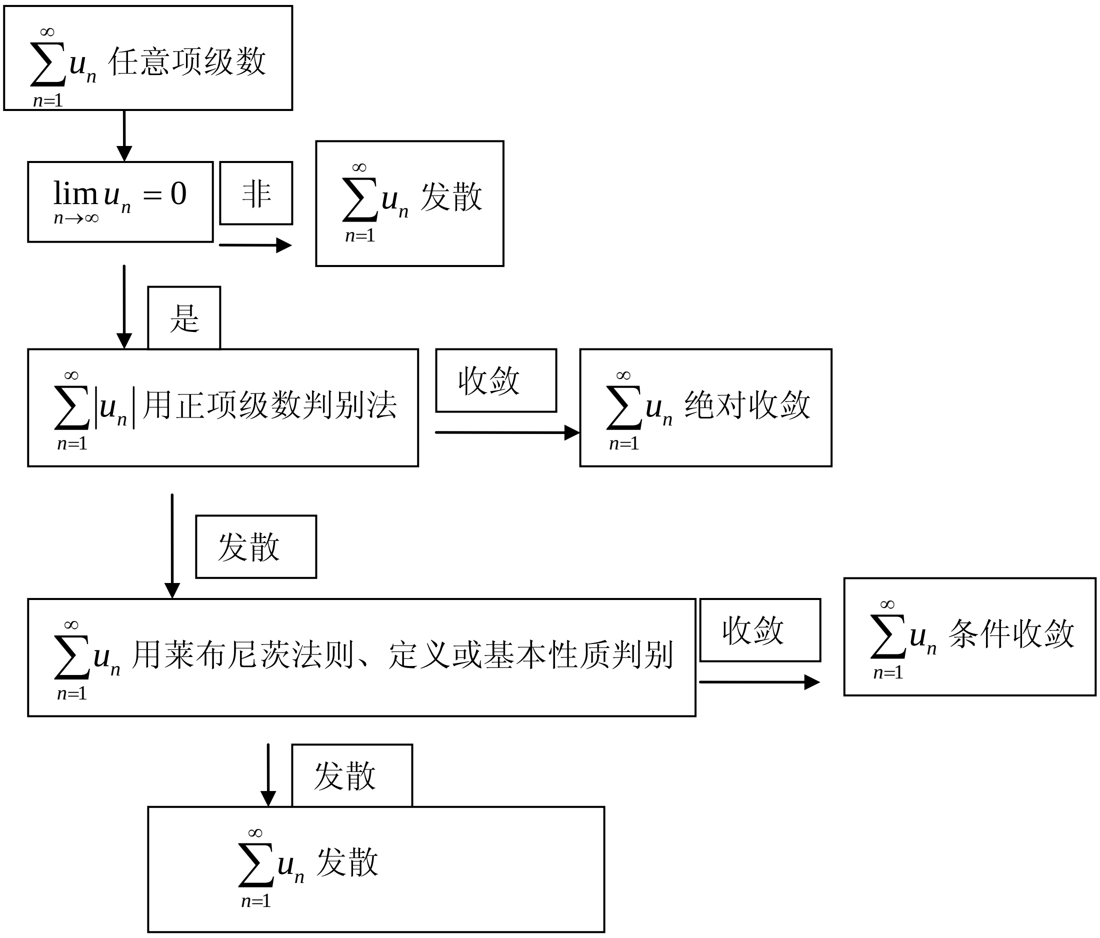
由$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$发散不能断言$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也发散。但如果$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$的发散是由比值法（或根值法）

推断出的，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也发散。

调和级数$\sum \dfrac{1}{n}$发散，而$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；级数$\sum \dfrac{1}{n^2}$收敛。

绝对收敛级数的和仍绝对收敛，绝对收敛级数与条件收敛级数的和是条件收敛。

**任意项级数的判别法：**①绝对值判别：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。即绝对收敛的级数一定收敛。②拆项或并项的方法，将通项拆成两几项之和，利用交错级数和正项级数的判别方法。其一般判别步骤如下图所示：




**幂级数：**

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad \begin{cases} |x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x} \\ |x|\geq 1\text{时，发散} \end{cases}$$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在$R$，使$\begin{cases} |x|<R\text{时收敛} \\ |x|>R\text{时发散，其中}R\text{称为收敛半径。} \\ |x|=R\text{时不定} \end{cases}$

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases}\rho\neq 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\ \rho=0\text{时，}R=+\infty\\ \rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$ **幂**

**级数在收敛域上的性质：**

若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径为$R_2$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$，收敛半径$R=\min\{\mathrm{R_1,R_2}\}$。

例：幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2^n}\right)x^n$的收敛域为________________

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}x^n$的收敛半径为1,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n$的收敛半径为2，$\therefore\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2^n}\right)x^n$的收敛半径为 1，当$x=\pm1$时，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2^n}\right)x^n$绝对收敛，所以，收敛域为$[-1,1]$。

当两个幂级数的收敛域不同时，它们的和的收敛域是两个收敛域的**交集**，这种方法可以简化求幂级数的收敛域。

幂级数在收敛域$(-\mathrm{R,R})$上绝对收敛，且和函数 S(x)为连续函数。若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在-R 或 R 处收敛，则 S(x)在-R 或 R 处分别右连续、左连续。和函数 S(x)为可导函数且$S`(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}$，逐项求导后收敛半径不变。和函数 S(x)为可积函数且$\int_0^x S(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt$，逐项积分后收敛半径不变。逐项求导、逐项积分后，**收敛半径不变**但收敛域可能改变，在端点处的敛散性可能改变。

若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处发散，则当$|x|>|x_0|$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$发散。如果在某点$x=x_0$处幂级数条件收敛，则$x=x_0$必位于该幂级数的收敛域的端点。

例：设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(\text{x-1})^n$在 x=3 处条件收敛，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在 x=3 处（ C ）

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛　　C. 发散　　D. 收敛性与$\{a_n\}$相关

解：原幂级数在 x=3 处条件收敛说明收敛半径为 3-1=2。幂级数经逐项积分、平移后，收敛半径不变，所以后一幂级数的收敛域为（-2，2]。X=3 在收敛域外，所以在该点处发散。

幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛半径的求法：设$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$或$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$（$\rho$可以为$\infty$），则当$\rho=0$时$\mathrm{R}=\infty$ 当$\rho=\infty$时$\mathrm{R}=0$，当$\rho\neq0$，$\infty$时 $\mathrm{R}=\dfrac{1}{\rho}$。此种求收敛半径的方法是充分条件，

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$不存在时并不能说收敛半径不存在，因为收敛半径总是存在的。对于类似$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{3n}$等级数的收敛半径不能这样做，应根据$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\mathrm{u}_{n+1}}{u_n}\right|<1$求收敛半径。

例：求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径。解：设$u_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$,用比值判别法，

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}x^2=4x^2$得：当$|x|<\dfrac{1}{2}$时$4x^2<1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$绝对收敛；当$|x|>\dfrac{1}{2}$时$4x^2>1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$发散；所以收敛半径为$R=\dfrac{1}{2}$。

错解：由公式$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4$，所以$R=\dfrac{1}{4}$。

小试身手：幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$的收敛半径为__________（答案：$\sqrt{3}$）

级数的和的求法：

观察所给幂级数通项$x^n$的系数$a_n$，若$a_n$为 n 的简单有理式，则通过拆项将其拆成更简单的分式之和；通过逐项积分，设法消去分式中分子的 n(或 n−1, n+1 等)；通过逐项求导，设法消去分式中分母的 n(或 n−1，n+1 等)；最后设法利用级数之和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$。若$a_n$的分母为$n!$或$(2n)!$或$(2\text{n-}1)!$也可通过上述方法化简，最后利用$e^x,\sin x,\cos x$的展开式求和。若$a_n$的分母为$(2n)!!$或$(2\text{n-}1)!!$也可通过上述方法化简，最后利用$(1+x)^m$的展开式求和。幂级数求和还应求出收敛域。常用方法举例：设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,用下列两种途径求和函数$s(x)$：（1）$s(x)=\int_0^x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1})dx$；（2）$s(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)'$。

用幂级数求和的方法求某些数项级数的和时，要找到一个适当的幂级数，求出它的和，再命 x 为某值得到欲求的数项级数的和。已知某些和求另一些与此相关的和时，关键步骤时，将欲求的前 n 项部分和表示成已知部分和，然后取极限。

**函数展开成幂级数：**

直接展开法：利用泰勒级数公式，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数。

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

$f(x)$展开成x的幂级数的步骤：

(1)求出$f^{(n)}(x)(n=1,2,\ldots)$；(2)求$f^{(n)}(0)(n=1,2,\ldots)$；

(3)写出$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$并求出敛散半径R；

(4)当$x\in(-R,R)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$（$\xi$位于0与$x$之间）是$f(x)$的迈克劳林级数收敛的充要条件。此时$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

间接展开法：通过一定的运算（主要是加减法，数乘运算，逐项积分和逐项求导运算）将函数转化为其它函数，进而利用新函数的幂级数（主要是一些简单函数的迈克劳林展开式）展开将原来函数展开为幂级数。间接法是将函数展开为幂级数的主要方法，具体方法是：①先求导，展开成幂级数后在积分；②先积分，展开成幂级数后在求导。当然，中间还要通过一些适当的运算。

**一些常用函数展开成幂级数：**

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n\ (-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\ (-1<x\le 1),\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\ (-1\le x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+..+x^n+\ldots(-1<x<1),\ \frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots(-1<x<1)$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots(-1<x<1)$$

**欧拉公式：** $e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$

**三角级数：**

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分$=0$。

**傅立叶级数：**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad 周期=2\pi,$$

$$其中a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad ,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx(n=1,2,3\cdots)$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}（相加）,1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}（相减）$$

正弦级数：$a_n=0$，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad n=1,2,3\cdots \quad f(x)=\sum b_n\sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n=0$，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad n=0,1,2\cdots \quad f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$是偶函数

**周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数：** $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),$

$$周期为2l,其中a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad ,b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(n=0,1,2,3\cdots)$$

当 x 是 f(x)的连续点时，该级数收敛于 f(x)；当 x 是 f(x)的间断点时，该级数收敛于 f(x)在该点的左右极限的平均值$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$。

## 4.2.例题选讲

例 1. 试求无穷级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$的和。

解：由于$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$,

$$\therefore 当|x-y|<\frac{\pi}{2}时有x-y=\arctan\left[\tan(x-y)\right]=\arctan\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$\therefore \arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例 2. 设$\{U_n\}$是单调递增且有界的正数数列，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{U_n}{U_{n+1}}\right)$收敛。

证明：由于$\{U_n\}$单调递增，则$0\le 1-\frac{U_n}{U_{n+1}}=\frac{U_{n+1}-U_n}{U_{n+1}}\le\frac{U_{n+1}-U_n}{U_1}$，

$\because \sum_{i=1}^{n}\frac{U_{i+1}-U_i}{U_1}=\frac{U_{n+1}-U_1}{U_1}$，由$\{U_n\}$单调递增且有界得$\lim\limits_{n\to\infty}U_n$存在

$\therefore$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{n+1}-U_n}{U_1}$收敛，　$\therefore$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{U_n}{U_{n+1}}\right)$收敛

例 3. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$的和。

解：$\frac{1}{2n^2}=\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}}=\tan\left(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n}\right)$

$$\therefore \arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例 4. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0)$的敛散性。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}=a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)}=\frac{a}{e}$

当 a>e 时，级数发散；当 0<a<e 时，级数收敛。

例 5. 求级数$\frac{1}{1\cdot2}x^2+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\frac{1}{5\cdot6}x^6+\cdots+\frac{1}{2n(2n-1)}x^{2n}+\cdots$的收敛域并求其和.

解：设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}x^{2n}$，则$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},x\in(-1,1)$

$$\therefore s'(x)=\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$s(x)=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$$

当 $x=\pm1$时，$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots\frac{1}{1+\frac{n}{n}}}{n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$$ $\therefore$ 收敛域为$\left[-1,1\right]$，和函数

$$s(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right),x\in\left(-1,1\right)\\ \ln 2,x=\pm1\end{cases}$$

例 6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

证　因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$ ，且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$。

证　方法 1　由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$，

所以，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\left|f''(0)\right|}{2}$，由比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

方法 2　因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，则 $f''(x)$ 在该邻域内的某闭子区间$[-a,a]$上有界，即存在常数 $M>0$，使得$|f''(x)|\le M$ 。由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2，\ 0<\theta<1$$

知，在区间 $[-a,a]$ 上，$\left|f(x)\right|\le\frac{Mx^2}{2}$，从而存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$。由此较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

例 7. 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$，试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的值。

解：令 $x=n\pi-t$，则

$a_n=-\int_{n\pi}^{0}(n\pi-t)\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=n\pi\int_0^{n\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x-\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$，

所以 $a_n=\dfrac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=n^2\pi,n=1,2,\cdots$。

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n,-1<x<1$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x},\qquad -1<x<1$

逐项求导，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2},\qquad -1<x<1$，

整理得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2},\qquad -1<x<1$。

再次逐项求导，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3},\qquad -1<x<1$

整理得 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3},\quad -1<x<1$。

例 8. 设 $a_0=4,a_1=1,a_{n-2}=n(n-1)a_n,n\geq 2$，（1）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$；（2）求 $S(x)$ 的极值。

解：（1）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)$，逐项求导得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}，\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}，\quad x\in(-R,R)。$$

依题意，得 $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，所以，有 $S''(x)-S(x)=0$。

解此二阶常系数齐次线性微分方程，得 $S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$。代入初始条件 $S(0)=a_0=4,S'(0)=a_1=1$。

得 $C_1=\dfrac{5}{2},C_2=\dfrac{3}{2}$。于是，$S(x)=\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^x+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}$。

（2）令 $S'(x)=\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^x-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}=0$，得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$。又 $S''(x)=\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^x+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}>0$，所以 $S(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$ 处取极小值。

例 9. 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上递减的连续函数，且 $f(x)>0$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，其中 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int\limits_1^n f(x)dx$。

Q $a_{n+1}$-$a_n$ $=f(n+1)-\int\limits_n^{n+1}f(x)dx=\int\limits_n^{n+1}(f(n+1)-f(x))dx\leq 0;$

$(\because f(n+1)-f(x)\leq 0)$

又$\because a_n=[f(1)-\int_1^2 f(x)dx]+[f(2)-\int_2^3 f(x)dx]+\cdots+$

$[f(n-1)-\int_{n-1}^{n} f(x)dx]+f(n)\geq 0 \therefore \{a_n\}$收敛

注 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$收敛，它的极限值记为C，

称为欧拉常数，$\therefore 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\mathrm{C}+\mathrm{o}(l)$ ($\mathrm{o}(l)$表示无穷小).

