

习题课 3

罗雁天

May 6, 2019

1. n 对夫妇共 $2n$ 人待在一个房间内, 现从中随机挑选 m 个人走出房间, 问房间内还剩下的未被拆散的夫妇数目的均值。

解. 房间内剩下的未被拆散的夫妇数目 X 满足

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \quad C_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 对夫妇在房间} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 对夫妇不在房间} \end{cases} \quad (1)$$

则由

$$P(C_k = 1) = 1 - P(C_k = 0) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \left(1 - \frac{m}{2n}\right) \left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \quad (2)$$

得到

$$E(C_k) = 1 \times P(C_k = 1) + 0 \times P(C_k = 0) = \left(1 - \frac{m}{2n}\right) \left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \quad (3)$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\ &= n \left(1 - \frac{m}{2n}\right) \left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

□

2. 某商场发行 n 种购物券, 每一次在该商场购物, 即可获得一张种类随机选取的购物券。该商场规定, 如果能够收集齐所有的购物券, 那么就可以得到该商场的大奖。问获得大奖所需要的购物次数的期望是多少。

解. 收集齐所有的购物券所需要的购物次数 X 可以写为

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (5)$$

其中 C_k 表示在收集到 $k-1$ 种购物券的前提下, 收集到第 k 种购物券所需要的购物次数。由于手中已经有 $k-1$ 种购物券, 因此收集到新购物券的可能只有 $n-k+1$ 种, 所以 C_k 是几何分布随机变量, 参数为 $p = (n-k+1)/n$, 因此我们有:

$$E(C_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1} \quad (6)$$

所以：

$$\begin{aligned}
 E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\
 &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\
 &= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} \\
 &= n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

由微积分的知识可以知道 $E(X) \approx n \ln n$ ，可见，当 n 较大时，如果想收集到所有的购物券，则需要付出数倍于购物券数目的购物次数（以 30 张购物券为例， $\ln(30) \approx 3.4$ ）。这正是商家的精明之处。 \square

3. 司机在一年发生事故的次数满足 λ 的泊松分布，而 λ 服从参数为 μ 的指数分布，问某一司机上一年不发生事故，今年也不发生事故的概率。

解. 假设该司机在一年发生事故的次数为 X ，则有：

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \int_0^{+\infty} P(X = k | \lambda = x) f_\lambda(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \mu e^{-\mu x} dx \\
 &= \frac{\mu}{k!} \int_0^{+\infty} x^k e^{-(\mu+1)x} dx \\
 &= \frac{\mu}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+1)^{k+1}} \\
 &= \frac{\mu}{(\mu+1)^{k+1}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

因此，司机连续两年不发生事故的概率为（两年发生事故相互独立）：

$$P = \left(\frac{\mu}{\mu+1} \right)^2 \tag{9}$$

\square

4. 设 R 罐中有 n 个红球， H 罐中有 n 个黑球。每次操作都从两个罐中各随机取出一球，交换放置（ R 罐中取出的放入 H 罐， H 罐中取出的放入 R 罐），问 k 次操作后， R 罐中的红球数目的均值。

解. k 次操作后 R 罐的红球数目满足：

$$X = R_1 + R_2 + \cdots + R_n, \quad R_t = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 个红球仍在 } R \text{ 罐} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 对夫妇不在 } R \text{ 罐} \end{cases} \tag{10}$$

对于操作开始前 R 罐中原有的每一个红球而言，其经过 k 次操作仍回到 R 罐意味着被选中的次数为偶数（从来未被选中意味着选中次数为 0，仍为偶数）。所以：

$$P(R_t = 1) = 1 - P(R_t = 0) = \sum_{m=2i} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-m} \quad (11)$$

根据二项式定理，我们可以计算出偶数次项的和可以计算如下：

$$\sum_{m=2i} \binom{k}{m} a^m b^{k-m} = \frac{1}{2} \left((b+a)^k + (b-a)^k \right) \quad (12)$$

