中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

人工智能讲义

启发式搜索

March 8, 2022

Outline

1. 启发式搜索基础
2. 启发式函数的例子
3. 启发式函数的设计
4. 设计启发式函数的例子：$A*$ 算法

搜索算法：启发式搜索

搜索算法框架改动为启发式搜索算法

Input: $\mathbb{G}$: 状态图; s_0: 初态;
Output: $path$: 代表解的路径
$path \longleftarrow (s_0), FRINGE \longleftarrow \phi$ /* 初始化 */;
if $(GOAL(s_0) = T$ **then**
  return $path = (s_0)$;
end
INSERT$(s_0, FRINGE)$;
while T **do**
  if $empty(FRINGE) == T$ **then**
    return $failure$ /* 返回 $failure$, 表示无解 */;
  end
  $N \longleftarrow$REMOVE$(FRINGE)$ /* 将未扩展节点中队头节点从队列移除到 N*/;
  $s \longleftarrow$STATE(N) /* 从节点 N 恢复为状态 s*/;
  update $path$;
  foreach s' *in* $successors(s)$ **do**
    为 s' 创建 N 的新子节点 N';
    if $GOAL(s') = T$ **then**
      return $(path, s')$/* 找到目标节点，返回解 */;
    end
    INSERT$(s', FRINGE)$;
  end
end

FRINGE 的优先级次序，表示了搜索的“策略”

⟸ 在 INSERT 函数中修改该函数的功能，使之完成 FRINGE 的优先级排序

启发式搜索：最佳优先搜索

最佳优先搜索：从 FRINGE 中选择最佳节点进行扩展

- 何为最佳节点？
- 如何获得最佳节点？

评估节点的优劣：利用状态/节点信息或描述来度量

- 设计评估函数 f，将搜索树的节点 N 映射为一个非负实数 $f(N)$，表示从初始状态到达某个节点的路径耗散（越小越好！）
- 将整个未扩展节点集合 FRINGE 按增序排列，排在最前面的称为“最佳”（best），优先进行扩展（first），Best-first search
- 若两个节点 f 值相等，则可任意指定其次序，或者添加其他的信息进行进一步排序

注意“最佳”的概念，并非指最后获得的解是最佳的

- 局部贪婪的
- 什么时候能获得最优解？

启发式搜索

目前为止，学习的路线/思路

- 搜索问题求解 $\Rightarrow$ 算法框架 $\Rightarrow$ 搜索策略 $\Rightarrow$ 评估函数 f 的设计

设计节点评估函数 f 的两种方法：

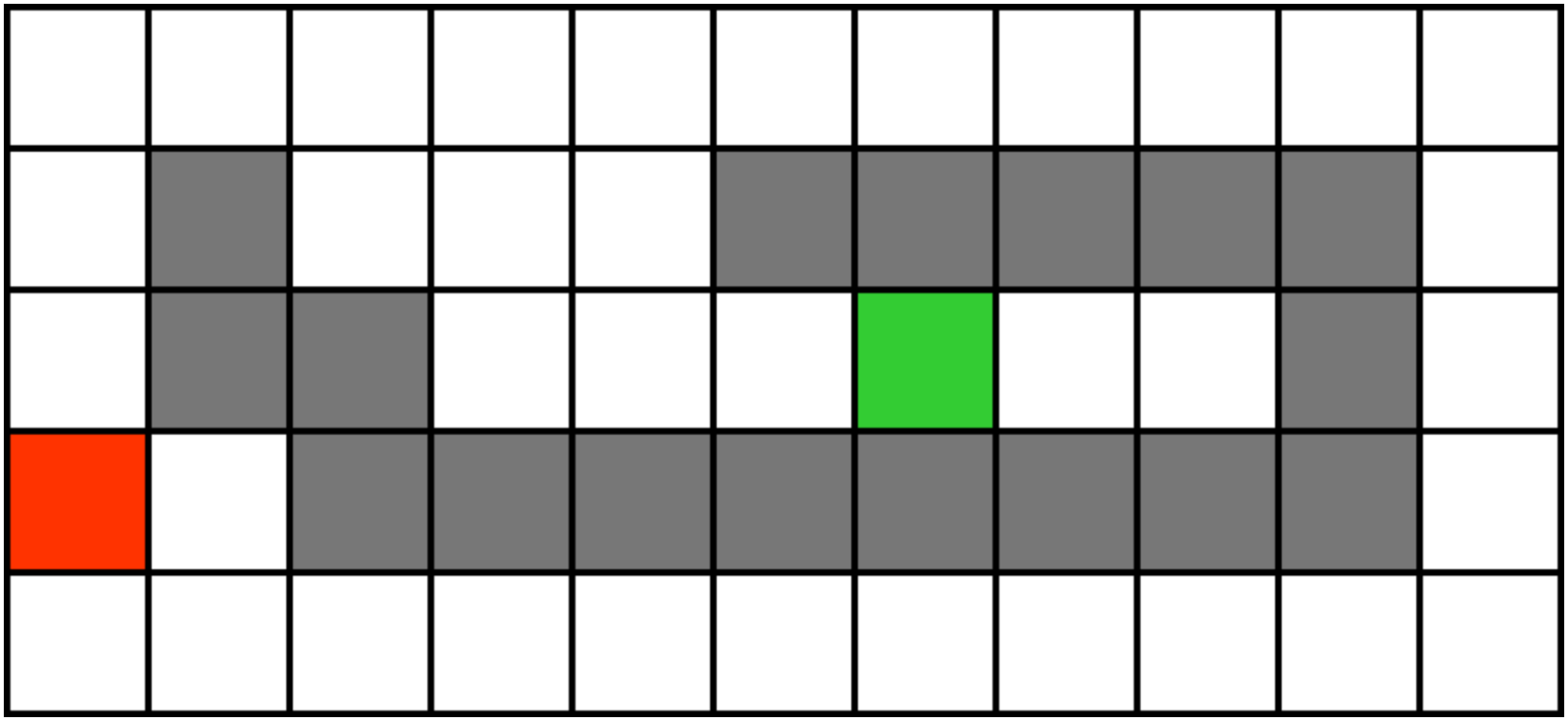
- $f(N) = g(N) + h(N)$，完整解的路径耗散，对应 $A*$ 算法
- $f(N) = h(N)$，从当前节点到目标节点的路径耗散，对应 贪婪算法

符号解释说明

- N：当前待判决/估计/评价的节点
- $g(N)$：从初始节点到 N 的路径耗散
- $h(N)$：从 N 到目标节点的路径耗散，就是所谓的 启发式函数，估计值

函数 f 的形式因具体问题而异！

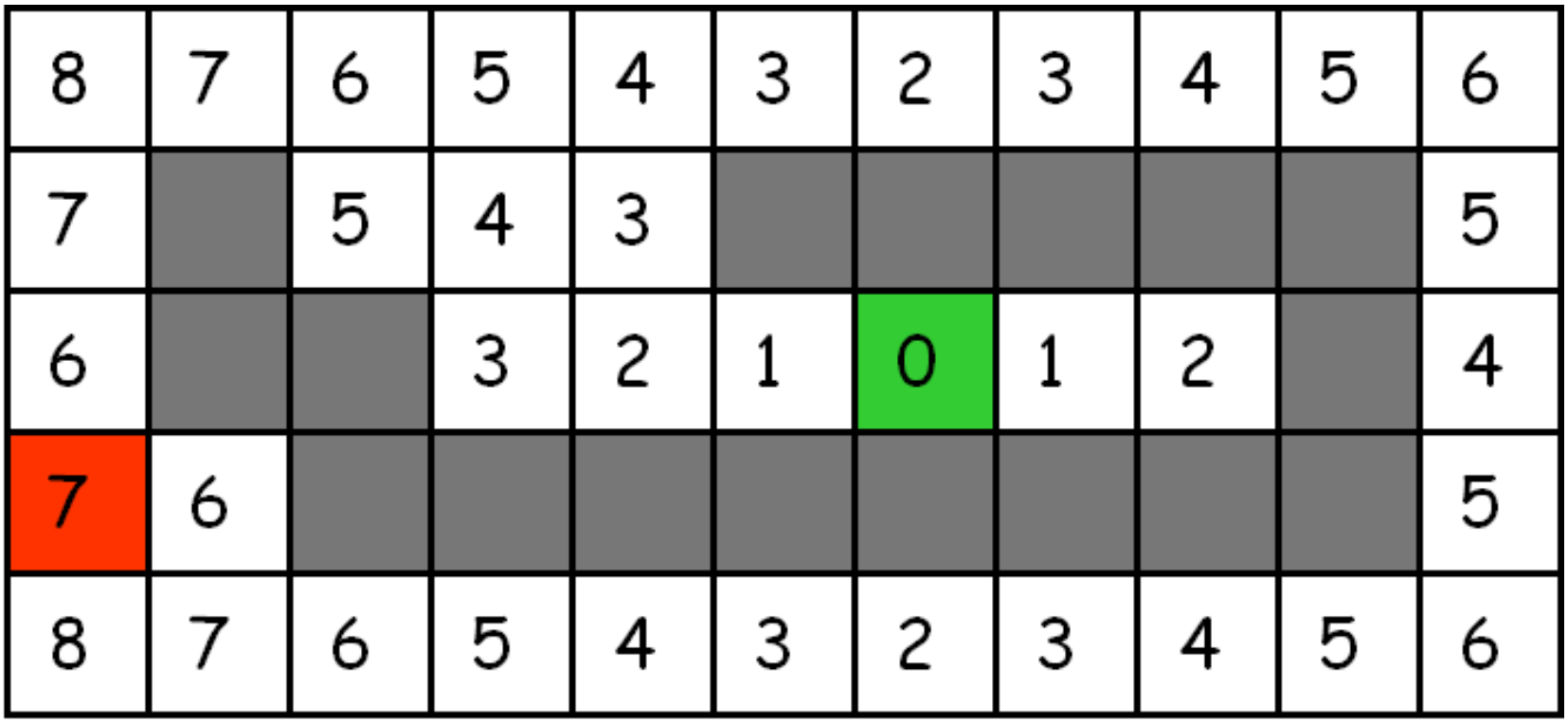
启发式函数：机器人导航问题



机器人导航：问题描述

- 灰格子表示障碍物；
- 红格子表示初态，绿格子表示终态。
- 寻找从绿格子到红格子的路径（路径规划问题）

启发式函数：机器人导航问题



机器人导航：问题描述

- $f(N) = h(N)$
- $h(N)$ =Manhattan distance to the goal
- **格子中的数字标明了 $f(N)$ 的值**

