

为什么人不应该信仰科学或逻辑

骆远志

在大多数情况下，科学和逻辑都是好东西，人应该相信和跟随它们。但是它们有不可避免的盲点，不能涵盖所有真理，因此不足以作为一个人、或一个社会的信仰。

我与同学们已连续几年讨论“神 vs 科学”。我讲过从文艺复兴时代开始，一大批虔诚的基督徒学者，包括伽利略、笛卡尔、牛顿等，在热忱探求神意过程中创立了现代科学【1】。信仰科学与逻辑的人回应，炼金术也孕育了化学。基督教孕育了现代科学，并不代表前者正确。我又分析，国人被灌输马克思主义，因此信仰无神论。但马克思对科学的理解基于机械宇宙观，机械宇宙观被后来的科学证伪【2】。皮之不存，毛将焉附？信仰科学与逻辑的人说，粪土中也可以长出鲜花，即使机械宇宙观与马克思主义都错了，也不代表科学与逻辑错了。不久前我写道当代科学挑战达尔文进化论【3】。信仰科学与逻辑的人回答，一种科学理论出现问题，不代表科学本身不可信。我们信仰的是科学背后的理性。

科学的概念相对清晰，而理性的概念相对模糊。传统定义，理性就是信奉“找原因、讲道理”（based on reasons）。一个更清晰的理性定义，也是同学们已在讨论中实际采用的：

理性 = (科学 数学 逻辑) 的合集 (Exp. 1)

本文也采用这个理性定义。

讨论不断深入，我受益匪浅，更加理解对方。同学们觉得科学、数学和逻辑都完美可信，理性当然就完美可信。有了这样好的理性，宗教信仰就没必要。但绝大多数人不知道，在近一个世纪前，世界顶级思想家们严肃探讨过这种想法。讨论的高潮包括 1920 年代兴起的逻辑实证主义哲学、与之相呼应的数学寻根运动、以及 1931 年哥德尔发布的两个不完备定理。简单讲，哥德尔发现数学和逻辑的根本处存在漏洞，现代科学又倚重数学和逻辑，所以科学与理性的基础不牢。

一 学术界躁动

逻辑实证主义

第一次世界大战严重挫伤了欧洲的自信心。战争的残酷程度与死伤人数远超过往，也远超预想。奥匈帝国，俄罗斯帝国、德意志帝国等分崩离析。即使属于胜利方的英法也损失惨重。面对一片疮痍，人们在疑问，“强盛的欧洲为什么步入歧途？什么地方错了？”尤其在战败的德国和奥地利地区，思想者们质疑一切传统，包括政治、信仰、文化、哲学、艺术、文学等。

与此同时，人们却唯独在科学中看到新希望。随着电磁学等在 19 世纪末逐渐成熟，机械宇宙观走上巅峰。从专家到老百姓都普遍认为，科学已经或即将解决从原子到太空之间的所有问题。在 20 世纪初，相对论和量子力学相继诞生，机械宇宙观开始没落，但人们对科学的信任有增无减【2】。因为今天我们熟悉的科学难题，比如暗物质、暗能量、宇宙大爆炸等，在那时还没有被发现、或主流社会还不知道。

1920 年代初，欧洲在舔舐自己身上的战争创伤，在奥地利维也纳大学校园里、以及校园附近的咖啡店里，一批年轻学者经常聚会，讨论哲学问题。他们的学术背景实际上是物理学，并不是传统哲学，但他们在科学和数学里看到一种新哲学，就是后来的逻辑实证主义。这些人被称为维也纳

学派。他们的思想很快传到德国柏林，形成柏林小组。然后再飘洋过海，传到英国和美国。在后来几十年里，它成为西方主流哲学，其影响力溢出学术界，很多观念进入普通人的言谈和思想中。



图1. 逻辑实证主义(Logical Positivism)三位创始人。左为石里克(Moritz Schlick, 1882—1936)德国人，维也纳学派(the Vienna Circle)领袖，本是物理学家，著名量子物理学家普朗克的学生。纳粹思想盛行时，他被极端分子谋杀。中为卡尔纳普(Rudolf Carnap, 1891—1970)，德国人，后来移民美国，维也纳学派的领袖之一，本是物理学家和数学家。右为赖欣巴哈(Hans Reichenbach, 1891—1953)德国犹太人、柏林小组(the Berlin Circle)的创始人，本是物理学家和数学家，老师包括大卫·希尔伯特、普朗克、玻恩和爱因斯坦。希特勒上台后，赖欣巴哈先逃到土耳其，几年后来美国。

逻辑实证主义强调验证(The Verification Principle)。验证分两大类，一是用事实验证，就是科学实验。二是用数学和逻辑验证。万事都要经过验证才可以被接受。现在世界各地的很多普通人也接受这个原则，其源头就是逻辑实证主义。这个学派的中心思想是，只有科学、数学和逻辑才有意义(sensical)。其他思想体系，包括传统的形而上学哲学、神学、宗教思想等都无意义(nonsensical)。换成大白话讲，什么基督教、哲学等，都是废话；只有科学、数学和逻辑有意义。废话当然应该都被摒除。逻辑实证主义者认为，人应该抛弃宗教与旧哲学，只相信科学、数学和逻辑。看看，他们与今天那些信仰科学与理性、坚决排斥基督教的朋友们多么相像！

逻辑实证主义的很多细节属于小圈子里的阳春白雪，但它的大方向——拥抱科学与理性、抛弃基督教和以基督教为基础的旧哲学——却反映了社会潮流。当时的西欧思想家们和普通老百姓纷纷认同。诺贝尔物理学奖获得者，英国大学者彭罗斯教授回忆，在1930年代，他还是个孩子，与父母住在英格兰小镇上，每周日全家都要打扮整齐，去教堂做礼拜。也许出于孩子的敏感，一次在从教堂回家的路上，他突然问母亲，“你真的相信牧师讲的那些东西吗？”母亲一下子语塞，让他很受震撼，记忆深刻。英国本是清教徒的故乡，老百姓非常虔诚。但在第一次世界大战之后，民风发生悄然巨变。虽然大家还与过去一样勤快地去教堂，但心里的信仰严重动摇。

数学寻根运动

逻辑实证主义在数学界获得广泛响应。响应者们不一定自认逻辑实证主义者，但他们强烈认同这个学派推崇理性与科学的主张。数学界很多人明确认为，是时候用理性代替传统基督教了。数学的地位特殊，因为现代科学已彻底数学化。如果科学与理性要成为人和社会的新信仰，数学作为基础必须首先牢靠。普通大众觉得数学当然是牢靠的，但是在19世纪末、20世纪初，顶级数学家们都已意识到，数学的基础还远未夯实。

数学是完美的。这个印象来自古希腊。那时的数学只有两部分，算术和欧几里得几何学。算术的对象是自然数。在数论中，自然数经常被定义为 0 与正整数的合集，本文遵循这个传统。欧几里得几何包括 5 个公理和推导两部分。基于公理的推导就是证明。所有被证明的命题构成定理集合。西方人长期把经典数学看成最纯粹的人类知识，正确性毋庸置疑。它内部自洽(consistent)，精准描述物质世界，且符合人头脑里的直觉。经典数学完美，反映宇宙的完美。所以欧几里得说，数学就是宇宙的语言。

