为什么人不应该信仰科学或逻辑

骆远志

在大多数情况下，科学和逻辑都是好东西，人应该相信和跟随它们。但是它们有不可避免的盲点，不能涵盖所有真理，因此不足以作为一个人、或一个社会的信仰。

我与同学们已连续几年讨论“神 vs 科学”。我讲过从文艺复兴时代开始，一大批虔诚的基督徒学者，包括伽利略、笛卡尔、牛顿等，在热忱探求神意过程中创立了现代科学【1】。信仰科学与逻辑的人回应，炼金术也孕育了化学。基督教孕育了现代科学，并不代表前者正确。我又分析，国人被灌输马克思主义，因此信仰无神论。但马克思对科学的理解基于机械宇宙观，机械宇宙观被后来的科学证伪【2】。皮之不存，毛将焉附？信仰科学与逻辑的人说，粪土中也可以长出鲜花，即使机械宇宙观与马克思主义都错了，也不代表科学与逻辑错了。不久前我写道当代科学挑战达尔文进化论【3】。信仰科学与逻辑的人回答，一种科学理论出现问题，不代表科学本身不可信。我们信仰的是科学背后的理性。

科学的概念相对清晰，而理性的概念相对模糊。传统定义，理性就是信奉“找原因、讲道理”(based on reasons)。一个更清晰的理性定义，也是同学们已在讨论中实际采用的：

理性 =(科学 数学 逻辑)的合集 (Exp. 1)

本文也采用这个理性定义。

讨论不断深入，我受益匪浅，更加理解对方。同学们觉得科学、数学和逻辑都完美可信，理性当然就完美可信。有了这样好的理性，宗教信仰就没必要。但绝大多数人不知道，在近一个世纪前，世界顶级思想家们严肃探讨过这种想法。讨论的高潮包括 1920 年代兴起的逻辑实证主义哲学、与之相呼应的数学寻根运动、以及 1931 年哥德尔发布的不完备定理。简单讲，哥德尔发现数学和逻辑在根本处存在不可弥补的漏洞，现代科学又倚重数学和逻辑，所以科学与理性的基础不牢。

一 学术界躁动

逻辑实证主义

第一次世界大战严重挫伤了欧洲的自信心。战争的残酷程度与死伤人数远超过往，也远超预想。奥匈帝国，俄罗斯帝国、德意志帝国等分崩离析。即使胜利方的英法也损失惨重。面对一片疮痍，人们在疑问，“强盛的欧洲为什么步入歧途？什么地方错了？”尤其在战败的德国和奥地利地区，思想者们质疑一切传统，包括政治、信仰、文化、哲学、艺术、文学等。

与此同时，人们却唯独在科学中看到新希望。随着电磁学等在 19 世纪末逐渐成熟，机械宇宙观走上巅峰。从专家到老百姓都普遍认为，科学已经或即将解决从原子到太空之间的所有问题。在 20 世纪初，相对论和量子力学相继诞生，机械宇宙观开始没落，但人们对科学的信任有增无减【2】。因为今天我们熟悉的科学难题，比如暗物质、暗能量、宇宙大爆炸等，在那时还没有被发现、或主流社会还不知道。

1920 年代初，欧洲大陆正在舔舐自己身上的战争创伤。在奥地利维也纳大学校园里、以及校园附近的咖啡店里，一批年轻学者经常聚会，讨论哲学问题。他们的学术背景其实是物理学，并不是传统哲学，但他们在当时迅速深化发展的科学和数学里找到了一种新哲学，就是后来的逻辑实证

主义。这些人被称为维也纳学派。他们的追随者队伍不断扩大，思想很快传到德国柏林，形成柏林小组。然后再飘洋过海，传到英国和美国。在后来几十年里，他们的学说成为西方哲学界主流，其影响力溢出学术界，很多观念进入普通人的思想和言谈中。

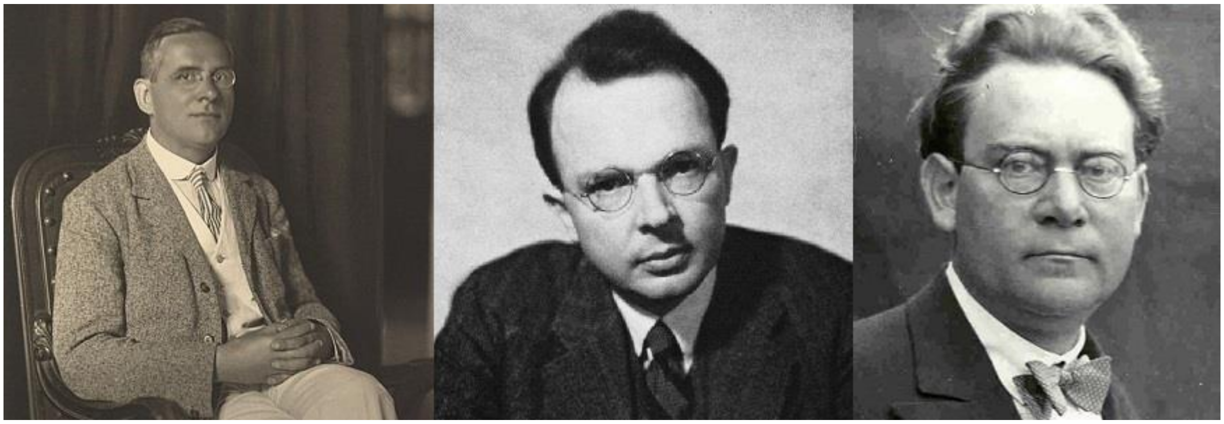


图 1. 逻辑实证主义(Logical Positivism)三位创始人。左为石里克(Moritz Schlick，1882－1936)德国人，维也纳学派(the Vienna Circle)领袖，本是物理学家，著名量子物理学家普朗克的学生。纳粹思想盛行时，他被极端分子谋杀。中为卡尔纳普(Rudolf Carnap，1891－1970)，德国人，后来移民美国，维也纳学派的领袖之一，本是物理学家和数学家。右为赖欣巴哈(Hans Reichenbach，1891—1953)德国犹太人、柏林小组(the Berlin Circle)的创始人，本是物理学家和数学家，老师包括大卫・希尔伯特、普朗克、玻恩和爱因斯坦。希特勒上台后，赖欣巴哈先逃到土耳其，几年后来到美国。

逻辑实证主义认为，科学、数学、逻辑、哲学、宗教等都面对同一个宇宙。其中前三项构成人类理性，过去因为发展水平有限，无法回答宇宙中很多问题，让人只能求救于神和基于神的形而上哲学，比如长期占主流的康德与黑格尔的理论。但科学与数学已今非昔比，解释能力和适用范围都大增。即使还有一些问题它们目前没法解决，参照它们的发展速度，不久后它们将能解决，或至少解决得不比宗教和传统哲学更差。逻辑实证主义者们于是论断，是时候用人类理性淘汰宗教与传统哲学了，因为后者违反前者的地方是错误，后者与前者一致的地方是多余。看，他们与今天那些信仰科学与理性、排斥基督教的朋友们多么相像！

逻辑实证主义强调验证原则(The Verification Principle)。验证分两大类，一是用事实验证，就是科学实验。二是用数学和逻辑验证。数学和逻辑本身不证自明。万事都要经过验证才能被认可，现在世界各地的很多普通人也接受这个原则，其源头就是逻辑实证主义。这个新哲学的中心思想是，只有科学、数学和逻辑才有意义(sensical)。其他思想体系，包括传统的形而上哲学、神学、宗教思想等都无意义(nonsensical)。用大白话讲，它们都是废话，废话就应该被摒除。这个学派要人抛弃宗教与旧哲学，只相信科学、数学和逻辑，也就是只相信理性。

逻辑实证主义的很多细节属于小圈子里的阳春白雪，但它的大方向------拥抱科学与理性、抛弃基督教和以基督教为基础的旧哲学------却反映了社会潮流。当时的西欧思想家们和普通老百姓纷纷认同。诺贝尔物理学奖获得者，英国大学者彭罗斯教授回忆，在 1930 年代，他还是个孩子，与父母住在英格兰小镇上，每周日全家都要打扮整齐，去教堂做礼拜。也许出于孩子的敏感，一次在从教堂回家的路上，他突然问母亲，“你真的相信牧师讲的那些东西吗？” 母亲一下子语塞，

让他很受震撼，记忆深刻。英国本是清教徒的故乡，老百姓非常虔诚。但在第一次世界大战之后，民风发生悄然巨变。虽然大家还与过去一样勤快地去教堂，但心里的信仰严重动摇。

数学寻根运动

逻辑实证主义在数学界获得广泛响应。响应者们不一定自认逻辑实证主义者，但他们强烈认同这个学派推崇理性与科学的主张。数学界很多人明确认为，是时候用理性代替传统基督教了。数学的地位特殊，因为现代科学已彻底数学化。如果科学与理性要成为人和社会的新信仰，数学作为基础必须首先牢靠。普通大众觉得数学当然是牢靠的，但是在 19 世纪末、20 世纪初，顶级数学家们都已意识到，数学的基础还远未夯实。

数学是完美的。这个印象来自古希腊。那时的数学只有两部分，算术和欧几里得几何学。算术的对象是自然数。在数论中，自然数经常被定义为 0 与正整数的合集，本文遵循这个传统。欧几里得几何包括 5 个公理和推导两部分。基于公理的推导就是证明。所有被证明的命题构成定理集合。西方人长期把经典数学看成最纯粹的人类知识，正确性毋庸置疑。它内部自洽(consistent)，精准描述物质世界，且符合人头脑里的直觉。经典数学完美，反映宇宙的完美。所以欧几里得说，数学就是宇宙的语言。

但是从文艺复兴到 20 世纪初的几百年里，数学已大改变，曾经完美的模样出现了深刻裂痕。16 世纪意大利工程师邦贝利(Rafael Bombelli，1526－1572)于 1572 年出版《代数学》，讨论负数的平方根，虚数概念因此诞生，挑战人的直觉。英国大天才牛顿与德国大天才莱布尼茨(Gottfried Leibniz，1646－1716)分别发明了微积分，让无限大与无限小概念变得不可躲避。1830 年俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(Nikolai Lobachevsky，1792－1856)、1832 年匈牙利数学家亚诺什(János Bolyai，1802－1860)，分别发现非欧几何，造成对传统数学的最大冲击。非欧几何排斥一些欧几里得公理，比如不要求平行线永不相交，因此催生新几何体系。数学家们发现这样的几何也自洽，却违反人的直觉和平常观察到的现实。于是人们开始疑问，非欧几何还算数学吗？数学还是这个宇宙的语言吗？到底什么才是数学？

