习题课 4

闻健

May 29, 2019

1. **随机变量 X 的特征函数为 $\varphi(t)$，通过构造随机变量来证明：$|\varphi(t)|^2$ 也是特征函数。**

   解. 假设随机变量 X_1 和 X_2，分别与 X 和 $-X$ 同分布，并且相互独立，则随机变量 X_1+X_2 的特征函数为 $\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi(t)\cdot\varphi(-t)=\varphi(t)\cdot\overline{\varphi(t)}=|\varphi(t)|^2$。 □

2. **设 $\varphi(t)$ 表示独立同分布随机变量序列 $\{X_k\}$ 的特征函数，ξ 为与 $\{X_k\}$ 独立的随机变量，它的概率分布为 $P\{\xi=n\}=p_n$，其中 n 为正整数。求随机变量 $Y=\sum\limits_{k=1}^{\xi}X_k$ 的特征函数。**

   解.
$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= E\left(\mathrm{e}^{itY}\right)\\
&= E\left[E\left(\mathrm{e}^{itY}|\xi\right)\right]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}E\left[\mathrm{e}^{it(X_1+X_2+\cdots+X_n)}|\xi=n\right]P\{\xi=n\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}E\left[\mathrm{e}^{it(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right]P\{\xi=n\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi^n(t)\,p_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$
□

3. **设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，且具有相同的特征函数 $\varphi(t)=1+iat+o(t)$，其中 a 为常数。证明：$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}a$。**

   解. 相同的特征函数意味着序列 $\{X_n\}$ 服从相同的分布，且
$$
E(X_n)=\frac{\varphi'(0)}{i}=a<\infty,
\tag{2}
$$

故依据辛钦大数定律，对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\right)\right|<\varepsilon\right\}=\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-a\right|<\varepsilon\right\}=1, \tag{3}$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依概率收敛于 a。 □

4. **独立随机变量序列 $\{X_k\}$，其中 k 为正整数，服从参数为 k^r 的泊松分布。证明：当 $r<1$ 时，$\{X_k\}$ 服从大数定律。**

解. 泊松分布的方差为 $\operatorname{var}\left(X_k\right)=k^r$，当 $r<1$ 时，

$$\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^r\leq\frac{n}{n^2}n^r=n^{r-1}\longrightarrow 0, \tag{4}$$

即马尔可夫条件成立，故 $\{X_k\}$ 服从大数定律。 □

5. **航空公司为了减小损失，会对一些航班进行超售管理。假设某航班的执飞飞机共有 310 个座位，根据历史数据，该航班的乘客不能按时登机的概率为 0.03。那么如果航空公司实际售出 314 张票，求所有按时登机的乘客都有座位的概率。**

解. 设按时登机的乘客数为 Y_n，则

$$Y_n\sim b(314,0.97), E(Y_n)=304.58, \operatorname{Var}\left(Y_n\right)=9.1374. \tag{5}$$

所求概率为

$$P\left(Y_n\leq 310\right)\approx\Phi\left(\frac{310+0.5-304.58}{\sqrt{9.1374}}\right)\approx 0.9749. \tag{6}$$

□

6. **设 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 $p\,(0<p<1)$，记 X 为 n 次试验中事件 A 出现的次数。分别用切比雪夫不等式和中心极限定理估计满足**

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)}}{2}\right)>0.99$$

的 n 的值。

解. (1) 切比雪夫不等式：

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)}}{2}\right)\geq 1-\frac{\frac{\operatorname{Var}(X)}{n^2}}{\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}{2}\right)^2}=1-\frac{4}{n^2}>0.99, \tag{7}$$

所以 $n > 20$。
(2) 中心极限定理：

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}{2}\right)=P\left(\frac{\left|\frac{X}{n}-p\right|}{\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}{n}}<\frac{n}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{n}{2}\right)-1>0.99 \tag{8}$$

所以，$\Phi\left(\frac{n}{2}\right)>0.995$，则 $n>5.152$。 □

7. **试分别利用切比雪夫不等式和中心极限定理，求以不小于 0.99 的概率保证用频率估计事件发生概率的误差不大于 0.01 的独立伯努利试验次数。**

解. 记事件发生次数为 X，所需试验次数为 n。因为事件发生概率未知，所以事件发生次数的方差应取最大值，即假设 $\operatorname{Var}(X)=npq=0.25n$。在此假设下，
(1) 切比雪夫不等式：

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<0.01\right)\geq 1-\frac{\frac{0.25}{n}}{(0.01)^2}>0.99 \tag{9}$$

所以，$n>250000$。
(2) 中心极限定理：

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<0.01\right)=P\left(\frac{\left|\frac{X}{n}-p\right|}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}<\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right)=2\Phi\left(\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right)-1>0.99 \tag{10}$$

所以，$\Phi\left(\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right)>0.995$，则 $n>16587.24$。 □

8. **设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，且 $P\left(X_n=\pm n^r\right)=\frac{1}{2}$，其中 n 为正整数。利用中心极限定理证明：若 $r\geq\frac{1}{2}$，$\{X_n\}$ 不服从大数定律。**

解. X_n 的期望和方差分别为

$$E\left(X_n\right)=0, \operatorname{Var}\left(X_n\right)=n^{2r}. \tag{11}$$

对 $\delta>0$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\left(\left|X_k-\mu_k\right|^{2+\delta}\right)&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{r(2+\delta)}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2r}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}}\\&=\frac{(2r+1)^{\frac{2+\delta}{2}}}{r(2+\delta)+1}\cdot\frac{n^{r(2+\delta)+1}}{n^{(2r+1)\frac{2+\delta}{2}}}\\&=\frac{(2r+1)^{\frac{2+\delta}{2}}}{r(2+\delta)+1}\cdot\frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}}\longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{12}$$

即 X_n 满足李雅普诺夫条件，所以可以使用中心极限定理。如果 $r \geq \dfrac{1}{2}$，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\frac{\varepsilon^2 n^2}{B_n^2} = \frac{\varepsilon^2 n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2r}} \leq \frac{\varepsilon^2 n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{2\varepsilon^2 n^2}{n(n+1)} \longrightarrow 2\varepsilon^2 \tag{13}$$

当 n 充分大时，$\dfrac{\varepsilon n}{B_n} < \sqrt{3}\varepsilon$，且有

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right\} &= P\left\{\frac{B_n}{n}\cdot\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right\} \\ &= P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \frac{\varepsilon n}{B_n}\right\} \\ &\leq P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \sqrt{3}\varepsilon\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

因此，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right\} &\leq \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \sqrt{3}\varepsilon\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{3}\varepsilon}^{\sqrt{3}\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t \\ &< 1. \end{aligned} \tag{15}$$

故不服从大数定律。 □

9. **用特征函数法直接证明棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理。**

解. 记 $S_n \sim b(n,p)$，则 S_n 的特征函数为 $\varphi_n(t) = (q + p\mathrm{e}^{it})^n$，由此 $Y_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ 的特征函数为

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(q + p\mathrm{e}^{\frac{it}{\sqrt{npq}}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{npit}{\sqrt{npq}}} \\ &= \left(q\mathrm{e}^{-\frac{pit}{\sqrt{npq}}} + p\mathrm{e}^{\frac{qit}{\sqrt{npq}}}\right)^n \\ &= \left[q\left(1 - \frac{pit}{\sqrt{npq}} - \frac{pt^2}{2nq}\right) + p\left(1 + \frac{qit}{\sqrt{npq}} - \frac{qt^2}{2np}\right) + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \longrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned} \tag{16}$$

由定理 4.2.6 即证得棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理。 □