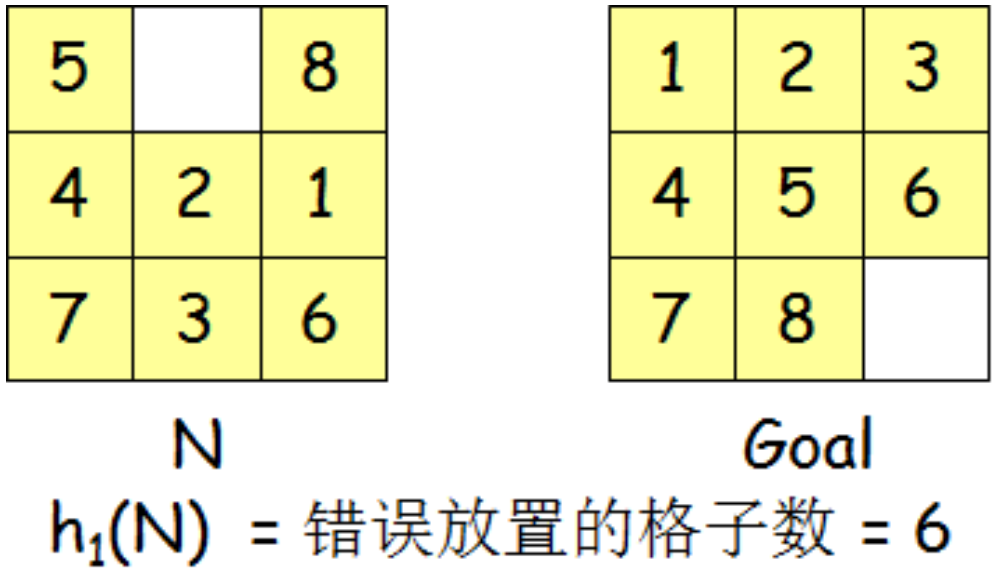
启发式函数：机器人导航问题

8+3	7+4	6+3	5+6	4+7	3+8	2+9	3+10	4	5	6
7+2		5+6	4+7	3+8						5
6+1			3	2+9	1+10	0+11	1	2		4
7+0	6+1									5
8+1	7+2	6+3	5+4	4+5	3+6	2+7	3+8	4	5	6

机器人导航：问题描述

- $f(N) = g(N) + h(N)$
- $h(N)$ =Manhattan distance to the goal
- 格子中的数字标明了 $f(N)$ 的值

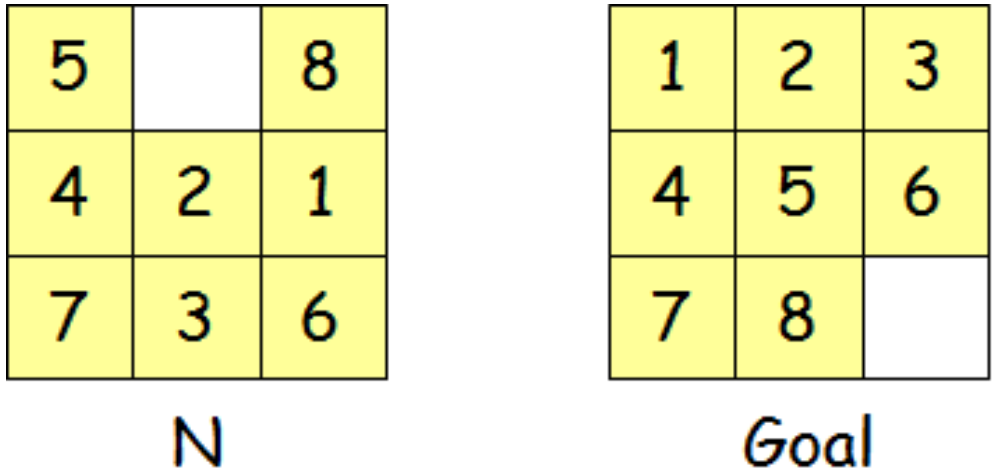
启发式函数



节点评估函数 f 的设计，核心在于启发式函数 h 的设计

- 一般情形下，启发式函数值由当前节点和目标节点二者所确定
- $h(N)$ 应保证的性质：$h(N) >= 0, h(Goal) = 0, h(N)$ 越小，离目标越近
- 如上图所示 h_1

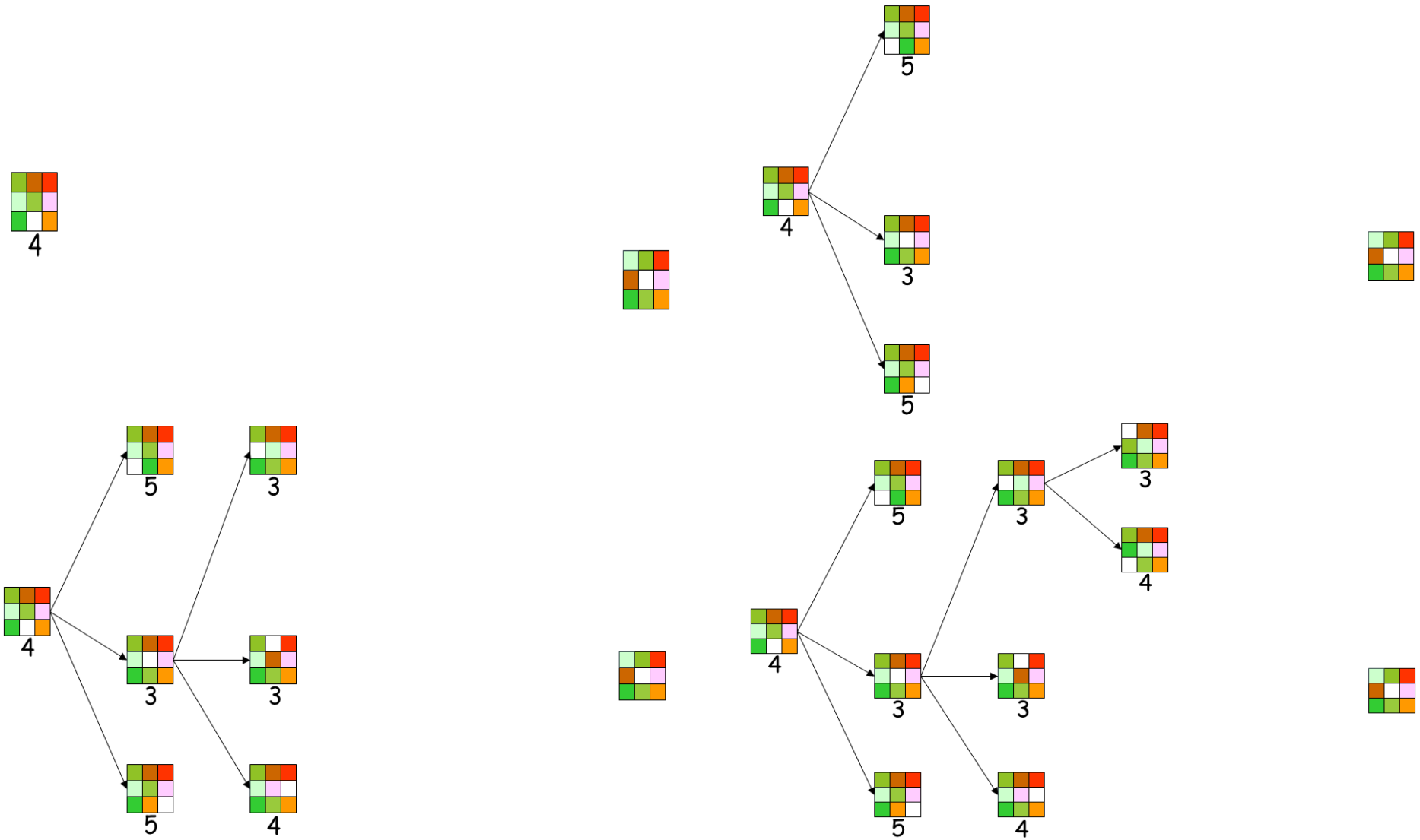
启发式函数：数码问题



数码问题，如上图所示，三种启发式函数的设计如下：

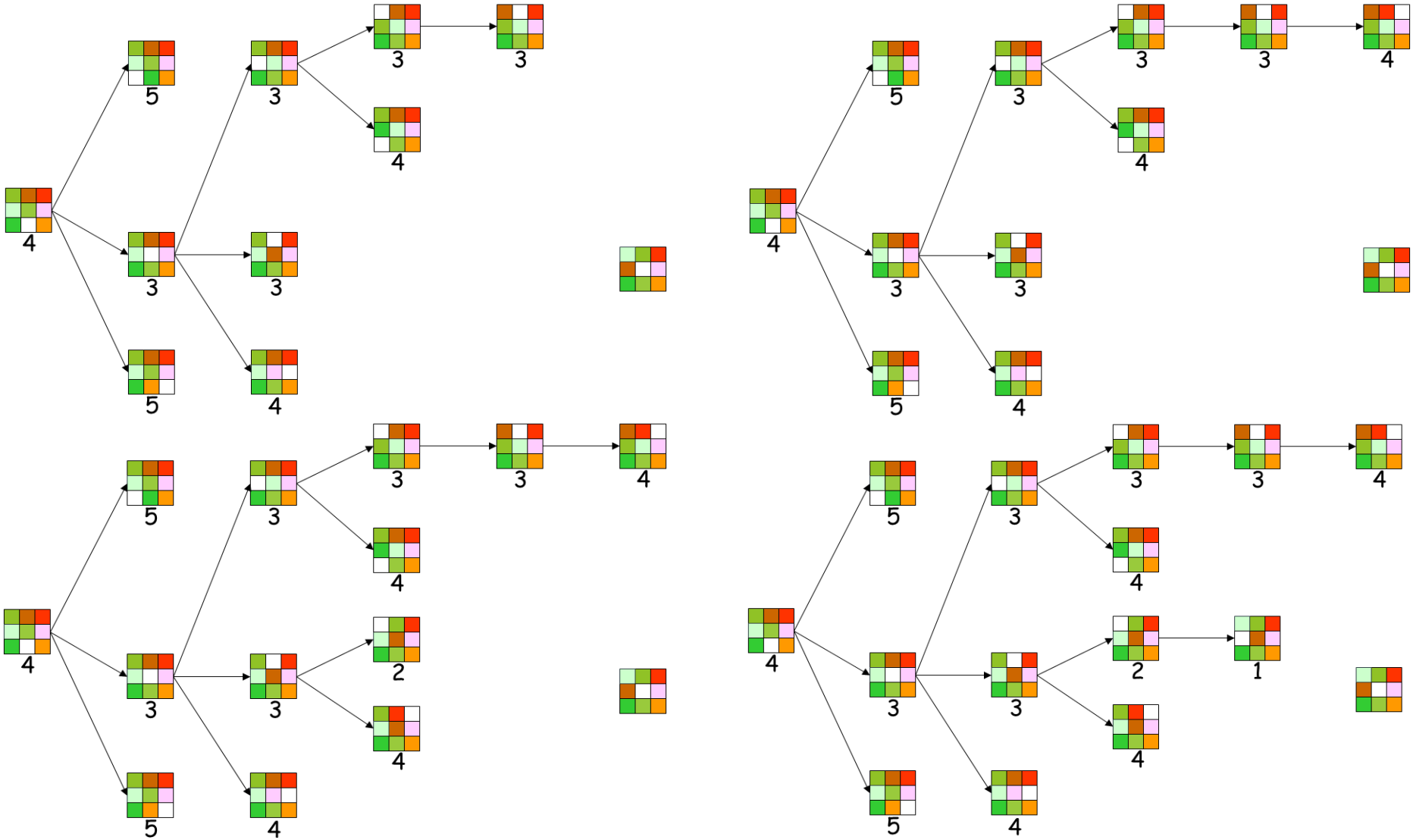
- $h_1(N) =$ 错误放置的格子数 $= 6$
- $h_2(N) =$ 所有数字到其正确位置的 Manhattan 距离之和 $= 2+3+0+1+3+0+3+1 = 13$
- $h_3(N) =$ 逆序数之和 $= n5 + n8 + n4 + n2 + n1 + n7 + n3 + n6 = 4+6+3+1+0+2+0+0 = 16$