但是从文艺复兴到 20 世纪初的几百年里，数学已大改变，曾经完美的模样出现了深刻裂痕。16 世纪意大利工程师邦贝利(Rafael Bombelli, 1526—1572)于 1572 年出版《代数学》，讨论负数的平方根，虚数概念因此诞生，挑战人的直觉。英国大天才牛顿与德国大天才莱布尼茨(Gottfried Leibniz, 1646—1716)分别发明了微积分，让无限大与无限小概念变得不可躲避。1830 年俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(Nikolai Lobachevsky, 1792—1856)、1832 年匈牙利数学家亚诺什(János Bolyai, 1802—1860)，分别发现非欧几何，造成对传统数学的最大冲击。非欧几何排斥一些欧几里得公理，比如不要求平行线永不相交，因此催生新几何体系。数学家们发现这样的几何也自洽，却违反人的直觉和平常观察到的现实。于是人们开始疑问，非欧几何还算数学吗？数学还是宇宙的语言吗？到底什么才是数学？

微积分、复数分析、非欧几何等新分支的出现，让数学变得支离破碎。数学里出现了矛盾，既有抽象的、哲学意义上的矛盾，比如非欧几何还算数学吗？也有具体的、让数学家无法忍受的矛盾，比如下节将介绍的罗素悖论。于是数学界开始了声势浩大的寻根讨论。寻找数学的基础就是寻找各分支的共性。有了这样的共性，现代数学才可能重新自洽。恢复自洽是数学寻根的内部动力，而思想界要把科学与理性树立成新信仰，为数学寻根增加了紧迫性。

在数学寻根问题上存在三大学派。一是直觉主义(Intuitionism)，认为数学的根本在于反映人的直觉。显然，直觉主义与非欧几何很难相容。二是形式主义(Formalism)，认为数学本质就是一种游戏规则，只要内容明确、没有内部矛盾，任何规则都允许。非欧几何与传统几何的矛盾、或非欧几何与现实的矛盾都不重要，只要它自洽，就算是数学。三是逻辑主义(Logicism)，认为数学的本质是逻辑。欧几里得几何与非欧几何看似不兼容，但它们都符合逻辑，所以都算数学。非欧几何地位问题有重大现实意义。当时新兴的广义相对论与量子力学都需要它。把非欧几何排除出数学将严重阻碍科学发展。

三个数学哲学流派都对数学发展做出过贡献。说到学术争论，读者可能以为各派互相排斥，一派最终胜出，就代表其他派别都失败了。其实不然。三方有争论，有时还很激烈，但他们也有很多共通点，相互促进远大于斗争。比如三方都认为数学应该是公理体系，就是公理加推导两部分。另外，形式主义与逻辑主义之间有明显共通性。前者要求数学体系自洽，不在乎数学与数学之外有什么联系。而后者也要求数学自洽，但进一步要求数学符合逻辑。可以说，逻辑主义是形式主义的一个特例。

二 数学逻辑主义

数学逻辑主义最终胜出，但过程远非一帆风顺。

数学逻辑主义的目标是把整个数学建立在现代集合论基础之上。康托尔是现代集合论之父。他在 1870 和 80 年代的研究被广泛认为是这个新门类的起点。无限集，就是元素无限多的集合，在集合论中地位关键。康托尔认为无限集之间还有“大小”之分，比如实数集合大于自然数集合，严

重挑战传统数学家们的直觉。后者认为所谓“无限大”只是一种图方便的说法，并不是真实的数。把无限大再分大小属无稽之谈。康托尔因此受到严重排挤。他最后抑郁成疾，死在精神病院。

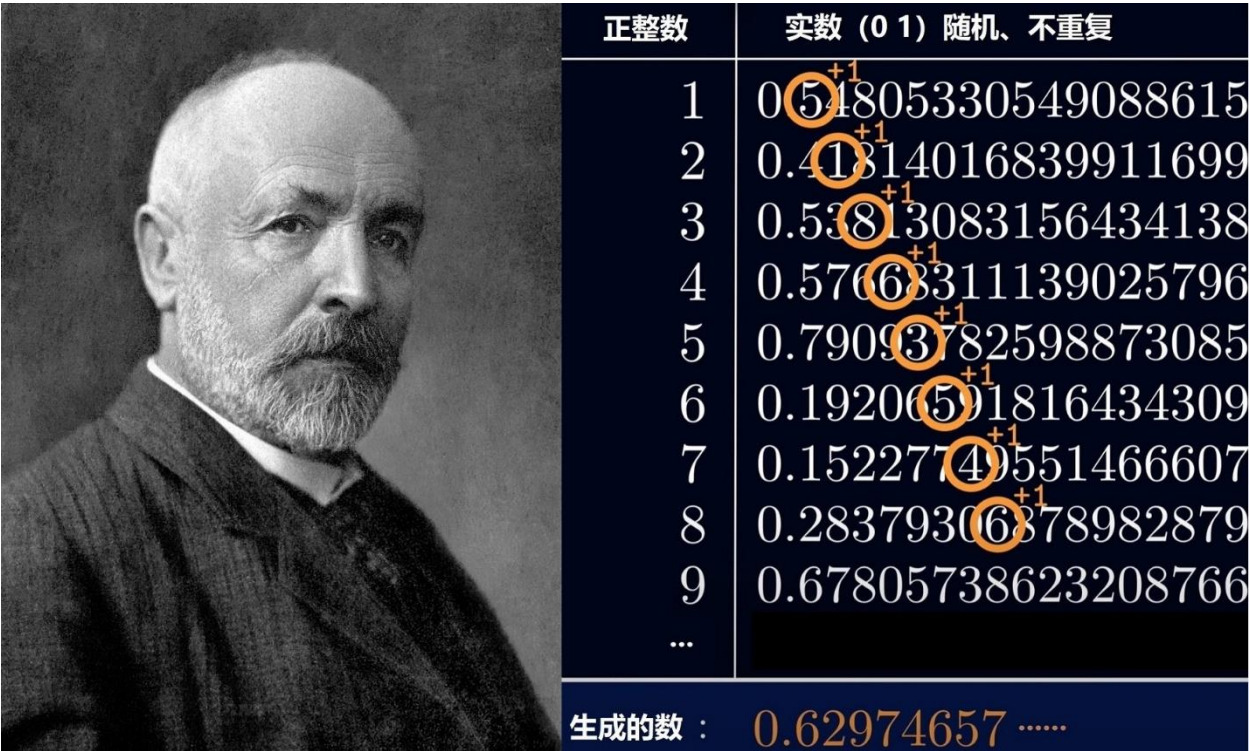


图 2. 康托尔 (Georg Cantor, 1845—1918) 与他的对角线法证明实数区间 (0 1) 含有元素数量比正整数集更“多”。康托尔是出生于俄罗斯的德国数学家。实数区间 (0 1) 与正整数集都是无限集。右图先假设它们有同样多元素，比如图中右侧在 (0 1) 中随机抽取元素，然后与自然数一一对应。康托尔依次从每个实数中取一位数，加 1，由此生成下方橘黄色的数。这个“生成的数”肯定属于 (0 1)，却不在这个表格中，于是假设被证伪，实数集 (0 1) 比正整数集含更多元素。也就是说，前者比后者“浓度”更高 (higher Cardinal number)。无限集的性质经常违反直觉，但也很有趣。比如正整数集、整数集、有理数集等，浓度都相同。整个实数集、实数区间 (0 1)、无理数集等，浓度也相同。

罗素悖论

德国数学家弗雷格、与英国数学家和哲学家罗素都是数学逻辑主义大师。在 1902 年，弗雷格把自己的新书稿交给出版商，等待付印。这本书凝结他半生心血。他认为书成功地把数学建立在逻辑学基础之上。这时他收到罗素来信，提到一个简单问题：所有不包含自己的集合构成的集合，是否包含自己？数学表达式：

$X、y$ 都是集合， $X = \{y \mid y \notin y\}$ ，问题 $X \in X$ 真还是假？ (Exp. 2)