欧拉公式：$H_n=\ln n+c+o(l)$，其中 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$， $c=0.57721\ldots$，$\mathrm{o}(l)$表示无穷小，即 $\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=c$。欧拉常数 c，其近似值约为 0.5772156649015328606065 1209，目前还不知道它是有理数还是无理数。在微积分学中，欧拉常数有许多应用，如求某些数列的极限。

用欧拉公式求解有关级数的问题：

（1）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的和。

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n+1}-\frac{H_{n+1}-\frac{1}{n+1}}{n+2}\right)=$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{H_1}{2}+\frac{1}{2}=1$

（2）求积分$\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$。

解：$I=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}-2\right)dx+\ldots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{x}-n\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$I_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\ln(N+1)-H_{N+1}+1$

$\therefore I=\lim_{N\to\infty}I_N=\lim_{N\to\infty}\left[\ln(N+1)-H_{N+1}\right]+1=1-c$

（3）判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$的敛散性

解：$\dfrac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{3^{\ln n+c+o(l)}}=\dfrac{1}{3^{c+o(l)}}\square\dfrac{1}{n^{\ln 3}}, \therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^{\ln 3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^{c+o(l)}}=\dfrac{1}{3^{c}}$

$\because \ln 3>1, \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$ 收敛

例如可以这样求数列$x_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$的极限值：

由$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$=C+o（1），

和$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}-\ln 2n$=C+o（1），

$\therefore$两式相减，得：$x_n$-$\ln 2$ = o（1），$x_n\to\ln 2.$

通常也可以使用定积分的定义法求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

例 10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$发散。

证明：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0\Rightarrow f(0)=0$和$f'(0)=a>0$

$(\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0))$

再由导数的连续性，存在$x=0$的某邻域I,

使得$f'(x)>0.(x\in I)\therefore f(x)\uparrow(x\in I)$,

$\therefore f(\dfrac{1}{n})>0$，且单调递减并以零为极限($n$为自然数)。

交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$收敛。再由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a>0$

$\therefore$正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$同敛散，$\therefore$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$发散。

例 11. 证明$\pi^2+\frac{\pi^4}{3!}+\frac{\pi^6}{5!}+\ldots\ldots+\frac{\pi^{2n}}{(2n-1)!}+\ldots\ldots$收敛，并求和

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!}}{\frac{\pi^{2n}}{(2n-1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{2n(2n+1)}=0$，级数收敛

设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}x\left(e^x-e^{-x}\right)$,

$\therefore s(\pi)=\frac{\pi}{2}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)$即所求和为$\frac{\pi}{2}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)$。

例 12. 设$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2},a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，求证：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$。

证明：将 f(x)按马克劳林展开得$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其中$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$,

$$\because f(x)=\frac{1}{1-x-x^2},\therefore 1=\left(1-x-x^2\right)f(x)=\left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$1=\left(1-x-x^2\right)\left(a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\right)$$

$$=a_0+\left(a_1-a_0\right)x+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n\right)x^{n+2}$$

$$\therefore a_0=a_1=1,a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=a_n>0$$

$$a_{n+1}>a_n\geq a_0=1,\therefore a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\geq a_{n+1}+1,\therefore a_n\geq n,\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=2$$

故，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$，且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=2$

例 13. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\sqrt{n^2+2}\pi\right)$的敛散性。

解：设 $u_n=\tan\left(\sqrt{n^2+2}\pi\right)=\tan\pi\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)=\tan\frac{2\pi}{n+\sqrt{n^2+2}}>0$，

$u_n$ 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ ， $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\sqrt{n^2+2}\pi\right)$ 是收敛的交错级数。又

$$u_n=\tan\frac{2\pi}{n+\sqrt{n^2+2}}>\frac{2\pi}{n+\sqrt{n^2+2}}>\frac{2\pi}{n+\sqrt{n^2+2n^2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\pi}{n}>\frac{1}{n}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，所以原级数条件收敛。

例 14. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4},x\in[-\pi,\pi]$，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 。

证明：将 $x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成余弦级数，则 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{1}{n^3}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{4(-1)^n}{n^2},b_n=0,n=0,1,2,\ldots$$

所以，$x^2$ 的傅里叶级数为 $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in[-\pi,\pi]$

整理得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4},x\in[-\pi,\pi]$，令 x=0 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ 。

例 15.设函数 $f(x)$ 在 $|x|\le1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数，$x\neq0$ 时 $f(x)\neq0$，当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是 $x$ 的高阶无穷小，且 $\forall n\in N$ 有 $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|\le\left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right|$，

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_nb_{n+1}|}$ 收敛。

证明：$\because x\to0$ 时 $f(x)$ 是 $x$ 的高阶无穷小，$\therefore f(0)=0,f'(0)=0$，在 $x=0$ 的某邻域内将 $f(x)$ 展成泰勒公式，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\xi$ 介于 0，x 之间，$\because f''(x)$ 连续，$\therefore\left|f''(\xi)\right|\le M,\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2}Mx^2$

$\therefore$当 n 充分大时有 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{M}{2n^2}$，$\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2n^2}$ 收敛，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛

又$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \le \left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right|$,$\therefore \left|\frac{b_2}{b_1}\right| \le \left|\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f(1)}\right|$,$\left|\frac{b_3}{b_2}\right| \le \left|\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right|$,…,，

累乘得$\left|\frac{b_n}{b_1}\right| \le \left|\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f(1)}\right|$,$\therefore |b_n| \le \left|\frac{b_1}{f(1)}\right| \bullet \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_1}{f(1)}\right| \bullet \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛

$\because \sqrt{|b_n b_{n+1}|} \le \frac{|b_n|+|b_{n+1}|}{2}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(|b_n|+|b_{n+1}|\right)$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n b_{n+1}|}$收敛

例 16.

## 4.3 练习题

1. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$的和函数$S(x)$。

2. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$的和函数$S(x)$。

3. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$的收敛域为$(-4,2)$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-3)^n$的收敛区间为______________。

4. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛区间，若令$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，求$\int_0^1 S(x)dx$。

5. 若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(b_n \ge 0)$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$绝对收敛。

6. 求下列级数的收敛域：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{(3n-1)2^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left[3^n+(-2)^n\right]}x^n$的收敛域。

# 第五章　常微分方程

## 5.1.基本概念与内容提要

1. 可分离变量方程：经过变形后形如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$的

2. 齐次方程：形如$y^{`}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$，设$u=\dfrac{y}{x}$，则$y=ux, y^{`}=u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$，则$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}$，即$\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$两边同时积分即可。

3. 一阶线性方程：形如$y^{`}+p(x)y=q(x)$的解是
$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]。$$
其中，$y=Ce^{-\int p(x)dx}$是方程$y^{`}+p(x)y=0$的通解，
$y=e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$是原方程的特解。

4. 贝努里方程：形如$y^{`}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$，当$\alpha$=0 时是一阶线性方程；当$\alpha$=1 时是可分离变量方程；当$\alpha\neq 0,1$时，令$z=y^{1-\alpha}$，则有
$z^{`}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$，先解出 z 再解 y。

5. 可降阶的高阶方程：①形如$y^{"}=f(x)$连积两次分②形如
$y^{"}=f(x,y^{`})$,设$p=y^{`}$则$p^{`}=f(x,p)$解出 p 后再积分即可③形如$y^{"}=f(y,y^{`})$不含自变量 x，可令$p=y^{`}$利用复合函数求导法则将$y^{"}$化为对 y 的导数，
$y^{"}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，从而$p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$先解出 p 再分离变量并积分即可

6. 二阶常系数齐次线性方程：$y^{"}+p_1y^{`}+p_2y=0$的解法：求出特征根方程$r^2+p_1r+p_2=0$的两根$r_1,r_2$，根据两根的不同情况写出通解：

| $r^2+p_1r+p_2=0$的根 | $y^{"}+p_1y^{`}+p_2y=0$的解 |
|---|---|
| 两不等实根$r_1\neq r_2$ | $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ |
| 两相等实根$r_1=r_2$ | $y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$ |
| 一对共轭复根$\alpha\pm\beta i$ | $y=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$ |

7. n 阶常系数齐次线性方程：$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y^{`}+p_ny=0$的解法：求出特征根方程$r^n+p_1r^{n-1}+\ldots+p_{n-1}r+p_n=0$的解，根据特征根的情况写出通解中的对应项：

| 特征根方程的根 | 微分方程通解中的对应项 |
|---|---|
| 单实根 r | 一项：$ce^{rx}$ |
| k 重实根 r | k 项：$(c_1+c_2x+\ldots+c_kx^{k-1})e^{rx}$ |
| 一对单共轭复根$\alpha\pm\beta i$ | 两项：$y=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$ |
| 一对 k 重共轭复根$\alpha\pm\beta i$ | 2k 项：<br>$y=e^{\alpha x}[\left(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+$<br>$y=\left(D_1+D_2x+\ldots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x]$ |

由于 n 次代数方程有 n 个根，而每一个根对应着通解中的一项，且每一项各含一个任意常数，这样就得到 n 阶常系数齐次线性方程的通解是：$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$。n 阶齐次线性方程有且仅有 n 个线性无关的解。

8. 二阶常系数非齐次线性方程：$y''+p_1y'+p_2y=q\left(x\right),p_1,p_2$是实常数。$q\left(x\right)$是指数函数$e^{\alpha x}$、多项式函数$P_n\left(x\right)$、三角函数$a\cos\beta x+b\sin\beta x$或者是它们的乘积。将方程右边非齐次项$q\left(x\right)$分解成几个容易求解的部分的和，利用线性叠加原理，再分成几个子方程求解。具体方程求解方法是：

   ⑴ $q\left(x\right)=p_n\left(x\right)e^{\alpha x}$，其中 $p_n\left(x\right)$ 是 x 的 n 次多项式，$\alpha$ 是常数，特解是 $y^*=x^kq_n\left(x\right)e^{\alpha x}$，其中$q_n\left(x\right)$是与$p_n\left(x\right)$同次（n 次）的多项式，而 k 按$\alpha$是特征根方程根的重数分别取 0、1、2（即$\alpha$不是特征根方程的根 k 取 0，是特征根方程的单根 k 取 1，是二重根 k 取 2）。此结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性方程，但须注意 k 是特征根方程的根$\alpha$的重复次数（即若$\alpha$不是特征根方程的根 k 取 0，是特征根方程的 m 重根 k 取 m）。

   ⑵ $y''+p_1y'+p_2y=e^{\alpha x}\left[p_l^{(1)}\left(x\right)\cos\beta x+p_n^{(2)}\left(x\right)\sin\beta x\right]$ 的特解可设为 $y^*=x^ke^{\alpha x}\left[R_m^{(1)}\left(x\right)\cos\beta x+R_m^{(2)}\left(x\right)\sin\beta x\right]$其中 $m=\max\left\{l,n\right\}$，$R_m\left(x\right)$是 x 的 m 次多项式，k 是特征根方程中含根$\alpha+\beta i\left(或\alpha-\beta i\right)$的重复次数，可推广到 n 阶。

9. 解微分方程时，若是齐次的只有通解；若是非齐次的就先解出方程对应的齐次方程的通解，再求出非齐次的特解，二者相加即为非齐次方程的解。<u>**非齐次方程的两个解相减就是对应的齐次方程的解。**</u>

例：设$y_1=e^x\left(1+\sin x\right),y_2=e^x\left(1-\cos x\right)$是某二阶常系数非齐次线性微分方程的两个解，则该方程是___________________。

解：$y_1-y_2=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$是其对应得齐次方程的解，则特征方程的根是$r=1\pm i$，$\therefore$特征方程是$r^2-2r+2=0$，设方程为$y''-2y'+2y=f\left(x\right)$，将$y_1$代入得：$f\left(x\right)=e^x$，$\therefore$原微分方程为$y''-2y'+2y=e^x$。

10. 高阶线性微分方程解的结构:参考教材 P285 内容。
11. 常数变易法：通过把对应齐次线性方程的通解中的任意常数，变易为待定函数去求非齐次线性方程通解的方法。

设非齐次线性方程为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$（1），其对应的齐次线性方程为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$（2）。用常数变易法求解非齐次线性方程通解的方法是：设已知齐次线性方程的两个线性无关解为 $y_1(x), y_2(x)$，则 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 是方程（2）的通解，其中 $c_1, c_2$ 是常数。考虑（1）解时，$c_1, c_2$ 是两个待定函数，即 $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ 是（1）的特解。则有：

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

解题步骤：①求方程（2）的解 $y_1(x), y_2(x)$；

②根据上述方程组得出 $c_1'(x), c_2'(x)$，在积分得到 $c_1(x), c_2(x)$；

③写出（1）的解 $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$。

例：解微分方程 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$。

解：①求方程（2）的解 $y_1(x), y_2(x)$：特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$，解得 $r_1 = -1, r_2 = -2$，

$\therefore$ 方程（2）的通解为 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$，

其中 $y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{-2x}$；

②设方程（1）的特解为 $y = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}$，

根据方程组 $\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ c_1'(x)e^{-x} + 2c_2'(x)e^{-2x} = -\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \\ c_2'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} \end{cases}$，

积分得到 $\begin{cases} c_1(x) = \ln(e^x + 1) \\ c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x) \end{cases}$；

③写出（1）的解 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x)$。

12. 解欧拉方程：作变量代换，令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$

解拉普拉斯方程：作变量代换，令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 或 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

解全微分方程：设 $du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$，即 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$：

（1）若 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$，则原方程是全微分方程。

解法一：由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ 积分得 $u(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$，再由 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ 确定 $C(y)$。即可解得方程。

解法二：利用积分与路径无关，积分可得

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx+Ndy=\int_{x_0}^{x} Mdx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$。

（2）若 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，则原方程不是全微分方程。$\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 才是全微分方程，其中 $\mu(x,y)$ 是积分因子。

$\therefore \dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ 即 $M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$

①当 $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$ 时，$\mu(x,y)=\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$；

②当 $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)=\phi(y)$ 时，$\mu(x,y)=\mu(y)=e^{\int\phi(y)dy}$。