8 数码问题的搜索过程



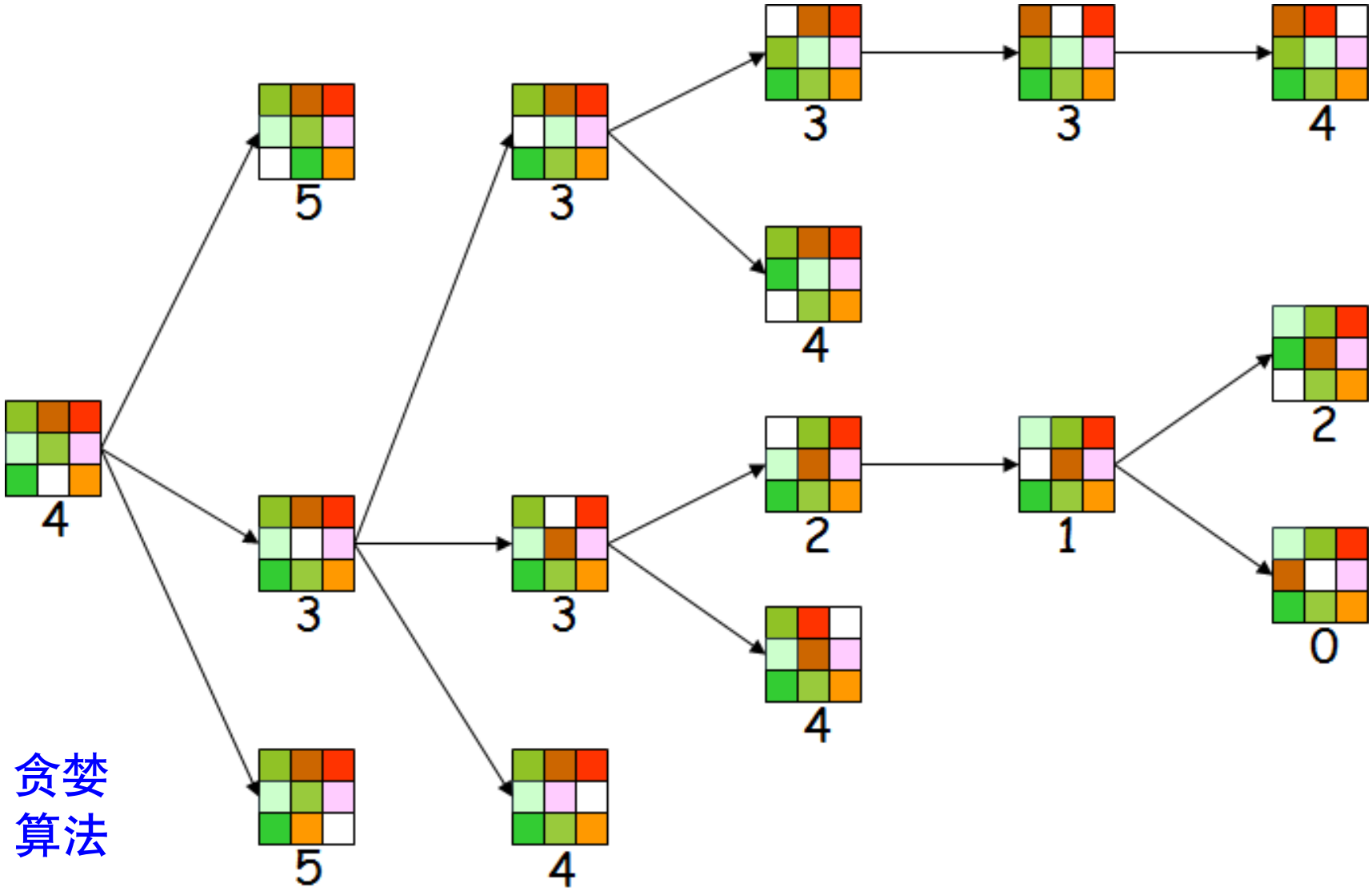
$f(N) = h(N) =$ 错误放置的格子数

8 数码问题的搜索过程



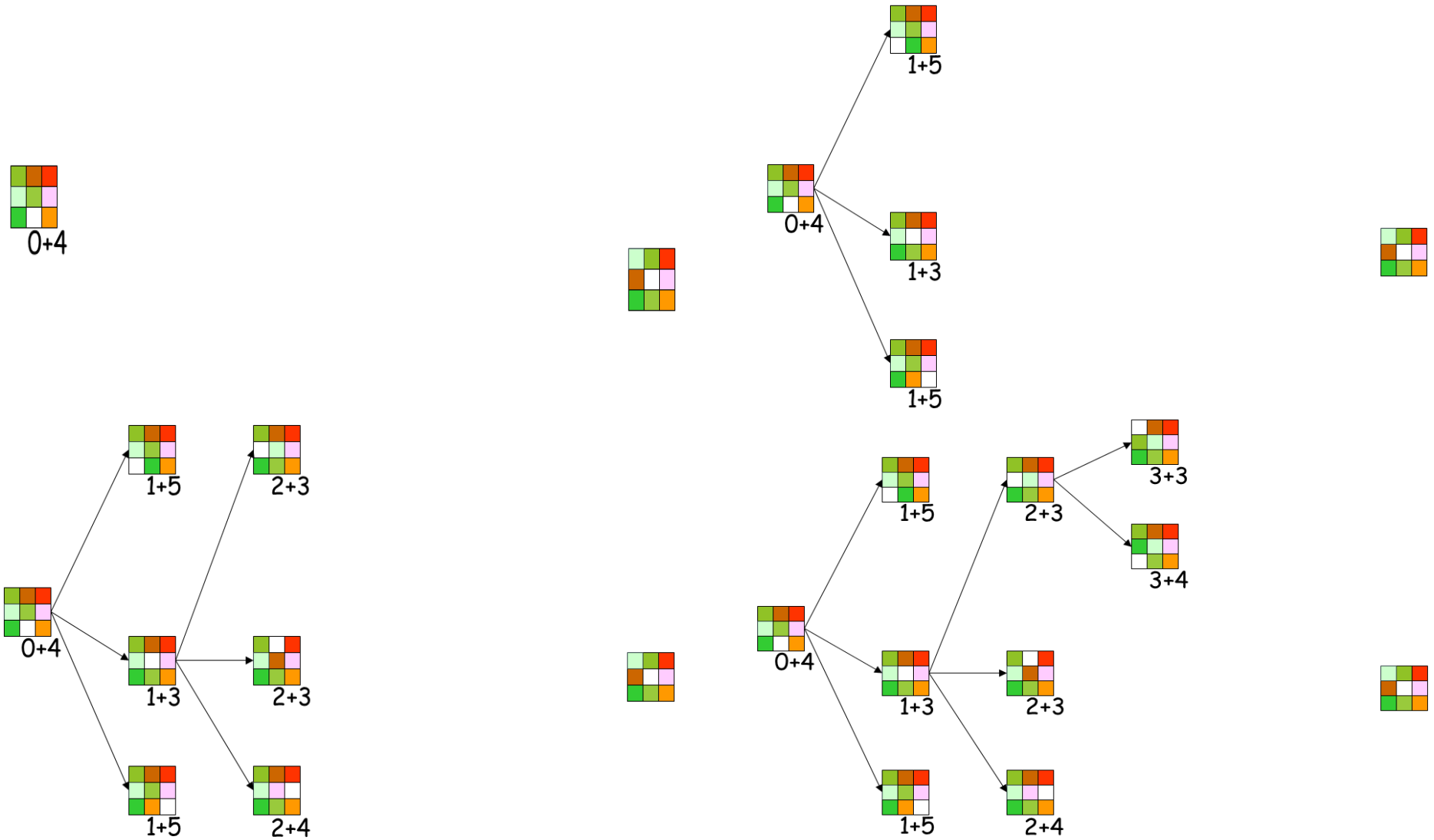
$f(N) = h(N) =$ 错误放置的格子数

启发式函数：应用到搜索过程



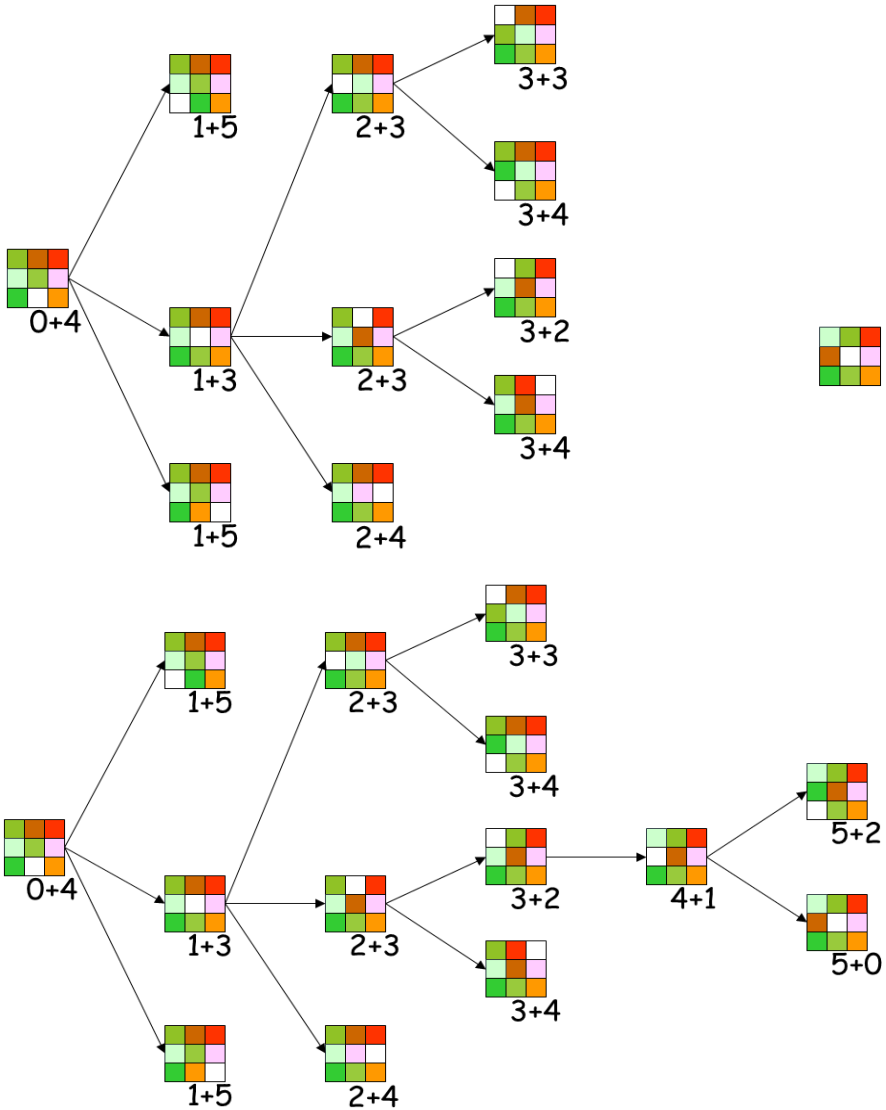
$f(N) = h_1(N) =$ 错误放置的格子数

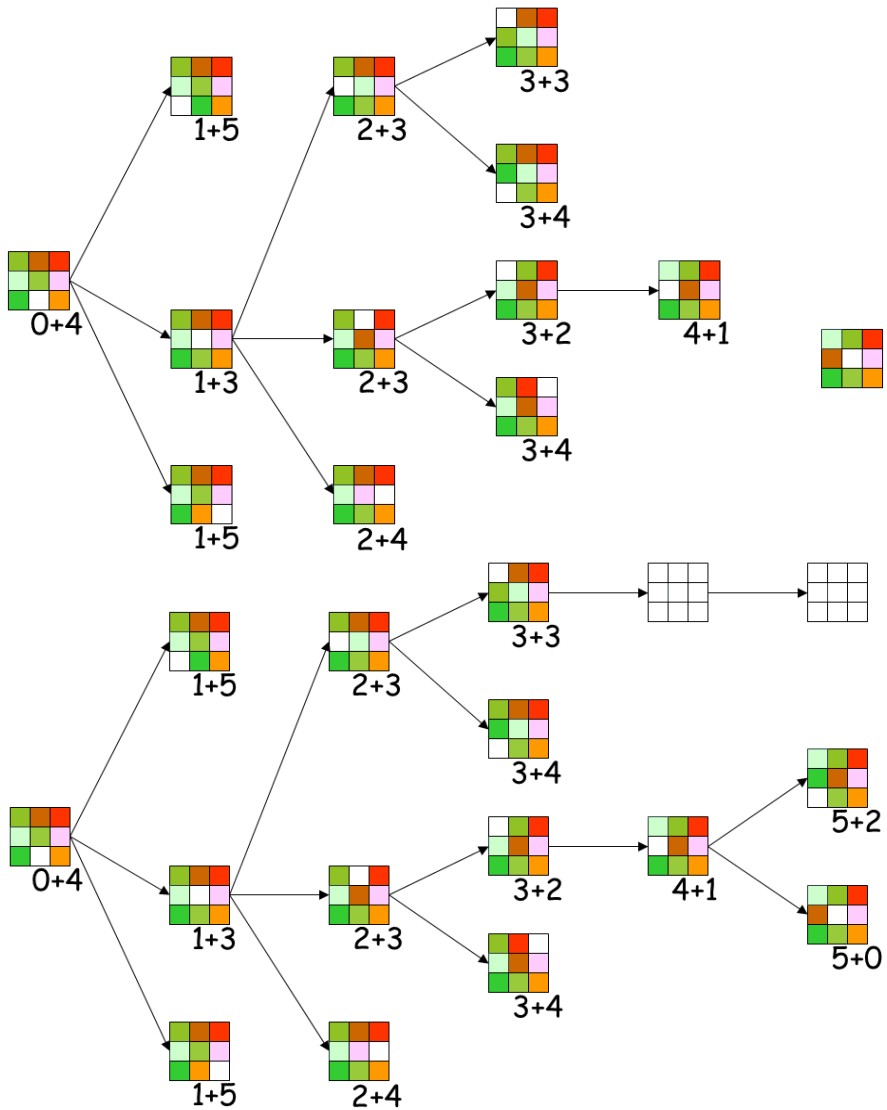
8 数码问题的搜索过程



$$f(N) = g(N) + h(N), h(N) = \text{错误放置的格子数}$$

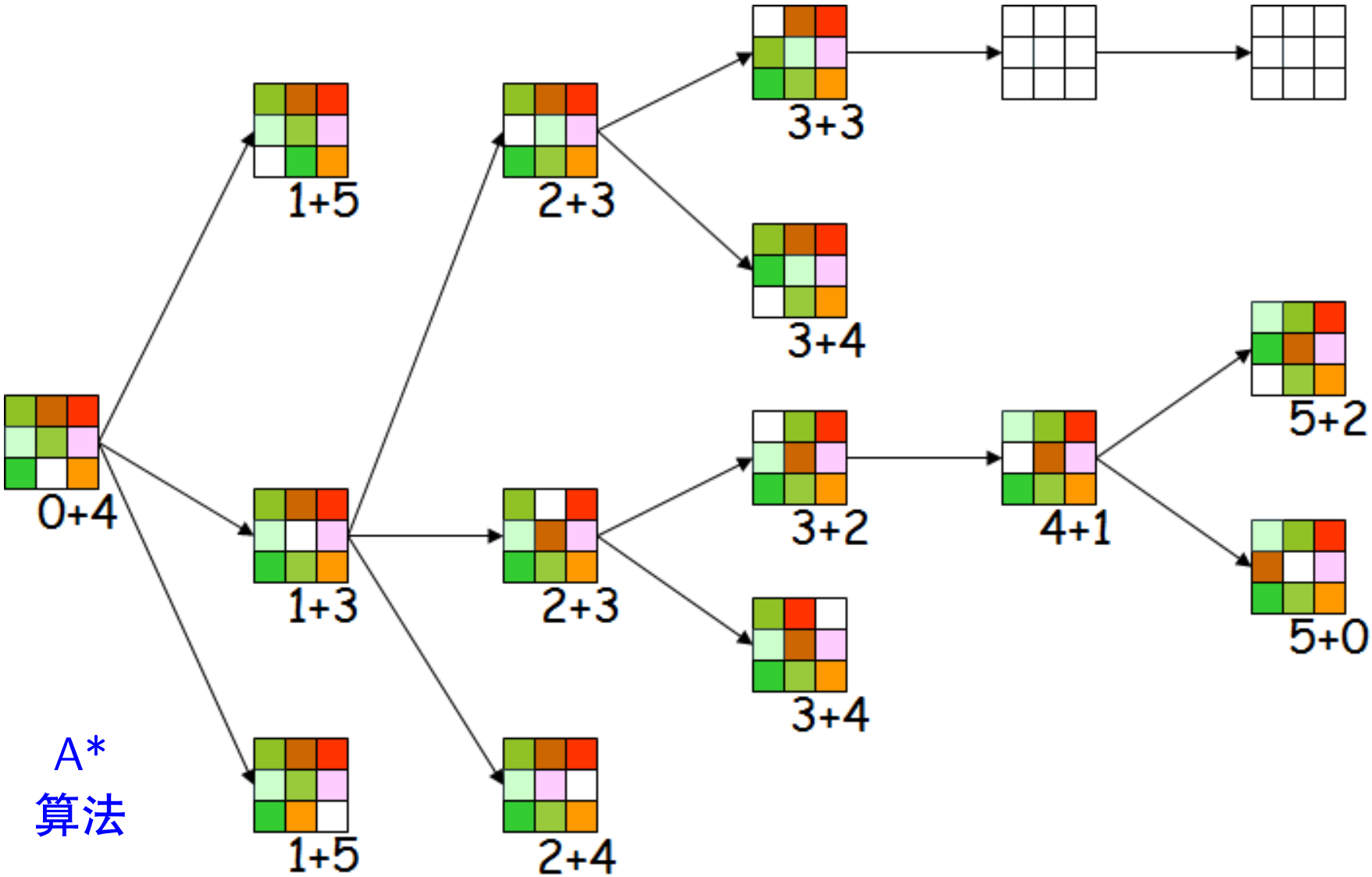
8 数码问题的搜索过程





$f(N) = g(N) + h(N), h(N) =$ 错误放置的格子数