这就是数学史上著名的“罗素悖论”。逻辑学建立在现代集合论上。集合是集合论中最基本概念。集合可以包含自己。在 (Exp. 2) 里，如果 $X \notin X$ ，根据 X 的构建条件，它就应该包含自己， $X \in X$ ，矛盾。如果它包含自己，同样根据它的构建条件，它就不应该包含自己，又矛盾。罗素悖论揭示集合论不自洽。而逻辑主义者要把整个数学建立在集合论基础之上，如果这个基础本身不自洽，数学又怎么可能自治？罗素来信造成弗雷格精神崩溃，住进医院。

[illegible]

ZFC 集合论

ZFC 集合论的全称是“含选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论 (Zermelo-Fraenkel Set Theory with the axiom of choice)。它是一个公理体系，共包含 10 个公理 (9 + 选择公理)，它们让数学避免了类似罗素悖论那样的内部矛盾。这个体系的主要创立者是两位德国数学家，策梅洛 (Ernst Zermelo, 1871—1953) 与弗伦克尔 (Abraham Fraenkel, 1891—1965)。

$$\text{数学} = \text{逻辑} \quad (\text{Exp. 3})$$

三 希尔伯特计划

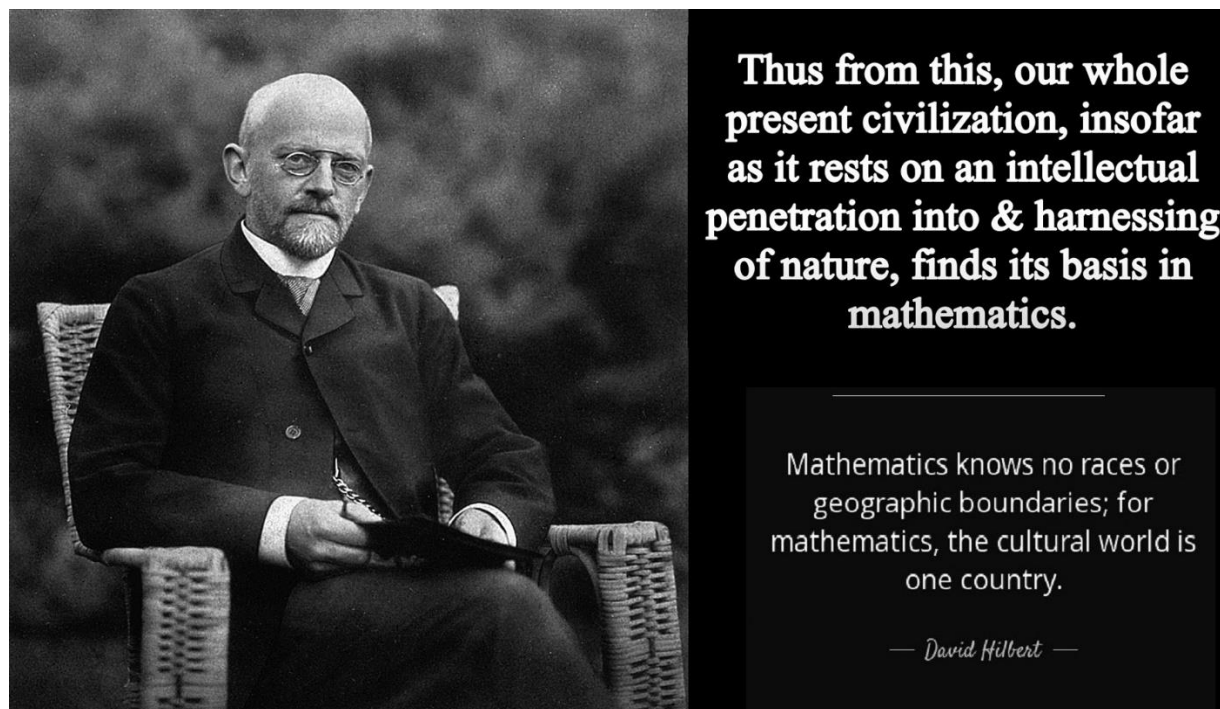


图 5. 德国数学家希尔伯特(David Hilbert, 1862–1943), 以及他众多金句之二, “我们的整个现代文明强调智慧的洞察力与智慧驾驭自然的能力, 而这些都基于数学”、“数学里没有种族或地理边界; 对于数学, 这个世界在文化上是同一个国家”。他生长在一个虔诚的基督教新教家庭, 但成年后离开教会, 变成不可知论者(agnostic)。他放弃追求“神的精神”, 转而追求“人的精神”, 认为有了理性的力量, 人就不再需要神、人的精神就可以取代神的精神, 而他从事的数学就是理性中的关键。所以他讨论数学时, 经常跳出数学本身, 谈论数学在人的精神中的地位、以及数学对人类的作用。与那个时代的先锋知识分子们一致, 他坚信理性完美, 虽然人还没证明理性完美。

希尔伯特是 20 世纪初世界数学领域的头号精神领袖。在数学史上, 他是最后一位在各个主要领域都做出杰出贡献的人。泛函分析中的“希尔伯特空间”就是他广为人知的成就之一。他对物理也很有研究, 曾与爱因斯坦在同时期发现广义相对论的场方程。广义相对论中的希尔伯特作用量是他的又一重要成就。罗素与怀特黑德出版《数学原理》后, 数学寻根运动又掀热潮。作为数学界的掌舵人, 希尔伯特在 1920 年代初提出一整套标准, 用以评判统一后的数学体系, 获得广泛认同与接受, 史称“希尔伯特计划”(Hilbert's program)。其中包括:

1. 数学是公理体系。包括有限数量的公理和一套严格的推论规则。希尔伯特是数学形式主义者, 曾与数学直觉主义阵营展开激烈争论, 但他一贯支持数学逻辑主义。
2. 完备性(Completeness)。根据公理与规则, 可以发现所有真命题。
3. 自洽(Consistency)。数学必须证明自洽, 即数学内部不存在矛盾。
4. 可决定性(Decidability)。数学必须有能力判断每一个命题的真伪。

试图用理性替代基督教

希尔伯特计划直接影响了当时与后世的数学发展，成为世界数学史上的一座里程碑。不难看出，该计划具有鲜明的“形而上”特征。虽然它为数学发展打造，但它的内容关乎数学背后更深层的东西，类似哲学，而非数学本身。把中国古今数学家们的言论和著作拿来与之比较，差别非常明显。我曾回顾在对待科学态度上西欧与中国的根本不同【1】。西欧科学家研究科学是为理解神，所以强烈追求形而上，因为形而上让人接近神。而中国古今科学家没有基督教信仰，研究科学是为了应用，缺乏形而上的动力。在数学领域也如此。