所以：

$$\begin{aligned} P(R_t = 1) &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \right) \end{aligned} \quad (13)$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(R_1 + R_2 + \cdots + R_n) \\ &= E(R_1) + E(R_2) + \cdots + E(R_n) \\ &= \frac{n}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \right) \end{aligned} \quad (14)$$

□

5. X, Y 独立都服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ ，求 $E[(X - 3Y)^2 | 2X + Y = 3]$

解. 根据定义有：

$$E[(X - 3Y)^2 | 2X + Y = 3] = \frac{\iint_{2x+y=3} (x - 3y)^2 p(x, y) \, dx \, dy}{\iint_{2x+y=3} p(x, y) \, dx \, dy} \quad (15)$$

首先计算分母如下：

$$\begin{aligned}
\iint_{2x+y=3} p(x, y) dx dy &= \iint_{2x+y=3} p(x)p(y) dx dy \\
&= \iint_{2x+y=3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dx dy \\
&= \iint_{2x+y=3} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy \\
&\text{令 } x = 1+t, y = 1-2t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(1+t)^2 + (1-2t)^2}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{5t^2 - 2t + 2}{2}\right] dt \\
&\text{令 } x = t - \frac{1}{5} \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{5x^2}{2}\right] dt \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10\pi}}
\end{aligned} \tag{16}$$

然后计算分子如下：

$$\begin{aligned}
\iint_{2x+y=3} (x-3y)^2 p(x, y) dx dy &= \iint_{2x+y=3} (x-3y)^2 p(x, y) dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{2x+y=3} (x-3y)^2 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy \\
&\text{令 } x = 1+t, y = 1-2t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (7t-2)^2 \exp\left[-\frac{5t^2 - 2t + 2}{2}\right] dt \\
&\text{令 } x = t - \frac{1}{5} \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (7x - \frac{3}{5})^2 \exp\left[-\frac{5x^2}{2}\right] dt \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \times \frac{254}{25}
\end{aligned} \tag{17}$$

所以：

$$E[(X-3Y)^2 | 2X+Y=3] = \frac{254}{25} \tag{18}$$

□

6. 设有 k 种不同的优惠券，每次收集到第 i 种优惠券的概率为 p_i ， $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ，且每次收集之间是相互独立的。如果收集了 n 张优惠券，那么优惠券的种类的期望是多少？

解. 优惠券的种类数 X 满足:

$$X = H_1 + H_2 + \cdots + H_k, \quad H_i = \begin{cases} 1 & \text{收集到第 } i \text{ 种优惠券} \\ 0 & \text{没有收集到第 } i \text{ 种优惠券} \end{cases} \quad (19)$$

那么我们有:

$$P(H_i = 1) = 1 - P(H_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n \quad (20)$$

所以:

$$E(H_i) = 1 \times P(H_i = 1) + 0 \times P(H_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n \quad (21)$$

从而:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(H_1 + H_2 + \cdots + H_k) \\ &= E(H_1) + E(H_2) + \cdots + E(H_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (1 - (1 - p_i)^n) \end{aligned} \quad (22)$$

□

7. 假设 λ 服从以 α, β 为参数的 Gamma 分布, 即 $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ 。在给定 λ 的条件下, x 服从以 λ 为参数的 Poisson 的分布, 即 $x|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 。试问, 在给定 x 的条件下, λ 的分布是什么?

解. 由于 $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 我们有:

$$p(\lambda) = \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \quad (23)$$

又由于 $x|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$, 因而:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (24)$$

