习题整理

罗雁天

September 5, 2019

1. X, Y **相互独立，均服从参数为** λ **的指数分布，求** $E[(X-Y)^2|X<Y]$. (15 **分**)

解. 根据定义有：

$$E[(X-Y)^2|X<Y] = \frac{\iint_{x<y}(x-y)^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{x<y} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{1}$$

首先计算分母如下：

$$\begin{aligned}
\iint_{x<y} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{x<y} p(x)p(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x<y} \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \iint_{x<y} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty}\int_0^{y} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\left(-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda y}-1\right)\right)\mathrm{d}y \\
&= -\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\left(e^{-\lambda y}-1\right)\mathrm{d}y \\
&= -\lambda \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda y}\,\mathrm{d}y + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2}+1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2}$$

然后计算分子如下：

$$
\begin{aligned}
\iint_{x<y} (x-y)^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{x<y} (x-y)^2 p(x)p(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x<y} (x-y)^2 \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{y} (x-y)^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \int_0^{y} (x-y)^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
& \text{令} t = x - y \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \int_{-y}^{0} t^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \left(\frac{1}{\lambda} y^2 - \frac{2}{\lambda^2} y - \frac{2}{\lambda^3} e^{-\lambda y} + \frac{2}{\lambda^3} \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} y^2 (\lambda e^{-\lambda y})\,\mathrm{d}y - \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} y (\lambda e^{-\lambda y})\,\mathrm{d}y \\
&\quad - \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\lambda e^{-2\lambda y})\,\mathrm{d}y + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\lambda e^{-\lambda y})\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

所以：

$$E[(X-Y)^2 | X < Y] = \frac{2}{\lambda^2} \tag{4}$$

□

2. 考虑如下两个场景：

(a) 不断抛掷骰子并读数，直到连续三次得到结果 1，抛掷才能结束；

(b) 不断抛掷硬币并读数，直到出现如下序列时，抛掷才能结束；

$$\text{正}, \underbrace{\text{反}, \text{反}, \cdots, \text{反}}_{k}$$

假设从开始抛掷起到结束为止抛掷次数为 X，求 $E(X)$. (第一问 10 分，第二问 10 分)

解. (a) 设从开始抛掷起到连续出现 k 次 1 时抛掷次数为 X_k，给定 X_{k-1} 的情况下，我们考虑之后的一次抛掷，如果抛出 1，那么游戏结束，此时 $X_k = X_{k-1} + 1$，如果抛出其他数字，那么相当于之前的努力都白费了，需要重新抛掷，此时 $X_k = X_{k-1} + 1 + X_k$. 因此我们有：

$$\begin{aligned} E(X_k) &= E(E(X_k|X_{k-1})) \\ &= E\left[\frac{1}{6}(X_{k-1}+1) + \frac{5}{6}(X_{k-1}+1+X_k)\right] \\ &= E\left[X_{k-1}+1+\frac{5}{6}X_k\right] \\ &= \frac{5}{6}E(X_k) + E(X_{k-1}) + 1 \end{aligned} \tag{5}$$

所以我们可以得到一个递推式：

$$E(X_k) = 6E(X_{k-1}) + 6 \tag{6}$$

考虑 $k = 1$ 的情况，出现一次 1 就停止，即是几何分布，所以 $E(X_1) = 6$. 所以求解上述递推式可以得到：

$$E(X_k) = \frac{6^{k+1}-6}{5} \tag{7}$$

所以连续出现 3 次的就结束时：

$$E(X) = E(X_3) = \frac{6^4-6}{5} = 258 \tag{8}$$

(b) 设出现式 (9) 所表示的状态为 $S_{n+1}(n = 0, 1, \cdots, k)$，$S_0$ 表示还没有开始扔骰子的状态。设 X_n 表示给定 S_n 的条件下，游戏结束时抛掷的次数，所以我们最后只需求 $E(X_0)$

$$\text{正}, \underbrace{\text{反}, \text{反}, \cdots, \text{反}}_{n} \tag{9}$$

- 当 $n = 0$ 时，我们考虑第一次投掷，如果扔出正面朝上，那么 $X_0 = X_1 + 1$，反之，如果扔出反面朝上，我们则需要重新投掷，那么 $X_0 = X_0 + 1$，因此：

$$\begin{aligned} E(X_0) = E(E(X_0|X_1)) &= E\left(\frac{1}{2}(X_1+1) + \frac{1}{2}(X_0+1)\right) \\ &= \frac{1}{2}E(X_1+1) + \frac{1}{2}E(X_0+1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}E(X_0) + \frac{1}{2}E(X_1) \end{aligned} \tag{10}$$