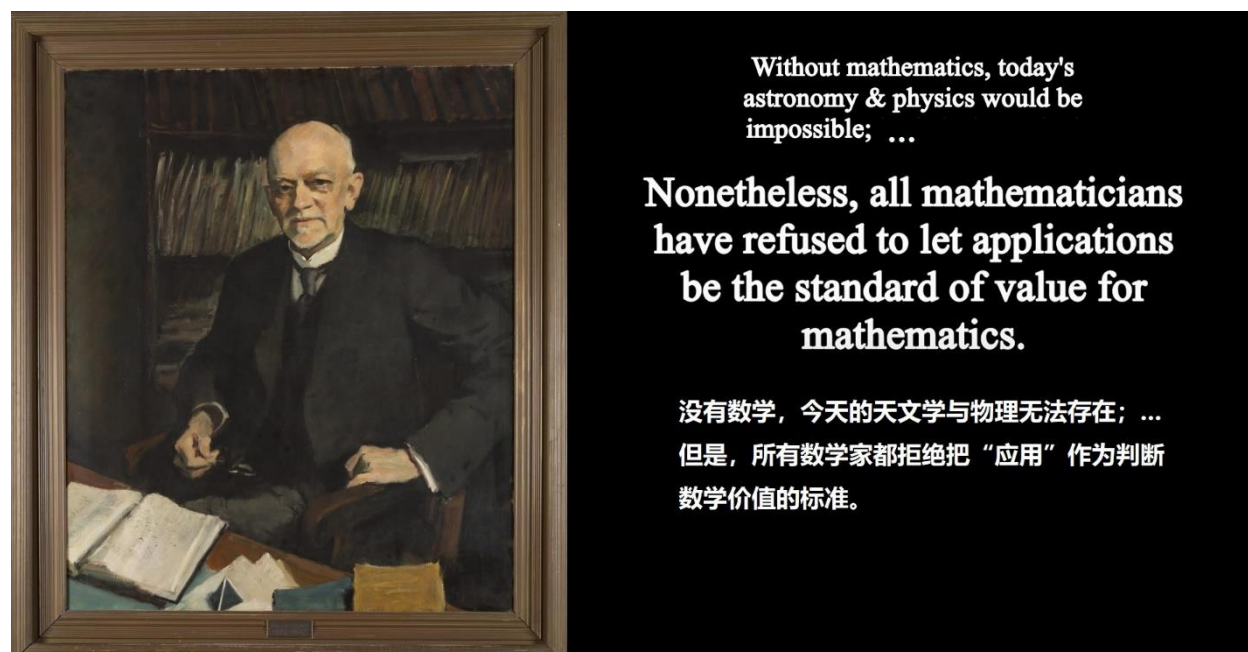


图 6. 希尔伯特在 1930 年广播讲演中的一段话，“没有数学，今天的天文学与物理学无法存在；…但是，所有数学家都拒绝把‘应用’作为判断数学价值的标准。”

希尔伯特是基督教文化培养出来的、反对基督教的数学思想家。他有一套较成熟的思想体系。他选择完备、自洽、和可决定性作为判定未来数学体系的标准，并不是突发奇想。如果是，其他数学家也不会响应。他与他的跟随者们在不言而喻中默契。他们都共同生活在其中的基督教文化就在他们的默契中。他们向往理性，把数学看作新兴理性力量的一部分，希望数学发展让理性壮大，压过传统基督教。希尔伯特计划的每一个关键点都脱胎于基督教义，要与基督教义里对应的部分竞争。

《圣经》说，神是完美(perfect)、守信(faithful)、和给人希望的(hope)。所谓完美，就是神包含所有真理。人不会因为跟随神而遗漏任何真理。关于神守信，神答应的，就一定会做到，神不会自相矛盾。关于神是希望，当人决定踏上艰苦历程时，他知道困难不可避免，所以他需要在一开始就确信长远目标是对的、他最终必将成功。如果不如此，他就没有理由保持信心，就注定失败。

完美、守信、和希望都是神的重要特点。缺少任一个，神就不再是神，就不配作为人的信仰。希尔伯特与他的思想同党们，都希望把理性当作新信仰，替代传统基督教。要实现这点，理性就必须也拥有类似特点。而数学是理性的基础。希尔伯特把完美、守信、和希望翻译成数学里的语言，就变成了上述的完备、自洽、和可决定性。

四 伟大的哥德尔

1930年9月，在如今的加里宁格勒举行了一连串德国学术界顶级年会。那时加里宁格勒还属于德国。希尔伯特作为德高望重的数学界领袖，受邀做广播演讲。其中他谈道，“所有科学的唯一目的都是荣耀人的精神”。这样遣词用句完全脱胎于基督徒赞美诗，但他绝口不提神。他谈到“驾驭自然”，提及伽利略、康德、高斯、和与他同时代的几位大数学家。他高屋建瓴，深入浅出，在人类精神和思想进步的大框架下讨论数学。在讲演的最后，他喊出了后来成为他墓志铭的著名口号，“我们必须知道，我们一定会知道！”这后半句是他对理性的信心，前半句则表达他追随理性的决心。几乎整个数学界都准备好跟随他。

但他当时不知道，就在他讲演前一天，一位年仅24岁、极端腼腆的维也纳大学博士生哥德尔，在同一年会上做了一场学术报告，用严谨的逻辑否定了希尔伯特关于理性的信念。哥德尔太年轻，他的文章还只是初稿，没几个人听他报告，更少人严肃对待他的惊人结论。不过一年后，他的文章终于发表，立刻引起轰动。其核心发现被称为“哥德尔不完备定理”，从根本上改变了逻辑学与数学，影响力延伸到科学、哲学、神学、以及大众思想。他也迅速跃升为世界级逻辑学家。从理性的高度看，哥德尔发现人掌握的一些真理并不来源于理性。他有一句名言，“有些事实被认知为真，但不必然可证”。这与希尔伯特、罗素等坚信理性万能的观点截然不同。

哥德尔出生于奥匈帝国的德语区，自幼聪慧但柔弱，深受精神类疾病困扰。从青年时代开始，他多次长时间住进精神病院。这造成他不善社交，但他的思想非常大胆犀利。他18岁时进入维也纳大学，本想主修理论物理，在选课过程中喜欢上数学和哲学。他积极参加了逻辑实证主义维也纳学派的各种讨论，最后认定数学逻辑学是所有科学思想的根本，于是转攻逻辑学。

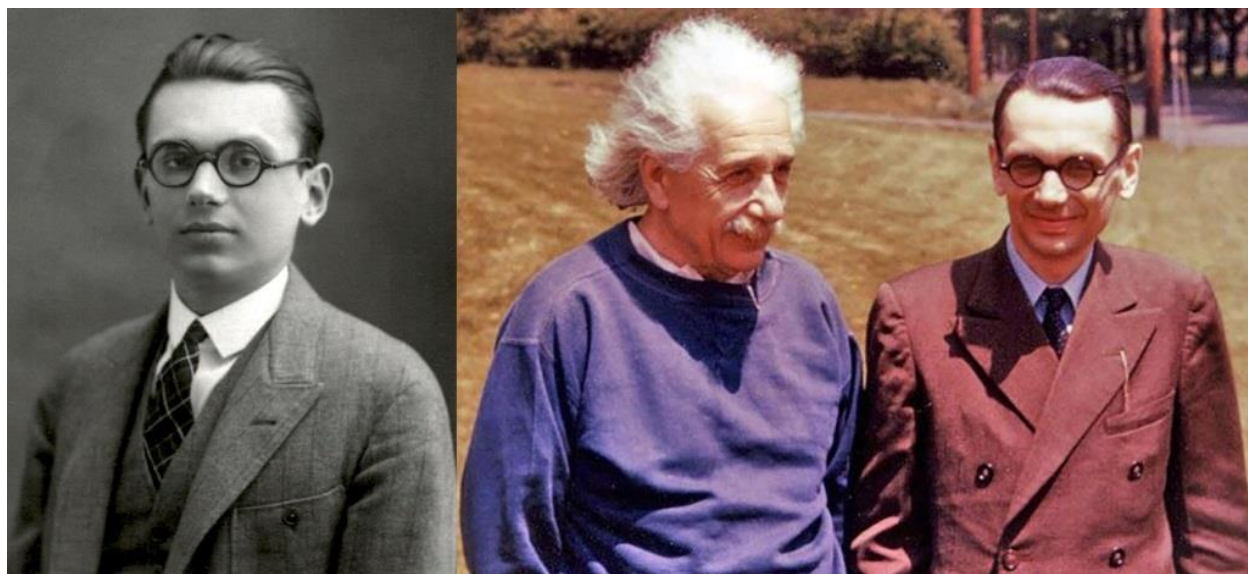
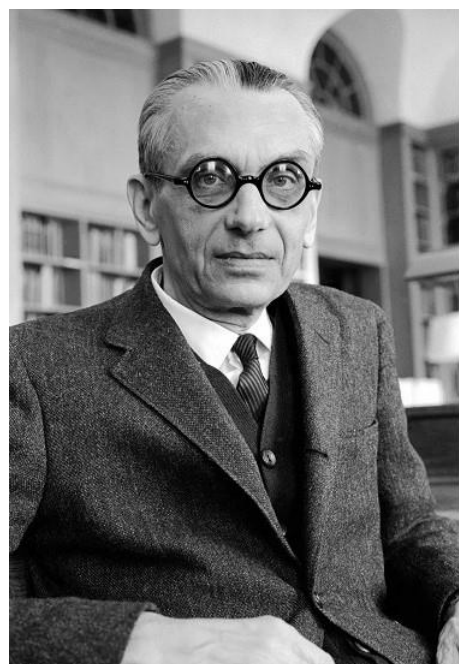