微积分、复数分析、非欧几何等新分支的出现，让数学变得支离破碎。数学里出现了矛盾，既有抽象的、哲学意义上的矛盾，比如非欧几何还算数学吗？也有具体的、让数学家无法忍受的矛盾，比如下节将介绍的罗素悖论。于是数学界开始了声势浩大的寻根讨论。寻找数学的基础就是寻找各分支的共性。有了这样的共性，现代数学才可能重新自洽。恢复自洽是数学寻根的内部动力，而思想界要把科学与理性树立成新信仰，为数学寻根增加了急迫性。

在数学寻根问题上存在三大学派。一是直觉主义(Intuitionism)，认为数学的根本在于反映人的直觉。显然，直觉主义与非欧几何很难相容。二是形式主义(Formalism)，认为数学本质就是一种游戏规则，只要内容明确、没有内部矛盾，任何规则都允许。非欧几何与传统几何的矛盾、或非欧几何与现实的矛盾都不重要，只要它自洽，就算是数学。三是逻辑主义(Logicism)，认为数学的本质是逻辑。欧几里得几何与非欧几何看似不兼容，但它们都符合逻辑，所以都算数学。非欧几何地位问题有重大现实意义。当时新兴的广义相对论与量子力学都需要它。把非欧几何排除出数学将严重阻碍科学发展。

三个数学哲学流派都对数学发展做出过贡献。说到学术争论，读者可能以为各派互相排斥，一派最终胜出，就代表其他派别都失败了。其实不然。三方有争论，有时还很激烈，但他们也有很多共通点，相互促进远大于斗争。比如三方都认为数学应该是公理体系，就是公理加推导两部分。

另外，形式主义与逻辑主义之间有明显共通性。前者要求数学体系自洽，不在乎数学与数学之外有什么联系。而后者也要求数学自洽，但进一步要求数学符合逻辑。可以说，逻辑主义是形式主义的一个特例。

二 数学逻辑主义

数学逻辑主义最终胜出，但过程远非一帆风顺。

数学逻辑主义的目标是把整个数学建立在现代集合论基础之上。康托尔是现代集合论之父。他在1870 和 80 年代的研究被广泛认为是这个新门类的起点。无限集，就是元素无限多的集合，在集合论中地位关键。康托尔认为无限集之间还有“大小”之分，比如实数集合大于自然数集合，严重挑战传统数学家们的直觉。后者认为所谓“无限大”只是一种图方便的说法，并不是真实的数。把无限大再分大小属无稽之谈。康托尔因此受到严重排挤。他最后抑郁成疾，死在精神病院。

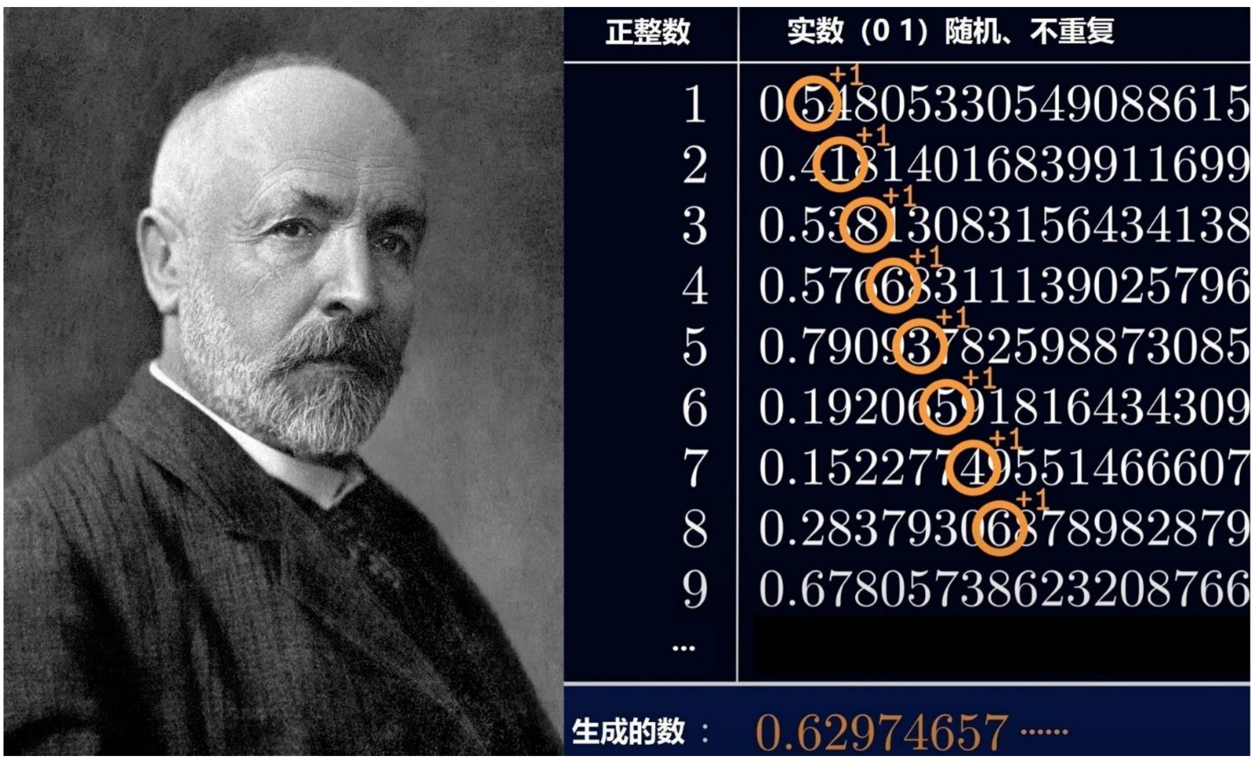


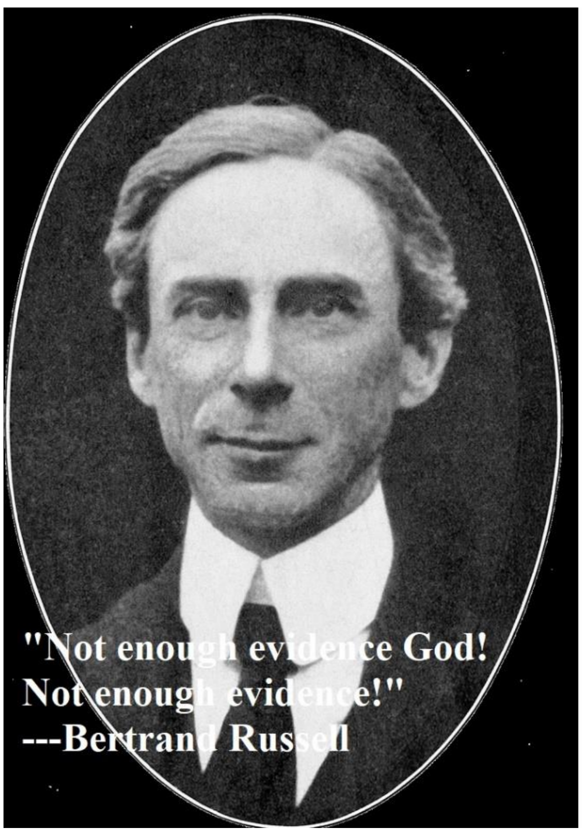
图 2. 康托尔(Georg Cantor，1845－1918)与他的对角线法证明实数区间(0 1)含有元素数量比正整数集更“多”。康托尔是出生于俄罗斯的德国数学家。实数区间(0 1)与正整数集都是无限集。右图先假设它们有同样多元素，比如图中右侧在(0 1)中随机抽取元素，然后与自然数一一对应。康托尔依次从每个实数中取一位数，加 1，由此生成下方橘黄色的数。这个“生成的数”肯定属于(0 1)，却不在这个表格中，于是假设被证伪，实数集(0 1)比正整数集含更多元素。也就是说，前者比后者“浓度”更高(higher Cardinal number)。无限集的性质经常违反直觉，但也很有趣。比如正整数集、整数集、有理数集等，浓度都相同。整个实数集、实数区间(0 1)、无理数集等，浓度也相同。

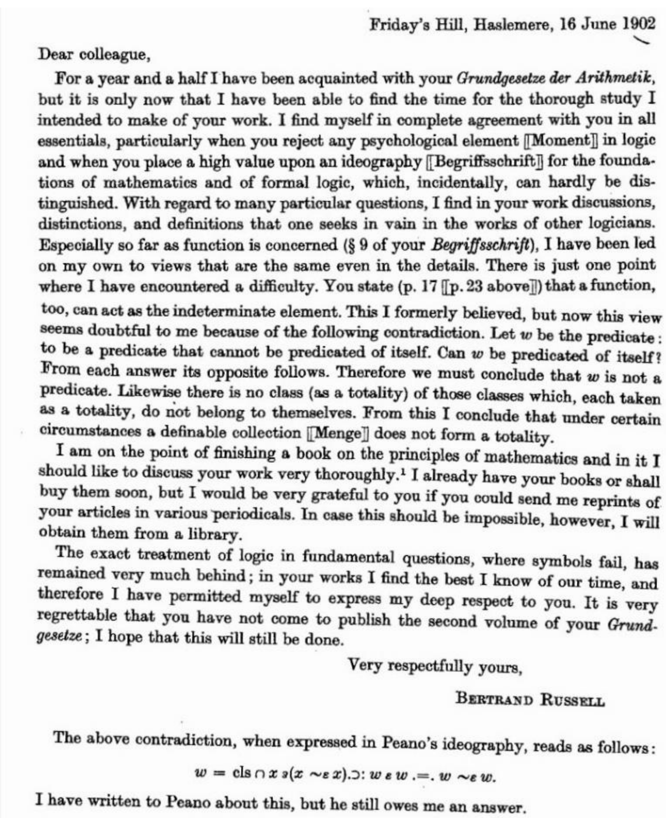
罗素悖论

德国数学家弗雷格、与英国数学家和哲学家罗素都是数学逻辑主义大师。在 1902 年，弗雷格把自己的新书稿交给出版商，等待付印。这本书凝结他半生心血。他认为书成功地把数学建立在逻辑学基础之上。这时他收到罗素来信，提到一个简单问题：所有不包含自己的集合构成的集合，是否包含自己？数学表达式：

$$X、y \text{ 都是集合}，X = \{y \mid y \notin y\}，\text{问题 } X \in X \text{ 真还是假？} \qquad \text{(Exp. 2)}$$