## 5.2.例题选讲

例 1.解微分方程 $yy''+(y`)^2+1=0$。

解：令 $g=yy`$，则 $g'=yy''+(y`)^2$，原方程化为 $g'=-1$，

积分得 $g=yy`=-x+c_1,\dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$

例 2. 设对于半空间 x>0 内任意的光滑有向封闭曲面都有 $\displaystyle\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$，其中函数 f(x) 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在，求 f(x)。

解：对任意光滑封闭曲面由高斯公式得

$\displaystyle\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=\iiint_V\left[xf`(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dV$ 由题意得 $xf`(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0(x>0)$ 恒成立

$\therefore f`(x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)f(x)=\dfrac{1}{x}e^{2x},解得f(x)=\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在得：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}$ 存在 $\therefore\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{2x}+Ce^x\right)=0\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$

例 3. 设 f(x) 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上可导，f(1)=3，且

$$\int_1^{xy} f\left(t\right)dt = x\int_1^{y} f\left(t\right)dt + y\int_1^{x} f\left(t\right)dt\left(x>0, y>0\right)$$，求 f(x)。

解：方程两边同时对 x 求导得 $yf\left(xy\right)=\int_1^{y} f\left(t\right)dt+yf\left(x\right)$

两边对 y 求导得 $xyf`\left(xy\right)+f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$

令 y=1 得 $xf`\left(x\right)+f\left(x\right)=f\left(x\right)+3 \therefore f`\left(x\right)=\frac{3}{x}, f\left(x\right)=3\ln x+C$

由 f(1)=3 得 C=3，$\therefore f\left(x\right)=3\ln x+3$

例 4. 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f_x'(x,y)=-f(x,y), f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，且满足

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=\mathrm{e}^{\cot y}$$，求 $f(x,y)$。

解：方法 1 先计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}}=\mathrm{e}^{\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}},$$

依题意，得 $\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\frac{\mathrm{d}\ln f(0,y)}{\mathrm{d}y}=\cot y$，对 y 积分

$\ln f(0,y)=\ln\sin y+\ln C$，故 $f(0,y)=C\sin y$。代入 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$ 得 $C=1$，即

又由 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f$ 积分得 $f(x,y)=\varphi\ (y^{-x}$，由 $f(0\ y=)$ 和 $\varphi(y)=\sin y$，所以

$f(x,y)=\ ^{-x}\mathrm{e}\ \ \mathrm{s}$。

方法 2　视 y 为常数，求解分离变量方程 $\frac{df(x,y)}{f(x,y)}=-\mathrm{d}x$，得

$\ln f(x,y)=-x+\ln\varphi(y)$，即 $f(x,y)=\varphi(y)\mathrm{e}^{-x}$。

$$\text{依题意得 }\mathrm{e}^{\cot y}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\varphi(y)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)-\varphi(y)}{\varphi(y)}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}$$

及 $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。于是，有 $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\cot y$，两边积分并整理得 $\varphi(y)=C\sin y$，代入初始条件得 $C=\lambda$，所以，$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$。

例 5. 设 f(t)在$\left[1,+\infty\right)$上有连续的二阶导数，f(1)=0, $f^{'}\left(1\right)=1$，且二元函数 $z=\left(x^2+y^2\right)f\left(x^2+y^2\right)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 f(t)在$\left[1,+\infty\right)$上的最大值。

解：令$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 则$z=r^2 f\left(r^2\right)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\left[2rf\left(r^2\right)+2r^3 f^{'}\left(r^2\right)\right]=2x\left[f\left(r^2\right)+r^2 f^{'}\left(r^2\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\left[f\left(r^2\right)+r^2 f^{'}\left(r^2\right)\right]+2x\left[4rf^{'}\left(r^2\right)+2r^3 f^{''}\left(r^2\right)\right]\frac{x}{r}$$

$$=2f\left(r^2\right)+2r^2 f^{'}\left(r^2\right)+4x^2\left[2f^{'}\left(r^2\right)+r^2 f^{''}\left(r^2\right)\right]$$

由对称性得$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f\left(r^2\right)+2r^2 f^{'}\left(r^2\right)+4y^2\left[2f^{'}\left(r^2\right)+r^2 f^{''}\left(r^2\right)\right]$

$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4f\left(r^2\right)+4r^2 f^{'}\left(r^2\right)+4r^2\left[2f^{'}\left(r^2\right)+r^2 f^{''}\left(r^2\right)\right]=0$ 即

$$r^4 f^{''}\left(r^2\right)+3r^2 f^{'}\left(r^2\right)+f\left(r^2\right)=0$$

此为欧拉方程，令$r^2=e^t$，并记$g\left(t\right)=f\left(e^t\right)$，得二阶常系数线性方法

$g^{''}\left(t\right)+2g^{'}\left(t\right)+g\left(t\right)=0$，解得 $f\left(e^t\right)=g\left(t\right)=\left(c_1+c_2 t\right)e^{-t}$，

即 $f\left(r^2\right)=\frac{c_1+c_2\ln r^2}{r^2},\therefore f\left(t\right)=\frac{c_1+c_2\ln t}{t}$ 由 f(1)=0, $f^{'}\left(1\right)=1$ 得

$c_1=0,c_2=1,\therefore f\left(t\right)=\frac{\ln t}{t},f^{'}\left(t\right)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当 t>e 时 $f^{'}\left(t\right)<0$，当 t<e 时 $f^{'}\left(t\right)>0$，所以 f(t)在$\left[e,+\infty\right)$上递减，在$\left[1,e\right]$上递增，

$\therefore$f(t)在$\left[1,+\infty\right)$上的最大值为$f\left(e\right)=\frac{1}{e}$。

例 6. 解微分方程$\left(x^2\ln x\right)y^{''}-xy^{`}+y=0$的通解。

解：$\because y_1=x$是原方程的解，设$y_2=xu\left(x\right)$，求一阶、二阶导数后代入原方程得

$$\left(x^2\ln x\right)\left[xu^{''}\left(x\right)+2u^{'}\left(x\right)\right]-x\left[xu^{'}\left(x\right)+u\left(x\right)\right]+xu\left(x\right)=0$$

即$\left(x^3\ln x\right)u^{''}\left(x\right)+x^2\left(2\ln x-1\right)u^{'}\left(x\right)=0$

$\therefore\frac{u^{''}\left(x\right)}{u^{'}\left(x\right)}=-\frac{2\ln x-1}{x\ln x}$解得$u^{'}\left(x\right)=-\frac{c_1\ln x}{x^2}$

$$\therefore u(x)=-\int\frac{c_1\ln x}{x^2}dx=c_1\frac{\ln x+1}{x}+c_2\ \therefore y_2=c_1(\ln x+1)+c_2x$$

所以，原方程的通解为 $y=c_1(\ln x+1)+c_2x$。

例 7.

## 5.3.练习题

1.设 $y_1=1,y_2=e^x,y_3=2e^x,y_4=e^x+\frac{1}{\pi}$ 都是某二阶常系数线性微分方程的解，则此二阶常系数线性微分方程为_______。

2. 求出满足方程 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$ 的 f(x)。

3. 设函数 Q(x, y) 在 xoy 平面内具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，并对任意实数 t 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$，求 Q(x, y)。

4. 设函数 f(x) 具有二阶连续导数，f(0)=0，$f'(0)=1$，且方程 $[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f`(x)+x^2y]dy=0$ 为一全微分方程，求 f(x) 及此全微分方程的通解。

5.设 f(x) 在 $(0,+\infty)$ 上可导，f(1)=3 且 $\int_1^{xy}f(t)dt=x\int_1^y f(t)dt+y\int_1^x f(t)dt$ $(x>0,y>0)$，求 f(x)。

6. 以四个函数 $y_1=e^x,y_2=xe^x,y_3=3\cos 3x,y_4=4\sin 3x$ 为解的 4 阶常系数线性齐次微分方程是____________，该方程的通解为___________。

7.

# 第三部分　竞赛真题与模拟题及参考答案

## 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷一（非数学类）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.55**

一、计算题（每小题 5 分，满分 20 分）

1．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2})^n$

2．确定自然数 $m$ 的取值范围，使函数 $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的二阶导数存在。

3．计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x-y^2\right| dxdy,\quad D=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}.$

4．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛区域.

二、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内具有一阶连续导数，$L$ 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，$L$ 的起点为 $(a,b)$, 终点为 $(c,d)$. 记

$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy.$

1）证明曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关；

2）当 $ab=cd$ 时，求 $I$ 的值。

三、（本题满分 10 分）证明不等式 $1\le\iint\limits_D(\sin y^2+\cos x^2)dxdy\le\sqrt{2}$, 其中 $D$ 为正方形区域：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1.$

四、（本题满分 15 分）已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,\ 0)$ 处的切线相同，求此切线方程，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\frac{k}{n})$, 其中 $k$ 为一非零常数.

五、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)$ 定义在 $[0,\ c]$ 上，$f'(x)$ 在 $(0,\ c)$ 内存在且单调下降，又 $f(0)=0$. 证明：对于 $0\le a\le b\le a+b\le c$, 恒有 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$.

六、（本题满分 15 分）设 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$，试求函数 u 的解析式。

七、（本题满分 15 分）求出使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 $\alpha$ 及最小的数 $\beta$：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 。

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷一参考答案

二、计算题（每小题 15 分，满分 60 分）

1．**解**：$\because\ (1+\dfrac{x}{n})^n<(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2})^n=(1+\dfrac{x(n+\frac{x}{2})}{n^2})^n<\left[1+\dfrac{x(n+\frac{x}{2})}{n^2-\frac{x^2}{4}}\right]^n=\left[1+\dfrac{x}{n-\frac{x}{2}}\right]^n$

易知 $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$, 对 $\left(1+\dfrac{x}{n-\frac{x}{2}}\right)^n$ 进行变量代换，令 $n-\dfrac{x}{2}=m$, 则当 $n\to\infty$ 时 $m\to\infty$,

并且 $=m+\dfrac{x}{2}$, 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n-\frac{x}{2}}\right)^n=\lim\limits_{m\to\infty}\left[(1+\dfrac{x}{m})^m(1+\dfrac{x}{m})^{\frac{x}{2}}\right]=e^x$

由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2})^n=e^x$.

2．**解**：要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$m$ 应满足以下条件：

当 $x\neq 0$ 时，对任意自然数 $m$，都存在 $f'(x)=(x^m\sin\dfrac{1}{x})'=mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}$，①

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}$，要使此极限存在，$m$ 应满足 $m-1>0$, ②

由①，②知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(mx^{m-2}\sin\frac{1}{x}-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}),$$

要使以上极限存在，$m$ 应满足 $m>3$, ③

由②，③知要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导存在，$m$ 的取值范围为：$m>3$。

3．**解**：令 $x-y^2=0$, 抛物线 $x=y^2$ 将区域 $D$ 分成 $D_1$ 和 $D_2$ 两块，其中

$$D_1=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ \sqrt{x}\le y\le 1,\end{cases}\qquad D_2=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le\sqrt{x},\end{cases}$$

在 $D_1$ 中，$|x-y^2|=y^2-x$, 而在 $D_2$ 中 $|x-y^2|=x-y^2$.

于是 $\iint\limits_D|x-y^2|dxdy=\iint\limits_{D_1}|x-y^2|dxdy+\iint\limits_{D_2}|x-y^2|dxdy$

$$=\iint_{D_1}(y^2-x)dxdy+\iint_{D_2}(x-y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1(y^2-x)dy+\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}(x-y^2)dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+x^{\frac{3}{2}}]dx+\int_0^1[x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}]dx=\int_0^1[\frac{1}{3}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}]dx=\frac{11}{30}.$$

4．**解：**令 $x^2=t,$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}t^n$ 的收敛半径

$R_t=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}{2^n+(-3)^n}\right|=3,$ 于是原级数的收敛半径 $R=\sqrt{3}.$

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(\pm\sqrt{3})^{2n}}{2^n+(-3)^n}\right|\neq 0,$ 故该级数的收敛区域为 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}).$

二、（本题满分 20 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内具有一阶连续导数，$L$ 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，$L$ 的起点为 $(a,b),$ 终点为 $(c,d).$ 记

$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$

1）证明曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关；

2）当 $ab=cd$ 时，求 $I$ 的值。

1）**证明：**由于 $\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关。

2）**解：**由于曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关，故可取路径为：由点 $(a,b)$ 到点 $(c,b)$ 再到点 $(c,d).$

所以 $I=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d cf(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}.$$

令 $t=bx,\ u=cy,$ 则 $I=\frac{c}{d}-\frac{c}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)dt+\int_{bc}^{cd}f(u)du=\frac{c}{d}-\frac{c}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)dt,$

由条件 $ab=cd$，得 $I=\frac{c}{d}-\frac{c}{b}.$

三、（本题满分 20 分）证明：由于 $D$ 关于 $y=x$ 对称，由对称性可知

$\iint_D\sin y^2dxdy=\iint_D\sin x^2dxdy,$ 故 $\iint_D(\sin y^2+\cos x^2)dxdy=\iint_D(\sin x^2+\cos x^2)dxdy$

$$=\sqrt{2}\iint_D(\sin x^2\cos\frac{\pi}{4}+\cos x^2\sin\frac{\pi}{4})dxdy=\sqrt{2}\iint_D\sin(x^2+\frac{\pi}{4})dxdy.$$

由于当$(x,\ y)\in D$时，$\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1,$所以

$1=\sqrt{2}\iint_D\frac{1}{\sqrt{2}}dxdy\le\iint_D(\sin y^2+\cos x^2)dxdy\le\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2},$从而结论成立。

四、（本题满分 20 分）解：设$g(x)=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$，

故 $f'(x)\big|_{x=0}=g'(x)\big|_{x=0}=e^{-(\arctan x)^2}\frac{1}{1+x^2}\big|_{x=0}=1,$

于是得， $g(x)$在$(0,\ 0)$点处的切线方程为：$y=x.$

由$g(0)=0,$得 $f(0)=0,$ 故$\lim\limits_{n\to\infty}nf(\frac{k}{n})=k\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(\frac{k}{n})}{\frac{k}{n}}=k\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(\frac{k}{n})-0}{\frac{k}{n}-0}=kf'(0)=k.$