图7. 哥德尔(Kurt Gödel, 1906—1978)，逻辑学家、数学家、哲学家。在纳粹当政时代移民美国，担任普林斯顿大学教授，与爱因斯坦是同事，两人相差27岁，却成为非常要好的朋友。每当下班，他们就会共同散步回家，一路深入讨论各种问题。当时的普林斯顿大学聚集了一大批来自世界各地的天才级大师，这两位无疑是天才中的天才，大师中的大师。两人具体谈什么，很可能改变人类思想进程，所以其他人非常好奇。爱因斯坦曾说，“我之所以每天上班，就是为了有机会与哥德尔一起散步回家”。

哥德尔是虔诚的基督徒，属路德派。他不善与人打交道，平时不去教堂，但经常在家研读《圣经》。他常与身边朋友讲到自己用逻辑学严谨证明了神的存在，但他不想公开发表，因为害怕被学术界视为异类。他去世后，他的证明才流出。哥德尔延续了神学史上圣安瑟伦(Anselm of Canterbury, 1033 - 1109)和莱布尼茨(Gottfried Leibniz, 1646 - 1716)试图证明神存在的工作。前者是11世纪意大利基督教僧侣，后者是17世纪德国著名天才。国人应该熟悉后者对微积分的贡献。哥德尔认为自己成功证明了神的存在，但学术界里反基督教气氛浓厚，挑战哥德尔证明的人当然也有。这类争论短期内不可能停止。



Gödel's ontological proof of God

- Ax. 1. $(P(\varphi) \wedge \Box \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow P(\psi)$
 Ax. 2. $P(\neg\varphi) \Leftrightarrow \neg P(\varphi)$
 Th. 1. $P(\varphi) \Rightarrow \Diamond \exists x \varphi(x)$
 Df. 1. $G(x) \Leftrightarrow \forall \varphi(P(\varphi) \Rightarrow \varphi(x))$
 Ax. 3. $P(G)$
 Th. 2. $\Diamond \exists x G(x)$
 Df. 2. $\varphi \text{ ess } x \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall \psi(\psi(x) \Rightarrow \Box \forall y(\varphi(y) \Rightarrow \psi(y)))$
 Ax. 4. $P(\varphi) \Rightarrow \Box P(\varphi)$
 Th. 3. $G(x) \Rightarrow G \text{ ess } x$
 Df. 3. $E(x) \Leftrightarrow \forall \varphi(\varphi \text{ ess } x \Rightarrow \Box \exists y \varphi(y))$
 Ax. 5. $P(E)$
 Th. 4. $\Box \exists x G(x)$ \Box : must

Ax: Axiom Th: Theorem Df: Definition \Diamond : possibly

图8. 哥德尔关于神存在的本体论证明。

逻辑实证主义创始人石里克与哥德尔是好朋友，前者在1936年被刺杀，从此哥德尔总害怕被人下毒。到了晚年，这种被迫害狂想症加重，他只吃太太为他准备的饭菜。1977年底，他太太病重住院。1978年1月， he 被发现饿死在位于新泽西普林斯顿的家里。哥德尔无疑是二十世纪最伟大的逻辑学家。也有研究者认为，他是人类有史以来最伟大的逻辑学家，古希腊的亚里斯多德只能算第二。可惜国人中少有人知道他。不但中小学课本和通俗读物里没有他，即使在大学生和研究生群体里，知道他的人也很少。所以我多花一些篇幅介绍他。

深入了解罗素、希尔伯特、哥德尔等的思想之后，我们发现他们思考问题的出发点都是寻求世界与人的根本，他们的数学为这个大目标服务。其他学科也类似，比如我在先前文章中谈及牛顿、笛卡尔、开普勒等，因为强烈信仰基督教而创立现代科学。洛克、康德、黑格尔等，因信仰基督教而发展出新哲学与政治学思想。而罗素、希尔伯特等，因怀疑基督教而致力于新数学与哲学研究。无论支持还是反对，西方思想家们思考所有大问题都围绕基督教，虽然他们在自己的专业中经常不明说。我看到很多朋友花大量时间和精力研读西方思想著作，但因不懂基督教而不得要领，于是在此做个提醒。

哥德尔不完备定理

本节的目标读者是不了解哥德尔理论的人，目的是让他们了解理论的大概，并建立基本直觉。这里不追求严谨，也避免次要细节。本后注释中有理论证明的链接【4】【7】，有兴趣的读者可以进一步阅读。

哥德尔不完备定理的标准表达形式：

- 第一定理：任何自洽的形式系统，只要包含自然数的算术规则(皮亚诺公理 Peano axioms)，就一定存在不能被证明的真命题。
- 第二定理：任何自洽的形式系统，只要包含自然数的算术规则(皮亚诺公理 Peano axioms)，就不能证明本身的自洽性。

所有现代科学体系、现代数学和逻辑学体系、现代哲学体系等，都是公理体系，比如牛顿力学。它们都包含算术逻辑，比如都承认 $1+1=2$ ，所以都满足定理中的条件，也都适用定理的结论。其中第一定理回答希尔伯特计划中的完备性问题，第二定理回答自洽性问题，答案都是否定的。用平常话翻译第一定理，任何理性系统都不完整，都会遗漏某些真理。第二定理的意思是，即使自洽的理性系统也不能证明自己自洽，更何况非自洽的系统。

在现实中，人们要求理论自洽优先于理论完备性。被发现自相矛盾的理论，要么发现者自己就否定了、不会公布，要么公布后被他人看穿、很快被抛弃，比如文革时期中国物理学界推出的“层子模型”。但即使最严谨的学者也通常可以接受不完备、但在某些情况下最优的理论。比如牛顿力学不能涵盖极端微观或极端宏观的现象、是不完备的。但它在很多情况下比量子力学和相对论更方便，所以全世界都继续使用。简单讲，当今所有科学理论都只是目前还未发现其自相矛盾、但人们已经知道它不完备的理论。它遗漏真理，且不能保证它以后不出现自相矛盾。

数学同样不完备，不能证明自己自洽。哥德尔不完备定理提出后，很多数学家们认为以下命题为真、但可能永远无法证明：

1. 哥德巴赫猜想(Goldbach's Conjecture)：任何大偶数都可以被写成两个素数之和。因为政治宣传，很多人误以为陈景润解决或几乎解决了它，其实不然。哥德巴赫猜想说：任何偶数 = 素数 1 + 素数 2。陈景润证明：任何偶数 = 素数 1 + 素数 2 或 任何偶数 = 素数 1 + 素数 2 \times 素数 3。数学界简称哥德巴赫猜想是“1+1”，陈景润证明了“1+2”。二者差距甚远。
 2. 孪生素数猜想：孪生素数无限多。相差为 2 的两个素数是孪生素数。
 3. 连续统假设(the Continuum hypothesis)：不存在一个浓度绝对大于整数集 I 、又绝对小于实数集 R 的集合。
- ...