这就是数学史上著名的“罗素悖论”。逻辑学建立在现代集合论上。集合是集合论中最基本概念。集合可以包含自己。在(Exp. 2)里，如果 $X \notin X$，根据 X 的构建条件，它就应该包含自己，$X \in X$，矛盾。如果它包含自己，同样根据它的构建条件，它就不应该包含自己，又矛盾。罗素悖论揭示集合论不自洽。而逻辑主义者要把整个数学建立在集合论基础之上，如果这个基础本身不自洽，数学又怎么可能自洽？罗素来信造成弗雷格精神崩溃，住进医院，从此一蹶不振。





Friday's Hill, Haslemere, 16 June 1902

Dear colleague,

For a year and a half I have been acquainted with your *Grundgesetze der Arithmetik*, but it is only now that I have been able to find the time for the thorough study I intended to make of your work. I find myself in complete agreement with you in all essentials, particularly when you reject any psychological element [[Moment]] in logic and when you place a high value upon an ideography [[Begriffsschrift]] for the foundations of mathematics and of formal logic, which, incidentally, can hardly be distinguished. With regard to many particular questions, I find in your work discussions, distinctions, and definitions that one seeks in vain in the works of other logicians. Especially so far as function is concerned (§ 9 of your *Begriffsschrift*), I have been led on my own to views that are the same even in the details. There is just one point where I have encountered a difficulty. You state (p. 17 [[p. 23 above]]) that a function, too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. Let *w* be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can *w* be predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must conclude that *w* is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection [[Menge]] does not form a totality.

I am on the point of finishing a book on the principles of mathematics and in it I should like to discuss your work very thoroughly.[1] I already have your books or shall buy them soon, but I would be very grateful to you if you could send me reprints of your articles in various periodicals. In case this should be impossible, however, I will obtain them from a library.

The exact treatment of logic in fundamental questions, where symbols fail, has remained very much behind; in your works I find the best I know of our time, and therefore I have permitted myself to express my deep respect to you. It is very regrettable that you have not come to publish the second volume of your *Grundgesetze*; I hope that this will still be done.

Very respectfully yours,

BERTRAND RUSSELL

The above contradiction, when expressed in Peano's ideography, reads as follows:

$$w = \mathrm{cls} \cap x \ni (x \sim\varepsilon\, x) . \supset : w \,\varepsilon\, w \,.=.\, w \sim\varepsilon\, w.$$

I have written to Peano about this, but he still owes me an answer.

图 3. 罗素(Bertrand Russell, 1872－1970)，英国明星学者，哲学家、数学家和逻辑学家，诺贝尔文学奖获得者，社会主义者，宗教不可知论者，反对基督教。他还积极从政，向往苏联，但访问苏联后失望。回程中他在 1920 年访问中国，备受追捧。他大力劝说中国知识分子要坚持传统、不要向西方学习，让刚推翻满清统治不久，正走向世界的中国人感到无所适从。他其实不懂苏联、不懂社会主义、也不懂中国传统、或现代中国，却特别敢于发表意见。他极端聪明，却也非常愚蠢。左图是他的名言，“没有足够证据证明神存在！没有！”从中可感受到他要求“神的存在要以科学证据为基础”的强烈情绪。神是精神，而科学研究物质。他坚持在物质世界里寻求神存在

的直接证据，是缘木求鱼。他不算逻辑实证主义者，但同样拥护科学与理性、反对基督教。右图是他写给弗雷格(Gottlob Frege， 1848－1925)的信。

《数学原理》

弗雷格太容易失望了，数学逻辑主义远没有彻底失败，他的研究成果后来也大多被挽救，没有浪费。数学逻辑主义的下一个里程碑就是罗素与他的老师怀特黑德合著的三卷本《数学原理》，出版于 1910 到 1913 年之间。它是继弗雷格的书之后的另一个尝试，要把数学完全建立在逻辑学基础之上，具体办法是以集合论为起点严格证明算术与其他数学分支里的每个基本定理。数学逻辑主义因此向前推进一大步，但远没有达到所有目的。《数学原理》硬性限制集合的性质，避免了弗雷格落入的陷阱，但后人发现办法并非最优。

书的第一卷用 379 页篇幅证明了算术中的 1+1=2，成为后世笑谈。这套书简直不是写给人读的！罗素与怀特黑德也半途而废，终止了写作。一种解释是书出版后受到冷遇，卖不动，出版商不愿继续合作。另一种解释是二人为写书合作十几年，有段时间为工作方便，罗素搬到怀特黑德家里，与后者的年轻太太坠入情网，使得合作中断。虽然全世界没几个人真的通读过这套书，但它在数学史上的地位崇高，被评为二十世纪英文非虚构书籍中最富影响力的第 23 名。

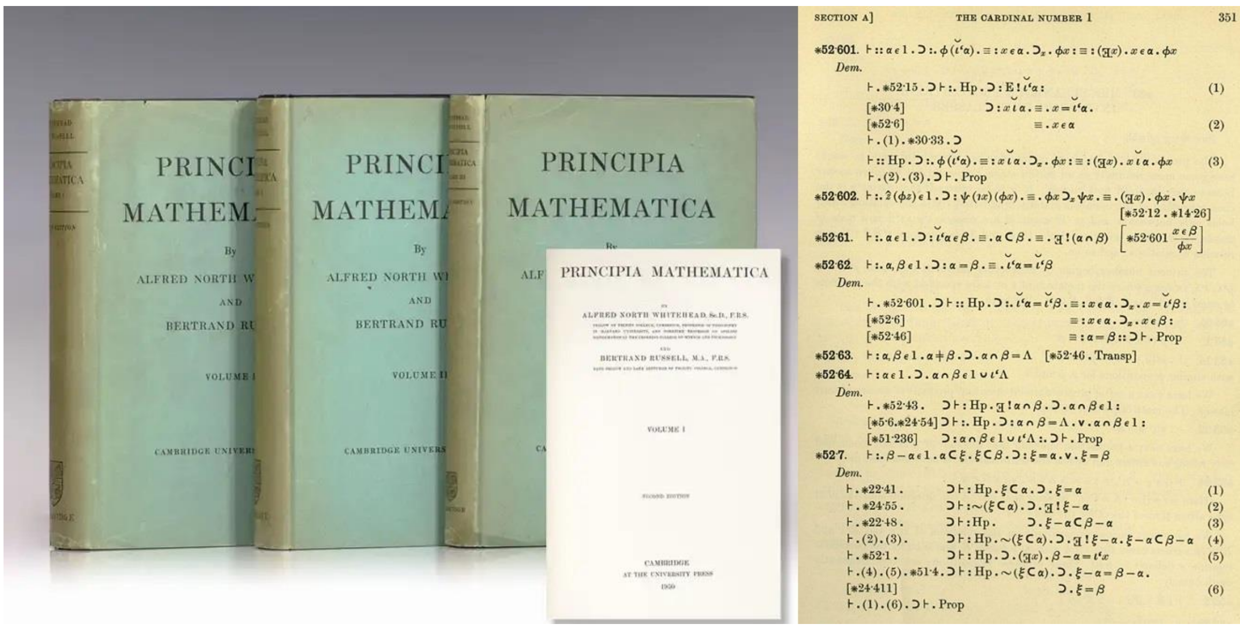


图 4. 《数学原理》(Principia Mathematica)，作者罗素与怀特黑德(Alfred North Whitehead，1861－1947)。右图是其中典型一页，全是数学和逻辑符号，极少文字。

ZFC 集合论

目前数学界的主流意见是，数学的基础是 ZFC 集合论。数学逻辑主义经过漫长的争论，逐渐胜出，超越了直觉主义和形式主义。

ZFC 集合论的全称是“含选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论(Zermelo-Fraenkel Set Theory with the axiom of choice)。它是一个公理体系，共包含 10 个公理(9 + 选择公理)，它们让数学避免了类似罗素悖论那样的内部矛盾。这个体系的主要创立者是两位德国数学家，策梅洛(Ernst Zermelo，1871－1953)与弗伦克尔(Abraham Fraenkel，1891－1965)。