五、（本题满分 15 分）**证明：**由于$f(0)=0$，$f'(x)$在$(0,\ c)$上存在，由 $L$—中值定理，

$\exists\xi_1\in(0,\ a),$使得$f(a)-f(0)=af'(\xi_1)$，①

同理可知，$\exists\xi_2\in(b,\ a+b),$使得$f(a+b)-f(b)=(a+b-b)f'(\xi_2)=af'(\xi_2)$. ②

由于函数$f'$单调下降，且$0\le a\le b\le a+b\le c,$故有$\xi_2>\xi_1,$于是得$f'(\xi_2)\le f'(\xi_1),$

由以上①，②两式得：$f(a+b)-f(b)\le f(a)$，即：$f(a+b)\le f(a)+f(b).$

六、（本题满分 15 分）解：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+\frac{1}{(2n)!})}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n}\frac{1}{(2n)!},$$

由$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x)^{2n}\frac{1}{(2n)!}$，$-\infty<x<+\infty,$得：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n}\frac{1}{(2n)!}=\cos\frac{1}{\sqrt{2}}.$

设$s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，$x\in(-1,\ 1)$，则$\int_0^x[\int_0^x s(x)dx]dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$

所以$s(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1).$

于是由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n=\frac{4}{27}$，得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}.$

七.（本题 15 分）解：令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}\frac{du}{dr}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{x^2}{r^3}\frac{du}{dr}$$

同理可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{y^2}{r^3}\frac{du}{dr}$

代入原方程化简得 $\frac{d^2u}{dr^2}+u=r^2$

解此二阶常系数非齐次微分方程，得其通解为：$u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$，

故，函数 u 的表达式为 $u=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$，

其中 $C_1,C_2$ 为常数。

七.（本题 15 分）解：要证 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$，

即证 $(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le 1\le(n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，即证 $\alpha\le\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\le\beta$，

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x},x\in(0,1]$，则 $f`(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)}=\frac{(x+1)\ln^2(x+1)-x^2}{x^2(x+1)\ln^2(x+1)}$，

令 $g(x)=(x+1)\ln^2(x+1)-x^2$，则

$g`(x)=2\ln(x+1)+\ln^2(x+1)-2x, g''(x)=\frac{2}{1+x}\left[\ln(x+1)-x\right]<0$

$\therefore g`(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，$\therefore g`(x)<g`(0)=0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减

$\therefore g(x)<g(0)=0$ 即 $f`(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减

$\therefore \alpha=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1,\beta=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2+\ln(x+1)}=\frac{1}{2}$$

所以，$\alpha=\frac{1}{\ln 2}-1,\beta=\frac{1}{2}$

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷二（非数学类）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.6**

一. 填空题（本题共有 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin x\tan 2x}=$ $\underline{-\dfrac{1}{4}}$

(2)　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=\underline{\ln 2}$

（3）设 $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ ，$y^{(100)}=\dfrac{100!}{(x-3)^{101}}-\dfrac{100!}{(x-2)^{101}}$

（4）　函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\quad(x>0)$ 的单调减少区间为 $\underline{\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\text{或}\left(0,\dfrac{1}{4}\right]}$

（5）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx=$ $\underline{\quad 0\quad}$

二.（本题满分 10 分）设 $f(x)=nx(1-x)^n$ （$n$ 为正整数），
（1）求 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$；（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$

三.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$

（1）$a$ 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续；
（2）$a$ 为何值时，$x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

四（本题满分 10 分，每题 5 分）

（1）　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ 3-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$，试求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，并讨论 $F(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性。

（2）　设 $f(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$

五.（本题满分 10 分）已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线方程。

六.（本题满分 10 分）已知 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$。

七.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$。

八.（本题满分 10 分）已知 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)$

九.（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续、正值偶函数，又设

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt\text{，}\ -a\le x\le a\ \ (a>0)$$

（1）试证： $F''(x)>0$；（2）求 $F(x)$ 最小值点。

十.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$。试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$。

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷二参考答案

一. 填空题（本题共有 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin x\tan 2x}=$ $\underline{-\dfrac{1}{4}}$

（2） 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=\underline{\ln 2}$

（3）设 $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ ，$y^{(100)}=\dfrac{100!}{(x-3)^{101}}-\dfrac{100!}{(x-2)^{101}}$

（4） 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\ \ (x>0)$ 的单调减少区间为 $\underline{\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\text{或}\left(0,\dfrac{1}{4}\right]}$

（5）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx=$ $\underline{\ \ 0\ \ }$

二.（本题满分 10 分）解： $f'(x)=n[(1-x)^n-nx(1-x)^{n-1}]=n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1}{1+n}$， $x_2=1$，

当 $0<x<\dfrac{1}{1+n}$ 时， $f'(x)>0$；当 $\dfrac{1}{1+n}<x<1$ 时， $f'(x)<0$；

故 $x_1=\dfrac{1}{1+n}$ 为 $f(x)$ 的极大值点， $f(x_1)=f\left(\dfrac{1}{1+n}\right)=\dfrac{n}{1+n}\left(1-\dfrac{1}{1+n}\right)^n$ 为对应的极大值。

又 $f(0)=f(1)=0$ 故 $f(x_1)$ 即为 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的最大值：

$$M(n)=\frac{n}{1+n}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^n$$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+n}\left(1-\dfrac{1}{1+n}\right)^n=e^{-1}$

三.（本题满分 10 分）解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-6a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2\lim_{x\to 0^+}\left(a^2e^{ax}+2\right)=2a^2+4$$

命 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，即 $-6a=2a^2+4$，解得 $a=-1$，$a=-2$，

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=6=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续。

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=12\neq f(0)=6$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

四（本题满分 10 分，每题 5 分）（1）解：当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$；

当 $1\le x\le 2$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$

$$=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1+\left(3t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^x=\frac{1}{3}+\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)-3+\frac{1}{2}=-\frac{13}{6}+3x-\frac{1}{2}x^2,$$

因此，$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3 & ,0\le x<1\\ -\frac{13}{6}+3x-\frac{1}{2}x^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\frac{13}{6}+3x-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{3}$，

因此，$F(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

（2）解：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^2f'(x)dx\right]$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2xdx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2\cdot 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2dx^2=\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}[\cos 1-1]$$

五.（本题满分 10 分）解：由直角坐标与极坐标之间的关系 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

得到此曲线的参数方程：$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\end{cases}$

以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入，得到切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

由参数方程求导公式得切线斜率为 $\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1$

所以曲线切线、法线的直角坐标方程分别为：

$x-y+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}=0$， $x+y-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

六.（本题满分 10 分）解：令 $x=0$，则 $y(0)=1$，对方程两端求导，

得到 $e^y y'+y+xy'=0$（1），将 $x=0, y=1$ 代入，得 $y'(0)=-e^{-1}$

对（1）式两端再求导，得 $e^y(y')^2+e^y y''+2y'+xy''=0$

代入上述结果，得 $y''(0)=e^{-2}$

七.（本题满分 10 分）解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$，

令 $x-t=u$，则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$

利用积分中值定理，存在 $\xi$，介于 0 与 $x$ 之间，因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{1}{2}$$

八.（本题满分 10 分）解：令 $\sin^2 x=t$，则 $\cos 2x+\tan^2 x=1-2t+\frac{t}{1-t}$，

所以 $f'(x)=1-2x+\frac{x}{1-x}=-2x+\frac{1}{1-x}$，

$$f(x)=\int\left(-2x+\frac{1}{1-x}\right)dx=-x^2-\ln|1-x|+c$$

九.（本题满分 10 分）解：（1） $F(x)=x\int_{-a}^x f(t)dt-\int_{-a}^x tf(t)dt+x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$F'(x)=\int_{-a}^x f(t)dt+\int_a^x f(t)dt$， $F''(x)=2f(x)>0$

（2） $F'(x)=\int_{-a}^x f(t)dt+\int_a^x f(t)dt$

由于 $f(x)$ 为偶函数，对于 $\int_a^x f(t)dt$，作变量替换： $t=-u$，则有

$\int_a^x f(t)dt=\int_{-x}^{-a} f(u)du=\int_{-x}^{-a} f(t)dt$，于是

$$F'(x)=\int_{-a}^x f(t)dt+\int_a^x f(t)dt=\int_{-a}^x f(t)dt+\int_{-x}^{-a} f(t)dt=\int_{-x}^x f(t)dt$$

由积分中值定理， $\int_{-x}^x f(t)dt=f(\xi)2x$

令 $F'(x)=0$，得到 $x=0$，而 $F''(0)=2f(0)>0$，

因此， $x=0$ 是唯一的极小值点，故 $x=0$ 也是最小值点。

十.（本题满分 10 分）证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $M$，最小值为 $m$，于是 $m\le f(0)\le M$，

$m\le f(1)\le M$， $m\le f(2)\le M$

故 $m \le \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \le M$

由介值定理知，存在 $c\in[0,2]$，使 $f(c)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$

因为 $f(c)=1=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，因此由罗耳中值定理知，存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$。

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷三（非数学类）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.6**

一、计算题（每小题 4 分，满分 20 分）

1.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i\sin\dfrac{i\pi}{n}$。

2．计算不定积分 $\int\sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$。

3．设 $f(x)=(\tan\dfrac{\pi x}{4}-1)(\tan\dfrac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\dfrac{\pi x^{100}}{4}-100)$，求 $f'(1)$。

4．设 $\begin{cases} x=\cot t \\ y=\dfrac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}$，$t\in(0,\pi)$，求此曲线的拐点。

5．已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，求常数的值 $a,b$。

二、（满分 10 分）设 $f(0)=0, 0<f'(x)<1$，证明：当 $x>0$ 时，$(\int_0^x f(t)dt)^2>\int_0^x f^3(t)dt$

三、（满分 10 分）设 $g(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}dt$，求 $g(x)$ 的最小值。

四、（满分 15 分）已知点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(1,1,1)$，$\Sigma$ 是由直线 AB 绕 Oz 轴旋转一周而成的旋转曲面介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧，函数 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)-2x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[y^2-yf(xy)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

五、（满分 10 分）设 $F(t)=\int_0^{\pi}\ln(1-2t\cos x+t^2)dx$，证明：

（1） $F(t)$ 为偶函数；（2） $F(t^2)=2F(t)$

六、（满分 10 分）设 $f$ 为连续函数，且 $0\le f(x)\le 1$，证明在 $[0,1]$ 上方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 有唯一解。

七、（满分 15 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a,b>0)$ 的收敛半径和收敛域。

八、（满分 10 分）设对于半空间 x>0 内任意的光滑有向封闭曲面都有

$\iint\limits_{S} xf\left(x\right)dydz - xyf\left(x\right)dzdx - e^{2x}zdxdy = 0$，其中函数 f(x) 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ 存在，求 f(x)。

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷三参考答案

一、计算题（每小题 4 分，满分 20 分）

1.解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 x\sin\pi x dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 xd\cos\pi x = -\frac{1}{\pi}(x\cos\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1\cos\pi x dx)$

$$= -\frac{1}{\pi}(-1-\frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big|_0^1) = \frac{1}{\pi}$$

2.解 $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx = -\frac{4}{3}\int d\sqrt{1-x\sqrt{x}} = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C$

3.解 $f(x) = (\tan\frac{\pi x}{4}-1)[(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)]$

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}[(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)]$$

$$+(\tan\frac{\pi x}{4}-1)[(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)]'$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}[(1-2)\cdots(1-100)] = -\frac{\pi}{2}\times 99!$$

4．解：$\frac{dy}{dt} = -\csc t\cot t - 2\cos t$，$\frac{dx}{dt} = -\csc^2 t$

$\frac{dy}{dx} = \cos t(1+2\sin^2 t)$，$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\sin^3 t\cos 2t$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 得 $t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{3\pi}{4}$，当 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$，当 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$，当 $\frac{3\pi}{4} < t < \pi$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$，因此拐点为 $(1,0),(-1,0)$

5．解 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx-1)\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x+2ax+b)}{2x}} = 1$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2ax+b) = 0$，$b = -1$，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x+2a)}{2} = 0$，得 $a = -\frac{1}{2}$

另解：$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+e^x+ax^2+bx-1)^{\frac{1}{e^x+ax^2+bx-1}\cdot\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x-0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$ ＝1

$$\lim_{x-0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2} = \lim_{x-0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+ax^2+bx-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+(\frac{1}{2}+a)x^2+o(x^2)}{x^2}=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2},b=-1$$

二、（满分 10 分）证明：设 $F(x)=(\int_0^x f(t)dt)^2-\int_0^x f^3(t)dt$

则 $F(0)=0$， $F'(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)]$，

由 $f(0)=0$ 且 $0<f'(x)<1$，知当 $x>0$ 时， $f(x)>0$。

又设 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$ 则 $g(0)=0,g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$，

所以 $F'(x)>0$，从而 $F(x)>F(0)$,不等式得证.