简介定理的证明

哥德尔不完备定理的证明是数学史上最精彩的证明之一，值得有条件的朋友们花时间了解。为避免本文读起来太沉重，这里只给出证明的大致思路 and 关键技巧，不求完整或严谨。

大致思路

证明总体运用逻辑学里的“自指”(self reference)，在理性系统中制造矛盾。哥德尔发现在任何形式系统里，总存在本质如下、但具体内容符合具体系统要求的逻辑判断句：

$$P = \text{本句话是伪命题} \quad (\text{Exp. 4})$$

那么命题 P 是真还是假呢？

- 如果系统没有发现 P 是真命题，既把 P 自动归类为伪命题。而 P 说自己是伪，所以 P 是正确的。于是系统遗漏一个真命题。完备性被破坏，就是第一定理。
- 如果系统发现 P 是真命题，而 P 又说自己是伪，于是系统自相矛盾。自治性被破坏，就是第二定理。

关键技巧

证明中有两个难点。一是形式系统的具体内容纷繁复杂，不同系统之间差别巨大。描述命题的语言要么是如英文那样的人类常用语言，要么是逻辑符号，就像图 4 中右图 《数学原理》的那个典型一页。而哥德尔追求的结论需要适用于所有形式系统，这让统一描述问题变得困难。没有统一描述，问题就无法统一解决。二是等式 (Exp. 4) 中存在循环定义。它等价于：

$$P = P \text{ 是伪命题} \quad (\text{Exp. 5})$$

P 同时出现在等号两边，造成逻辑循环。

为解决这两个难点，哥德尔独创一套数字编码，名曰哥德尔数 (Gödel numbering)，把所有可能的形式系统都投射到自然数集上，系统内命题与自然数之间建立一一对应关系，让问题描述变得统一。然后

$$\text{定义 } G(p) \text{ 为任一命题 } p \text{ 的哥德尔数} \quad (\text{Exp. 6})$$

改造等式 (Exp. 5) 为：

$$P = G \text{ 代表的命题是伪命题} \quad (\text{Exp. 7})$$

其中 $G = G(P)$ ，是命题 P 的哥德尔数，于是等式 (Exp. 7) 避免了循环定义。(Exp. 7) 被称为系统的“哥德尔句” (The Gödel sentence)。

形式系统符号	哥德尔数	意义
~	1	not
∨	2	or
⊃	3	if...then...
∃	4	存在
=	5	等号
0	6	零, 0
S	7	下一个自然数, +1
(8	左括号
)	9	右括号
,	10	逗号
+	11	加号
×	12	乘号
<i>x</i>	13	代表数字的变量1
<i>y</i>	17	代表数字的变量2
<i>z</i>	19	代表数字的变量3
...	...	(表格继续, 长短任意)

图 9. 逻辑符号的哥德尔数。

下面举例说明如何根据逻辑符号的哥德尔数, 把任一命题转换成一个自然数:

例子命题 $p: x = 2$

1. 第一步, 转换形式: $x = SS0$ (所有自然数都用 S..S0 代替, 比如 $1 = S0$, $2 = SS0$, ...)
2. 第二步, 根据上面的对照表, 把命题转换成哥德尔数矢量: x 对应 13, $=$ 对应 5, S 对应 7, 整数 0 对应 6, 于是命题 $x = SS0$ 对应 (13 5 7 7 6)。
3. 最后, 把哥德尔数矢量转换成一个自然数: $G(p) = 2^{13} \times 3^5 \times 5^7 \times 7^7 \times 11^6$ 。其中幂运算的底数序列 (2 3 5 7 11) 是素数序列, 根据需要可无限延展。幂运算的指数序列是命题的哥德尔数矢量。

上述三步把命题转换成自然数。如果需要从哥德尔数 $G(p)$ 恢复命题原形式, 只要对它进行素数因子分解, 得到幂运算的指数序列就可以获得。

不可决定性

在 1931 年, 哥德尔提出不完备定理, 回答希尔伯特计划中完备性和自洽性问题。之后几年里, 塔斯基 (Alfred Tarski, 1901—1983) 和图灵 (Alan Turing, 1912—1954) 分别发表文章, 回答了希尔伯特计划中的可决定性问题。有人报告, 哥德尔在私人手稿里推导出类似结果, 但没有及时发表。其中图灵的方法较直观易懂, 所以这里重点介绍。

在研究可决定性问题时, 图灵提出“图灵机”概念, 就是现代计算机的基本数学模型。关于图灵机, 有两个基本结论:

1. 任何计算机本质上都是图灵机。包括算盘、机械计算机、电子计算机、量子计算机等。
2. 图灵机与形式系统之间存在等效关系。任何形式系统都有一个图灵机与之等效，反之亦然。

希尔伯特可决定性问题(Undecidability Problem)与图灵机停机问题(Halting Problem)等效。以哥德巴赫猜想为例解释这种等效性。存在三个角度理解此猜想：

1. 它是一个游戏，目的是寻找不能分解成两个素数之和的偶数。游戏从 $X=4$ 开始检验。如果当前 X 是两个素数之和，设置下一步 X ： $X_{i+1}=X_i+2$ 。如果当前 X 不能分解成两个素数之和，游戏结束，哥德巴赫猜想被证伪，否则游戏继续。但有人已试过小于 4×10^{18} 的所有偶数，都可分解成两个素数之和。显然，如果哥德巴赫猜想正确，游戏将无限继续。但“游戏继续”本身不足以证明哥德巴赫猜想。
2. 在 ZFC 公理体系内证明或证伪。如果这个体系满足希尔伯特的可决定性，就是它可以判断每个命题的真伪，那么一定存在一套包含有限步骤的推导过程，始于 ZFC 的 10 个公理，终止于哥德巴赫猜想、或它的否定形式。如果哥德巴赫猜想是真，这个证明过程肯定不是第一点中的游戏过程，因为那个游戏无法证明哥德巴赫猜想。
3. 按照图灵的思路，为上述第 2 点找到等效的图灵机停机问题。比如设置图灵机起始状态为 ZFC 的 10 个公理，每次运用一个有效推导步骤，产生的结论就是新定理集。如果其中包含哥德巴赫猜想或它的否定形式，寻找成功，图灵机进入停机状态。如果图灵机一直不能进入停机状态，定义为死机状态。

很显然上述第 2 点中的形式系统可决定性问题，等效于上述第 3 点中的图灵机停机问题。

图灵证明

希尔伯特期望的是，数学统一在公理集合上之后，完全依靠这个系统的固有性质，就可以判定任何命题的真伪。他追求能抗衡神的理性。神无条件地给人希望，希尔伯特自然要求理性也同样无条件地给人希望。但他的期望最终落空，理性没那样的能力。

以下是图灵证明。首先假设希尔伯特可决定性为真。存在这样的形式系统，给它任何命题，它都可以判定真伪。我们把此系统对应的图灵机称为 H 。此系统的可决定性问题与 H 的停机问题等效。对于任何输入命题， H 都会正常停机，永不死机。如果输入信息是“图灵机 X 是否会死机？

“， H 当然也永远能判断，并输出关于 X 的正确判断。 Y 代表 X 会死机， N 代表 X 永不死机。我们进一步按下图改造 H 成为 $H+$ ，加装新增单元，如果 H 输出 Y ，新增单元和整个 $H+$ 停机；如果 H 输出 N ，新增单元和整个 $H+$ 就进入无限循环，死机。

