习题课 2

闻健

April 8, 2019

1. **设随机变量 $X \sim N(0,\sigma^2), Y=[X]$，即 Y 是 X 向下取整所得（例如：$[1.2]=1,[-2.3]=-3$），计算 Y 的期望。**

解. 设 X 的分布函数为 $f_X(x)$，Y 是整数集上的离散随机变量，我们有：

$$P(Y=n)=\int_n^{n+1} f_X(x)dx \tag{1}$$

考虑到 $f_X(x)$ 是偶函数，所以:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \times P(y=n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \times \int_n^{n+1} f_X(x)dx \\
&= \int_1^2 f_X(x)dx + 2\int_2^3 f_X(x)dx + \cdots \\
&- \int_0^1 f_X(x)dx - 2\int_1^2 f_X(x)dx - 3\int_2^3 f_X(x)dx - \cdots \\
&= -\int_0^{+\infty} f_X(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2}$$

□

2. **在单位圆上随机取两个点构成一条弦，试计算从原点到该弦的距离所服从的概率密度函数。**

解. 设两点对圆心的张角为 θ，则 $\theta \sim U(0,\pi)$，我们有：

$$f_\theta(\theta)=\frac{1}{\pi} \tag{3}$$

设从原点到弦的距离为 r，则 $r=\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$。由于在 $\theta\in[0,\pi], r\in[0,1]$ 时，r 是 θ 的单调函数，于是：

$$f_r(r)=f_\theta(\theta)\left|\frac{d\theta}{dr}\right|=\frac{2}{\pi\sqrt{1-r^2}}, r\in[0,1] \tag{4}$$

注意：这里的随机取点认为是两者所对的圆心角 (取范围 $[0,\pi]$) 服从均匀分布，若选用其他方式，例如弦中点到圆心的距离服从均匀分布，则会得到不同的结果，这与 Bertrand 悖论的道理是相同的，即不同的样本空间会导致不同的结果。 □

3. **某城市共有 N 辆车，车牌号从 1 到 N(N 充分大)，若随机地 (可重复) 记下 n 辆车的车牌号，其最大号码为 ξ，求 $E(\xi)$。**

解.

$$P\left\{\xi=m\right\}=\frac{m^n-\left(m-1\right)^n}{N^n}, m=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

$$E\left(\xi\right)=\sum_{m=1}^{N}m\cdot\frac{m^n-\left(m-1\right)^n}{N^n}=N-\sum_{m=1}^{N-1}\frac{m^n}{N^n} \tag{6}$$

当 N 充分大的时候，

$$\sum_{m=1}^{N-1}\frac{m^n}{N^n}=N\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{N}\frac{m^n}{N^n}\approx N\int_0^1 x^n dx=N\frac{1}{n+1} \tag{7}$$

所以，

$$E\left(\xi\right)=N-\sum_{m=1}^{N-1}\frac{m^n}{N^n}\approx\frac{n}{n+1}N \tag{8}$$

□

4. **某海港每天早上对停泊船只供给净水，初始价为每吨 a 元，不够用续供则要加 50% 的附加费；若用不完造成浪费则每吨加收资源费 $a/4$ 元。设某轮船的净水用量是服从密度函数为 $p\left(x\right)$ 的随机变量，为节约用水总开支，求该轮船的最佳首次供水量 y。**

解. 设实际用水量为 x, 总开支为 $g\left(x\right)$，则有

$$g\left(x\right)=\begin{cases} ay+\dfrac{a}{4}\left(y-x\right), & x<y\\[2ex] ay+\dfrac{3a}{2}\left(x-y\right), & x\geq y\end{cases} \tag{9}$$

于是，总开支的期望为

$$\begin{aligned} f\left(y\right)&=E\left[g\left(x\right)\right]\\ &=\int_0^y\left(ay+\frac{a}{4}y-\frac{a}{4}x\right)p\left(x\right)dx+\int_y^{+\infty}\left(ay+\frac{3a}{2}x-\frac{3a}{2}y\right)p\left(x\right)dx\\ &=\frac{5a}{4}y\int_0^y p\left(x\right)dx-\frac{a}{4}\int_0^y xp\left(x\right)dx+\frac{3a}{2}\int_y^{+\infty}xp\left(x\right)dx-\frac{a}{2}y\int_y^{+\infty}p\left(x\right)dx\end{aligned} \tag{10}$$

