第 2 讲 IMU 传感器

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 7 月 7 日

目录

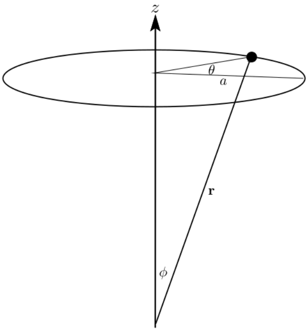
Section 1

旋转运动学

线速度与角速度

粒子在坐标系中 $z = h$ 中的平面做圆周运动，坐标为: $\mathbf{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, h)^\top$
对坐标求导得:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= (-a\dot{\theta}\sin\theta, a\dot{\theta}\cos\theta, 0)^\top \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ h \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}
\end{aligned}
\tag{1}
$$



其中 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{z}$, $|\dot{\theta}|$ 是角速度大小。
对(1)求取模，得:

$$
|\dot{\mathbf{r}}| = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}|\sin\phi = a|\dot{\theta}|
$$

旋转坐标系下的运动学

质量块在 body 坐标系下的坐标为:

$$\mathbf{r}_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$$

旋转到惯性系下有:

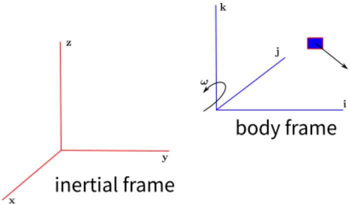
$$\boldsymbol{r}_I(t) = x_1(t)\boldsymbol{i} + x_2(t)\boldsymbol{j} + x_3(t)\boldsymbol{k} = \mathbf{R}_{IB}\mathbf{r}_B$$

简写为: $\mathbf{r}_I = x_i\mathbf{e}_i$,对时间求导有:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_I &= \mathbf{R}_{IB}\dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{R}}_{IB}\mathbf{r}_B \\ &= \mathbf{R}_{IB}\dot{\mathbf{r}}_B + [\mathbf{R}_{IB}\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{r}_I \\ &= \mathbf{R}_{IB}\mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_I\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_I \equiv \mathbf{R}_{IB}\mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_I \Leftrightarrow \mathbf{R}_{IB}\mathbf{v}_B \equiv \mathbf{v}_I - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_I \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_{IB}\boldsymbol{\omega}_b$,表示 body 坐标系的角速度在 I 系下的表示。



旋转坐标系下的运动学

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

补充：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{IB}\mathbf{r}_B &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}_{IB}\exp([\boldsymbol{\omega}_{BB'}\Delta t]^\wedge)\mathbf{r}_B - \mathbf{R}_{IB}\mathbf{r}_B}{\Delta t} \\ &\approx \mathbf{R}_{IB}[\boldsymbol{\omega}_{BB'}]_\times \mathbf{r}_B \\ &= [\mathbf{R}_{IB}\boldsymbol{\omega}_{BB'}]_\times \mathbf{R}_{IB}\mathbf{r}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_I \end{aligned} \tag{3}$$

对速度求导得到：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{R}_{IB}\dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\mathbf{R}}_{IB}\mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_I + [\dot{\mathbf{R}}_{IB}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{R}_{IB}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_\times \mathbf{r}_I \\ &= \mathbf{R}_{IB}\dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\mathbf{R}}_{IB}\mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_I) + [\mathbf{R}_{IB}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_\times \mathbf{r}_I \\ &= \mathbf{R}_{IB}\mathbf{a}_B + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_I) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_I \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_I - \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\text{科氏力}} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_I}_{\text{欧拉力}} - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_I \times \mathbf{r}_I)}_{\text{离心力}}$$

其中，$\mathbf{v} = \mathbf{R}_{IB}\mathbf{v}_B$，$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{IB}\mathbf{a}_B$，表示物体在 body 下的速度或加速度在 I 系下的表示。

在旋转坐标系下观察，运动的物体（运动方向和旋转轴不为同一个轴时）会受到科氏力的作用。

定义清楚问题

咦，我们这是要干嘛呢？
惯性坐标系，机器人坐标系，机器人位移和姿态，机器人角速度，加速度…

Section 2

IMU 测量模型及运动模型

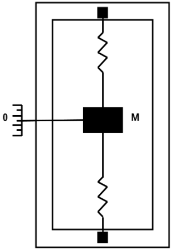
IMU 测量模型及运动模型

MEMS 加速度计工作原理

- 测量原理可以用一个简单的质量块 + 弹簧 + 指示计来表示
- 加速度计测量值 $\mathbf{a}_m$ 为弹簧拉力对应的加速度，

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{f}}{m} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \tag{5}$$