三、（满分 10 分）解：当 $x>1$ 时，$g(x)=2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，，$g'(x)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>0$，故当 $x\ge 1$ 时 $g(x)$ 单调增加；当 $x<-1$ 时， $g(x)=-2x\int_0^1 e^{t^2}dt$， $g'(x)=-2\int_0^1 e^{t^2}dt<0$ 故当 $x\le 1$ 时 $g(x)$ 单调减少；当 $-1<x<1$ 时， $g(x)=\int_{-1}^x (x-t)e^{t^2}dt+\int_x^1 (t-x)e^{t^2}dt$

$$=x\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_{-1}^x te^{t^2}dt+\int_x^1 te^{t^2}dt-x\int_x^1 e^{t^2}dt,$$

$$g'(x)=\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_x^1 e^{t^2}dt=\int_{-x}^x e^{t^2}dt。$$

由 $g'(x)=0$ 得 $x=0$。当 $-1<x<0$ 时， $g'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时， $g'(x)>0$，

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，又 $g(1)=g(-1)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>2\int_0^1 dt=2$

$g(0)=2\int_0^1 te^{t^2}dt=e^{t^2}|_0^1=e-1$，故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=e-1$

四、（满分 15 分）解：直线 AB 的方程为 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，直线 $AB:\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面Σ的方程为 $x^2+y^2=1+z^2$，即 $x^2+y^2-z^2=1$，

记 $P=xf(xy)-2x,Q=y^2-yf(xy),R=(z+1)^2$，则

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)-2$， $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=2y-f(xy)-xyf'(xy)$， $\dfrac{\partial R}{\partial z}=2(z+1)$，

于是 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2y+2z$。

补面 $\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\le 1)$，下侧；$\Sigma_2:z=(x^2+y^2\le 2)$，上侧。由高斯公式知

$$I_0=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$=\iiint_\Omega(2y+2z)\mathrm{d}V$，由对称性知，$\iiint_\Omega y\mathrm{d}V=0$，利用截面法得：

$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z:x^2+y^2\le 1+z^2}\mathrm{d}\sigma=\pi\int_0^1(z+z^3)\mathrm{d}z=\dfrac{3}{4}\pi$，故 $I_0=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\dfrac{3}{2}\pi$。

又 $I_1=\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$，

$$I_2=\iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2} 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi,$$

所以，$I=I_0-I_1-I_2=\dfrac{3}{2}\pi-(-\pi)-8\pi=-\dfrac{11}{2}\pi$。

五、（满分 10 分）证明：（1）$F(-t)=\int_0^{\pi}\ln(1+2t\cos x+t^2)dx$

$$\overset{x=\pi-u}{=}\int_0^{\pi}\ln(1-2u\cos x+u^2)dx=\int_0^{\pi}\ln(1-2t\cos x+t^2)dx=F(t)$$

（2）$2F(t)=F(t)+F(-t)==\int_0^{\pi}\ln[(1+t^2)^2-4t^2\cos^2 x)]dx$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1+2t^2\cos 2x+t^4)dx\overset{2x=\pi-y}{=}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2(-t^2)\cos y+(-t^2)^2)dy$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2(-t^2)\cos y+(-t^2)^2)dy=F(-t^2)=F(t^2)$$

六、（满分 10 分）证明：设 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$，

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=-1<0$

$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt$，当 $f(x)=1$ 时，$F(1)=0$，$x=1$ 是方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 的解；

当 $0\le f(x)<1$ 时，$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt>0$，由零点定理，得至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$，即方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 至少有一解。

又 $F'(x)=2-f(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递增，因此在 $[0,1]$ 上方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 有唯一解。

七、（满分 15 分）解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b^n}{n^2}x^n$，

设 $a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}x^n,b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b^n}{n^2}x^n$

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}}=a,\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{b^n}{n^2}}=b\therefore R=\min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}$$

①当 a>b>0 时，$R=\dfrac{1}{a},x=\dfrac{1}{a}$ 时，

$$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散},b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛}\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n\text{发散}$$

$x=-\dfrac{1}{a}$ 时，$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n},\because\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\dfrac{1}{n}$ 递减 $\therefore a_n$ 收敛

$b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(-\dfrac{b}{a}\right)^n$ 绝对收敛 $\therefore b_n$ 收敛

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n \text{收敛} \therefore \text{收敛域为}\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$$

②当 $b \geq a > 0$ 时，$R=\frac{1}{b}, x=\frac{1}{b}$ 时，

$$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n \text{收敛}, b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛} \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n \text{收敛}$$

$x=-\frac{1}{b}$ 时，$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^n$ 绝对收敛，$\therefore a_n$ 收敛

$$b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\text{绝对收敛}, \therefore b_n \text{收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n \text{收敛} \therefore \text{收敛域为}\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$$

所以，当 a>b>0 时，收敛半径 $R=\frac{1}{a}$，收敛域为 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$；

当 $b \geq a > 0$ 时，收敛半径 $R=\frac{1}{b}$，收敛域为 $\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$。

八、（满分 10 分）解：对任意光滑封闭曲面由高斯公式得：

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy = \iiint_V \left[xf`(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dV$$ 由题意得 $xf`(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0\,(x>0)$ 恒成立

$$\therefore f`(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x}, \text{解得} f(x)=\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 存在得：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}$ 存在 $\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+Ce^x\right)=0 \therefore C=-1$

$$\therefore f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$$

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷四（非数学类）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.45**

一.填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．设当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\cdot\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\cdot\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n$ 等于 _________。

2．设 $y=\sin^2(x^4)$，则 $\frac{dy}{d(x^3)}=$ ___________。

3．不定积分$\int \frac{x\cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$=____________。

4．　$[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=$ ________。

5.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 c 的值为___________。

二.（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$。

三、（本题满分 10 分）已知 $\varphi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$，

计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\varphi(t)dt-x}{\left(\sqrt[3]{1+x}-e^x\right)\ln\left(1+x^2\right)}$。

四、（本题满分 10 分）计算 $I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|dx$，其中 $n$ 为自然数。

五、（本题满分 10 分）求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos^2 x+a^2\sin^2 x\right)dx\,(a>0)$。

六、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散。

七、（本题满分 10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$ 其中 $\Sigma$ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

八、（本题满分 15 分）求出所有在 $[0,+\infty)$ 上的正值连续函数 g(x)，

使得 $\frac{1}{2}\int_0^x\left[g(t)\right]^2dt=\frac{1}{x}\left[\int_0^x g(t)dt\right]^2,\forall x>0$。

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷四参考答案

一.填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．2

2．$\frac{8}{3}x\cos(x^4)\sin(x^4)$

3．解：$\int\frac{x\cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \overset{令\arctan x=t}{=} \int\frac{\tan t\cdot e^t}{\sec^3 t}d(\tan t)=\int\sin t\cdot e^t dt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$

$=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}+c$ 。

4．解：$\because (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 共线，而 $\vec{a}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$，$\therefore(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$，

$\Rightarrow[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ 。

5.解：$\because \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=e^{2c}$，又由拉格朗日中值定理有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e$，$\Rightarrow e^{2c}=e$，$c=\frac{1}{2}$ 。

二.（本题满分 10 分）解：$\because$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，$\therefore g[f(x)]=x$

由 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，得 $g[f(x)]\cdot f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，

$\Rightarrow f'(x)=2e^x+xe^x$，$\therefore f(x)=\int(2e^x+xe^x)dx=e^x+xe^x+C$，

$\because f(0)=0$，$\Rightarrow c=-1$，$\therefore f(x)=e^x+xe^x-1$

三、（本题满分 10 分）

解：$\because \varphi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{\sin x}{x}$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\varphi(t)dt-x}{\left(\sqrt[3]{1+x}-e^x\right)\ln\left(1+x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\varphi(t)dt-x}{\left(\frac{1}{3}x-x\right)\square x^2}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{12}$$

四、（本题满分 10 分）

解：$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|-\sin(\ln\frac{1}{x})\cdot x\cdot(-\frac{1}{x^2})\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x}\right|dx$

$\overset{令\ln\frac{1}{x}=u}{=}\int_0^{2n\pi}|\sin u|du=2n\int_0^{\pi}|\sin u|du=4n$

$\overset{或令\frac{1}{x}=t}{=}\int_{e^{2n\pi}}^{1}|\sin(\ln t)|\cdot t\cdot(-\frac{1}{t^2})dt=\int_1^{e^{2n\pi}}|\sin(\ln t)|d(\ln t)\overset{令\ln t=u}{=}\int_0^{2n\pi}|\sin u|du=4n$

五、（本题满分 10 分）解：令 $\varphi(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos^2x+a^2\sin^2x\right)dx$，则 $\varphi(1)=0,$ 当 $a\neq0$ 时，

$$\varphi`(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{\cos^2x+a^2\sin^2x}dx\overset{令t=\tan x}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{\left(1+a^2t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt$$

$$=\frac{2a}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{1+a^2t^2}\right)dt=\frac{2a}{a^2-1}\left(\arctan t-\frac{1}{a}\arctan at\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{a+1}$$

$\therefore \varphi(a)=\int \varphi'(a)da=\int \frac{\pi}{a+1}=\pi\ln(a+1)+C$由$\varphi(1)=0$得C=$-\pi\ln 2$

$\therefore \varphi(a)=\pi\ln\frac{a+1}{2}$即I=$\pi\ln\frac{a+1}{2}$

六、（本题满分 15 分）证明：由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0\Rightarrow f(0)=0$和$f'(0)=a>0$

$(\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0))$

再由导数的连续性，存在$x=0$的某邻域I,

使得$f'(x)>0.(x\in I)\therefore f(x)\uparrow(x\in I)$,

$\therefore f(\frac{1}{n})>0$，且单调递减并以零为极限($n$为自然数)。

交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$收敛。再由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a>0$

$\therefore$正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$同敛散,$\therefore$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$发散。

七、（本题满分 10 分）解：方法一（一二型相互转化）. 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上任一点处的单位法向量是$\overrightarrow{n_0}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\cos\alpha dydz+\cos\beta dzdx+\cos\gamma dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{\Sigma}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)ds=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{\Sigma}ds=4\pi$$

方法二（高斯公式）. 将积分区域函数代入被积函数化简得：

$I=\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，记$\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$,

由高斯公式得$I=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}3dV=4\pi$

八、（本题满分 15 分）解：等式两边同时求导得：

$$\frac{1}{2}[g(x)]^2=\frac{2}{x}g(x)\int_0^x g(t)dt-\frac{1}{x^2}\left[\int_0^x g(t)dt\right]^2$$

由于当$x\in[0,+\infty)$时$g(x)>0$，于是$\int_0^x g(t)dt>0$

由$\frac{x^2}{2}[g(x)]^2-2xg(x)\int_0^x g(t)dt+\left[\int_0^x g(t)dt\right]^2=0$解方程得：

$\int_0^x g(t)dt = xg(x) \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2g^2(x)} = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)xg(x)$ 由于 g(x) 连续，所以求导得

$g(x) = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[g(x) + xg`(x)\right]$ 所以 $g(x) = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)xg`(x)$

即 $\frac{g`(x)}{g(x)} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{x}$，所以 $\ln g(x) = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)\ln x + C_1, g(x) = Cx^{1 \pm \sqrt{2}}$

$\because g(x)$ 在 $x = 0$ 处左连续 $\therefore \mathrm{g}(0)$ 存在。故 $g(x) = Cx^{1 \pm \sqrt{2}}$，C>0

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷五（非数学类）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.45**

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1.设 $f(x) = \left(x^2 - x - 2\right)\left|x^3 - x\right|$，则 f(x)导数不存在得点为__________。

2. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right)$=_____________。

3. $\oint_L \left(e^x + x^2y^2z^3\right)dx + \left(e^y - y^2z\right)dy + \left(e^z + yz^2\right)dz$ =___________，其中 L 是圆周 $\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}$，从 x 轴正向看去，曲线是逆时针方向。

4.以四个函数 $e^x, 2xe^x, 3\cos 3x, 4\sin 3x$ 为解的 4 阶常系数线性齐次微分方程是___________，该方程的通解是___________。

5.设函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0 \le x \le 1)$，则 $f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x) =$________。

二、（本题满分 5 分）设 $x_n = \frac{n}{n^2 + n + 1} + \frac{n}{n^2 + 2n + 2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + nn + n}, n = 1, 2, \ldots$，求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

三、（本题满分 10 分）若偶函数 f(x)在点 x=0 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 f(0)=1，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|$ 的敛散性。

四、（本题满分 10 分）设 f(x)在[a,b]上连续（a>0），在(a,b)上可导，证明：$\exists \xi, \eta \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

五、（本题满分 15 分）设 f(x,y)是定义在区域 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 上的二元函数，f(0,0)=0，

且在点(0,0)处 f(x,y)可微，求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$。

六、（本题满分 15 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S 是曲面 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}(z\geq0)$的上侧。

七、（本题满分 10 分）设 a 为任意实数，求 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^a\right)}$。

八、（本题满分 10 分）设当 $x>-1$时，可微函数 f(x)满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0, f(0)=1\text{，求 } f'(x)\text{。}$$

# 第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷五参考答案

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1.x=0,x=1　　2.1　　3.$\dfrac{1}{2}\pi R^4$

4.微分方程为 $y^{(4)}-2y^{(3)}+10y''-18y'+9y=0$，

通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x+C_3\cos3x+C_4\sin3x$

5.$\dfrac{\pi^2}{6}$

二、（本题满分 5 分）解：$\because x_n<\dfrac{n}{n^2+n}+\dfrac{n}{n^2+2n}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+nn}$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

又 $x_n>\dfrac{n}{n^2+n+n}+\dfrac{n}{n^2+2n+n}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+nn+n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k+1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}<x_n<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\ln 2$$

三、（本题满分 10 分）解：由 f(x)是偶函数得 $f'(0)=0$

$$\therefore f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}f''(0)+\frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$收敛。

四、（本题满分 10 分）证明：由拉格朗日中值定理得$\exists\xi\in(a,b)$使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}(a+b)$$

由柯西中值定理得$\exists\eta\in(a,b)$使得$\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$

故，$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$，得证。

五、（本题满分 15 分）解：交换积分次序有

$$\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du=-\int_0^{x^2}dt\int_{\sqrt{t}}^{x}f(t,u)du=-\int_0^{x}du\int_0^{u^2}f(t,u)dt$$

$$\therefore \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x}du\int_0^{u^2}f(t,u)dt}{\frac{x^4}{4}}$$

由洛比达法则得$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)dt}{x^3}$

由积分中值定理得$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2f(\xi,x)}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi,x)}{x}$

其中，$\xi\in(0,x^2)$，由二元函数的泰勒公式得：

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(x)}{x}$$

$$=-f_y'(0,0)-\lim_{x\to 0^+}\frac{f_x'(0,0)\xi}{x}$$

$$\because\left|\frac{f_x'(0,0)\xi}{x}\right|<\left|\frac{f_x'(0,0)x^2}{x}\right|=\left|f_x'(0,0)x\right|,\lim_{x\to 0}\left|f_x'(0,0)x\right|=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{f_x'(0,0)\xi}{x}=0,\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}=-f_y'(0,0)$$

六、（本题满分 15 分）

解：记 $P=\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},Q=\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},R=\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

则 $I=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，

除原点外，P,Q,R 及其偏导数连续，且有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，则曲面积分与积分曲面无关。取 $S_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\left(z\ge 0\right)$，$\varepsilon$ 是较小的正常数可以保证 $S_1$ 在 S 的内部，取其上侧为正；将 xoy 面上位于 $S_1$ 与 S 的边界曲线之间的部分记为 $S_2$，取其上侧为正；设 $S,S_1,S_2$ 所围空间区域为 V，记 xoy 平面上由 $S_1$ 边界所围部分为 $S_3$，取其上侧为正；设 $S_1$ 与 $S_3$ 所围半球体区域为 $V_1$，则有

$$I=\oiint_{S^+ + S_1^- + S_2^-}-\iint_{S_1^-}-\iint_{S_2^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

由高斯公式得 $\oiint_{S^+ + S_1^- + S_2^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=0$

$S_2$ 与 $S_3$ 位于 xoy 平面上，则有 $\iint_{S_2^-}=\iint_{S_3^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$

$$\therefore I=-\iint_{S_1^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{S_1^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\oiint_{S_1^+ + S_3^-}-\iint_{S_3^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{S_1^+ + S_3^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\oiint_{S_1^+ + S_3^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oiint_{S_1^+ + S_3^-}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{V_1}3dV=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}=2\pi$$

七、（本题满分 10 分）解：令 $x=\tan t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\tan^a t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\cot^a t}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^a t dt}{1+\tan^a t}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan^a t}{1+\tan^a t}+\frac{1}{1+\tan^a t}\right)dt=\frac{\pi}{4}$$

八、（本题满分 10 分）解：将已知方程化成 $(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$，

两边同时对 x 求导得：$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$

即 $\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{x+2}{x+1}=-1-\frac{1}{x+1}$，积分得 $\ln\left|f'(x)\right|=-x-\ln(x+1)+c_1$

$\therefore f'(x)=\frac{c}{(x+1)e^x}$，由 f(0)=1 得 $f'(0)=-1,\therefore c=-1$，$\therefore f'(x)=-\frac{1}{(x+1)e^x}$

# 首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷（非数学类，2009）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.35**

## 一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1．计算 $\iint_D\frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________，其中区域 $D$ 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成三角形区域.