在数学逻辑主义被接受之前，数学和逻辑是两个独立的领域。ZFC 集合论得到广泛认同后，数学和逻辑已无严格界限，二者连成一体。广义上讲，数学就是逻辑，逻辑就是数学。

$$\text{数学} = \text{逻辑} \tag{Exp. 3}$$

三 希尔伯特计划

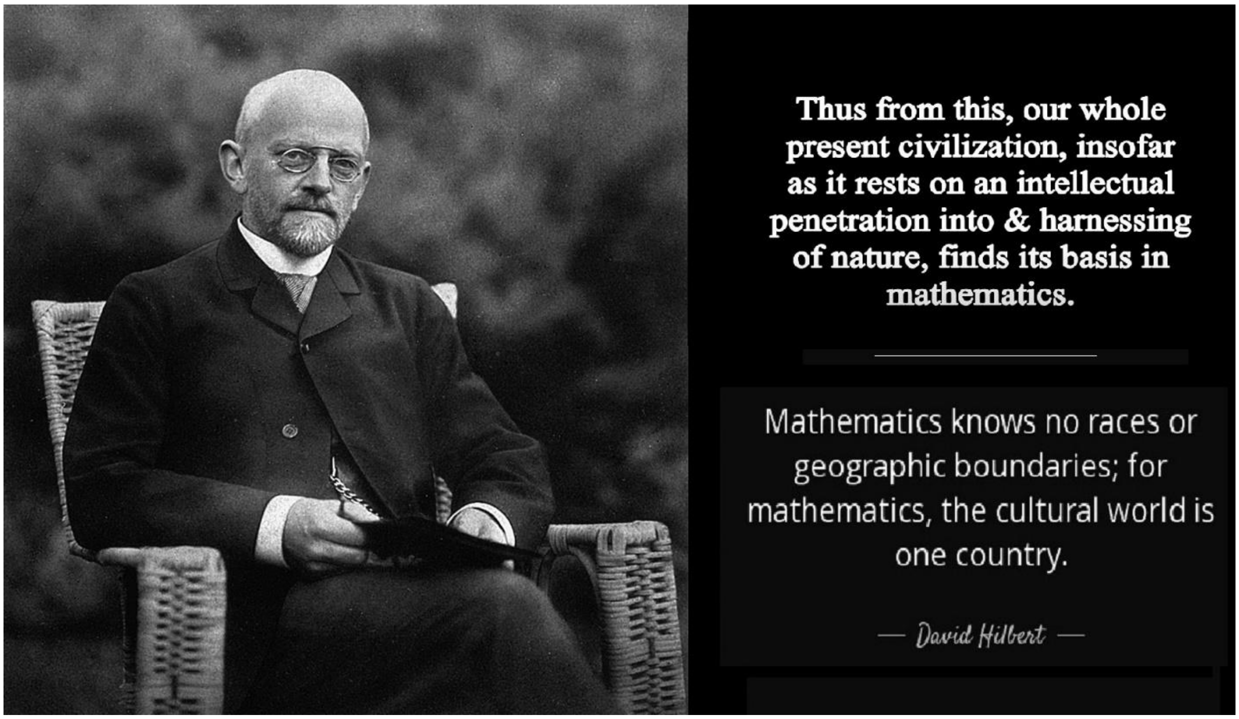


图 5. 德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862－1943)，以及他众多金句之二，“我们的整个现代文明强调智慧的洞察力与智慧驾驭自然的能力，而这些都基于数学”、“数学里没有种族或地理边界；对于数学，这个世界在文化上是同一个国家”。他生长在虔诚的基督教新教家庭，但成年后离开教会，变成不可知论者(agnostic)。他放弃追求“神的精神”，转而追求“人的精神”，认为有了理性的力量，人就不再需要神，人的精神就可以取代神的精神。他的语言冠冕堂皇，其中主要成分还是，“以前理性思想不够发达，所以人只得求助于神；现在理性思想发达了，人就不再需要神”。他认为自己从事的数学是理性中的关键，所以在讨论数学他经常跳出数学本身，注重数学在人的精神中的地位、以及数学对人类的作用。与那个时代的先锋知识分子们一样，他坚信理性完美，虽然人还没证明理性完美。

希尔伯特是 20 世纪初世界数学领域的头号精神领袖。在数学史上，他是最后一位在各个主要领域都做出杰出贡献的人。泛函分析中的“希尔伯特空间”就是他广为人知的成就之一。他对物理也很有研究，曾与爱因斯坦在同时期发现广义相对论的场方程。广义相对论中的希尔伯特作用量是他的又一重要成就。罗素与怀特黑德出版《数学原理》后，数学寻根运动又掀热潮。作为数学界的掌舵人，希尔伯特在 1920 年代初提出一整套标准，用以评判统一后的数学体系，获得广泛认同与接受，史称“希尔伯特计划”(Hilbert's program)。其中包括：

1. 数学是公理体系。包括有限数量的公理和一套严格的推论规则。希尔伯特是数学形式主义者，曾与数学直觉主义阵营展开激烈争论，但他一贯支持数学逻辑主义。

2. 完备性(Completeness)。根据公理与规则，可以发现所有真命题。
3. 自洽(Consistency)。数学必须证明自洽，即数学内部不存在矛盾。
4. 可决定性(Decidability)。数学必须有能力判断每一个命题的真伪。

试图用理性替代基督教

希尔伯特计划直接影响了当时与后世的数学发展，成为世界数学史上的一座里程碑。不难看出，该计划具有鲜明的“形而上”特征。虽然它为数学发展打造，但它的内容关乎数学背后更深层的东西，类似哲学，而非数学本身。拿中国古今数学家们的思想与之比较，差别非常明显。我曾回顾在对待科学态度上西欧与中国的根本不同【1】。西欧科学家研究科学是为理解神，所以强烈追求形而上，因为形而上让人接近神。神在基督徒心目中是所有事的最高和最深原则。无论在哪个领域里形而上，基督徒思想家都向神而行。而中国古今科学家没有类似信仰，研究科学是为了应用，因而缺乏形而上的动力。在数学领域也如此。

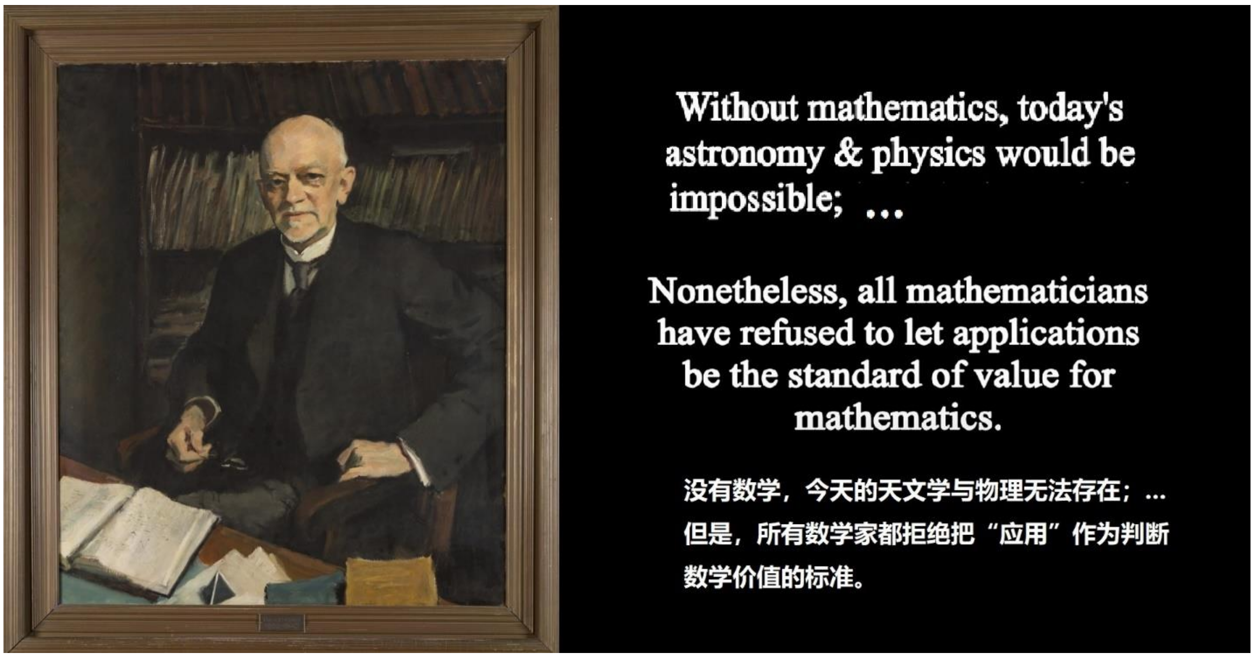


图 6. 希尔伯特在 1930 年广播讲演中的一段话，“没有数学，今天的天文学与物理学无法存在；…但是，所有数学家都拒绝把‘应用’作为判断数学价值的标准。”

关于西方思想，国内学界经常只知其然而不知其所以然，造成理解肤浅。作为在国内受教育的人，我们必须主动深究，才可能真的理解西方。希尔伯特是基督教文化培养出来的、反对基督教的数学思想家。他有一套较成熟的思想体系。他选择完备、自洽、和可决定性作为判定未来数学体系的标准，并不是突发奇想。如果是，其他数学家也不会响应。他与他的跟随者们在不言而喻中默契。他们都生活在基督教文化里，基督教就在他们的默契之中。他们向往理性，把数学看作新兴理性力量的一部分，希望数学发展让理性壮大，压过传统基督教。所以希尔伯特计划的每一个关键点都脱胎于基督教义，要与基督教义里对应的部分竞争。

《圣经》说，神是完美(perfect)、守信(faithful)、和给人希望的(hope)。所谓完美，就是神包含所有真理。人不会因为跟随神而遗漏任何真理。关于神守信，神答应的，就一定会做到，神不会自相矛盾。关于神予人希望，当人决定踏上艰苦征程时，他知道困难不可避免，所以他需要在

一开始就确信长远目标是对的、他最终必将成功。如果不如此，他就没理由保持信心，就注定失败。神告诉人什么是对的，神就代表“对”(righteousness)。神必将胜利，所以人追随神也必将胜利，即使中途要经历万难。这就是“希望”的本质。

完美、守信、和希望都是神的重要特点。缺少其中任一个，神就不再是神，就不配作为人的信仰。希尔伯特与同党们想用理性代替神，于是要求理性也拥有类似特点。数学是理性的基础。希尔伯特把完美、守信、和希望翻译成数学里的语言，就变成了上述的完备、自洽、和可决定性。

四 伟大的哥德尔

1930 年 9 月，在如今的加里宁格勒举行了一连串德国学术界顶级年会。那时加里宁格勒还属于德国。希尔伯特作为德高望重的数学界领袖，受邀做广播演讲。其中他谈道，“所有科学的唯一目的都是荣耀人的精神”。这样遣词用句完全脱胎于基督徒赞美神，但他绝口不提神。他谈到“驾驭自然”，提及伽利略、康德、高斯、和与他同时代的几位大数学家。他高屋建瓴，深入浅出，在人类精神和思想进步的大框架下讨论数学。在讲演的最后，他喊出了后来成为他墓志铭的著名口号，“我们必须知道，我们一定会知道！”这后半句是他对理性的信心，前半句则表达他追随理性的决心。几乎整个数学界都准备好跟随他。

但他当时不知道，就在他讲演前一天，一位年仅 24 岁、极端腼腆的维也纳大学博士生哥德尔，在同一个年会上做了一场学术报告，用严谨的逻辑否定了希尔伯特关于理性的信念。哥德尔太年轻，他的文章还只是初稿，没几个人听他报告，更少人严肃对待他的惊人结论。不过一年后，他的文章终于发表，立刻引起轰动。其核心发现被称为“哥德尔不完备定理”，从根本上改变了逻辑学与数学，影响力延伸到科学、哲学、神学、以及大众思想。他也迅速跃升为世界级逻辑学家。从理性的高度看，哥德尔发现人掌握的一些真理并不来源于理性。他有一句名言，“有些事实被认知为真，但不必然可证”。这与希尔伯特、罗素等坚信理性万能的观点截然不同。