  $\mathbf{f}$ 弹簧拉力，$\mathbf{a}$ 物体在惯性系下的加速度，$\mathbf{g}$ 重力加速度
- MEMS 加速度计利用电容或者电阻桥来等原理来测量 $\mathbf{a}_m$



加速度计测量原理

- 东北天坐标系 (ENU):

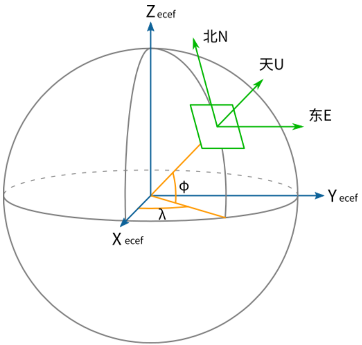
$$\mathbf{g} = (0, 0, -9.81)^\top$$

- 假设 IMU 坐标系就是 ENU 坐标系，$R_{IB} = \mathbf{I}$，静止时有

$$\mathbf{a} = 0$$
$$\mathbf{a}_m = -\mathbf{g}$$

自由落体时有

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}$$
$$\mathbf{a}_m = 0$$



陀螺仪测量原理

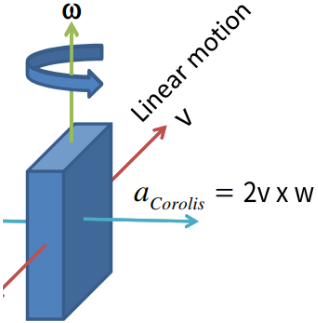
深蓝学院 shenlanxueyuan.com

陀螺工作原理

- 陀螺仪主要用来测量物体的旋转角速度，按测量原理分有振动陀螺，光纤陀螺等。
- 低端 MEMS 陀螺上一般采用振动陀螺原理，通过测量 Coriolis force 来间接得到角速度。

陀螺仪测量原理

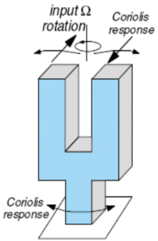
- 在旋转坐标系中，运动的物体受到科氏力作用
- MEMS 陀螺仪：一个主动运动轴 + 一个敏感轴

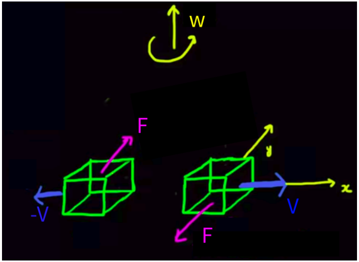


音叉振动陀螺原理

音叉振动陀螺

- 叉子的中间为旋转轴，叉子左右两个质量块，做方向相反的正弦运动，质量块受到的科氏力方向相反。
- **但是为啥要用这么做呢？一个质量块不行么**





思考

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

陀螺仪的 G-sensitivity

实际上，两个质量块不可能完全一致，也就是说陀螺仪的测量可能会受到外部加速度的影响，即常称的 G-sensitivity。

疑问

诶，加速度计不需要考虑科氏力的影响吗？

Section 3

IMU 误差模型

IMU 误差模型

误差分类

- 加速度计和陀螺仪的误差可以分为：确定性误差，随机误差。
- 确定性误差可以事先标定确定，包括：bias，scale ...
- 随机误差通常假设噪声服从高斯分布，包括：高斯白噪声，bias 随机游走...

确定性误差

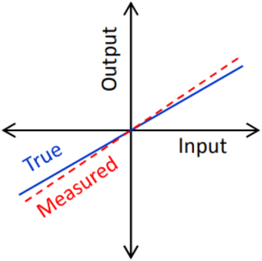
Bias

理论上，当没有外部作用时，IMU 传感器的输出应该为 0。但是，实际数据存在一个偏置 b。加速度计 bias 对位姿估计的影响：

$$\mathbf{v}_{err} = \mathbf{b}_a t, \quad \mathbf{p}_{err} = \frac{1}{2}\mathbf{b}_a t^2$$