2．设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$，则 $f(x)=$____________.

3．曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________.

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 $f$ 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________________.

二、（5 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$，其中$n$是给定的正整数.

三、（15 分）设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

四、（15 分）已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证：（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge \frac{5}{2}\pi^2$.

五、（10 分）已知$y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

六、（10 分）设抛物线$y=ax^2+bx+2\ln c$过原点.当$0\le x\le 1$时，$y\ge 0$,又已知该抛物线与$x$轴及直线$x=1$所围图形的面积为$\frac{1}{3}$.试确定$a,b,c$,使此图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.

七、（15 分）已知$u_n(x)$满足$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x(n=1,2,\cdots)$，且$u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$之和.

八、（10 分）求$x\to 1^-$时，与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$等价的无穷大量.

# 首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷参考答案

**一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）**

1.解：令$x+y=u, x=v$，则$x=v, y=u-v$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{u\ln u-u\ln v}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1(\frac{u\ln u}{\sqrt{1-u}}\int_0^u \mathrm{d}v-\frac{u}{\sqrt{1-u}}\int_0^u \ln v\mathrm{d}v)\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u^2\ln u}{\sqrt{1-u}}-\frac{u(u\ln u-u)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \quad (*)$$

令$t=\sqrt{1-u}$，则$u=1-t^2$，$\mathrm{d}u=-2t\mathrm{d}t$，$u^2=1-2t^2+t^4$，

$(*) = -2\int_1^0 (1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t = 2\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{16}{15}$

2. 解：令 $A=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=3x^2-A-2$，

$A=\int_0^2 (3x^2-A-2)\mathrm{d}x = 8-2(A+2)=4-2A$,解得 $A=\frac{4}{3}$。因此 $f(x)=3x^2-\frac{10}{3}$。

3.解：因平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $(2,2,-1)$，而曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 在 $(x_0,y_0)$ 处的法向量为 $(z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1)$，故 $(z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1)$ 与 $(2,2,-1)$ 平行，因此，由 $z_x=x$，$z_y=2y$ 知 $2=z_x(x_0,y_0)=x_0, 2=z_y(x_0,y_0)=2y_0$，即 $x_0=2, y_0=1$，

又 $z(x_0,y_0)=z(2,1)=5$，于是曲面 $2x+2y-z=0$ 在 $(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$ 处的切平面方程是 $2(x-2)+2(y-1)-(z-5)=0$，

即曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 $2x+2y-z-1=0$。

4. 解：方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 的两边对 $x$ 求导，得 $e^{f(y)}+xf'(y)y'e^{f(y)}=e^y y'\ln 29 = y'xe^{f(y)}$

故 $\frac{1}{x}+f'(y)y'=y'$，即 $y'=\frac{1}{x(1-f'(y))}$，

因此 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}+\frac{f''(y)y'}{x[1-f'(y)]^2}$

$$=\frac{f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

二．（5 分）解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n})^{\frac{e}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n})^{\frac{n}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}}\right\}^{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\cdot\frac{e}{x}}$$

$\because$ 幂指数部分的极限值$=\frac{e}{n}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{1}=\frac{n+1}{2}e$,$\therefore$ 原式$=e^{\frac{n+1}{2}e}$

三.（15 分）解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ 和 $f(x)$ 连续，有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

显然 $g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=f(0)=0$，

$x\neq 0$ 时，$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，故 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=f(0)=0$

当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\frac{f(x)}{x}$，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}[-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\frac{f(x)}{x}]=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}$$

这表明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四（15 分）证：因被积函数的偏导数连续在 $D$ 上连续，故由格林公式知

（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xe^{\sin y})-\frac{\partial}{\partial y}(-ye^{-\sin x})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xe^{-\sin y})-\frac{\partial}{\partial y}(-ye^{\sin x})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而 $D$ 关于 $x$ 和 $y$ 是对称的，即知 $\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

因此 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$

（2）因 $e^t+e^{-t}=2(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)\ge 2(1+t^2)$

故 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x=2+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{5-\cos 2x}{2}$

由 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\mathrm{d}x=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

知 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint_D(e^{-\sin x}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(e^{-\sin x}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$=\pi\int_0^{\pi}(e^{-\sin x}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\ge\pi\int_0^{\pi}\frac{5-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\pi^2$，即 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\mathrm{d}x\ge\frac{5}{2}\pi^2$

五.（10 分）解：设 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是非齐次微分方程的三个解，则容易推出 $e^{2x}$ 和 $e^{-x}$ 都是对应的齐次微分方程的解， 因此对应的齐次微分方程为 $y''-y'-2y=0$，再利用 $y^*=xe^x$ 是特解，代入知， $f(x)=(1-2x)e^x$，二阶常系数线性非齐次微分方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$。

六.（10 分）解：因抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，故 $c=1$，于是

$\frac{1}{3}=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{dt}=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$ 即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$

而此图形绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$$V(a)=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{dt}=\pi\int_0^1(ax^2+\frac{2}{3}(1-a)x)^2\mathrm{dt}$$

$$=\pi a^2\int_0^1 x^4\mathrm{d}t+\pi\frac{4}{3}a(1-a)\int_0^1 x^3\mathrm{d}t+\pi\frac{4}{9}(1-a)^2\int_0^1 x^2\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\pi a^2+\pi\frac{1}{3}a(1-a)+\pi\frac{4}{27}(1-a)^2$$

即$V(a)=\frac{1}{5}\pi a^2+\pi\frac{1}{3}a(1-a)+\pi\frac{4}{27}(1-a)^2$

令$V'(a)=\frac{2}{5}\pi a+\pi\frac{1}{3}(1-2a)-\pi\frac{8}{27}(1-a)=0$，得$54a+45-90a-40+40a=0$

即$4a+5=0$，因此$a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=1$.

七、（15 分）解：$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$，即$y'-y=x^{n-1}e^x$

由一阶线性非齐次微分方程公式知$y=e^x(C+\int x^{n-1}\mathrm{d}x)$，即$y=e^x(C+\frac{x^n}{n})$

因此$u_n(x)=e^x(C+\frac{x^n}{n})$，由$\frac{e}{n}=u_n(1)=e(C+\frac{1}{n})$知，$C=0$，于是$u_n(x)=\frac{x^ne^x}{n}$

下面求级数的和：令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n}=e^xs_1(x),s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(x\in[-1,1))$$

$$s_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(s_1(0)=0),s_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$S(x)=-e^x\ln(1-x)(x\in[-1,1))$$

八、（10 分）解：令$f(t)=x^{t^2}$，则因当$0<x<1$，$t\in(0,+\infty)$时，$f'(t)=2tx^{t^2}\ln x<0$，故

$f(t)=x^{t^2}=e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}$在$(0,+\infty)$上严格单调减。因此

$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\le f(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t$，$\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t\le f(1)\le\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

$\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t\le f(2)\le\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$，$\int_3^4 f(t)\mathrm{d}t\le f(3)\le\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t$.......

$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\le f(n)\le\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t$

⋮

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\le\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\le f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t$$

即$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\le\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\le1+\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$，

又$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

再由$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x}}{-1}=1$，$\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\sim\sqrt{1-x}$，

所以，当 $x \to 1^-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量是 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ 。

# 首届中国大学生数学竞赛决赛试卷（非数学类，2010）

**考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.3**

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

（1）求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$ ；

（2）计算 $\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\Sigma$ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，$a>0$；

（3）现要设计一个容积为 $V$ 的一个圆柱体的容器，已知上下两底的材料费为单位面积 $a$ 元，而侧面的材料费为单位面积 $b$ 元。试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

（4）已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 $f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求 $f(x)$。

二、（10 分）求下列极限

（1）　$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$ ；　　（2）$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right]^n$，其中 $a>0,b>0,c>0$。

三、（10 分）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义，且在 $x=1$ 点可导，$f(1)=0, f'(1)=2$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$。

四、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ 收敛。求 $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y x\ f(x)dx$。

五、（12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$。证明：(1) 存在 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

六、（14 分）设 $n>1$ 为整数，$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt$。证明：方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根。

七、（12 分）是否存在 $R^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$？若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明。

八、（12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$，当自然数 $n\to\infty$ 时

$f(x+n)\to 0$。证明：函数序列$\{f(x+n):n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致连续于 0 。

# 首届中国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1.解：方法一：由泰勒公式得$\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\pi\int_0^1 x(1+x)dx=\frac{5}{6}\pi$$

方法二：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}\right)$

$$\pi\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right]=\frac{5}{6}\pi$$

2.解：方法一：将$\Sigma$（或分片后）投影到相应坐标平面上化为二重积分逐块计算。

$I_1=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}dydz$，其中$D_{yz}$为 yoz 平面上的半圆

$y^2+z^2\le a^2,z\le 0$，得$I_1=-2\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr=-\frac{2}{3}\pi a^3$

同理，$I_2=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(z+a)^2dxdy=\frac{1}{a}\iint\limits_{D_{xy}}\left[a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]^2dxdy$，其中$D_{xy}$为

xoy 平面上的圆域$x^2+y^2\le a^2$，利用极坐标，

得$I_2=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\left(a-\sqrt{a^2-r^2}\right)^2dr=\frac{\pi}{6}a^3$，

所以$I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3$

方法二：（补面利用高斯公式）$I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy$，

作面$S:z=0,x^2+y^2\le a^2$的下侧，则$\Sigma+S$构成封闭区域

$\Omega:-\sqrt{a^2-y^2-x^2}\le z\le 0$的内侧，由高斯公式得：

$$I+\frac{1}{a}\iint\limits_{S}axdydz+(z+a)^2dxdy=-\frac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega}(2z+3a)dV$$

$$\therefore I=-\frac{1}{a}\iiint_{\Omega}\left(2z+3a\right)dV-a\iint_{S}dxdy$$

$$=-\frac{1}{a}\int_{-a}^{0}\left(2z+3a\right)dz\iint_{x^2+y^2\le a^2-z^2}dxdy+\pi a^3$$

$$=-\frac{\pi}{a}\int_{-a}^{0}\left(2z+3a\right)\left(a^2-z^2\right)dz+\pi a^3=-\frac{\pi}{2}a^3$$

3.解：设圆柱容器的高为 h，上下底的半径为 r，则有 $\pi r^2 h=V$ 或 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，

所需费用为 $F\left(r\right)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\dfrac{2bV}{r}$，

显然 $F'(r)=4a\pi r-\dfrac{2bV}{r^2}$，那么，费用最少意味着 $F'(r)=0$，也即 $r^3=\dfrac{bV}{2a\pi}$，

这时高与底的直径的比为 $\dfrac{h}{2r}=\dfrac{V}{2\pi r^3}=\dfrac{a}{b}$。

2. 解：由 $\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\left[1+2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$ 得：

$I=\sqrt{2}\int\dfrac{dx}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\left[1+2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]}$，令 $u=\dfrac{\pi}{4}-x$ 得

$I=-\sqrt{2}\int\dfrac{du}{\cos u\left[1+2\sin^2 u\right]}=-\sqrt{2}\int\dfrac{d\sin u}{\cos^2 u\left[1+2\sin^2 u\right]}$，令 $t=\sin u$，则

$$I=-\sqrt{2}\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+2t^2\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{dt}{1-t^2}+2\int\frac{dt}{1+2t^2}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t\right]+c$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right|-\frac{2}{3}\arctan\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+c$$

二.（10 分）解：（1）由$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-e=e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-e$

$$=e\left[e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right]=e\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right]=\lim_{n\to\infty} e\left[-\frac{1}{2}+no\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{e}{2}$$

（2）方法一：由泰劳公式得，$n\to+\infty$ 时，$a^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}=1+\frac{1}{n}\ln a+o\left(\frac{1}{n}\right)$，

$$b^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln b}=1+\frac{1}{n}\ln b+o\left(\frac{1}{n}\right),c^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln c}=1+\frac{1}{n}\ln c+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{3}\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}\right)=1+\frac{1}{3n}\ln(abc)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}=\left[1+\frac{1}{3n}\ln(abc)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n},$$

记$\alpha_n=\frac{1}{3n}\ln(abc)+o\left(\frac{1}{n}\right)$，则$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}=\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}$

显然，$n\to+\infty$ 时$\alpha_n\to 0,(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\to e,n\alpha_n\to\frac{1}{3}\ln(abc)$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}=\sqrt[3]{abc}$

方法二：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}\bullet\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3}\bullet n}$$

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3\frac{1}{n}}\right)=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{c^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right]=\sqrt[3]{abc}$$

三.（10 分）解：由题意得 $\lim\limits_{y\to1}\dfrac{f(y)-f(1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{f(y)}{y-1}=f'(1)=2$，

令 $y=\sin^2 x+\cos x$，那么当 $x\to0$ 时，$y\to1, \therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{\sin^2 x+\cos x-1}=2$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{\sin^2 x+\cos x-1}\bullet\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}}{1+\frac{\tan x}{x}}=\frac{1}{2}$$

四.（10 分）解：设 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=l$，并令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，