- 当 $n = 1, 2, \cdots, k$ 时，考虑下一次投掷，如果扔出反面朝上，那么 $X_n = X_{n+1} + 1$，反之，我们便回到了 S_1 的状态，有 $X_n = X_1 + 1$，因此：

$$\begin{aligned} E(X_n) = E(E(X_n|X_{n+1})) &= E\left(\frac{1}{2}(X_{n+1}+1) + \frac{1}{2}(X_1+1)\right) \\ &= \frac{1}{2}E(X_{n+1}+1) + \frac{1}{2}E(X_1+1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}E(X_{n+1}) + \frac{1}{2}E(X_1) \end{aligned} \tag{11}$$

- 当 $n = k + 1$ 时，此时已经达到了游戏结束的条件，因此 $E(X_{k+1}) = 0$

综上所述，我们从 E_{k+1} 开始向上递推，可以求出 $E(X_0) = 2^{k+1}$，即 $E(X) = 2^{k+1}$

$\square$

3. **在一根长度为 1 的木棍上随机取一点 A，若 A 点左边一段的长度小于 $\frac{1}{3}$，则在 A 点左边随机取一点 B，否则在 A 右边随机取一点 B，计算 A、B 两点间距离的均值和方差。**

解. 以木棍左端点为坐标原点，设 A 点坐标为 a，用随机变量 X 来表示 B 点可取的范围的长度，即

$$X = \begin{cases} a, & a < \dfrac{1}{3} \\ 1-a, & a \geq \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{12}$$

由于 $a \sim U(0,1)$，所以

$$E(X) = \int_0^{1/3} 1 \cdot a \mathrm{d}a + \int_{1/3}^{1} 1 \cdot (1-a) \mathrm{d}a = \frac{5}{18} \tag{13}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{1/3} 1 \cdot a^2 \mathrm{d}a + \int_{1/3}^{1} 1 \cdot (1-a)^2 \mathrm{d}a = \frac{11}{81} \tag{14}$$

设随机变量 Y 表示 A、B 两点间的距离，则 X 固定时，$Y \sim U(0, X)$，

$$E(Y) = E\left[E(Y \mid X)\right] = E\left(\int_0^X y \cdot \frac{1}{X} \mathrm{d}y\right) = E\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{5}{36} \tag{15}$$

$$E\left(Y^2\right) = E\left[E\left(Y^2 \mid X\right)\right] = E\left(\int_0^X y^2 \cdot \frac{1}{X} \mathrm{d}y\right) = E\left(\frac{X^2}{3}\right) = \frac{11}{243} \tag{16}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E\left(Y^2\right) - \left[E(Y)\right]^2 = \frac{101}{3888} \tag{17}$$

所以，A、B 两点间距离的均值为 $\frac{5}{36}$，方差为 $\frac{101}{3888}$。 □

4. 设 $\{X_k\}$ 为独立同分布的随机变量序列，其分布函数为 $F_X(x)$，设随机变量 $N(y)$ 满足

$$N(y) = \min\{k : X_k > y\}$$

请计算

$$\lim_{y\to\infty} P\{N(y) \geq E[N(y)]\}$$

解. 由题意知

$$\begin{aligned} P\{N(y) = k\} &= P\{X_1 \leq y, X_2 \leq y, \cdots, X_{k-1} \leq y, X_k > y\} \\ &= [F_X(y)]^{k-1}[1 - F_X(y)] \end{aligned} \tag{18}$$

即 $N(y) \sim Ge(p)$，其中 $p = 1 - F_X(y)$，所以 $E[N(y)] = \dfrac{1}{p}$，则

$$\begin{aligned} P\{N(y) \geq E[N(y)]\} &= \sum_{k=\lfloor 1/p\rfloor+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\ &= p \sum_{k=\lfloor 1/p\rfloor+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \\ &= p \cdot \frac{(1-p)^{\lfloor \frac{1}{p} \rfloor}}{p} \\ &= (1-p)^{\lfloor \frac{1}{p} \rfloor} \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整。当 $y \longrightarrow \infty$ 时，$p \longrightarrow 0$，所以

$$\lim_{y\to\infty} P\{N(y) \geq E[N(y)]\} = \lim_{p\to 0} (1-p)^{\lfloor \frac{1}{p} \rfloor} \tag{20}$$

而由于

$$(1-p)^{\frac{1}{p}} \leq (1-p)^{\lfloor \frac{1}{p} \rfloor} < (1-p)^{\frac{1}{p}-1} \tag{21}$$

并且

$$\lim_{p\to 0} (1-p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to 0} (1-p)^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{22}$$

因此

$$\lim_{y\to\infty} P\{N(y) \geq E[N(y)]\} = \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{23}$$

□