Scale

scale 可以看成是实际数值和传感器输出值之间的比值。



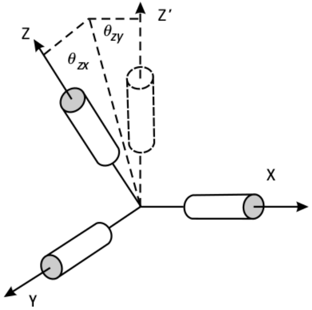
IMU 误差模型

Nonorthogonality/Misalignment Errors

多轴 IMU 传感器制作的时候，由于制作工艺的问题，会使得 xyz 轴可能不垂直，如下图所示。

scale + Misalignment：

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$



IMU 误差模型

其他确定性误差

- Run-to-Run Bias/Scale Factor
- In Run (Stability) Bias/Scale Factor
- Temperature-Dependent Bias/Scale Factor
- ...

六面法标定加速度

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

六面法标定加速度 bias 和 scale factor

六面法是指将加速度计的 3 个轴分别朝上或者朝下水平放置一段时间，采集 6 个面的数据完成标定。

如果各个轴都是正交的，那很容易得到 bias 和 scale：

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{l_f^{up} + l_f^{down}}{2} \\
S &= \frac{l_f^{up} - l_f^{down}}{2 \cdot g}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中，l 为加速度计某个轴的测量值，g 为当地的重力加速度。

六面法标定加速度

考虑轴间误差的时候，实际加速度和测量值之间的关系为：

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ax} \\ b_{ay} \\ b_{az} \end{bmatrix} \tag{7}$$

水平静止放置 6 面的时候，加速度的理论值为

$$a_1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

对应的测量值矩阵 $\mathbf{L}$ ：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 & \mathbf{l}_4 & \mathbf{l}_5 & \mathbf{l}_6 \end{bmatrix}$$

利用最小二乘就能够把 12 个变量求出来。

六面法标定陀螺仪

六面法标定陀螺仪 bias 和 scale factor

和加速度计六面法不同的是，陀螺仪的真实值由高精度转台提供，这里的 6 面是指各个轴顺时针和逆时针旋转。

温度相关的参数标定

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

标定方法

- 目的：这个标定的主要目的是对传感器估计的 bias 和 scale 进行温度补偿，获取不同温度时 bias 和 scale 的值，绘制成曲线。

两种标定方法：

- soak method：控制恒温室的温度值，然后读取传感器数值进行标定。
- ramp method：记录一段时间内线性升温和降温时传感器的数据来进行标定。

IMU 随机误差

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

高斯白噪声

IMU 数据连续时间上受到一个均值为 0，方差为 σ，各时刻之间相互独立的高斯过程 $n(t)$：

$$\begin{aligned} E[n(t)] &\equiv 0 \\ E\left[n\left(t_1\right) n\left(t_2\right)\right] &= \sigma^2 \delta\left(t_1-t_2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\delta()$ 表示狄拉克函数。

IMU 随机误差

实际上，IMU 传感器获取的数据为离散采样，离散和连续高斯白噪声的方差之间存在如下转换关系：

$$
\begin{aligned}
n_d[k] &\triangleq n\left(t_0+\Delta t\right) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau) dt \\
E\left(n_d[k]^2\right) &= E\left(\frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau) n(t) d\tau dt\right) \\
&= E\left(\frac{\sigma^2}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau) d\tau dt\right) \\
&= E\left(\frac{\sigma^2}{\Delta t}\right)
\end{aligned} \tag{9}
$$

IMU 误差模型

即

$$n_d[k] = \sigma_d w[k] \tag{10}$$

其中，

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \sigma_d &= \sigma \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \tag{11}$$

也就是说高斯白噪声的连续时间到离散时间之间差一个 $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$，$\sqrt{\Delta t}$ 是传感器的采样时间。

IMU 误差模型

Bias 随机游走

通常用维纳过程 (wiener process) 来建模 bias 随时间连续变化的过程，离散时间下称之为随机游走。

$$\dot{b}(t) = n(t) = \sigma_b w(t) \tag{12}$$

其中 w 是方差为 1 的白噪声

IMU 误差模型

同样，离散和连续之间的转换：

$$
\begin{aligned}
b_d[k] &\triangleq b\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t) d t \\
E\left(\left(b_d[k]-b_d[k-1]\right)^2\right) &= E\left(\int_{t_0+\Delta t}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t) n(\tau) d \tau d t\right) \\
&= E\left(\sigma_b^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau) d \tau d t\right) \\
&= E\left(\sigma_b^2 \Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