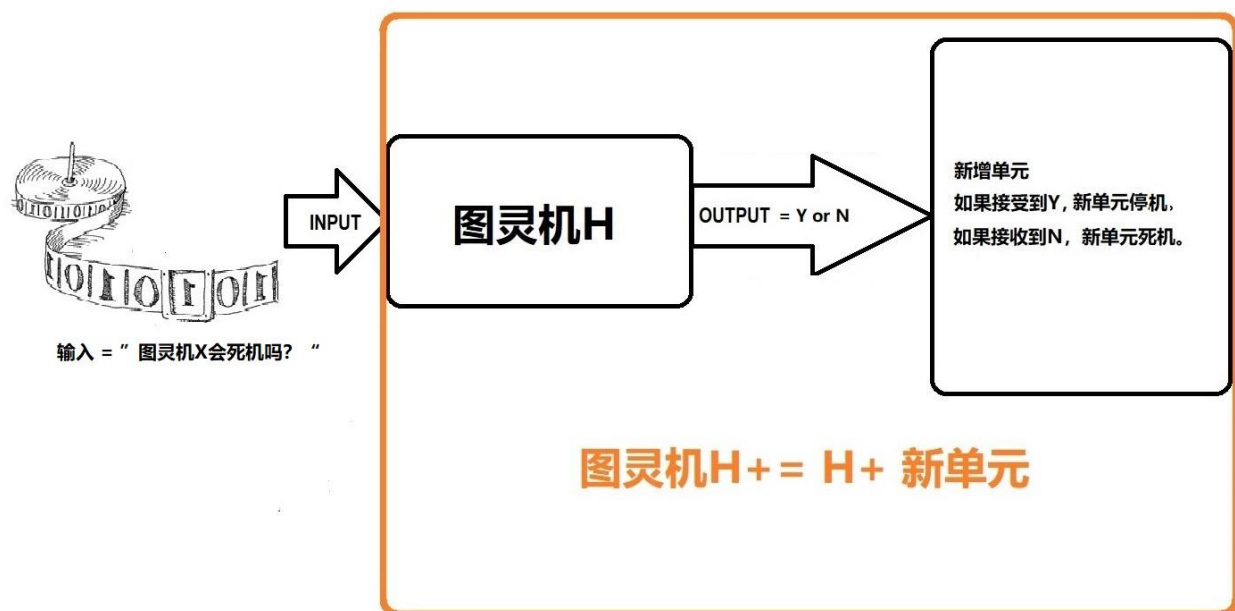


图 10. 图灵为证明不可决定性而假想的连环图灵机。

很显然，如果我们问 H^+ ，“图灵机 H^+ 是否会死机？”，就造成矛盾。如果 H^+ 的第一部分， H ，给出的答案是 Y，就是“ H^+ 会死机”。但是 H^+ 死机，就必须要求 H 输出 N，矛盾。如果 H 给出的答案是 N，那么就要求 H 输出 Y，又矛盾。自相矛盾不可避免，所以最初假设错误，不存在能判断任何命题真伪的形式系统，也可以说不存在总能停机的图灵机。

五 总结

人脑是计算机吗？

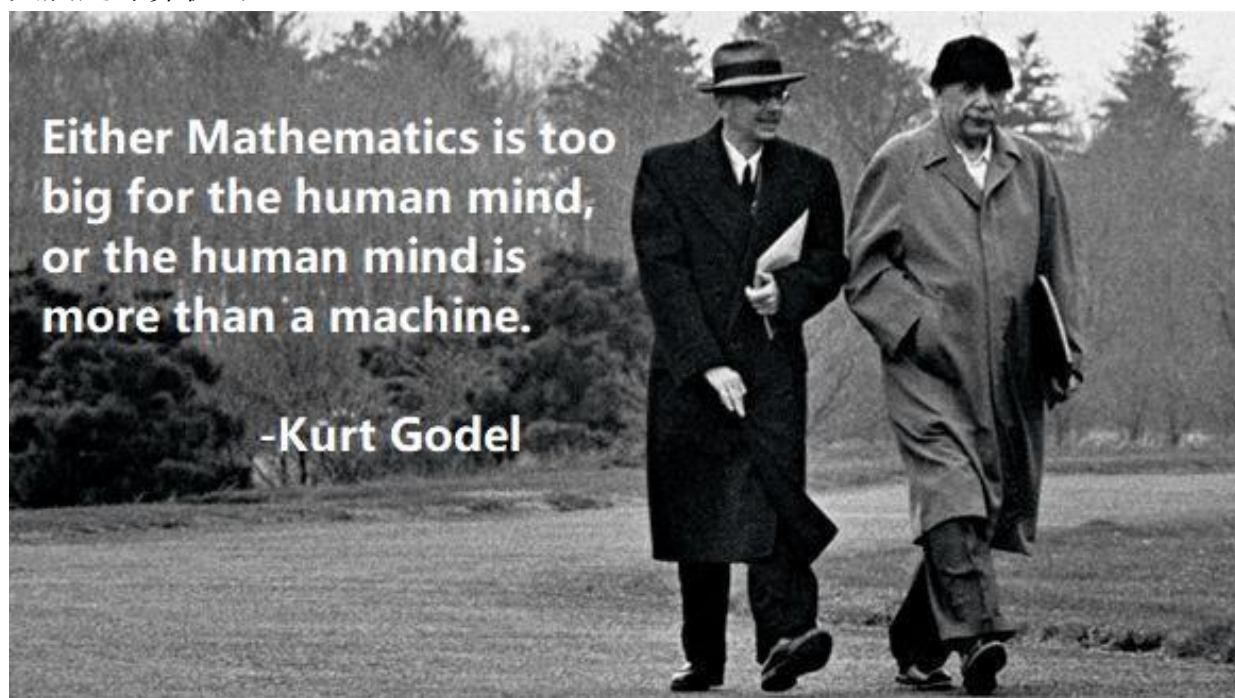


图 11. 哥德尔的一句学术名言，“要么数学对于人脑来说太宏大，要么人脑并不只是一台机器”。背景照片是哥德尔与爱因斯坦并肩走在普林斯顿的乡间小路上。

假设人脑 F 是以肉体为硬件的计算机，F 必然对应一台图灵机 T，那么 F 可能知道的全部真理就是 T 的定理全集。但是我们已知道，T 的定理全集不包括系统的“哥德尔句”，就是“此句在系统中不可证明”，而人脑 F 知道。于是假设被否定，没有一台图灵机可能完全代表人脑，人脑比任何图灵机至少多知道一条真理。

这就是著名的“卢卡斯-彭罗斯观点” (Lucas - Penrose argument)。卢卡斯(John Lucas, 1929 - 2020)是英国哲学家，两年前去世。前文曾提到彭罗斯(Sir Roger Penrose, 1931-)。他是英国数学家、物理学家，诺贝尔奖获得者，霍金的工作伙伴和好友。在哥德尔不完备定理发布后，很多学者认为从它可推论人脑超越计算机，包括哥德尔本人。卢卡斯和彭罗斯只是把这个观点说得最简洁和有条理的人。

如果卢卡斯-彭罗斯观点正确，就会出现一连串重要推论：

1. 人工智能永远不可能完全取代人。
2. 人的非理性思维有重要意义，让人的智慧比纯理性更胜一筹。非理性并不都是愚昧。
3. 物质不决定人的意识，人的意识超越物质。物质能够产生的最高智慧形式就是图灵机，人的智慧超越它。
4. 人不是动物，人超越所有动物。唯物主义和唯心主义都同意，动物是物质的。笛卡尔说，“动物是机器”。唯物主义认为人也是机器，也是物质的。如法国早期唯物主义者梅特里认为“人是机器”。马克思主义则认为“人是高级动物”。但卢卡斯和彭罗斯认为人不是机器、人超越所有机器。所以人不是动物、人超越所有动物。

在世界学术界里，无神论是主流。在过去一个多世纪里，无神论者占据了几乎所有重要学术话语权。围绕卢卡斯-彭罗斯观点还存在很多争议。不过，即使它被否定，哥德尔不完备定理至少也证明，任何理性体系都要么漏掉真理、要么内部矛盾、要么二者兼备。任何信仰理性的人，他的信仰既不可能基于理性，也不符合理性。这表明理性从来不是，也永远不可能是信仰。虽然人类崇尚理性的精神始于基督教文化圈，基督徒们一直也是最尊重理性的人群，但基督教向来强调信仰高于理性。