哥德尔出生于奥匈帝国的德语区，自幼聪慧但柔弱，深受精神类疾病困扰。从青年时代开始，他多次长时间住进精神病院。这造成他不善社交，但他的思想非常大胆犀利。他 18 岁时进入维也纳大学，本想主修理论物理，在选课过程中喜欢上数学和哲学。他积极参加了逻辑实证主义维也纳学派的各种讨论，最后认定数学逻辑学是所有科学思想的根本，于是转攻逻辑学。

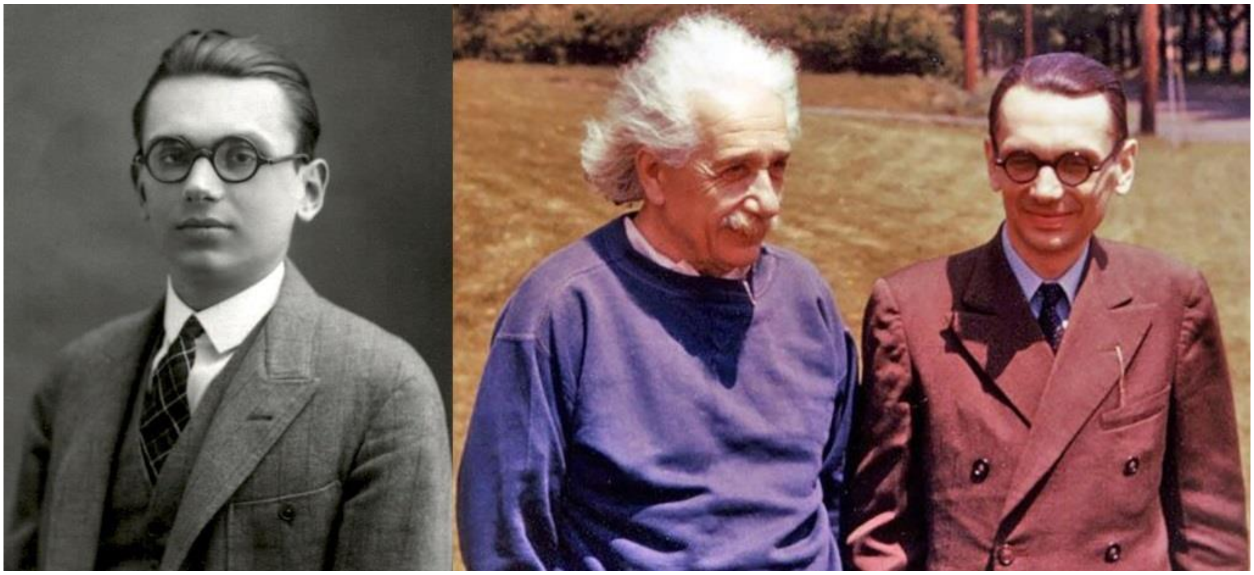
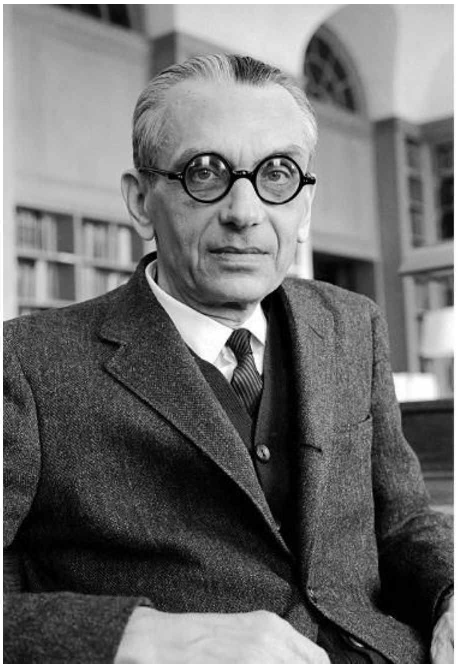


图 7. 哥德尔(Kurt Gödel，1906－1978)，逻辑学家、数学家、哲学家。在纳粹当政时代移民美国，担任普林斯顿大学教授，与爱因斯坦是同事，两人相差 27 岁，却成为非常要好的朋友。每当下班，他们就会共同散步回家，一路深入讨论各种问题。当时的普林斯顿大学聚集了一大批来自世界各地的天才级大师，这两位无疑是天才中的天才，大师中的大师。两人具体谈什么，很可能改变人类思想进程，所以其他人非常好奇。爱因斯坦曾说，“我之所以每天上班，就是为了有机会与哥德尔一起散步回家”。

哥德尔是虔诚的基督徒，属路德派。他不善与人打交道，平时不去教堂，但经常在家研读《圣经》。他常与身边朋友讲到自己用逻辑学严谨证明了神的存在，但他不想公开发表，因为害怕被学术界视为异类。他去世后，他的证明才流出。哥德尔延续了神学史上圣安瑟伦(Anselm of Canterbury， 1033 - 1109)和莱布尼茨(Gottfried Leibniz， 1646 - 1716) 试图证明神存在的工作。前者是 11 世纪意大利基督教僧侣，后者是 17 世纪德国著名天才。国人应该熟悉后者对微积分的贡献。哥德尔认为自己成功证明了神的存在，但学术界里反基督教气氛浓厚，挑战哥德尔证明的人当然也有。这类争论短期内不可能停止。



Gödel's ontological proof of God

Ax. 1. $(P(\varphi) \wedge \Box\, \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \;\Rightarrow\; P(\psi)$

Ax. 2. $P(\neg\varphi) \;\Leftrightarrow\; \neg P(\varphi)$

Th. 1. $P(\varphi) \;\Rightarrow\; \Diamond\, \exists x\, \varphi(x)$

Df. 1. $G(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi(P(\varphi) \Rightarrow \varphi(x))$

Ax. 3. $P(G)$

Th. 2. $\Diamond\, \exists x\, G(x)$

Df. 2. $\varphi \text{ ess } x \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \wedge \forall\psi\,(\psi(x) \Rightarrow \Box\, \forall y(\varphi(y) \Rightarrow \psi(y)))$

Ax. 4. $P(\varphi) \;\Rightarrow\; \Box\, P(\varphi)$

Th. 3. $G(x) \;\Rightarrow\; G \text{ ess } x$

Df. 3. $E(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi(\varphi \text{ ess } x \Rightarrow \Box\, \exists y\, \varphi(y))$

Ax. 5. $P(E)$

Th. 4. $\Box\, \exists x\, G(x)$

$\Box$: **must**

Ax: Axiom Th: Theorem Df: Definition $\Diamond$: **possibly**

图 8. 哥德尔关于神存在的本体论证明。

逻辑实证主义创始人石里克与哥德尔是好朋友，前者在 1936 年被刺杀，从此哥德尔总害怕被人下毒。到了晚年，这种被迫害狂想症加重，他只吃太太为他准备的饭菜。1977 年底，他太太病重住院。1978 年 1 月，他被发现饿死在位于新泽西普林斯顿的家里。哥德尔无疑是二十世纪最伟大的逻辑学家。也有研究者认为，他是人类有史以来最伟大的逻辑学家，古希腊的亚里斯多德只能算第二。可惜国人中少有人知道他。不但中小学课本和通俗读物里没有他，即使在大学生和研究生群体里，知道他的人也很少。所以我多花一些篇幅介绍他。

深入了解哥德尔等西方顶级数学家之后，我们发现他们思考问题的出发点都是寻求世界与人的根本，他们的数学为这个大目标服务。其他学科也类似，比如我在先前文章中谈及牛顿、笛卡尔、开普勒等，因为强烈信仰基督教而创立现代科学。康德、黑格尔、洛克等，也因信仰基督教而发展出新哲学与政治学思想。而罗素、希尔伯特等，因反对基督教而致力于新数学与哲学研究。基督教在西方如此重要，无论支持或反对它，西方思想家们思考所有大问题都围绕它，虽然他们经常不明说。

其实在历史上，几乎所有西方学术专业都源于基督教思想和教会栽培。但自文艺复兴时代以来，它们逐渐摆脱了教会控制，之后都强调自己对教会的独立性，于是专业语言里都不直接提及神，掩盖了基督教对它们的深刻影响。我看见很多国人朋友花大量时间与精力研读各类西方思想著作，却因不懂基督教，不能理解它们背后的基督教根基，因而不得要领，于是特此提醒。

哥德尔不完备定理

本节的目标读者是不知道哥德尔理论的人，目的是让他们了解理论的大概，并建立基本直觉。这里不追求严谨，也避免次要细节。本文后面注释中有理论证明的链接【4】【7】，有兴趣的读者可以进一步阅读。

哥德尔不完备定理(Gödel’s Incompleteness Theorems)的标准表达形式：

- 第一定理：任何自洽的形式系统，只要包含自然数的算术规则(皮亚诺公理 Peano axioms)，就一定存在不能被证明的真命题。
- 第二定理：任何自洽的形式系统，只要包含自然数的算术规则(皮亚诺公理 Peano axioms)，就不能证明本身的自洽性。

所有现代科学体系、现代数学和逻辑学体系、现代哲学体系等，都是公理体系，比如牛顿力学。它们都包含算术逻辑，比如都承认 1+1=2，所以都满足定理中的条件，也都适用定理的结论。其中第一定理回答希尔伯特计划中的完备性问题，第二定理回答自洽性问题，答案都是否定的。用平常话翻译第一定理，任何理性系统都不完整，都会遗漏某些真理。第二定理的意思是，即使自洽的理性系统也不能证明自己自洽，更何况非自洽的系统。

在现实中，人们要求理论自洽优先于理论完备性。被发现自相矛盾的理论，要么发现者自己就否定了、不会公布，要么公布后被他人看穿、很快被抛弃，比如文革时期中国物理学界推出的“层子模型”。但即使最严谨的学者也通常可以接受不完备、但在某些情况下最优的理论。比如牛顿力学不能涵盖极端微观或极端宏观的现象、是不完备的。但它在很多情况下比量子力学和相对论更方便，所以全世界都继续使用。简单讲，当今所有科学理论都只是目前还未发现其自相矛盾、但人们已经知道它不完备的理论。它遗漏真理，且不能保证它以后不出现自相矛盾。