即:

$$
b_d[k]=b_d[k-1]+\sigma_{b d} w[k] \tag{14}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
& w[k] \sim \mathcal{N}(0,1) \\
& \sigma_{b d}=\sigma_b \sqrt{\Delta t}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

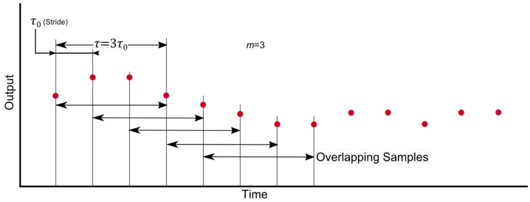
bias 随机游走的噪声方差从连续时间到离散之间需要乘以 $\sqrt{\Delta t}$.

IMU 随机误差的标定

艾伦方差标定 random walk noise

Allan 方差法是 20 世纪 60 年代由美国国家标准局的 David Allan 提出的，它是一种基于时域的分析方法。
具体的流程如下：

1. 保持传感器绝对静止获取数据。
2. 对数据进行分段，设定时间段的时长，如下图所示。

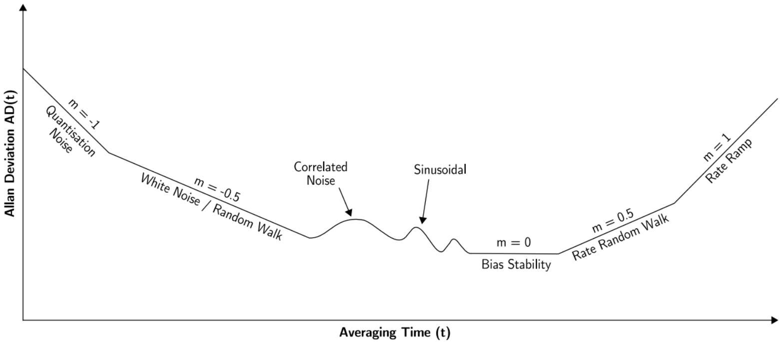


3. 将传感器数据按照时间段进行平均。
4. 计算方差，绘制艾伦曲线。

IMU 随机误差的标定

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

得到的艾伦曲线如下图所示[1]：



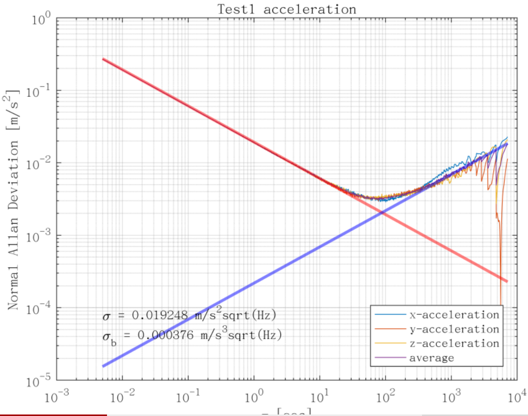
[1] Allan Variance. “Noise Analysis for Gyroscopes”. In: *Freescale Semiconductor Document Number: AN5087 Application Note Rev. 0* 2 (2015).

Allan 方差的验证

仿真数据

制作一个仿真 IMU 数据集。设定，加速度的高斯白噪声设定为 0.019，陀螺仪的高斯白噪声为 0.015. 加速度 bias 的随机游走噪声设定为 $5e^{-4}$，陀螺仪的 bias 随机游走噪声设定为 $5e^{-5}$。

加速度的艾伦方差曲线如下：



加速度计数学模型

加速度计的误差模型

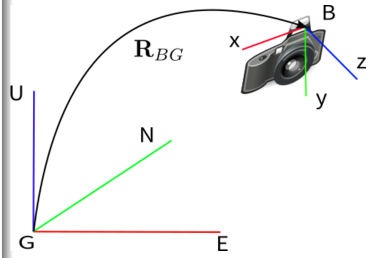
导航系 G 为东北天，$\mathbf{g}^G = (0, 0, -9.81)^\top$。理论测量值为：

$$\mathbf{a}_m^B = \mathbf{R}_{BG}\left(\mathbf{a}^G - \mathbf{g}^G\right) \tag{16}$$