则 $F'(x)=f(x)$，并有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=l$，对于任意的 y>0，有

$$\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=\frac{1}{y}\int_0^y xdF(x)=\frac{x}{y}F(x)\Bigg|_{x=0}^{x=y}-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx$$

$$=F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx$$

根据洛比达法则，有 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y F(x)dx=\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=l$

$$\therefore \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=l-l=0$$

五.（12 分）证明：（1）令 $F(x)=f(x)-x$，则 F(x) 在 [0,1] 上连续，且有

$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0, F(1)=-1<0$，由介值定理得：$\exists\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得 $F(\xi)=0$

即 $f(\xi)=\xi$

（2）令 $G(x)=e^{-x}F(x)$，则 $G(0)=G(\xi)=0$，由罗尔定理得：$\exists\eta\in(0,\xi)$ 使

得$G'(\eta)=0$即$G'(\eta)=e^{-\eta}\left[f`(\eta)-1\right]-e^{-\eta}\left[f(\eta)-\eta\right]=0$，

即 $f`(\eta)=f(\eta)-\eta+1$

六.（14 分）证明：$\because e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)<1,\forall t>0$，

$\therefore F\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)dt<\frac{n}{2}$，下面只需证明$F(n)>\frac{n}{2}$即可。

$$F(n)=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)dt=-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)de^{-t}$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)+\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)dt$$

由此，可以推出

$$F(n)=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$+\ldots+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-e^{-n}=n+1-e^{-n}\left[(n+1)+n\frac{n}{1!}+(n-1)\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right]$$

又$\because (n+1)+n\frac{n}{1!}+(n-1)\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}<\frac{n+2}{2}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)$

$$\therefore F(n)=n+1-e^{-n}\left[(n+1)+n\frac{n}{1!}+(n-1)\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right]$$

$$>n+1-\frac{n+2}{2}e^{-n}\left[1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right]>n+1-\frac{n+2}{2}=\frac{n}{2}$$

$\therefore F\left(\frac{n}{2}\right)<\frac{n}{2},F(n)>\frac{n}{2}$，F(x)连续，由介值定理得$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},n\right)$内

七.（12 分）解：假设存在满足题意的 f(x)，考虑方程 $f\left[f(x)\right]=x$，

即$1+x^2+x^4-x^3-x^5=x,(x-1)\left(x^4+x^2+1\right)=0$，此方程有唯一实数根 x=1，

即 $f\left[f(x)\right]$有唯一不动点 x=1，下面说明 x=1 也是 f(x)的不动点。

令 $f(1)=t$，则 $f(t)=f\left[f(1)\right]=1$，$f\left[f(t)\right]=f(1)=t=1$ $\therefore t=1$ 即 $f(1)=1$

记 $g(x)=f[f(x)]$，则 $g`(x)=f^{'}[f(x)]f`(x), g`(1)=[f`(1)]^2\geq 0$

另一方面 $g`(x)=2x+4x^3-3x^2-5x^4, g`(1)=-2<0$ 与 $g`(1)\geq 0$ 自相矛盾

所以，不存在满足题意的可微函数 f(x)

八.（12 分）证明：由于 f(x)在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$ 使得 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$，只要 $|x_1-x_2|<\delta(x_1\geq 0, x_2\geq 0)$

取一个充分大的自然数 m，使得 $m>\delta^{-1}$，并在[0,1]中取 m 个点：

$$x_1=0<x_2<\ldots<x_m=1,$$

其中 $x_j=\frac{j}{m}(j=1,2,\ldots,m)$，这样对于每一个 j，有 $|x_{j+1}-x_j|=\frac{1}{m}<\delta$。

有由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，故对于每一个 $x_j$，存在一个 $N_j$ 使得

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}，只要 n>N_j,$$

这里的 $\varepsilon$ 是前面给定的。

令 $N=\max\{N_1,N_2,\ldots,N_m\}$，那么 $\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，只要 $n>N$

其中 $j=1,2,\ldots,m$。设 $x\in[0,1]$ 是任意一点，这时总有一个 $x_j$ 使得 $x\in[x_j,x_{j+1}]$。

由 f(x)在 $[0,+\infty)$ 上一致连续性及 $|x-x_j|<\delta$ 可知，

$$\left|f(x_j+n)-f(x+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}(\forall n=1,2,\ldots)$$

另一方面，$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，只要 $n>N$

这样，$\left|f(x+n)\right|<\varepsilon$，只要 $n>N$，$x\in[0,1]$，这里的 N 的选取与点 x 无关，这就证明了函数序列 $\{f(x+n):n=1,2,\ldots\}$ 在[0,1]上一致收敛于 0.

# 第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷（非数学类，2010）

**考试形式：闭卷　考试时间：120 分钟　满分：100 分　试卷难度系数：0.35**

一（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）.计算下列各题（要求写出重要步骤）。

1. 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^{2^n})$,其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

2. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

3. 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx\left(n=1,2,\ldots\right)$

4. 设函数 f(t)有二阶连续的导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}, g\left(x,y\right)=f\left(\frac{1}{r}\right)$，

求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

5. 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$与直线$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$的距离。

二（本题 15 分）设函数 f(x)在 R 上具有二阶导数，并且$f''\left(x\right)>0,$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'\left(x\right)=\alpha>0, \lim\limits_{x\to-\infty} f'\left(x\right)=\beta<0$，且存在一点$x_0$使得$f\left(x_0\right)<0$，证明：方程$f\left(x\right)=0$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内恰有两个实根。

三（本题 15 分）设函数 y=f(x)由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\varphi\left(t\right)\end{cases}\left(t>-1\right)$确定，且$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4\left(1+t\right)}$，其中$\varphi\left(t\right)$具有二阶导数，曲线$y=\varphi\left(t\right)$与$y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$在 t=1 处相切，求函数$\varphi\left(t\right)$。

四（本题 15 分）设$a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，证明：

（1） 当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛；

（2） 当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty\left(n\to\infty\right)$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散。

五（本题 15 分）设 L 是过原点，方向为$\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$（其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$（其中$0<c<b<a$，密度为 1）绕 L 旋转。

（1） 求其转动惯量；（2）求其转动惯量关于方向$\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$的最大值和最小值。

六（本题 15 分）设函数$\varphi\left(x\right)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C

上，曲线积分$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$的值为常数。

（1）设 L 为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$

（2）求函数$\varphi(x)$；

（3）设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$。

# 第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

一（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

1. 解：将$x_n$恒等变形得

$$x_n=(1-a)(1+a)(1+a^2)\dots\left(1+a^{2^n}\right)\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^2)(1+a^2)\dots\left(1+a^{2^n}\right)\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^4)(1+a^4)\dots\left(1+a^{2^n}\right)\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

由于$|a|<1$得$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{1-a}$

2. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{-1}\right]^x$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

3. 解：$\because s>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0,$

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n de^{-sx}=-\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-sx}dx\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此可得 $I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2}=...=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}$

4. 解：$\because \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\therefore \frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f^{'}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f^{''}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f^{'}\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性可得 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f^{''}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f^{'}\left(\frac{1}{r}\right)$

5. 解：直线 $l_1$ 的对称式方程 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{l_1}=(1,1,0),\vec{l_2}=(4,-2,-1)$，两直线上的定点分别为 $P_1(0,0,0),P_2(2,1,3)$，$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3),\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-1,1,-6)$，由向量的性质可知，两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot\left(\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right)}{\left|\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$$

二（本题 15 分）证明：方法一：由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f`(x)=\alpha>0$ 必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f^{'}(a)>0.$ 由 $f^{''}(x)>0$ 得 y=f(x) 是凹函数，从而 $f(x)>f(a)+f^{'}(a)(x-a)(x>a)$，当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$，故存在 b>a，使得 $f(b)>f(a)+f^{'}(a)(b-a)>0$……………………（6 分）

同样，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f`(x)=\beta<0$，必有 $c<x_0$，使得 $f^{'}(c)<0$。由 y=f(x)是凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f^{'}(c)(x-c)(x<c)$，当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$，故存在 d<c，使得 $f(d)>f(c)+f^{'}(c)(d-c)>0$……………………（10 分）

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，$\exists x_1\in(x_0,b),x_2\in(d,x_0)$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$…………………………………………………………（12 分）

下面证明方程 f(x)=0 在 R 只有两个实根。

用反证法，假设方程 f(x)=0 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 $x_1,x_2,x_3$ 且 $x_1<x_2<x_3$，对 f(x)在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上分别应用罗尔定理，则各至少存在

一点 $\xi_1\left(x_1<\xi_1<x_2\right)$ 和 $\xi_2\left(x_2<\xi_2<x_3\right)$，使得 $f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)=0$，再将 $f`\left(x\right)$ 在区间 $\left[\xi_1,\xi_2\right]$ 上使用罗尔定理，则至少存在一点 $\eta\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$，使得 $f''\left(\eta\right)=0$，此与条件 $f''\left(x\right)>0$ 矛盾，从而方程 f(x)=0 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 不多于两个根，所以，方程 f(x)=0 在 R 只有两个实根。……………………………………………（15 分）

方法二.先证方程 f(x)=0 至少有两个实根，

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f`\left(x\right)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$ 使得 $f'\left(a\right)>0$，因 f(x)具有二阶连续导数，故 $f`\left(x\right),f''\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上均连续，由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ 有 $f\left(x\right)-\left[f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right)\right]=f\left(x\right)-f\left(a\right)-f'\left(a\right)\left(x-a\right)$

$=f'\left(\xi\right)\left(x-a\right)-f'\left(a\right)\left(x-a\right)=\left[f'\left(\xi\right)-f'\left(a\right)\right]\left(x-a\right)$

$=f''\left(\eta\right)\left(\xi-a\right)\left(x-a\right)$，其中 $a<\eta<\xi<x$，又 $f''\left(\eta\right)>0$，则

$f\left(x\right)>f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right),\left(x>a\right)$

又因 $f'\left(a\right)>0$，故存在 b>a 使得 $f\left(b\right)>f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(b-a\right)$………（6 分）

又已知 $f\left(x_0\right)<0$，由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_1\in\left(x_0,b\right)$ 使得 $f\left(x_1\right)=0$，即方程 f(x)=0 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上至少有一根 $x_1$。…………………（7 分）

同理可证方程 f(x)=0 在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 上至少有一根 $x_2$。…………………………..（12 分）

下面证方程 f(x)=0 在 R 只有两个实根（以下方法同上）。……………….……..（15 分）

三.（本题 15 分）解：$\because\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi'\left(t\right)}{2+2t},\dfrac{\partial^2y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{2+2t}\bullet\dfrac{\left(2+2t\right)\varphi''\left(t\right)-2\varphi'\left(t\right)}{\left(2+2t\right)^2}$

$\therefore\dfrac{\partial^2y}{\partial x^2}=\dfrac{\left(1+t\right)\varphi''\left(t\right)-\varphi'\left(t\right)}{4\left(1+t\right)^3}=\dfrac{3}{4\left(1+t\right)},\therefore\left(1+t\right)\varphi''\left(t\right)-\varphi'\left(t\right)=3\left(1+t\right)^2$

即 $\varphi''\left(t\right)-\dfrac{1}{1+t}\varphi'\left(t\right)=3\left(1+t\right)$，

解得 $\varphi'\left(t\right)=e^{\int\frac{dt}{1+t}}\left[\int3\left(1+t\right)e^{-\int\frac{dt}{1+t}}+c_1\right]=\left(1+t\right)\left(3t+c_1\right)$………………（9 分）

由曲线 $y=\varphi\left(t\right)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 t=1 处相切得 $\varphi\left(1\right)=\dfrac{3}{2e},\varphi'\left(1\right)=\dfrac{2}{e}$，

$\therefore c_1=\dfrac{1}{e}-3,\varphi\left(t\right)=\int\left(3t^2+\left(3+c_1\right)t+c_1\right)dt=t^3+\dfrac{3+c_1}{2}t^2+c_1t+c_2$，

由$\varphi(1)=\dfrac{3}{2e}$得$c_2=2$，于是$\varphi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+\left(\dfrac{1}{e}-3\right)t+2(t>-1)$（15 分）

四（本题 15 分）证明：（1）令$f(x)=x^{1-\alpha},x\in[S_{n-1},S_n]$，将 f(x)在区间$[S_{n-1},S_n]$上应用拉格朗日中值定理得：

$\exists\xi\in(S_{n-1},S_n)$使得$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$，

即$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$……………………………………………………（5 分）

（1）当$\alpha>1$时$\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\dfrac{a_n}{\xi^\alpha}\ge(\alpha-1)\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$，显然$\left\{\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前 n 项和有界，从而收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛。…………………………（8 分）

（2）当$\alpha=1$时，因为$a_n>0,S_n$单调递增，所以$\sum_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\ge\dfrac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\dfrac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\dfrac{S_n}{S_{n+p}}$，因为$S_n\to+\infty$对任意 n，

当$p\in N,\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2},$从而$\sum_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\ge\dfrac{1}{2}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散。………...（12 分）

当$\alpha<1$时$\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}\ge\dfrac{a_n}{S_n}$，由$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散。……...（15 分）

五（本题 15 分）解：（1）设旋转轴 L 的方向向量为$\vec{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点 P(x,y,z)的径向量为$\vec{r}$，则点 P 到旋转轴 L 的距离的平方为

$$d^2=\vec{r}^{\,2}-(\vec{r}\cdot\vec{l})^2$$

$$=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\alpha\gamma xz-2\beta\gamma yz$$

由积分区域的对称性可知$\iiint_\Omega(2\alpha\beta xy+2\alpha\gamma xz+2\beta\gamma yz)dV=0$，

其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le1\right.\right\}$……………………………………..（2 分）

而$\iiint_\Omega x^2dV=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1-\frac{x^2}{a^2}}dydz=\pi bc\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)dx=\dfrac{4}{15}a^3bc\pi$

（或$\iiint_\Omega x^2dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1a^3bcr^4\sin^3\varphi\cos^2\theta dr=\dfrac{4}{15}a^3bc\pi$）

对结果进行轮换得到$\iiint\limits_{\Omega} y^2 dV = \frac{4}{15}ab^3c\pi, \iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \frac{4}{15}abc^3\pi$……..（5 分）

所以，转动惯量为

$$J = \iiint\limits_{\Omega} d^2 dV = \frac{4abc\pi}{15}\left[\left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2\right]$$ ….（6 分）

（2） 考虑目标函数$F\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2$在约束条件$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$下的条件极值。