图解西方对神态度的演变



图 12. 画中人叫约伯，本来是个健康、富足、幸福的人，但神让他变得贫穷、生病、失去家人。关键是他没做任何错事，却无辜受难，而且神不对他做解释。约伯曾疑惑，怪罪神不公正，但每次他对神的信心都战胜他的怀疑。最后神加倍偿还了他。在图画中，约伯已变得衣衫褴褛，满身生疮，孤独一人。神让他一无所有，但他依然对代表神的天空保持崇敬。这就是传统基督教要求人对神的态度。

《约伯记》是《圣经》中最古老的故事之一，背景时代距今 4000 到 5000 年。约伯体现的基督教义是“因信称义”。“信”最重要，超越一切。在生活中的很多事上，人经常因为理解而信。但在信仰层次上，基督教认为理性基于信神，而不是信神基于理性。《圣经》上说，“敬畏神就是智慧的开端”。敬畏神就是坚信神。无论人是否理解，人都要信神。信神让人智慧增长，对世界和人生理解得更多更好。《约伯记》讲的就是这个道理。



图 13. 米开朗基罗在 1512 年作的名画《创造亚当》。在文艺复兴时代，西方对人神关系的看法大变。一般来说，基督教不允许信徒画神的形象，即使画也要把神画得高远，表现神高深莫测。但这里左边男性角色代表人，右边男性角色代表神。二者大小类似。神只比人位置高一点、看上去年长一点而已，实际上就是人的形象。且人与神的手指几乎相碰，代表他们非常接近。画家如此安排，其《圣经》根据是，“神按自己的样子造人”、“神是人在天上的父”、“神爱人”等。这幅画很好地反映了那个时代人对神的新态度。这个态度的源头也是《圣经》，但与《约伯记》里的样式大不同。自不待言，文艺复兴运动总体非常成功。



图 14. 1793 年法国法定节日“理性节” (Fête de la Raison) 的场面。法国大革命时期，革命者们废除基督教，创立“理性崇拜” (Culte de la Raison)。无神论者用理性代替神作为人的信仰，用“理性节”取代原来的圣诞节。图中手持长矛的就是“理性女神”，上方的文字意思是“哲学”。今天很多同学们相信无神论，推崇理性，喜欢哲学等，但他们中很少人知道，自己思想的真正来源是清朝中叶发生的法国大革命。

基督教主导西方社会千年，让很多人深深厌倦，渴望没有神管束的自由。法国大革命推崇理性与民主，其背后的思想家们，如卢梭，以及革命领袖们，如罗伯斯庇尔，都聪明博学。但是当革命摆脱了基督教的羁绊，人的聪明博学与指导思想中的理性和民主等，都无法阻止革命陷入疯狂与残忍。大革命把法国推进深渊。直到拿破仑政变后恢复基督教，才救法国于万劫不复的境地。



图 15. 左为希尔伯特的墓碑，墓志铭就是他著名的口号，“我们必须知道，我们一定会知道！”右为罗素的名著《为什么我不是一个基督徒》，至今还有众多读者。

法国大革命惨败，但它的很多思想并没有死掉，只是暂时潜伏起来，等待机会重新抬头。其中包括无神论。二十世纪初期，世界大战使得欧洲陷入强烈自我怀疑，科学进步又让人对理性心生向往，于是这种机会来了。这次的无神论先锋们与法国大革命中的那批类似，也是在常人眼中最聪明、最有学问的人，包括罗素、希尔伯特、还有美国的杜威等。杜威就是胡适的老师。

没人预料到，极端腼腆、不谙世事的哥德尔竟成为摧毁这场来势汹汹的无神论攻势的人。他的不完备定理一击打中罗素、希尔伯特等人的思想要害。本质上哥德尔对他们说，“你们犯糊涂了。你们说你们信仰理性，但我用严格的理性证明给你们看，你们对理性的信仰本身不可能基于理性，因为理性无法保证自己自洽，却知道自己肯定漏掉真理”。

最后的话

哥德尔、连同塔斯基、图灵等人揭示了，在数学的根部有几个无法弥补的漏洞。现代科学依赖数学，理性依赖科学与数学，所以人类理性有根本性局限，不能作为个人或人类的信仰。只可惜，近百年已过去，很多朋友却完全不知道这几位思想家的伟大发现，所以我要写这篇文章介绍。

基督教神学家们早就论证了神的完美性。神完美，所以是衡量其他所有东西的标准。只有神完美，如果在神之外存在其他完美的事物，那个事物就应该成为衡量万物的标准，包括衡量神。神与它不一样，就代表神有缺陷。有缺陷的神就不是神了。神造的东西，包括宇宙、人、科学、数学、逻辑，理性等，经常美好，但都只体现神在一事、一物、一个方面的好，没有哪个能够完全再现神的完美。

但是在近百年来，越来越多的人觉得科学和理性完美，觉得有了它们人就不需要神了。从顶级哲学家、到千百万受过良好教育的中西精英、再到市井百姓、以及我的交大同学们，都这样认为。理性主义者认为自己站在正确的一边，而基督教落后、腐朽，站在了错误的一边。在这个人类认知关键点，伟大的哥德尔走上历史舞台。他用完全理性的方式证伪了理性的完备性与自洽性。塔斯基和图灵等人又证伪了理性的可决定性。简而言之，理性不具备神那样的完美，所以不配做人的信仰，不能取代神。

最后，我用著名现代天文与天体物理学家罗伯特 加斯特罗 (Robert Jastrow, 1925 - 2008) 的一段话结束此文。“对于一个坚定信仰理性的科学家，他的人生故事最后会变成一场恶梦。经过艰辛努力，他终于翻过了名叫‘无知’的山脉，正在攀登那座最高峰。但当他费尽全力爬上最后一块岩石时，却发现一伙神学家们跑过来迎接自己。他们已在这最高峰上等待他几百年了。”

2023 年 1 月 5 日

电邮: yuanzhiluo@yahoo.com 博客网址: <https://lyz.com> 或
<https://github.com/luotuol23456/lyz>

注释

1. 骆远志, 2018, 为什么现代科学诞生在西欧、不在中国? <https://lyz.com/modern-science/>
2. 骆远志, 2021, 为什么马克思主义哲学错了, https://lyz.com/sci_marx_god/
3. 骆远志, 2022, 当代科学挑战达尔文进化论, <https://lyz.com/id-evolution/>
4. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931), pp. 173-198.
5. A.M. Turing, 1936, On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society 2(42), pp. 230 - 265.

6. Penrose, R. , 1994, Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness, Oxford University Press, ISBN 0-19-853978-9
7. Natalie Wolchover, July 14, 2020, How Gödel' s Proof Works, <https://www.wired.com/story/how-godels-proof-works/>
8. The Lucas-Penrose Argument about Gödel' s Theorem, <https://iep.utm.edu/lp-argue/>
9. Wikipedia, Hilbert' s program, https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_program
10. Internet Encyclopedia of Philosophy, The Lucas-Penrose Argument about Gödel' s Theorem, <https://iep.utm.edu/lp-argue/>
11. J.T. Smith, February 2014, David Hilbert' s Radio Address – English Translation, <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-english-translation>
12. R.J. MARKS and S. HAUG, 20210607, GÖDEL SAYS GOD EXISTS AND PROVES IT, <https://mindmatters.ai/2021/06/godel-says-god-exists-and-proves-it/>
13. Robert Jastrow, 1978, God And The Astronomers, W. W. Norton & Company, 2000 2nd edition, ISBN 0-393-85006-4.