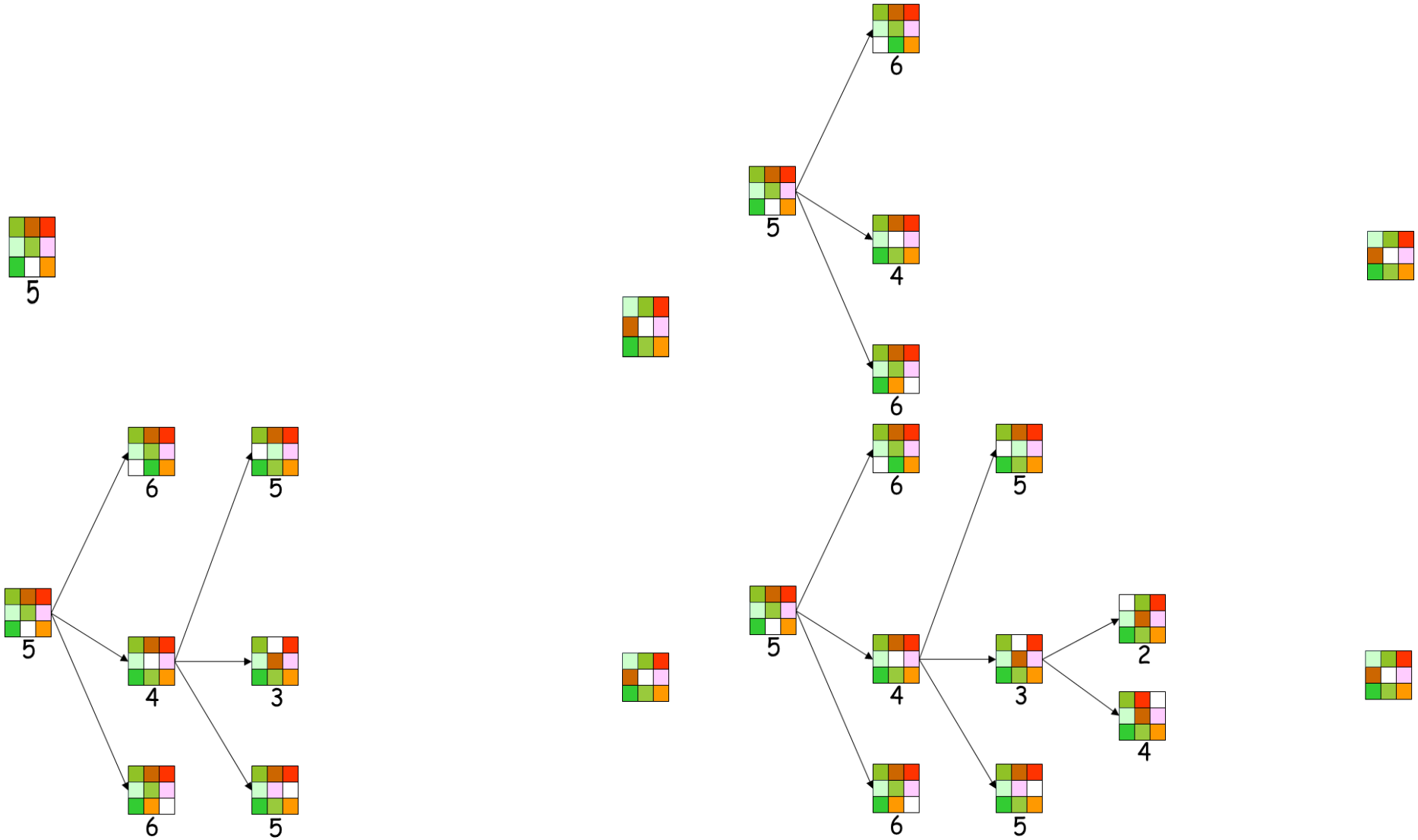
启发式函数：应用到搜索过程



A*
算法

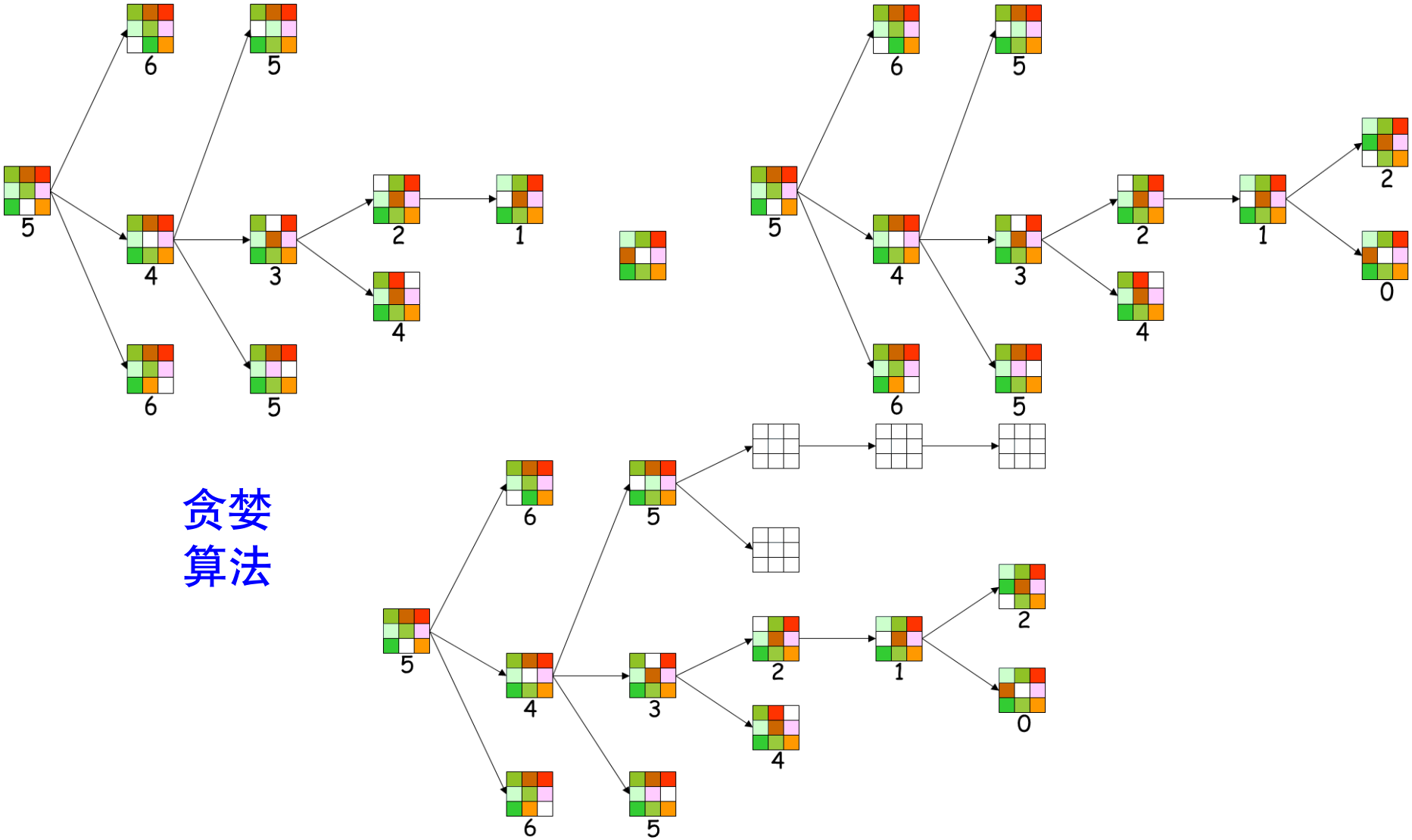
$f(N) = g(N) + h_1(N), h_1(N) =$ 错误放置的格子数

8 数码问题的搜索过程



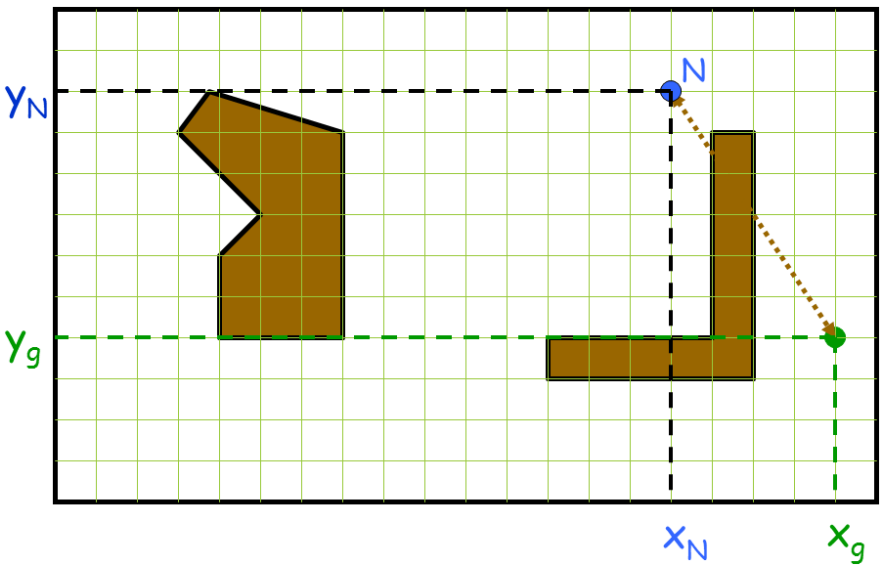
$f(N) = h(N) =$ 所有数字到其正确位置的 Manhattan 距离之和

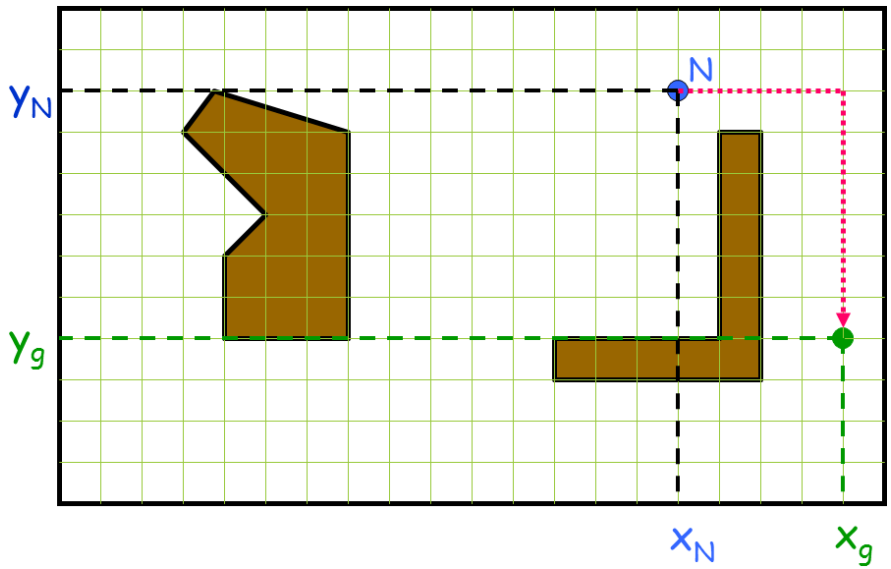
8 数码问题的搜索过程



$f(N) = h(N) =$ 所有数字到其正确位置的 Manhattan 距离之和

启发式函数：路径规划问题

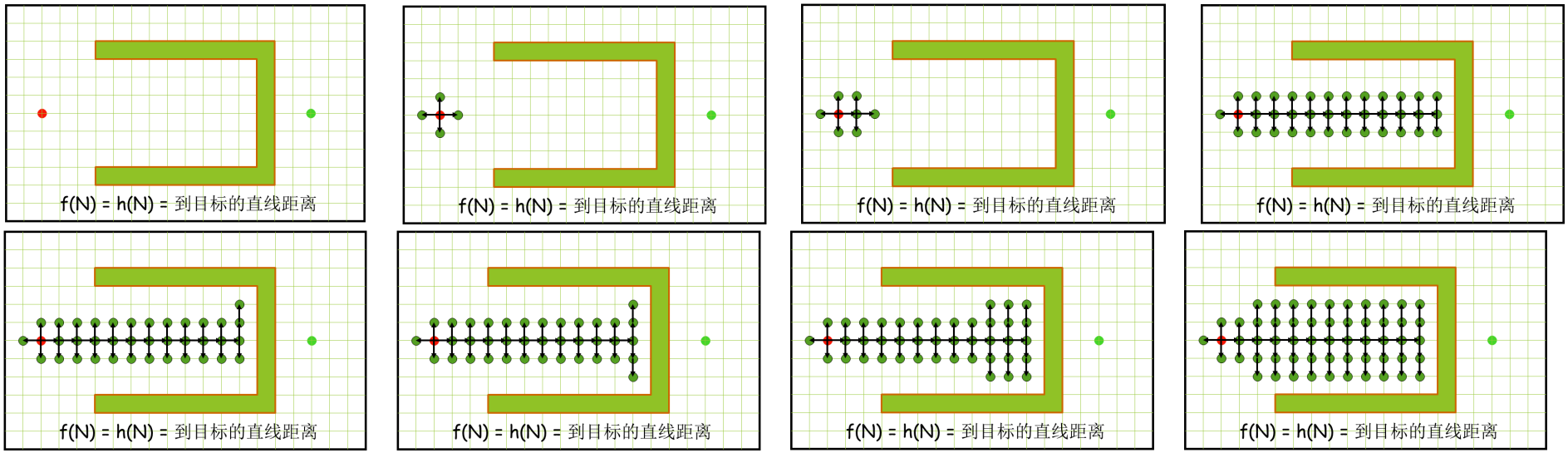




路径规划问题的启发式函数：如上图，g 为目标状态