如果考虑高斯白噪声，bias，以及尺度因子，则为：

$$\mathbf{a}_m^B = \mathbf{S}_a\mathbf{R}_{BG}\left(\mathbf{a}^G - \mathbf{g}^G\right) + \mathbf{n}_a + \mathbf{b}_a \tag{17}$$

通常假设尺度因子为单位矩阵。



陀螺仪数学模型

陀螺仪的误差模型

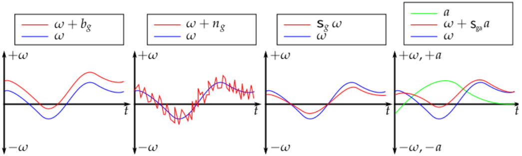
考虑尺度因子，高斯白噪声，以及 bias，陀螺仪的误差模型如下：

$$\boldsymbol{\omega}_m^B = \mathbf{S}_g \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{n}_g + \mathbf{b}_g \tag{18}$$

低端传感器，考虑加速度对陀螺仪的影响，即 g-灵敏度：

$$\boldsymbol{\omega}_m^B = \mathbf{S}_g \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{s}_{ga} \mathbf{a}^B + \mathbf{n}_g + \mathbf{b}_g \tag{19}$$

陀螺仪受四种噪声的影响分别如下图所示[2]：



[2] MA Shelley. "Monocular visual inertial odometry on a mobile device". In: *Master's thesis, Institut für Informatik, TU München, Germany* (2014).

Section 4

运动模型离散时间处理

VIO 中的 IMU 模型

忽略 scale 的影响，只考虑白噪声和 bias 随机游走：

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b = \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{b}^g + \mathbf{n}^g \tag{20}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^b = \mathbf{q}_{bw}(\mathbf{a}^w + \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}^a + \mathbf{n}^a \tag{21}$$

上标 g 表示 gyro，a 表示 acc，w 表示在世界坐标系 world，b 表示 imu 机体坐标系 body。IMU 的真实值为 $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}$，测量值为 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{a}}$。

P(ose),V(elocity),Q(uaternion) 对时间的导数可写成：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{wb_t} &= \mathbf{v}_t^w \\
\dot{\mathbf{v}}_t^w &= \mathbf{a}_t^w \\
\dot{\mathbf{q}}_{wb_t} &= \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

连续时间下 IMU 运动模型

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

根据上面的导数关系，可以从第 i 时刻的 PVQ，通过对 IMU 的测量值进行积分，得到第 j 时刻的 PVQ:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t + \int\int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w)\delta t^2 \\
\mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w + \int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w)\delta t \\
\mathbf{q}_{wb_j} &= \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
\end{aligned} \tag{23}
$$

运动模型的离散积分——欧拉法

使用欧拉法，即两个相邻时刻 k 到 k+1 的位姿是用第 k 时刻的测量值 $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$ 来计算。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{p}_{wb_k} + \mathbf{v}_k^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\Delta t^2 \\
\mathbf{v}_{k+1}^w &= \mathbf{v}_k^w + \mathbf{a}\Delta t \\
\mathbf{q}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{q}_{wb_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{24}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{q}_{wb_k}\left(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a\right) - \mathbf{g}^w \\
\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g
\end{aligned} \tag{25}
$$

运动模型的离散积分——中值法

使用 mid-point 方法，即两个相邻时刻 k 到 k+1 的位姿是用两个时刻的测量值 $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$ 的平均值来计算。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{p}_{wb_k} + \mathbf{v}_k^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\Delta t^2 \\
\mathbf{v}_{k+1}^w &= \mathbf{v}_k^w + \mathbf{a}\Delta t \\
\mathbf{q}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{q}_{wb_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{26}
$$

其中，

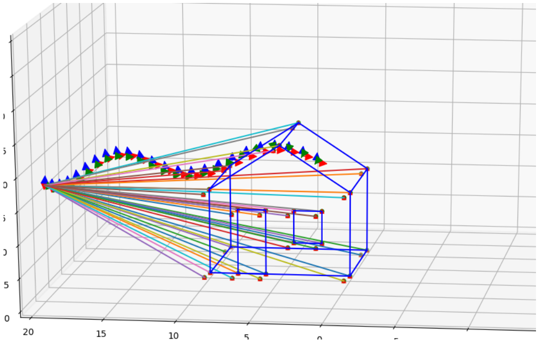
$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_{wb_k}\left(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a\right) - \mathbf{g}^w + \mathbf{q}_{wb_{k+1}}\left(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a\right) - \mathbf{g}^w\right] \\
\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g\right) + \left(\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g\right)\right]
\end{aligned} \tag{27}
$$