所以, 根据贝叶斯公式:

$$\begin{aligned}
p(\lambda|x) &= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)} \\
&= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{\int_0^{+\infty} p(x|\lambda)p(\lambda)d\lambda} \\
&= \frac{\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}}{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)} e^{-(\beta+1)\lambda}}{\int_0^{+\infty} \lambda^{(\alpha+x-1)} e^{-(\beta+1)\lambda} d\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)} e^{-(\beta+1)\lambda}}{\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\beta+1}\right)^{(\alpha+x-1)} e^{-u} d\left(\frac{u}{\beta+1}\right)} \quad (u = (\beta+1)\lambda) \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)} e^{-(\beta+1)\lambda}}{\frac{1}{(\beta+1)^{\alpha+x}} \int_0^{+\infty} u^{(\alpha+x-1)} e^{-u} du} \\
&= \frac{(\beta+1)^{\alpha+x} \lambda^{(\alpha+x-1)} e^{-(\beta+1)\lambda}}{\Gamma(\alpha+x)}
\end{aligned} \tag{25}$$

所以, $\lambda|x \sim \Gamma(\lambda|\alpha+x, \beta+1)$ □

8. 公交站起点站等可能发出 a, b 两班汽车, 其中 a 停 m 站, b 停 n 站, 车上人数服从参数为 λ 的泊松分布, 每名乘客在各站下车的概率相同, 如果该站没有乘客下车, 则公交车不停站。求一辆从起点站开出的公交车停站的期望。

解. 一辆从起点站开出的公交车停站的次数 X 的期望满足:

$$E(X) = \frac{1}{2}E(X_a) + \frac{1}{2}E(X_b) \tag{26}$$

其中, X_a 表示如果开出的是 a 车停站的次数, X_b 表示如果开出的是 b 车停站的次数。对 a 车和 b 车的讨论类似, 我们这里讨论 a 车的情况。我们有:

$$X_a = X_{a1} + X_{a2} + \cdots + X_{am}, \quad X_{at} = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 站有人下车} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 站没有人下车} \end{cases} \tag{27}$$

由于人数 K 服从参数为 λ 的泊松分布, 则有:

$$P(X_{at} = 1|K = k) = 1 - P(X_{at} = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \tag{28}$$

所以:

$$\begin{aligned}
E(X_{at}|K = k) &= 1 \times P(X_{at} = 1|K = k) + 0 \times P(X_{at} = 0|K = k) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k
\end{aligned} \tag{29}$$

因此:

$$\begin{aligned}
 E(X_{at}) &= E(E(X_{at}|K=k)) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} E(X_{at}|K=k)P(K=k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k\right) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
 &= 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}
 \end{aligned} \tag{30}$$

所以我们可以得到:

$$\begin{aligned}
 E(X_a) &= E(X_{a1} + X_{a2} + \cdots + X_{am}) \\
 &= E(X_{a1}) + E(X_{a2}) + \cdots + E(X_{am}) \\
 &= m \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)
 \end{aligned} \tag{31}$$

同理我们可以得到:

$$E(X_b) = n \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \tag{32}$$

所以:

$$E(X) = \frac{1}{2} \left(m \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right) + n \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \right) \tag{33}$$

□

9. 设随机变量 X, Y 均服从均值为 0, 方差为 1 的正态分布, 且相互独立, 试求: $E[X^2 + Y^2 | \cos(\frac{X}{Y})]$

解. 根据课后习题中的结论, 我们有:

$$X^2 + Y^2 \text{ 与 } \frac{X}{Y} \text{ 相互独立} \tag{34}$$

因此,

$$X^2 + Y^2 \text{ 与 } \cos\left(\frac{X}{Y}\right) \text{ 相互独立} \tag{35}$$

所以:

$$\begin{aligned}
 E\left[X^2 + Y^2 | \cos\left(\frac{X}{Y}\right)\right] &= E[X^2 + Y^2] \\
 &= E[X^2] + E[Y^2] \\
 &= 2
 \end{aligned} \tag{36}$$

□

10. 篮球赛时长 n 分钟, 某球员每一分钟有一次投篮机会, 投中概率为 p , 并且教练规定, 若一次投篮不中, 下一分钟不得投篮, 需将机会交给队友, 请计算一场球赛中该队员投中次数的均值

解. 该队员投中次数 X 满足

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \quad C_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 分钟投中} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 分钟未投或者未投中} \end{cases} \quad (37)$$

引入随机变量 $Y_k (k = 1, 2, \cdots, n)$:

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 分钟投了} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 分钟未投} \end{cases} \quad (38)$$

我们有:

$$\begin{aligned} P(Y_k = 1) &= P(Y_k = 1|Y_{k-1} = 1)P(Y_{k-1} = 1) + P(Y_k = 1|Y_{k-1} = 0)P(Y_{k-1} = 0) \\ &= p \times P(Y_{k-1} = 1) + 1 \times P(Y_{k-1} = 0) \\ &= p \times P(Y_{k-1} = 1) + 1 - P(Y_{k-1} = 1) \end{aligned} \quad (39)$$

由于 $P(Y_1 = 1) = 1$, 求解上述递推式我们可以得到:

$$P(Y_k = 1) = \frac{1}{2-p} [1 - (p-1)^k] \quad (40)$$

因此:

$$\begin{aligned} P(C_k = 1) &= P(C_k = 1|Y_k = 1)P(Y_k = 1) + P(C_k = 1|Y_k = 0)P(Y_k = 0) \\ &= p \times P(Y_k = 1) + 0 \times P(Y_k = 0) \\ &= \frac{p}{2-p} [1 - (p-1)^k] \end{aligned} \quad (41)$$

所以:

$$\begin{aligned} E(C_k) &= 1 \times P(C_k = 1) + 0 \times P(C_k = 0) \\ &= P(C_k = 1) \\ &= \frac{p}{2-p} [1 - (p-1)^k] \end{aligned} \quad (42)$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{p}{2-p} [1 - (p-1)^k] \\ &= \frac{np}{2-p} - \frac{p(p-1)}{(2-p)^2} + \frac{p(p-1)^{n+1}}{(2-p)^2} \end{aligned} \quad (43)$$

□

11. 设 U_1, U_2, \cdots 为一相互独立的 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量序列, 求 $E[N]$ 。其中:

$$N = \min \left\{ n : \sum_{i=1}^n U_i > 1 \right\}$$

解. 我们将得到一个更一般的结果。对于 $x \in [0, 1]$, 令:

$$N(x) = \min \left\{ n : \sum_{i=1}^n U_i > x \right\} \quad (44)$$

再令:

$$m(x) = E[N(x)] \quad (45)$$

即 $N(x)$ 是部分和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 超过 x 的最小指标 n , $m(x)$ 是 $N(x)$ 的期望值。将 U_1 作为条件, 我们有:

$$m(x) = E[E[N(x)|U_1 = y]] = \int_0^1 E[N(x)|U_1 = y] dy \quad (46)$$

对于条件期望 $E[N(x)|U_1 = y]$, 我们有:

$$E[N(x)|U_1 = y] = \begin{cases} 1, & y > x \\ 1 + m(x - y), & y \leq x \end{cases} \quad (47)$$

代入上式可得:

$$\begin{aligned} m(x) &= 1 + \int_0^x m(x - y) dy \\ &= 1 + \int_0^x m(u) du \quad (\text{做变量替换 } u = x - y) \end{aligned} \quad (48)$$

对上式两边求微分可以得到:

$$m'(x) = m(x) \quad (49)$$

求解上述微分方程可以得到:

$$m(x) = ke^x \quad (50)$$

又由于 $m(0) = 1$ 可以得到 $k = 1$, 因此:

$$m(x) = e^x \quad (51)$$

所以, 原问题 $E[N] = m(1) = e$ □

12. (平面上的随机徘徊) 设在平面坐标系的原点放一质点, 质点在平面上作如下的随机徘徊。

- 1) 每一步质点移动一个单位的距离, 且前进方向与 x 轴的夹角 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布;
- 2) 每一步质点移动一个单位的距离, 前进方向只有上、下、左、右四种情况且概率相等。