- Euclidean distance：$h_1(N) = \sqrt{(x_N - x_g)^2 + (y_n - y_g)^2}$
- Manhattan distance：$h_2(N) = |x_N - x_g| + |y_n - y_g|$

启发式函数：路径规划问题



启发式函数：$f(N) = h(N) =$ 到目标的直线距离

- 最佳优先搜索存在的局部最小问题
- 引导搜索进入错误的方向
- 降低了搜索效率

启发式函数的设计

基本要求

- $h(N) >= 0, h(Goal) = 0, h(N)$ 越小，离目标越近
- 更多的？

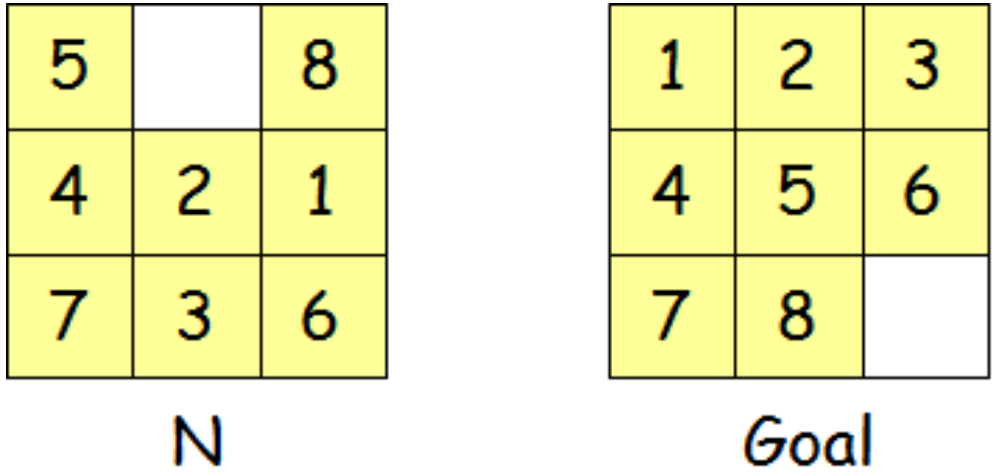
可采纳的/admissiable 启发式函数

- 假设 $h^*(N)$ 是节点 N 到目标节点的实际最优路径耗散
- 启发式函数 $h(N)$ 是“可采纳的”，当且仅当 $0 \leq h(N) \leq h^*(N)$
- 总是“乐观地”估计路径耗散!!!