数学同样不完备，不能证明自己自洽。哥德尔不完备定理提出后，很多数学家们认为以下命题为真、但可能永远无法证明：

1. 哥德巴赫猜想(Goldbach's Conjecture)：任何大偶数都可以被写成两个素数之和。因为政治宣传，很多人误以为陈景润解决或几乎解决了它，其实不然。哥德巴赫猜想说： 任何偶数 = 素数 1 + 素数 2。 陈景润证明：任何偶数 = 素数 1 + 素数 2 或 任何偶数 = 素数 1 + 素数 2 × 素数 3。数学界简称哥德巴赫猜想是“1+1”，陈景润证明了“1+2”。二者差距甚远。
2. 孪生素数猜想：孪生素数无限多。相差为 2 的两个素数是孪生素数。
3. 连续统假设(the Continuum hypothesis)：不存在一个浓度绝对大于整数集 I、又绝对小于实数集 R 的集合。

   …

简介定理的证明

哥德尔不完备定理的证明是数学史上最精彩的证明之一。本文为避免读起来太沉重，只给出证明的大致思路和关键技巧，不求完整或严谨。

大致思路

证明总体运用逻辑学里的“自指”(self reference)，在理性系统中制造矛盾。哥德尔发现在任何形式系统里，总存在本质如下、但具体内容符合具体系统要求的逻辑判断句：

$$P = \text{本句话是伪命题} \qquad \text{(Exp. 4)}$$

那么命题 P 是真还是假呢？

- 如果系统没有发现 P 是真命题，既把 P 自动归类为伪命题。而 P 说自己是伪，所以 P 是正确的。于是系统遗漏一个真命题。完备性被破坏，就是第一定理。

- 如果系统发现 P 是真命题，而 P 又说自己是伪，于是系统自相矛盾。自洽性被破坏，就是第二定理。

关键技巧

证明中有两个难点。一是形式系统的具体内容纷繁复杂，不同系统之间差别巨大。描述命题的语言要么是如英文那样的人类常用语言，要么是逻辑符号，就像图 4 中右图 《数学原理》的那个典型一页。而哥德尔追求的结论需要适用于所有形式系统，这让统一描述问题变得困难。没有统一描述，问题就无法统一解决。

二是等式(Exp. 4)中存在循环定义。它等价于：

P = P 是伪命题　　(Exp. 5)

P 同时出现在等号两边，造成逻辑循环。

为解决这两个难点，哥德尔独创一套数字编码，名曰哥德尔数(Gödel numbering)，把所有可能的形式系统都投射到自然数集上，系统内命题与自然数之间建立一一对应关系，让问题描述变得统一。然后

定义 G(p) 为任一命题 p 的哥德尔数　　(Exp. 6)

改造等式(Exp. 5)为：

P = G 代表的命题是伪命题　　(Exp. 7)

其中 G = G(P)，是命题 P 的哥德尔数，于是等式(Exp. 7)避免了循环定义。(Exp. 7)被称为系统的“哥德尔句” (The Gödel sentence)。

形式系统符号	哥德尔数	意义
~	1	not
∨	2	or
⊃	3	if...then...
∃	4	存在
=	5	等号
0	6	零，0
s	7	下一个自然数，+1
(	8	左括号
)	9	右括号
,	10	逗号
+	11	加号
×	12	乘号
x	13	代表数字的变量1
y	17	代表数字的变量2
z	19	代表数字的变量3
•••	•••	（表格继续，长短任意）

图 9. 逻辑符号的哥德尔数。

下面举例说明如何根据逻辑符号的哥德尔数，把任一命题转换成一个自然数：

例子命题 p： x = 2

1. 第一步，转换形式：x = SS0　　　（所有自然数都用 S..S0 代替，比如 1 = S0, 2 = SS0, …）
2. 第二步，根据上面的对照表，把命题转换成哥德尔数矢量：x 对应 13，=对应 5，S 对应 7，整数 0 对应 6，于是命题 x = SS0 对应 (13 5 7 7 6)。
3. 最后，把哥德尔数矢量转换成一个自然数：$G(p) = 2^{13} X 3^{5} X 5^{7} X 7^{7} X 11^{6}$。其中幂运算的底数序列(2 3 5 7 11)是素数序列，根据需要可无限延展。幂运算的指数序列是命题的哥德尔数矢量。

上述三步把命题转换成自然数。如果需要从哥德尔数 G(p)恢复命题原形式，只要对它进行素数因子分解，得到幂运算的指数序列就可以获得。

不可决定性

在 1931 年，哥德尔提出不完备定理，回答希尔伯特计划中完备性和自洽性问题。之后几年里，塔斯基(Alfred Tarski，1901－1983)和图灵(Alan Turing，1912－1954)分别发表文章，回答了希尔伯特计划中的可决定性问题。有人报告，哥德尔在私人手稿里推导出类似结果，但没有及时发表。其中图灵的方法较直观易懂，所以这里重点介绍。

在研究可决定性问题时，图灵提出“图灵机”概念，就是现代计算机的基本数学模型。关于图灵机，有两个基本结论：

1. 任何计算机本质上都是图灵机。包括算盘、机械计算机、电子计算机、量子计算机等。
2. 图灵机与形式系统之间存在等效关系。任何形式系统都有一个图灵机与之等效，反之亦然。

希尔伯特可决定性问题(Undecidability Problem)与图灵机停机问题(Halting Problem)等效。以哥德巴赫猜想为例解释这种等效性。存在三个角度理解此猜想：

1. 它是一个游戏，目的是寻找不能分解成两个素数之和的偶数。游戏从 X=4 开始检验。如果当前 X 是两个素数之和，设置下一步 X：$X_{i+1}=X_i+2$。如果当前 X 不能分解成两个素数之和，游戏结束，哥德巴赫猜想被证伪，否则游戏继续。但有人已试过小于 4×10^{18} 的所有偶数，都可分解成两个素数之和。显然，如果哥德巴赫猜想正确，游戏将无限继续。但“游戏继续”本身不足以证明哥德巴赫猜想。
2. 在 ZFC 公理体系内证明或证伪。如果这个体系满足希尔伯特的可决定性，就是它可以判断每个命题的真伪，那么一定存在一套包含有限步骤的推导过程，始于 ZFC 的 10 个公理，终止于哥德巴赫猜想、或它的否定形式。如果哥德巴赫猜想是真，这个证明过程肯定不是第一点中的游戏过程，因为那个游戏无法证明哥德巴赫猜想。
3. 按照图灵的思路，为上述第 2 点找到等效的图灵机停机问题。比如设置图灵机起始状态为 ZFC 的 10 个公理，每次运用一个有效推导步骤，产生的结论就是新定理集。如果其中包含哥德巴赫猜想或它的否定形式，寻找成功，图灵机进入停机状态。如果图灵机一直不能进入停机状态，定义为死机状态。

很显然上述第 2 点中的形式系统可决定性问题，等效于上述第 3 点中的图灵机停机问题。

图灵的证明

希尔伯特期望，数学找到统一根基之后，完全依靠这个系统的公理与推论规则，就可以判定任何命题的真伪。他想用理性抗衡神。神总给人希望，希尔伯特就要求理性也有类似能力。但图灵证明理性做不到。

首先假设希尔伯特可决定性为真。存在这样的形式系统，给它任何命题，它都可以判定真伪。我们把此系统对应的图灵机称为 H。此系统的可决定性问题与 H 的停机问题等效。对于任何输入命题，H 都会正常停机，永不死机。如果输入信息是“图灵机 X 是否会死机？”，H 当然也永远能正确判断，并输出相应结论：Y 代表 X 会死机，N 代表 X 永不死机。我们进一步按下图改造 H，加装新增单元，组成图灵机 H+。如果 H 输出 Y，新增单元和整个 H+停机；如果 H 输出 N，新增单元和整个 H+就进入无限循环，死机。

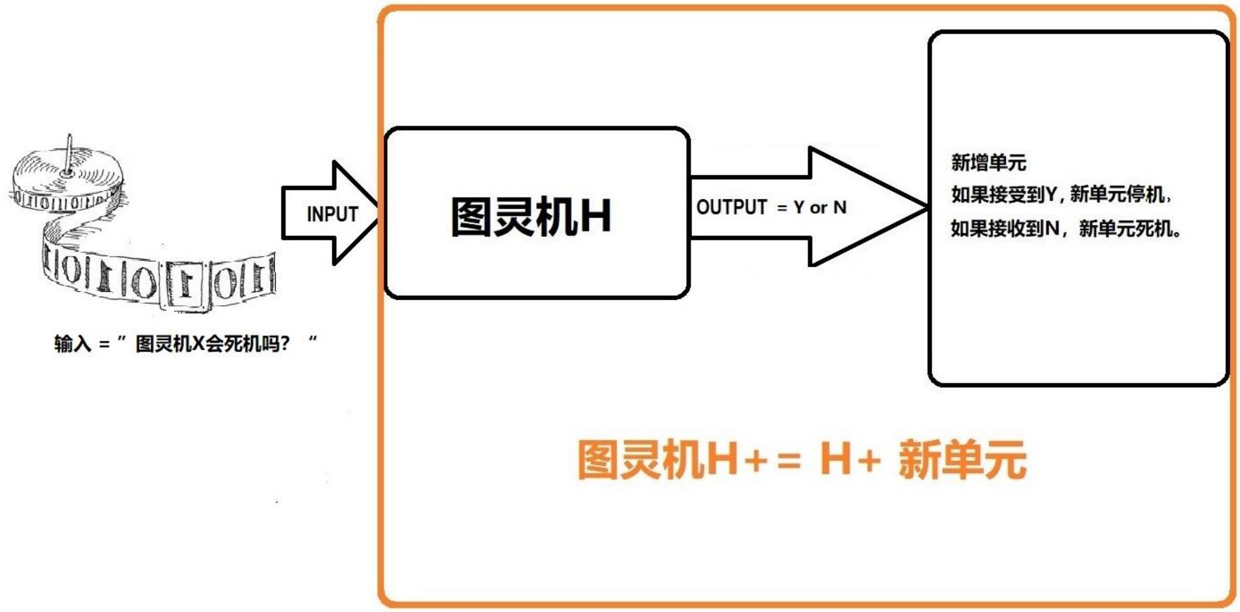


图 10. 图灵为证明不可决定性而假想的连环图灵机。

很显然，如果我们问 H+下述逻辑自指问题，“图灵机 H+是否会死机？”，就造成矛盾。如果 H+的第一部分，H，给出的答案是 Y，就是“H+会死机”，那就要求 H 必须输出 N，但 N 代表“H+不会死机”，矛盾。类似地，如果 H 给出的答案是 N，那么就要求 H 输出 Y，又矛盾。总之自相矛盾不可避免，所以最初假设错误，H 不存在。也就是说，不存在总能做到停机（不死机）的图灵机。另一个等效说法，能判断任何命题真伪的形式系统不存在。