假设每秒运动一次, 以第 n 秒时质点所在位置与原点的距离为半径画圆, 请计算两种情况下圆面积的均值。

解. 用 (X_i, Y_i) 表示第 i 秒坐标的变化量,

1) 对于此问, 我们有:

$$X_i = \cos \theta_i \quad Y_i = \sin \theta_i \quad (52)$$

其中 $\theta_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为相互独立且在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。经过 n 秒之后, 质点的位置为 $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i)$, 则质点所在位置与原点距离的平方 R^2 可以计算如下:

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (X_i X_j + Y_i Y_j) \\ &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (\cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j) \end{aligned} \quad (53)$$

由于 θ_i, θ_j 相互独立并且:

$$\begin{aligned} E[\cos \theta_i] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta_i d\theta_i = 0 \\ E[\sin \theta_i] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta_i d\theta_i = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

因此, 对于圆面积 $S = \pi R^2$, 我们有:

$$E[S] = \pi E[R^2] = n\pi \quad (55)$$

2) 对于此问, 质点每一步的移动都是上、下、左、右四个方向之一, 因此我们可以得到 X_i 和 Y_i 的联合分布为如表 1 所示。

Table 1: X, Y 的联合分布

P \ Y	0	1	-1
X			
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0
-1	$\frac{1}{4}$	0	0

经过 n 秒之后, 质点的位置为 $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i)$, 则质点所在位置与原点距离的平方 R^2 可以计算如下:

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (X_i X_j + Y_i Y_j) \\ &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (X_i X_j + Y_i Y_j) \end{aligned} \quad (56)$$

下面我们计算 $E[X_i X_j]$:

$$\begin{aligned} E[X_i X_j] &= 0 \times P(X_i X_j = 0) + (-1) \times P(X_i X_j = -1) + 1 \times P(X_i X_j = 1) \\ &= 0 \times \frac{3}{4} + (-1) \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

同理我们有 $E[Y_i Y_j] = 0$, 因此因此, 对于圆面积 $S = \pi R^2$, 我们有:

$$E[S] = \pi E[R^2] = n\pi \quad (58)$$

综上所述, 两种情况下圆面积的均值均为 $n\pi$ □

13. 已知 $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 设 $Y_1 = \cos X_1, Y_2 = \cos X_2$, 试求 Y_1, Y_2 的协方差

解. 首先我们证明一个结论, 方便之后的计算. 对于任意的正态分布 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} g_X(t) &= E(e^{jtX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - \sigma^2 jtx}{\sigma^2}} dx \\ \text{令 } y &= x - \frac{\sigma^2 jt}{2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} dy \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned} \quad (59)$$

利用此结论, 计算 $E[Y_1]$ 如下:

$$\begin{aligned} E[Y_1] &= E[\cos X_1] = E\left[\frac{e^{jX_1} + e^{-jX_1}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}E[e^{jX_1}] + \frac{1}{2}E[e^{-jX_1}] \\ &= \frac{1}{2}g_{X_1}(1) + \frac{1}{2}g_{X_1}(-1) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2} \end{aligned} \quad (60)$$

同理我们可以得到 $E[Y_2]$:

$$E[Y_2] = e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2} \quad (61)$$

下面计算 $E[Y_1 Y_2]$:

$$\begin{aligned} E[Y_1 Y_2] &= E[\cos X_1 \cos X_2] \\ &= E\left[\frac{1}{2}(\cos(X_1 + X_2) + \cos(X_1 - X_2))\right] \\ &= \frac{1}{2}E[\cos(X_1 + X_2)] + \frac{1}{2}E[\cos(X_1 - X_2)] \end{aligned} \quad (62)$$

可以证明：

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2) \\ X_1 - X_2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) \end{aligned} \quad (63)$$

所以根据式 (60) 的计算方式可以得到：

$$\begin{aligned} E[\cos(X_1 + X_2)] &= e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)} \\ E[\cos(X_1 - X_2)] &= e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)} \end{aligned} \quad (64)$$

代入式 (62) 得：

$$E[Y_1 Y_2] = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)} \quad (65)$$

所以 Y_1, Y_2 的协方差为：

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= E[Y_1 Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)} - e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)} - e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \end{aligned} \quad (66)$$

□