定义“可采纳的”启发式函数的理由和方法

- 松弛问题：放宽问题的限制（约束），减少行动限制，获得更好的解，原问题的解仍在松弛问题的可行域中。
- 用松弛问题来构造启发式函数是最常用的技术
- 加强问题：增加问题限制，把原来可行的路径（解）给剪枝掉，可能无解；

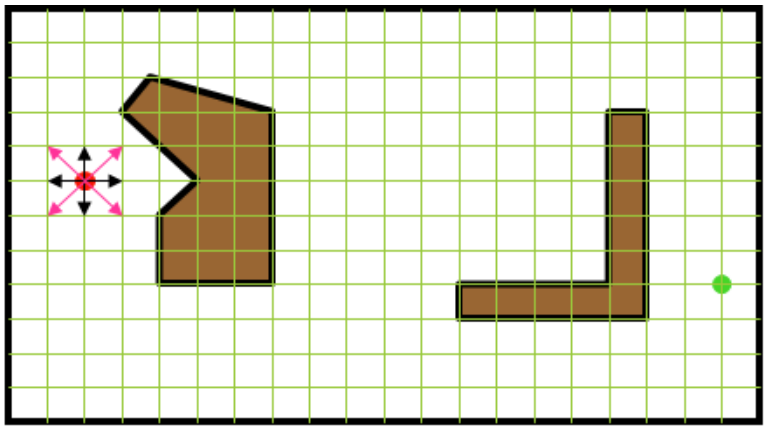
可采纳启发式函数：例子



数码问题，如上图所示，三种启发式函数的设计如下：

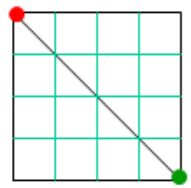
- $h_1(N) =$ 错误放置的格子数 $= 6$ 可采纳的
- $h_2(N) =$ 所有数字到其正确位置的 Manhattan 距离之和 $= 2+3+0+1+3+0+3+1 = 13$ 可采纳的
- $h_3(N) =$ 逆序数之和 $= n5 + n8 + n4 + n2 + n1 + n7 + n3 + n6 = 4+6+3+1+0+2+0+0 = 16$ 不可采纳的。反证法：找一个违背可采纳定义的状态

可采纳启发式函数：例子



水平/垂直移动一格，路径耗散为1
对角线移动一格，路径耗散为$\sqrt{2}$

$h^*(I) = 4\sqrt{2}$
$h_2(I) = 8$

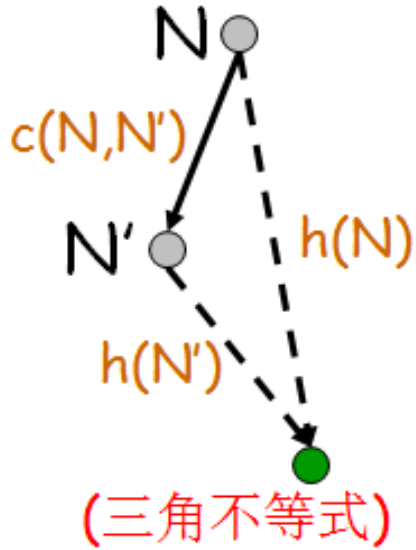


允许沿对角线移动，则是不可采纳的

路径规划问题，如上图所示，启发式函数设计如下：

- Euclidean distance：$h_1(N) = \sqrt{(x_N - x_g)^2 + (y_n - y_g)^2}$，可采纳的
- Manhattan distance：$h_2(N) = |x_N - x_g| + |y_n - y_g|$，不允许沿对角线移动，则是可采纳的；否则是不可采纳的

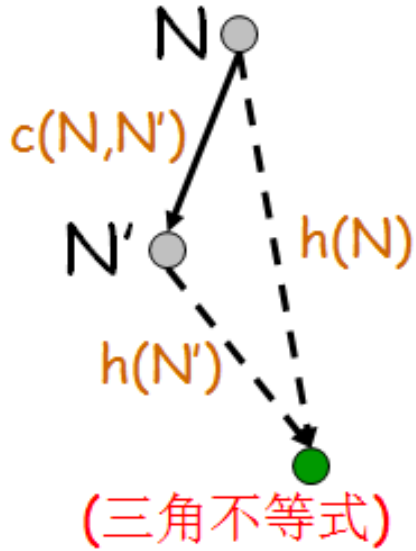
一致的/单调的启发式函数



对一个可采纳的启发式函数 h

- 若它对所有节点都满足三角不等式，即 $h(N) \leq c(N, N') + h(N')$，其中 N' 是 N 的后继节点，则 h 是一致的或单调的。
- $c(N, N')$ 是节点 N 到 N' 的单步路径耗散。

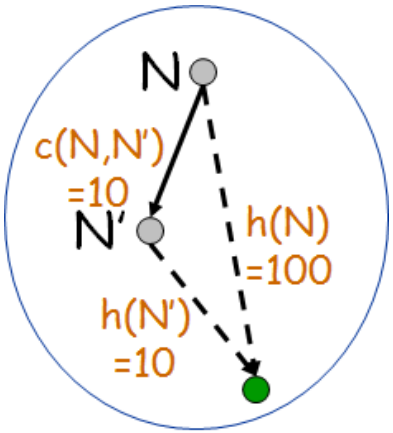
一致的/单调的启发式函数



性质和理解：一致的/单调的启发式函数

- $h(N) \leq h^*(N) \leq c(N, N') + h^*(N')$
- $h(N) - c(N, N') \leq h^*(N')$
- $h(N) - c(N, N') \leq h(N') \leq h^*(N')$
- 随着搜索的深度越来越深，对深处节点估计的启发式函数值越来越准确!!!

一致的/单调的启发式函数：例子



不三角不等式

不满足三角不等式，不是一致的启发式函数

5		8
4	2	1
7	3	6

N

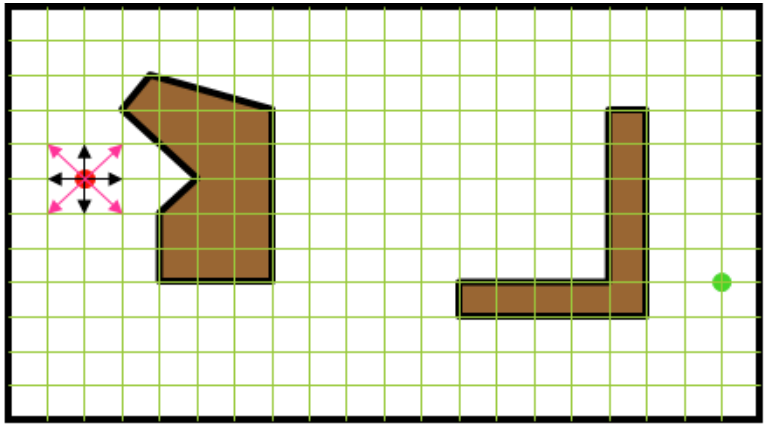
1	2	3
4	5	6
7	8	

Goal

数码问题

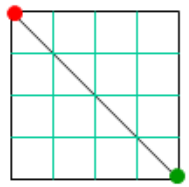
- $h_1(N) =$ 错误放置的格子数 $= 6$, 可采纳的，一致的
- $h_2(N) =$
  所有数字到其正确位置的 Manhattan 距离之和 $=$
  $2+3+0+1+3+0+3+1 = 13$,可采纳的，一致的

可采纳启发式函数：例子



水平/垂直移动一格，路径耗散为1
对角线移动一格，路径耗散为$\sqrt{2}$

$h^*(I) = 4\sqrt{2}$
$h_2(I) = 8$



允许沿对角线移动，则是不可采纳的

路径规划问题，如上图所示，启发式函数设计如下：

- Euclidean distance：$h_1(N) = \sqrt{(x_N - x_g)^2 + (y_n - y_g)^2}$，可采纳的，一致的
- Manhattan distance：$h_2(N) = |x_N - x_g| + |y_n - y_g|$，不允许沿对角线移动，则是可采纳的，一致的；否则是不可采纳的，不一致的

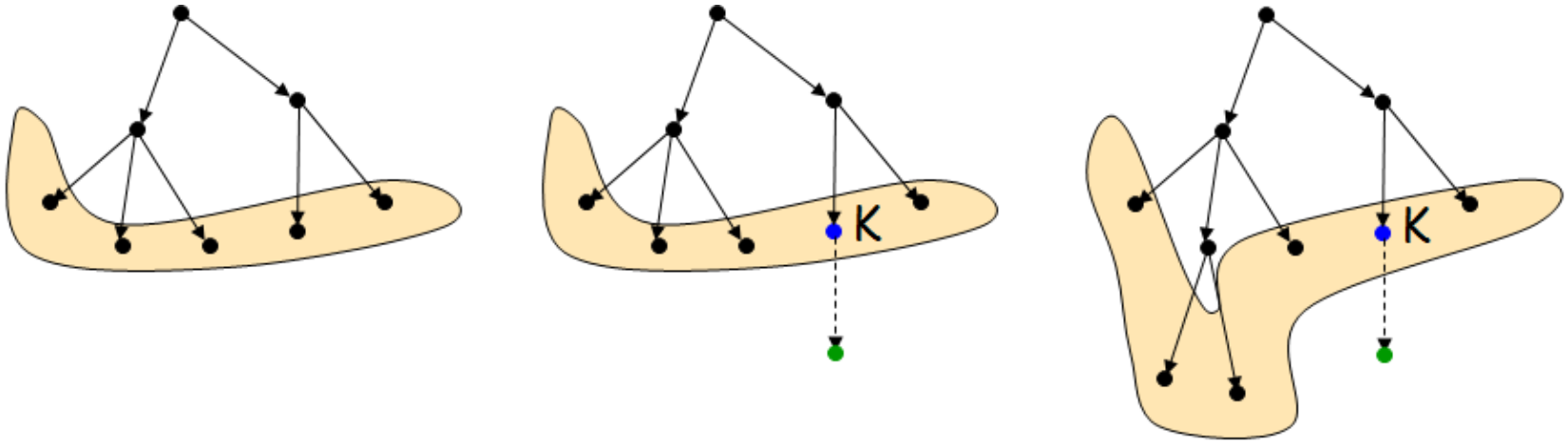
$A*$ 算法

AI 中最著名的搜索算法

- $f(N) = g(N) + h(N)$, 其中
- $g(N) =$ 从初始节点到 N 的路径耗散
- $h(N)$: 从 N 到目标节点的路径耗散，可采纳的启发式函数