五 总结

人脑是计算机吗？

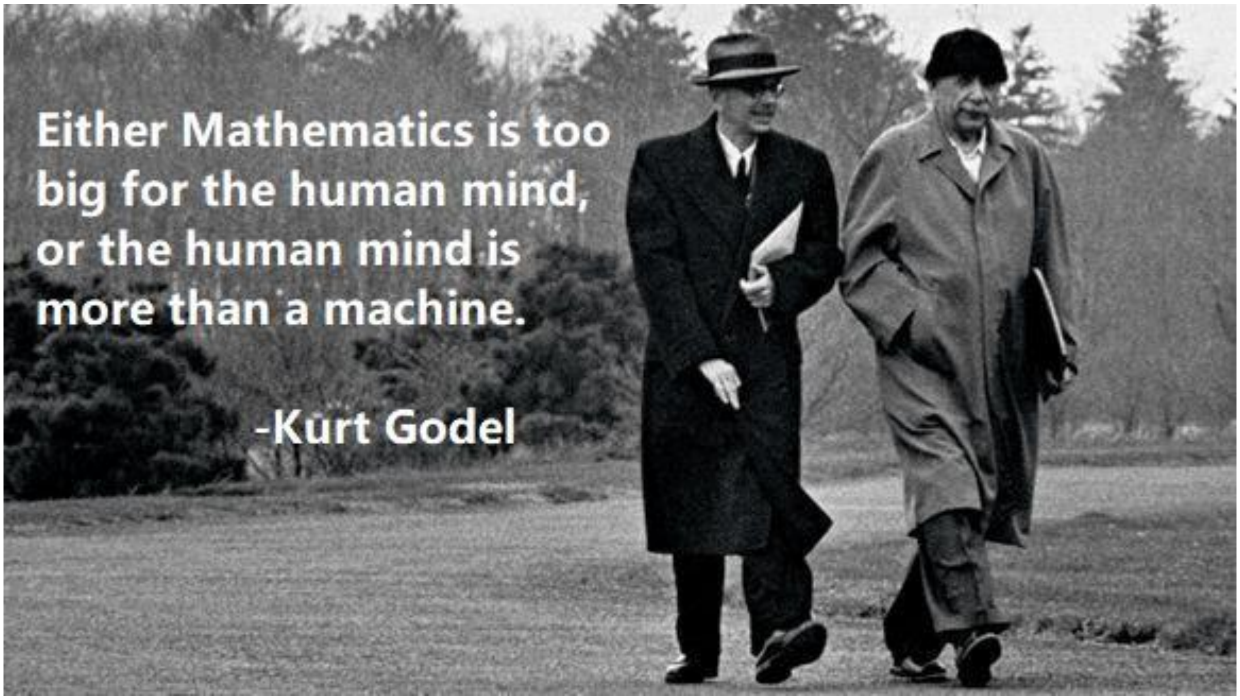


图 11. 哥德尔的一句学术名言，“要么数学对于人脑来说太宏大，要么人脑并不只是一台机器”。背景照片是哥德尔与爱因斯坦并肩走在普林斯顿的乡间小路上。

假设人脑 F 是以肉体为硬件的计算机，F 必然对应一台图灵机 T，那么 F 可能知道的全部真理就是 T 的定理全集。但是我们已知道，T 的定理全集不包括系统的“哥德尔句”，就是“此句在系统中不可证明”，而人脑 F 知道。于是假设被否定，没有一台图灵机可能完全代表人脑，人脑比任何图灵机至少多知道一条真理。

这就是著名的“卢卡斯-彭罗斯观点” (Lucas–Penrose argument)。卢卡斯(John Lucas, 1929 – 2020)是英国哲学家，两年前去世。前文曾提到彭罗斯(Sir Roger Penrose, 1931－)。他是英国数学家、物理学家，诺贝尔奖获得者，霍金的工作伙伴和好友。在哥德尔不完备定理发布后，很多学者认为从它可推论人脑超越计算机，包括哥德尔本人。卢卡斯和彭罗斯只是把这个观点说得最简洁和有条理的人。

如果卢卡斯-彭罗斯观点正确，就会出现一连串重要推论：

1. 人工智能永远不可能完全取代人。
2. 人的非理性思维有重要意义，让人的智慧比纯理性更胜一筹。非理性并不都是愚昧。
3. 物质不决定人的意识，人的意识超越物质。物质能够产生的最高智慧形式就是图灵机，人的智慧超越它。
4. 人不是动物，人超越所有动物。唯物主义和唯心主义都同意，动物是物质的。笛卡尔说，“动物是机器”。唯物主义认为人也是机器，也是物质的。如法国早期唯物主义者梅特里

认为“人是机器”。马克思主义则认为“人是高级动物”。但卢卡斯和彭罗斯认为人不是机器、人超越所有机器。所以人不是动物、人超越所有动物。

在世界学术界里，无神论是主流。在过去一个多世纪里，无神论者占据了几乎所有重要学术话语权。围绕卢卡斯-彭罗斯观点还存在很多争议。不过，即使它被否定，哥德尔不完备定理至少也证明，任何理性体系都要么漏掉真理、要么内部矛盾、要么二者兼备。任何信仰理性的人，他的信仰既不可能基于理性，也不符合理性。这表明理性从来不是，也永远不可能是信仰。虽然人类崇尚理性的精神始于基督教文化圈，基督徒们一直也是最尊重理性的人群，但基督教向来强调信仰高于理性。

图解西方对神态度的演变

图 12. 画中人叫约伯，本来是个健康、富足、幸福的人，但神让他变得贫穷、生病、失去家人。关键是他没做任何错事，却无辜受难，而且神不对他做解释。约伯曾疑惑，怪罪神不公正，但每次他对神的信心都战胜他的怀疑。最后神加倍偿还了他。在图画中，约伯已变得衣衫褴褛，满身生疮，孤独一人。神让他一无所有，但他依然对代表神的天空保持崇敬。这就是传统基督教要求人对神的态度。

《约伯记》是《圣经》中最古老的故事之一，背景时代距今 4000 到 5000 年。约伯体现的基督教义是“因信称义”。“信”最重要，超越一切。在生活中的很多事上，人经常因为理解而信。但在信仰层次上，基督教认为理性基于信神，而不是信神基于理性。《圣经》上说，“敬畏神就是智慧的开端”。敬畏神就是坚信神。无论人是否理解，人都要信神。信神让人智慧增长，对世界和人生理解得更多更好。《约伯记》讲的就是这个道理。

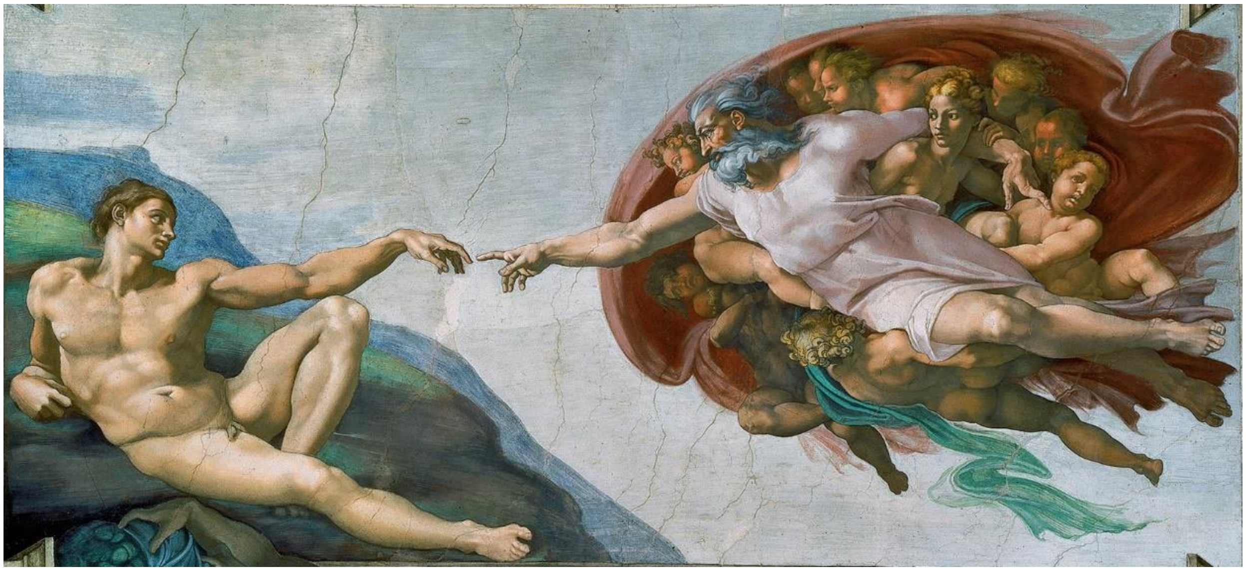
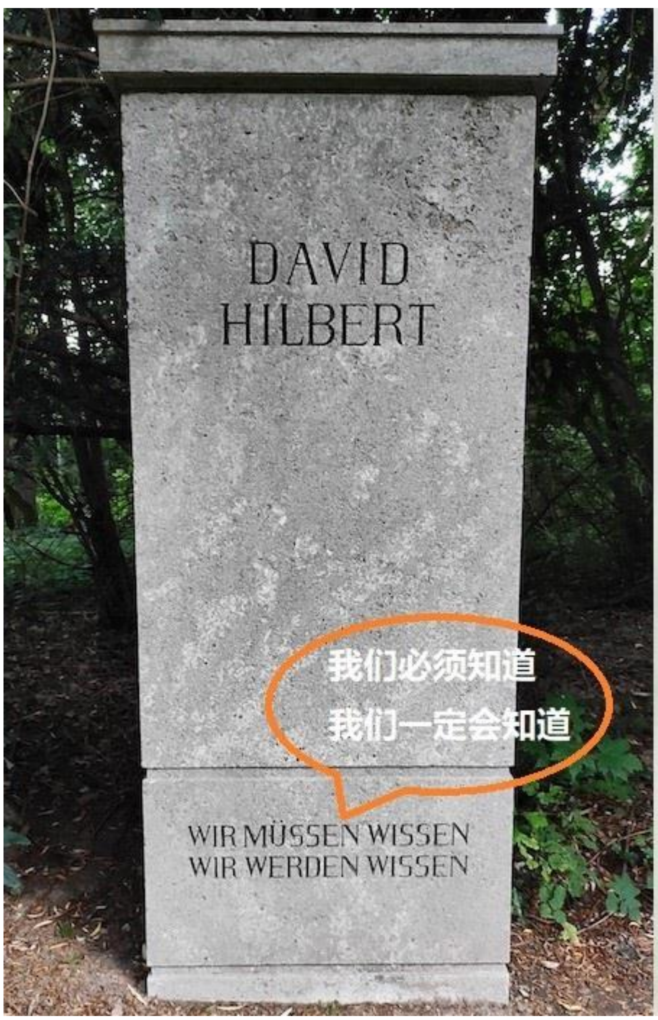