Section 5

IMU 数据仿真

仿真

- 思路 1：指定轨迹方程，求一阶导得到速度，角速度，求二阶导得到加速度。
- 思路 2：已有 pose 轨迹，不知道方程，利用 B-Spline 产生 IMU 数据。



旋转基础知识

旋转积分的几种方式

四元数的形式：

$$\mathbf{q}_{wb'} = \mathbf{q}_{wb} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Delta t \end{bmatrix} \tag{28}$$

SO3 形式：

$$\mathbf{R}_{wb'} = \mathbf{R}_{wb} \exp\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta t\right) \tag{29}$$

欧拉角形式：

$$\boldsymbol{\vartheta} wb' = \boldsymbol{\vartheta}_{wb} + E_{wb} \cdot \boldsymbol{\omega}\Delta t \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{\vartheta} = (\psi_{roll}, \theta_{pitch}, \phi_{yaw})^{\top}$，$E_{wb}$ 表示将 IMU body 坐标系下的角速度转换成欧拉角速度[a]。

[a] MIT. *Kinematics Of Moving Frames*. URL: https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-154-maneuvering-and-control-of-surface-and-underwater-vehicles-13-49-fall-2004/lecture-notes/lec1.pdf (visited on 2004).

欧拉角

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

问题

inertial frame 下的一个点旋转到 body 坐标系，用欧拉角如何表示？仿真数据中旋转矩阵用欧拉角来表示很方便。

step 1. 绕着惯性坐标系的 z 轴旋转，得到新的坐标系 b^1。

$$\mathbf{x}_b^1 = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^0 = R(\phi)\mathbf{x}_b^0$$

step 2. 绕着新坐标系 b^1 的 y 轴旋转得到坐标系 b^2

$$\mathbf{x}_b^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^1 = R(\theta)\mathbf{x}_b^1$$

欧拉角

step 3. 绕着新坐标系 b^2 的 x 轴旋转得到坐标系 b^3, b^3 就是我们的 body 坐标系。

$$\mathbf{x}_b^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^2 = R(\psi)\mathbf{x}_b^2$$

综合起来，得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b &= R(\psi)R(\theta)R(\phi)\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\phi & c\theta s\phi & -s\theta \\ -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & s\psi c\theta \\ s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\theta \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= R(\phi, \theta, \psi)\mathbf{x} \end{aligned}$$

欧拉角速度和 body 角速度的转换

问题

inertial frame 下的欧拉角速度怎么转到 body 坐标系下呢？

euler rate to body rate:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= R(\psi)R(\theta)\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{d\phi}{dt} \end{array}\right\} + R(\psi)\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \frac{d\psi}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi\cos\theta \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} \frac{d\psi}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{31}
$$

公式 (31) 取逆就能得到，body rate to euler rate 的变换：

$$
\frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\psi\tan\theta & \cos\psi\tan\theta \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi/\cos\theta & \cos\psi/\cos\theta \end{bmatrix}\vec{\omega} \tag{32}
$$

仿真代码

IMU 仿真

- 定义 imu body 坐标系的位置方程, 椭圆, 圆形等等.
- 定义 imu body 坐标系在惯性系下的欧拉角方程.
- 求导得到角速度, 加速度
- 设置噪声参数, 利用 imu 的模型产生数据。

介绍下仿真代码:

`https://github.com/HeYijia/vio_data_simulation`

习题

基础作业，必做

1. 设置 IMU 仿真代码中的不同的参数，生成 Allen 方差标定曲线。
   allan 方差工具：
   https://github.com/gaowenliang/imu_utils
   https://github.com/rpng/kalibr_allan
   ...
2. 将 IMU 仿真代码中的欧拉积分替换成中值积分。

提升作业，选做

阅读从已有轨迹生成 imu 数据的论文，撰写总结推导：

- 2013 年 BMVC, Steven Lovegrove ,Spline Fusion: A continuous-timerepresentation for visual-inertial fusion withapplication to rolling shutter cameras.

谢谢