从 $A*$ 算法中的启发式函数设计，学习如何设计启发式函数

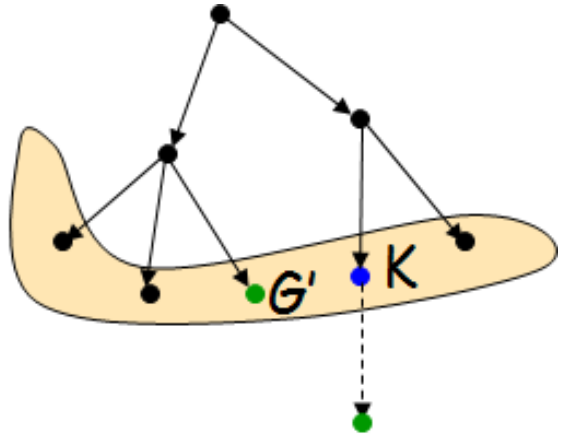
$A*$ 算法性质 1：完备性



证明：完备性（若 $A*$ 算法结束，问题有解，则一定会返回一个解）

- 如图所示
- 未扩展节点集合 FRINGE 中任意节点 N 满足 $f(N) = g(N) + h(N) \geq g(N) \geq d(N) \times \epsilon$, 其中 $d(N)$ 是节点 N 的深度
- 只要 $A*$ 算法没结束，在 FRINGE 中至少有一个节点 K 属于解路径
- 节点扩展会使得路径变长，K 将最终被扩展，除非在这之前找到一个到达目标节点的其他路径。
- 条件：状态被重复访问时，节点不被丢弃

$A*$ 算法性质 2：最优性



证明：最优性（$A*$ 选择某个目标节点扩展，则到此目标节点的路径一定是最优的）

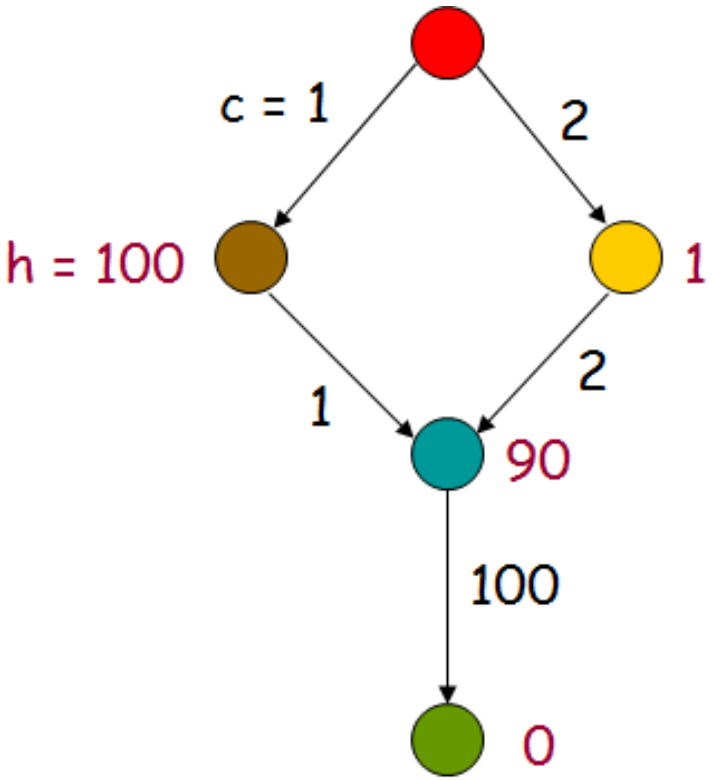
- 如上图所示
- C^* = 最优解的路径耗散
- G'：未扩展节点集合中“非最佳”目标节点（为什么只要考虑目标节点？）$f(G') = g(G') + h(G') = g(G') > C^*$
- 未扩展节点集合中的节点 K 位于最优解的路径上：$f(K) = g(K) + h(K) \leq C^*$
- 所以，G' 不会被选择扩展

$A*$ 算法：无解时

问题无解时

- 若状态空间无限或允许状态重复访问，则 $A*$ 算法的搜索不会停止；
- 求解实际问题时，通常给一个停止时间/time limit，当停止时间达到时，算法停止运行；
- 因停止时间耗完而停止的 $A*$ 算法，无法判断其是否有解或无解，也无法说明更多的搜索时间可以得到解。

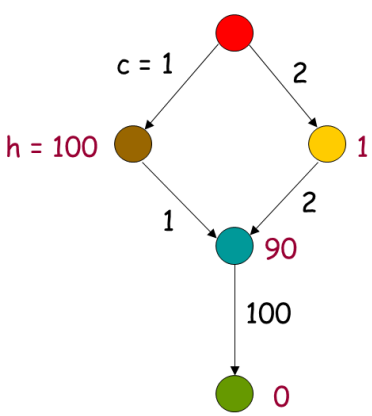
$A*$ 状态的可重复访问

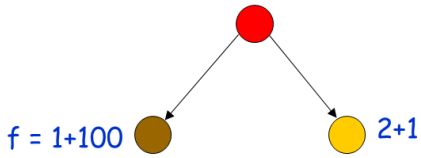


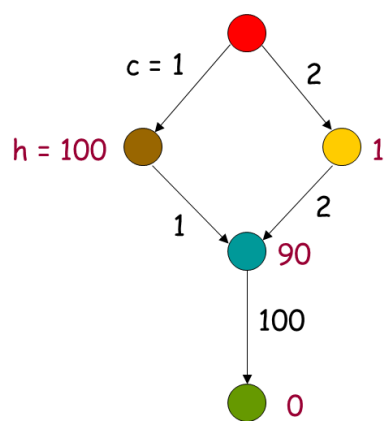
状态图说明

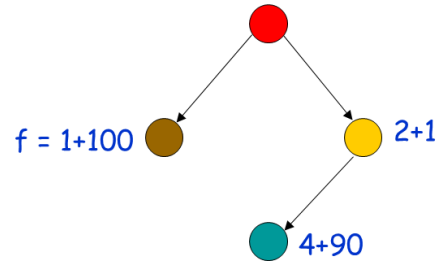
- 如左图
- h 是一个可采纳的启发式函数，每个节点的 h 值（估计值）标记在节点附近；
- 每条边标记了路径耗散 c 值；
- 从红色状态节点找一条路径到绿色状态节点。

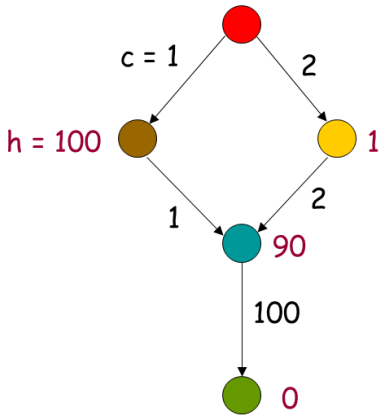
$A*$ 状态的可重复访问

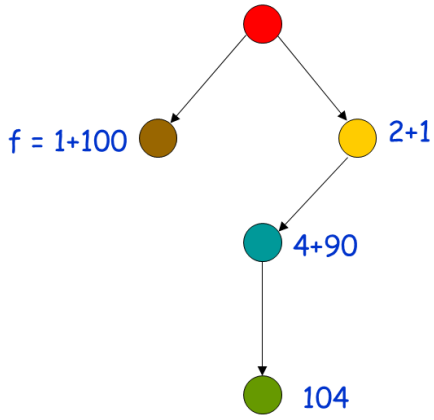


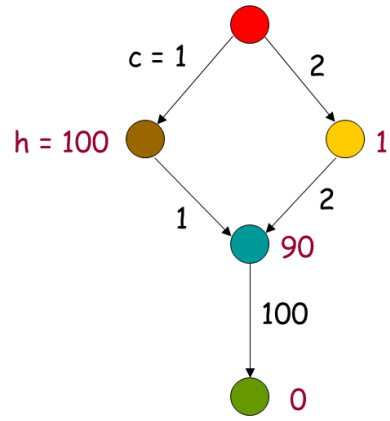


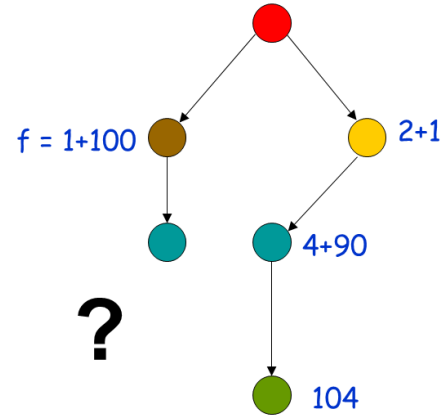








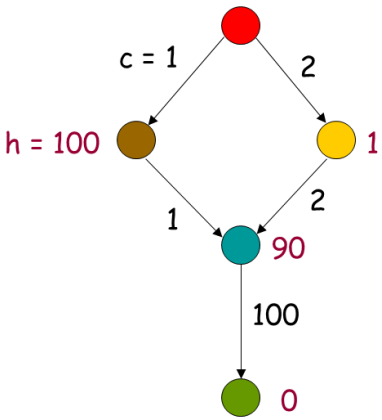


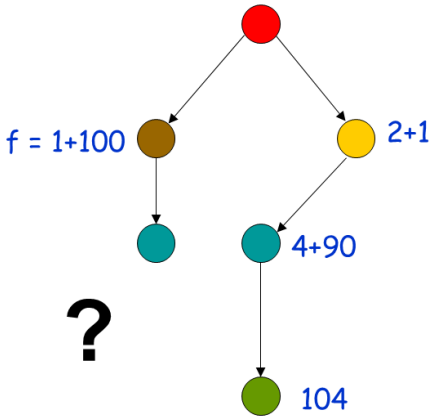


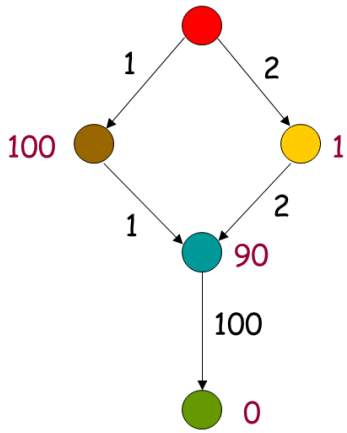
解释说明

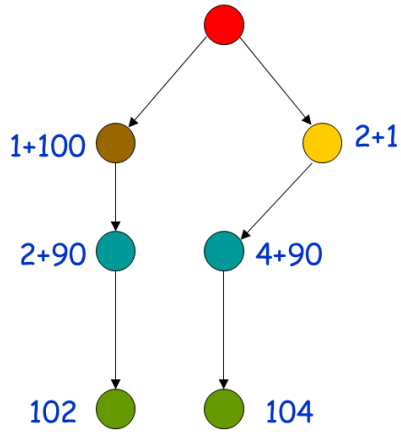
- 蓝色节点被访问后，若丢弃该状态，会发生什么事情？
- 次优解（红-黄-蓝-绿），路径耗散 104