设拉格朗日函数为

$$G\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2 + \lambda\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\right)$$

由$\begin{cases} G'_{\alpha} = -2a^2\alpha + 2\lambda\alpha = 0 \\ G'_{\beta} = -2b^2\beta + 2\lambda\beta = 0 \\ G'_{\gamma} = -2c^2\gamma + 2\lambda\gamma = 0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0 \end{cases}$

解得极值点$Q_1\left(\pm1,0,0\right), Q_2\left(0,\pm1,0\right), Q_3\left(0,0,\pm1\right)$……………………（12 分）

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，为$J_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$；

绕 x 轴（长轴）的转动惯量最小，为$J_{\min} = \frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$。……..（15 分）

六（本题 15 分）解：（1）设$I = \oint_C \frac{2xydx+\varphi\left(x\right)dy}{x^4+y^2}$，闭曲线 L 由$L_i\left(i=1,2\right)$组成，设$L_0$为不经过原点的光滑曲线，使得$L_0 \cup L_1^-$（其中$L_1^-$为$L_1$的反向曲线）和$L_0 \cup L_2$分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线$C_i\left(i=1,2\right)$。由曲线积分的性质和题设条件：

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi\left(x\right)dy}{x^4+y^2} = \int_{L_1} + \int_{L_2} \frac{2xydx+\varphi\left(x\right)dy}{x^4+y^2}$$

……….（5 分）

$$= \int_{L_2} + \int_{L_0} - \int_{L_0} - \int_{L_1^-} \frac{2xydx+\varphi\left(x\right)dy}{x^4+y^2} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = I - I = 0$$

（2）设$P = \frac{2xy}{x^4+y^2}, Q = \frac{\varphi\left(x\right)}{x^4+y^2}$，由题意得$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$

即 $\dfrac{\varphi^{'}(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}$，解得 $\varphi(x)=-x^2$ ……..（10 分）

（3） 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4+y^2=1$ 所围区域，

由（1）得 $I=\oint_C \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\dfrac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xydx-x^2dy$

由格林公式和对称性得 $I=\iint\limits_D(-4x)dxdy=0$ ………………………………..（15 分）

# 第二届中国大学生数学竞赛决赛试卷（非数学类，2011）

**考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.45**

一．计算下列各题（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分，要求写出重要步骤。）

（1）.求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

（2）.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

（3）已知 $\begin{cases}x=\ln\left(1+e^{2t}\right)\\ y=t-\arctan e^t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

二．（本题 10 分）求方程 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解。

三．（本题 15 分）设函数 f(x) 在 x=0 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0),f^{'}(0),f^{''}(0)$ 均不为 0，证明：存在唯一一组实数 $k_1,k_2,k_3$，使得 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0$。

四．（本题 17 分）设 $\Sigma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$，$\Gamma$ 为 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 的交线，求椭球面 $\Sigma_1$ 在 $\Gamma$ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

五．（本题 16 分）已知 S 是空间曲线 $\begin{cases}x^2+3y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z\ge0$）取上侧，$\Pi$ 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平

面$\Pi$的距离，$\lambda,\mu,\nu$表示 S 的正法向的方向余弦。计算：

（1）$\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$；（2）$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS$

六.（本题 12 分）设 f(x)是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且$\left|f`(x)\right|<mf(x)$，其中$0<m<1$，任取实数$a_0$，定义$a_n=\ln f(a_{n-1}),n=1,2,...,$证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛。

七.（本题 15 分）是否存在区间$[0,2]$上的连续可微函数 f(x)，满足$f(0)=f(2)=1$，$\left|f`(x)\right|\le 1,\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\le 1$？请说明理由。

# 第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

一．计算下列各题（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分，要求写出重要步骤。）

（1）解：方法一（用两个重要极限）：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\bullet\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{3}{2}x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}$$

方法二（取对数）：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{\frac{1}{2}x^2}\right]$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{3}{2}x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}$$

（2）.解：方法一（用欧拉公式）令$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}$

由欧拉公式得$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$=C+o（1），

则$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n$=C+o（1），

其中，$o(1)$表示$n\to\infty$时的无穷小量，

$\therefore$两式相减，得：$x_n$-$\ln 2=$o（1），$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ln 2.$

方法二（用定积分的定义）

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

（3）解：$\frac{dx}{dt}=\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}},\frac{dy}{dt}=1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}\ \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{e^{2t}-e^t+1}{2e^{2t}}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\bullet\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t-2}{2e^{2t}}\cdot\frac{1+e^{2t}}{2e^{2t}}=\frac{(1+e^{2t})(e^t-2)}{4e^{4t}}$$

二.（本题 10 分）解：设$P=2x+y-4,Q=x+y-1$，则$Pdx+Qdy=0$

$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1,\therefore Pdx+Qdy=0$是一个全微分方程，设$dz=Pdx+Qdy$

方法一：由$\frac{\partial z}{\partial x}=P=2x+y-4$得

$$z=\int(2x+y-4)dx=x^2+xy-4x+C(y)$$

由$\frac{\partial z}{\partial y}=x+C'(y)=Q=x+y-1$得$C'(y)=y-1,\therefore C(y)=\frac{1}{2}y^2-y+c$

$$\therefore z=x^2+xy-4x+\frac{1}{2}y^2-y+c$$

方法二：$z=\int dz=\int Pdx+Qdy=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy$

$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\therefore$该曲线积分与路径无关

$$\therefore z=\int_0^x(2x-4)dx+\int_0^y(x+y-1)dy=x^2-4x+xy+\frac{1}{2}y^2-y$$

三.（本题 15 分）

证明：由极限的存在性：$\lim\limits_{h\to 0}\left[k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)\right]=0$

即$\left[k_1+k_2+k_3-1\right]f(0)=0$，又 $f(0)\neq 0$，$\therefore k_1+k_2+k_3=1$①

由洛比达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}=0$$

由极限的存在性得$\lim\limits_{h\to 0}\left[k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)\right]=0$

即$(k_1+2k_2+3k_3)f'(0)=0$，又 $f'(0)\neq 0$，$\therefore k_1+2k_2+3k_3=0$②

再次使用洛比达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f''(h)+4k_2 f''(2h)+9k_3 f''(3h)}{2}=0$$

$\therefore (k_1+4k_2+9k_3)f''(0)=0 \because f''(0)\neq 0$

$\therefore k_1+4k_2+9k_3=0$③

由①②③得$k_1,k_2,k_3$是齐次线性方程组$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1\\k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+4k_2+9k_3=0\end{cases}$的解

设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则$Ax=b$，

增广矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&0\\1&4&9&0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则$R(A,b)=R(A)=3$

所以，方程$Ax=b$有唯一解，即存在唯一一组实数$k_1,k_2,k_3$满足题意，

且$k_1=3,k_2=-3,k_3=1$。

四.（本题 17 分）解：设$\Gamma$上任一点$M(x,y,z)$，令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，

则$F_x^{'}=\frac{2x}{a^2},F_y^{'}=\frac{2y}{b^2},F_z^{'}=\frac{2z}{c^2},\therefore$ 椭球面$\Sigma_1$在$\Gamma$上点 M 处的法向量为：

$\vec{t}=\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right),\therefore\Sigma_1$在点 M 处的切平面为$\Pi$：

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$$

原点到平面$\Pi$的距离为$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$，令$G(x,y,z)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$,

则$d=\frac{1}{\sqrt{G(x,y,z)}}$,

现在求$G(x,y,z)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$,在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$z^2=x^2+y^2$下的条件极值，

令$H(x,y,z)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+\lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\lambda_2\left(x^2+y^2-z^2\right)$

则由拉格朗日乘数法得：

$$\begin{cases}H_x^{'}=\frac{2x}{a^4}+\lambda_1\frac{2x}{a^2}+2\lambda_2x=0\\H_y^{'}=\frac{2y}{b^4}+\lambda_1\frac{2y}{b^2}+2\lambda_2y=0\\H_z^{'}=\frac{2z}{c^4}+\lambda_1\frac{2z}{c^2}-2\lambda_2z=0\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\\x^2+y^2-z^2=0\end{cases},$$

解得$\begin{cases}x=0\\y^2=z^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\end{cases}$或$\begin{cases}x^2=z^2=\frac{a^2c^2}{a^2+c^2}\\y=0\end{cases}$,

对应此时的$G(x,y,z)=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2\left(b^2+c^2\right)}$或$G(x,y,z)=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2\left(a^2+c^2\right)}$

此时的$d_1=bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$或$d_2=ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$

又因为$a>b>c>0$，则$d_1<d_2$

所以，椭球面$\Sigma_1$在$\Gamma$上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值分别为：

$d_2=ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$，$d_1=bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$

五.（本题 16 分）解：（1）由题意得：椭球面 S 的方程为$x^2+3y^2+z^2=1\left(z\geq 0\right)$

令$F=x^2+3y^2+z^2-1$,则$F_x^{'}=2x,F_y^{'}=6y,F_z^{'}=2z$，

切平面$\Pi$的法向量为$\vec{n}=\left(x,3y,z\right)$，

$\Pi$的方程为$x\left(X-x\right)+3y\left(Y-y\right)+z\left(Z-z\right)=0$，

原点到切平面$\Pi$的距离为$\rho\left(x,y,z\right)=\dfrac{x^2+3y^2+z^2}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$

$$\therefore I_1=\iint\limits_S\frac{z}{\rho\left(x,y,z\right)}dS=\iint\limits_S z\sqrt{x^2+9y^2+z^2}dS$$

将一型曲面积分转化为二重积分得：记$D_{xz}:x^2+z^2\leq 1,x\geq 0,z\geq 0$

$$\therefore I_1=4\iint\limits_{D_{xz}}\frac{z\left[3-2\left(x^2+z^2\right)\right]}{\sqrt{3\left(1-x^2-z^2\right)}}dxdz=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{r^2\left(3-2r^2\right)dr}{\sqrt{3\left(1-r^2\right)}}$$

$$=4\int_0^1\frac{r^2\left(3-2r^2\right)dr}{\sqrt{3\left(1-r^2\right)}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\left(3-2\sin^2\theta\right)d\theta}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}-2\cdot\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

(2)方法一： $\lambda=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}},\mu=\dfrac{3y}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}},\nu=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$

$$\therefore I_2=\iint\limits_S z\left(\lambda x+3\mu y+\nu z\right)dS=\iint\limits_S z\sqrt{x^2+9y^2+z^2}dS=I_1=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

方法二（将一型曲面积分转化为二型）：

$$I_2=\iint\limits_S z\left(\lambda x+3\mu y+\nu z\right)dS=\iint\limits_S xzdydz+3yzdzdx+z^2dxdy$$

记$\Sigma: z=0, x^2+3y^2\le 1, \Omega: x^2+3y^2+z^2\le 1\left(z\ge 0\right)$，取面$\Sigma$向下，$\Omega$向外，

由高斯公式得：$I_2+\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+3yzdzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega} 6zdV$

$\therefore I_2=\iiint\limits_{\Omega} 6zdV$，求该三重积分的方法很多，现给出如下几种常见方法：

① 先一后二：$I_2=6\iint\limits_{x^2+3y^2\le 1} d\sigma\int_0^{\sqrt{1-x^2-3y^2}} zdz=3\iint\limits_{x^2+3y^2\le 1}\left(1-x^2-3y^2\right)d\sigma$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}} r\left(1-r^2\right)dr=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

②先二后一：$I_2=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+3y^2\le 1-z^2} d\sigma=\frac{6}{\sqrt{3}}\pi\int_0^1 z\left(1-z^2\right)dz=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

③广义极坐标代换：$I_2=\frac{24}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r^3\sin^2\varphi dr=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

六.（本题 12 分）证明：$a_n-a_{n-1}=\ln f\left(a_{n-1}\right)-\ln f\left(a_{n-2}\right)$

由拉格朗日中值定理得：$\exists\xi$介于$a_{n-1}, a_{n-2}$之间，使得

$\ln f\left(a_{n-1}\right)-\ln f\left(a_{n-2}\right)=\frac{f^{'}\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)$

$\therefore\left|a_n-a_{n-1}\right|=\left|\frac{f^{'}\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)\right|$，又$\left|f^{`}\left(\xi\right)\right|<mf\left(\xi\right)$得$\left|\frac{f^{'}\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}\right|<m$

$\therefore\left|a_n-a_{n-1}\right|<m\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|<\ldots<m^{n-1}\left|a_1-a_0\right|\because 0<m<1$

$\therefore$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^{n-1}\left|a_1-a_0\right|$收敛，$\therefore$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n-a_{n-1}\right|$收敛，

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)$绝对收敛。

七.（本题 15 分）解：假设存在，当$x\in\left[0,1\right]$时，由拉格朗日中值定理得：

$\exists\xi_1$介于 0，x 之间，使得$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f^{'}\left(\xi_1\right)x,$，

同理，当$x\in\left[1,2\right]$时，由拉格朗日中值定理得：

$\exists\xi_2$介于 x，2 之间，使得$f\left(x\right)=f\left(2\right)+f^{'}\left(\xi_2\right)\left(x-2\right)$

即$f\left(x\right)=1+f^{'}\left(\xi_1\right)x, x\in\left[0,1\right]; f\left(x\right)=1+f^{'}\left(\xi_2\right)\left(x-2\right), x\in\left[1,2\right]$

$\because -1\le f^{`}\left(x\right)\le 1$，

$\therefore 1-x \leq f(x) \leq 1+x, x \in [0,1]; x-1 \leq f(x) = 3-x, x \in [1,2]$

显然， $f(x) \geq 0, \int_0^2 f(x)dx \geq 0$

$$1 \leq \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \leq \int_0^2 f(x)dx \leq \int_0^1 (1+x)dx + \int_1^2 (3-x)dx = 3$$

$\therefore \left|\int_0^2 f(x)dx\right| \geq 1$，又由题意得$\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leq 1, \therefore \left|\int_0^2 f(x)dx\right| = 1$

即$\int_0^2 f(x)dx = 1$，$\therefore f(x) = \begin{cases} 1-x, x \in [0,1] \\ x-1, x \in [1,2] \end{cases}$

$$\because \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1, \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{x-1} = -1$$

$\therefore f'(1)$不存在，又因为 f(x)是在区间$[0,2]$上的连续可微函数，即 $f'(1)$存在，矛盾

故，原假设不成立，所以，不存在满足题意的函数 f(x)。