图 13. 米开朗基罗在 1512 年作的名画《创造亚当》。在文艺复兴时代，西方对人神关系的看法大变。一般来说，基督教不允许信徒画神的形象，即使画也要把神画得高远，表现神高深莫测。但这里左边男性角色代表人，右边男性角色代表神。二者大小类似。神只比人位置高一点、看上去年长一点而已，实际上就是人的形象。且人与神的手指几乎相碰，代表他们非常接近。画家如此安排，其《圣经》根据是，“神按自己的样子造人”、“神是人在天上的父”、“神爱人”等。这幅画很好地反映了那个时代人对神的新态度。这个态度的源头也是《圣经》，但与《约伯记》里的样式大不同。自不待言，文艺复兴运动总体非常成功。

图 14. 1793 年法国法定节日“理性节”(Fête de la Raison)的场面。法国大革命时期，革命者们废除基督教，创立“理性崇拜”(Culte de la Raison)。无神论者用理性代替神作为人的信仰，用“理性节”取代原来的圣诞节。图中手持长矛的就是“理性女神”，上方的文字意思是“哲学”。今天很多同学们相信无神论，推崇理性，喜欢哲学等，但他们中很少人知道，自己思想的真正来源是清朝中叶发生的法国大革命。

基督教主导西方社会千年，让很多人深深厌倦，渴望没有神管束的自由。法国大革命推崇理性与民主，其背后的思想家们，如卢梭，以及革命领袖们，如罗伯斯庇尔，都聪明博学。但是当革命摆脱了基督教的羁绊，人的聪明博学与指导思想中的理性和民主等，都无法阻止革命陷入疯狂与残忍。大革命把法国推进深渊。直到拿破仑政变后恢复基督教，才救法国于万劫不复的境地。

五四以来，中国知识分子发出的现代化最强音就是“德先生与赛先生”，与法国大革命时期的“理性和民主”类似、稍差一点。但就像没了基督教以后理性和民主无力救法国一样，德先生与赛先生也从来没能救中国。不但无力救中国，它们泥菩萨过河，自身难保。一百多年过去了，它们完全不能在中国站稳脚跟。即使在西方，民主、理性、科学等，实质上也依附于基督教文化才得生存。只不过依附时间久了，很多人忘记了这层关系。



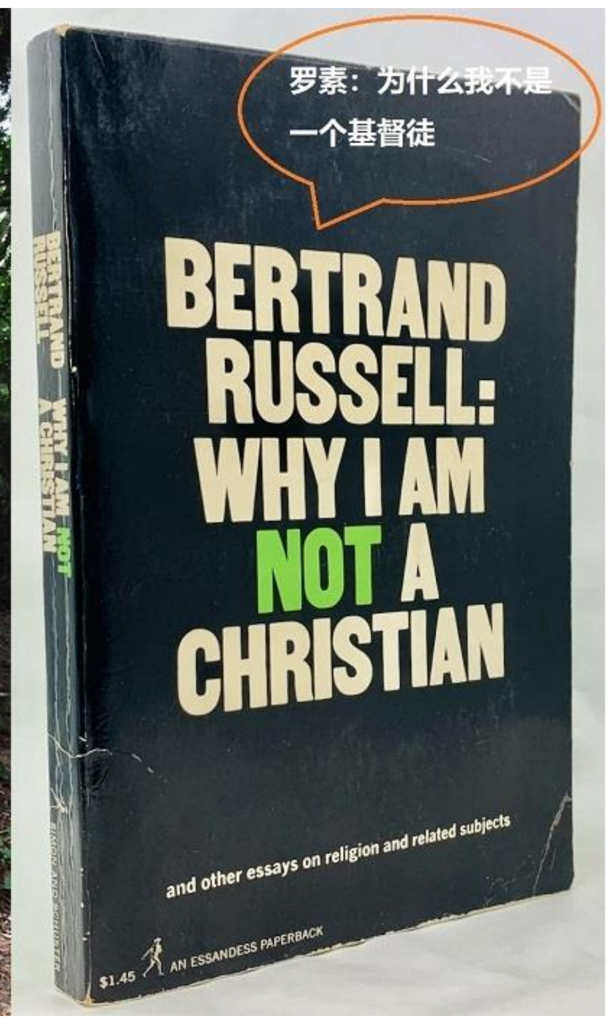


图 15. 左为希尔伯特的墓碑，墓志铭就是他著名的口号，“我们必须知道，我们一定会知道！”右为罗素的名著《为什么我不是一个基督徒》，至今还有众多读者。

法国大革命惨败，但它的很多思想并没有死掉，只是暂时潜伏起来，等待机会重新抬头。其中包括无神论。二十世纪初期，世界大战使得欧洲陷入强烈自我怀疑，科学进步又让人对理性心生向往，于是这种机会来了。这次的无神论先锋们与法国大革命中的那批类似，也是在常人眼中最聪明、最有学问的人，包括罗素、希尔伯特、还有美国的杜威等。杜威就是胡适的老师。

没人预料到，极端腼腆、不谙世事的哥德尔竟成为摧毁这场来势汹汹的无神论攻势的最关键人物。他的不完备定理打中了罗素、希尔伯特等人的思想要害。本质上哥德尔对他们说，同时也对那些逻辑实证主义者、以及世界各地崇拜理性的普通老百姓说，“你们犯糊涂了。你们说你们信仰理性，但我用严格的理性证明给你们看，你们对理性的信仰本身不可能基于理性，因为理性无法保证自洽，却知道自己肯定漏掉真理”。

最后的话

哥德尔、连同塔斯基、图灵等人揭示了，在数学的根部有几个无法弥补的漏洞。现代科学依赖数学，理性依赖科学与数学，所以人类理性有根本性局限，不能作为个人或人类的信仰。只可惜，近百年已过去，很多朋友却完全不知道这几位思想家的伟大发现，所以我要写这篇文章介绍。

基督教神学家们早就论证了神的完美性。神完美，所以是衡量其他所有东西的标准。只有神完美，如果在神之外存在其他完美的事物，那个事物就应该成为衡量万物的标准，包括衡量神。神与它不一样，就代表神有缺陷。有缺陷的神就不是神了。神造的东西，包括宇宙、人、科学、数学、逻辑，理性等，经常美好，但都只体现神在一事、一物、一个方面的好，没有哪个能够完全再现神的完美。

但是在近百年来，越来越多的人觉得科学和理性完美，觉得有了它们人就不需要神了。从顶级哲学家、到千百万受过良好教育的中西精英、再到市井百姓、以及我的交大同学们，都这样认为。理性主义者们认为自己站在正确的一边，而基督教落后、腐朽，站在了错误的一边。在这个人类认知关键点，伟大的哥德尔走上历史舞台。他用完全理性的方式证伪了理性的完备性与自洽性。塔斯基和图灵等人又证伪了理性的可决定性。简而言之，理性不具备神那样的完美，所以不配做人的信仰，不能取代神。

最后，我用著名现代天文与天体物理学家罗贝特 加斯特罗(Robert Jastrow, 1925 – 2008)的一段话结束此文。“对于一个坚定信仰理性的科学家，他的人生故事最后会变成一场恶梦。经过艰辛努力，他终于翻过了名叫‘无知’的山脉，正在攀登那座最高峰。但当他费尽全力爬上最后一块岩石时，却发现一伙神学家们跑过来迎接自己。他们已在这最高峰上等待他几百年了。”

2023 年 1 月 5 日

电邮：yuanzhiluo@yahoo.com 博客网址：https://lyz.com 或 https://github.com/luotuo123456/lyz

注释

1. 骆远志，2018，为什么现代科学诞生在西欧、不在中国？https://lyz.com/modern-science/

2. 骆远志，2021，为什么马克思主义哲学错了，https://lyz.com/sci_marx_god/
3. 骆远志，2022，当代科学挑战达尔文进化论，https://lyz.com/id-evolution/
4. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931), pp. 173-198.
5. A.M. Turing, 1936, On Computable Numbers, with an Application to the Enentscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society 2(42), pp. 230 – 265.
6. Penrose, R. , 1994, Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness, Oxford University Press, ISBN 0-19-853978-9
7. Natalie Wolchover, July 14, 2020, How Gödel’s Proof Works, https://www.wired.com/story/how-godels-proof-works/
8. The Lucas-Penrose Argument about Gödel’s Theorem, https://iep.utm.edu/lp-argue/
9. Wikipedia, Hilbert's program, https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_program
10. Internet Encyclopedia of Philosophy, The Lucas-Penrose Argument about Gödel’s Theorem, https://iep.utm.edu/lp-argue/
11. J.T. Smith, February 2014, David Hilbert's Radio Address - English Translation, https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-english-translation
12. R.J. MARKS and S. HAUG, 20210607, GÖDEL SAYS GOD EXISTS AND PROVES IT, https://mindmatters.ai/2021/06/godel-says-god-exists-and-proves-it/
13. Robert Jastrow, 1978, God And The Astronomers, W. W. Norton & Company, 2000 2nd edition, ISBN 0-393-85006-4.

网址与讨论

https://blog.creaders.net/u/13147/202301/452709.html

可下载的 PDF 版：https://github.com/luotuo123456/lyz/blob/main/godel-incomplete.pdf