$A*$ 状态的可重复访问





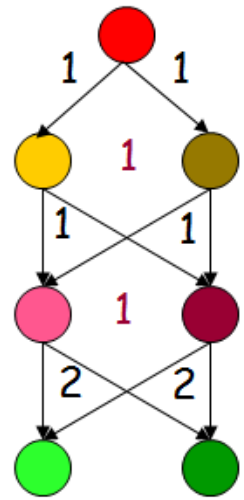




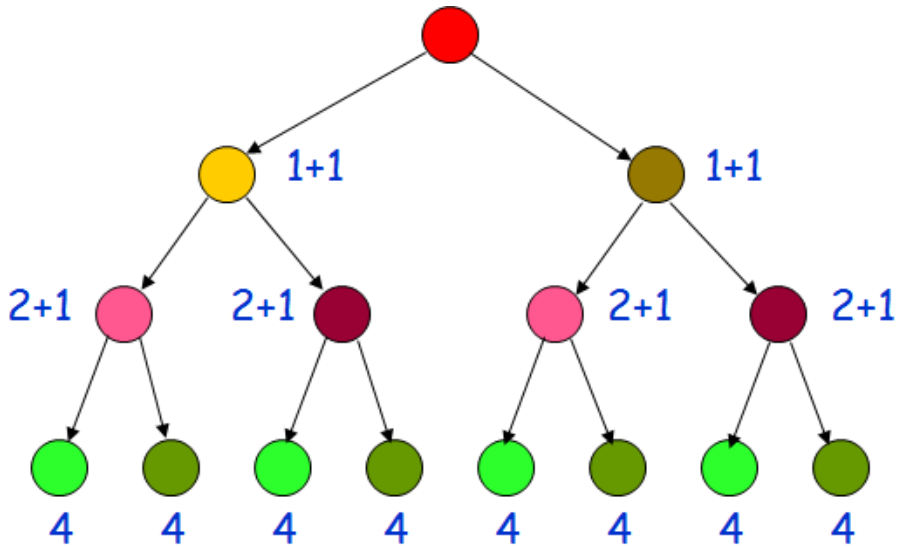
解释说明

- 若不丢弃访问过的状态，运行状态重复访问
- 我们可以得到最优解（红-褐-蓝-绿），路径耗散 102
- WHY？付出什么代价了？

再议图搜索和树搜索



2n+1 states



$O(2^n)$ nodes

图搜索：避免状态重复访问

- 状态有限时，是完备的
- 但不保证解是最优的

树搜索：允许状态重复访问

- 保证获得最优解
- 无解时可能永远停不下来

状态重复访问

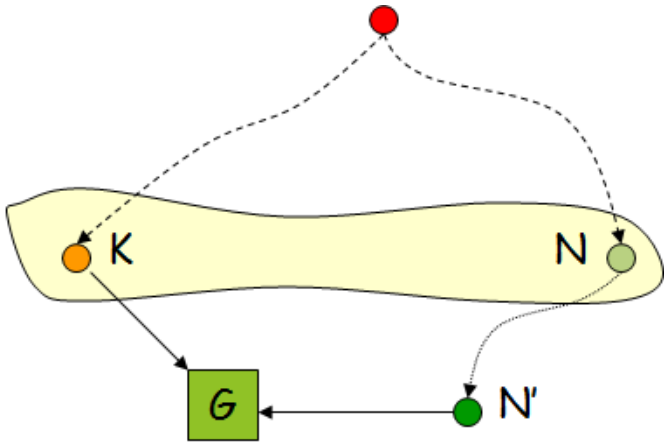
一个重要的事实

- 丢弃重复访问状态的节点，如果到该节点的新路径的耗散 $g(N)$ 比以前（访问该状态）的路径耗散更大

一致的/单调的启发式函数

- 来自上述重要事实
- 虽然采用一致启发式函数的搜索树的节点仍可能是指数增加的
- 但实际应用中，能有效地避免许多重复访问状态的节点扩展。

$A*$ 算法性质 3



从第二次开始重复扩展的状态总是不如第一次扩展

证明：对一致的 h，$A*$ 算法扩展一个状态节点时，到该状态的路径一定是最优的

- 一致性意味着单调性：(考虑 N 及其后继 N')
  $f(N) = g(N) + h(N) \leq g(N) + c(N, N') + h(N') = f(N')$
- 如上图，K 被选择进行扩展，我们要证明此时路径到 K 是最优的，即 $g(K)$ 最小。考虑在未扩展节点集合中存在一个其他节点 N，经 N 到 K，K 的状态此时扩展为节点 N'，存在一条路径，那么有：（N' 和 K 是同一个状态不同的节点表示）$f(N') \geq f(N) \geq f(K)$ 以及 $h(N') = h(K)$ 所以，$g(N') \geq g(K)$

$A*$ 中一致的启发式函数

处理状态的重复访问

- 节点被扩展，则状态进入 CLOSED 表
- 当一个新节点 N 产生了
  - 若 N 表示的状态在 CLOSED 表中，则丢弃节点 N
  - 若 N 表示的状态不在 CLOSED 表中，但是在未扩展节点集合 FRINGE 中（不妨设为 N'），则去掉 $f(N), f(N)$ 中较大的节点，等价于去掉 $g(N)$ 和 $g(N)$ 中较大的节点

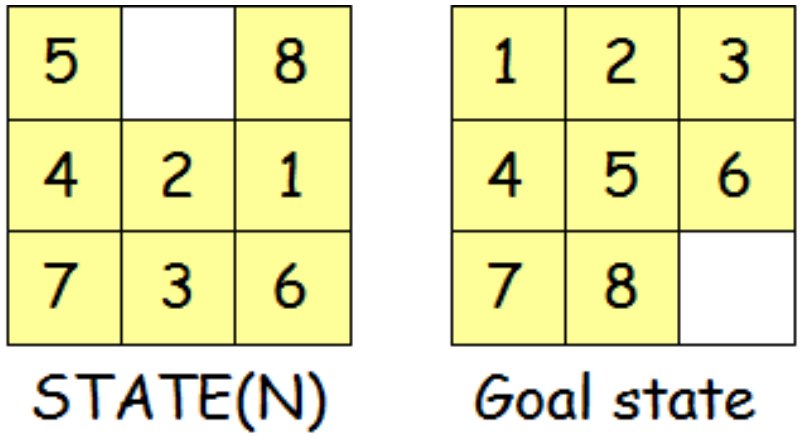
$A*$ 中一致的启发式函数

特殊的一致启发式函数：$h \equiv 0$

- 一致的，当然也是可采纳的
- 等价于单步路径耗散相同
- $A*$ 退化为宽度优先搜索，代价一致搜索

为 $A*$ 设计什么样的启发式函数更好？

评价启发式函数的准确性



可采纳的启发式函数 h_1, h_2 对任何节点，$h_1 \leq h_2$，则称 h_2 比 h_1 准确

- 如上图
- $h_1(N) =$ 错误放置的格子数目
- $h_2(N) =$ 每个数字到对应目标位置的 Manhattan 距离
- h_2 比 h_1 更准确/精确/更富含信息

$A*$ 算法性质 4

解释说明

- 当解存在时，较精确启发式函数导致的被扩展节点集合包括在“不精确”启发式函数导致的被扩展节点集合中，除了 f 值相同且等于最优解的路径耗散的那些节点.

证明：精确的启发式函数扩展的节点更少一些

- 任何 $f(N) < C^*$ 的节点都将会被扩展（在获得最优解之前）。可用绘制等 $g(N)$ 值线的方式来逐步扩展初始状态为核心的等值线系统，在最优解路径耗散 C^* 围成的等值线包括了所有 $f(N) < C^*$ 的节点。（完备性容易由此被证明）
- 所以由 $h_1(N) \leq h_2(N)$ 可知，在找到最优解之前，h_2 扩展的节点，h_1 都会进行扩展
- 除了最后达到最优解时，可能获得的是不同的最优目标节点！

不精确的启发式函数会访问更多的节点！

启发式函数的经验评估

	搜索代价			有效分支因子		
d	IDS	A*(h_1)	A*(h_2)	IDS	A*(h_1)	A*(h_2)
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
4	112	13	12	2.87	1.48	1.45
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
8	6384	39	25	2.80	1.33	1.24
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
14	–	539	113	–	1.44	1.23
16	–	1301	211	–	1.45	1.25
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
20	–	7276	676	–	1.47	1.27
22	–	18094	1219	–	1.48	1.28
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

有效分支因子 b^*

- b^* 可以度量启发式函数的有效性
- 通过隐函数来定义：$n = b^* + (b^*)^2 + ... + (b^*)^d$，其中 n 是被扩展的节点数目，d 是解的深度
- 如上图，8 数码问题，考虑无信息的迭代深入搜索、h1 和 h2，随机产生 1200 个 instances
- 被扩展节点数目 n
  - $d = 12, h1 \to 227, h2 \to 73$
  - $d = 24, h1 \to 39135, h2 \to 1641$

设计好的启发式函数

经验总结

- 基本思路：求解原问题的松弛问题，获得灵感
- 例如 8 数码问题
  - h_1 的设计：假设错了数字，可以一次就放到正确位置，忽略其它所有因素
  - h_2 的设计：假设数字可以水平和垂直任意移动，忽略移动目标位置是否被占据
  - 更复杂有效的启发式函数设计：假设数字可以水平和垂直移动，使得 1，2，3，4 移动到目标位置，忽略 5，6，7，8 的阻挡，计算移动次数 $d1$；使得 5，6，7，8 移动到目标位置，忽略 1，2，3，4 的阻挡，计算移动次数 $d2$；$h = d1 + d2$。(产生大约 3024 个状态节点)
- 其他方法：从经验中学习，归纳学习，不同启发式函数的集成等

$A*$ 算法设计的目标

目标：精确的、一致的启发式函数

- 保证了完备性、最优性，不需要重复访问同一个状态
- 实际上，问题并没有解决。问题规模大时，因为时空要求都是解长度的指数函数
- 算法时间限制及其设置
- 其它实用的，不可采纳的启发式函数，不能保证最优性和完备性，但是能快速获得最优解或近似最优解

$A*$ 算法的改进

迭代深入 $A*$ 算法：$IDA*$

- 思想：设置 f 的阈值，超过 f 的阈值，节点不再扩展；迭代执行 $A*$，降低 $A*$ 算法对内存的需求
- 要求：一致的启发式函数

算法思想

- 初始化 f 的阈值 t 为 $f(N0)$
- 重复执行下述两步：
  - 执行深度优先搜索，扩展 $f(N) <= t$ 的节点 N
  - 重新设置 t 为未扩展节点中 f 的最小值

评价 $IDA*$

优点

- 完备的、最优的
- 比 $A*$ 要求的内存少
- 避免了未扩展节点集合的排序开销

不足

- 无法充分利用内存，用的内存太少，两次迭代之间只保留阈值 t
- 无法避免重复访问不在路径上的节点

$IDA*$ 改进为 $SMA*$

- $IDA*$ 的改进：把内存用光，不能保存节点了，丢掉保存的一个高耗散，最旧的节点，再插入新的节点，这个算法称为：$SMA*$