为求期望的最小值，将上式对 y 求导

$$
\begin{aligned}
f'(y) &= \frac{5a}{4}\int_0^y p(x)\,dx + \frac{5a}{4}yp(y) - \frac{a}{4}yp(y) - \frac{3a}{2}yp(y) - \frac{a}{2}\int_y^{+\infty} p(x)\,dx + \frac{a}{2}yp(y) \\
&= \frac{5a}{4}\int_0^y p(x)\,dx - \frac{a}{2}\int_y^{+\infty} p(x)\,dx \\
&= \frac{7a}{4}\int_0^y p(x)\,dx - \frac{a}{2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

令 $f'(y)=0$，则得最佳供水量 y 应满足 $\int_0^y p(x)\,dx = \frac{2}{7}$。 □

5. **已知随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，求随机变量 $Y_1 = 1-e^{-\lambda X}$ 和 $Y_2 = e^{-\lambda X}$ 的概率分布。**

解. 先考虑随机变量 Y_1，记 $Y=g(X)=1-e^{-\lambda X}$，易知 $g(x)$ 为关于 x 的严格单调递增函数，值域为 $[0,1]$；它的反函数 $x=h(y)=-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$ 也是单调递增函数，在 $y\in[0,1]$ 上连续可导，导函数为

$$
h'(y) = \frac{1}{\lambda(1-y)} \tag{12}
$$

可见，$h'(y)>0$，所以 $|h'(y)| = h'(y)$。因此，当 $0\le y\le 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= p_X[h(y)]\cdot|h'(y)| \\
&= \frac{1}{\lambda(1-y)}\lambda e^{-\lambda\left[-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}\right]} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{13}
$$

所以，随机变量 Y 的概率密度函数为

$$
p_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \tag{14}
$$

即 $Y\sim U(0,1)$。随机变量 Y_2 与之类似，也服从均匀分布，证明略。 □

6. **设连续随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，另一离散型随机变量 Y 的可能取值为全体正整数，其分布列为 $P_Y(Y=k) = P_X[(k-1)\Delta \le X \le k\Delta]$, 其中 $k=1,2,\cdots$，常数 $\Delta>0$。那么，随机变量 Y 服从哪种常用的概率分布。**

解. 指数函数的分布函数为

$$
F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \tag{15}
$$

从而，Y 的概率分布为

$$
\begin{aligned}
P_Y(Y=k) &= P_X[(k-1)\Delta \le X \le k\Delta] \\
&= F(k\Delta) - F[(k-1)\Delta] \\
&= \left(e^{-\lambda\Delta}\right)^{k-1}\left(1-e^{-\lambda\Delta}\right)
\end{aligned} \tag{16}
$$

令 $p=1-e^{-\lambda\Delta}$，则易知 $0<p<1$，且有

$$P_Y\left(Y=k\right)=p(1-p)^{k-1} \tag{17}$$

所以，随机变量 Y 服从几何分布，即 $Y\sim Ge\left(1-e^{-\lambda\Delta}\right)$。 □

7. **实验室器皿中产生甲、乙两类细菌的机会是相等的，且产生的细菌的总数服从参数为 λ 的 Poisson 分布。求：(1) 产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率；(2) 在已知产生了细菌而且没有甲类细菌的条件下，有 2 个乙类细菌的概率。**

解. (1) 设产生了 $k(k>0)$ 个细菌为事件 A_k，产生的细菌全是甲类细菌没有乙类细菌为事件 B，则

$$\begin{aligned}P\left(B\right)&=\sum_{k=1}^{+\infty}P\left(A_k\right)P\left(B\left|A_k\right.\right)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)\end{aligned} \tag{18}$$

(2) 所求概率为

$$\begin{aligned}P\left(A_2\left|B\right.\right)&=\frac{P\left(A_2\right)P\left(B\left|A_2\right.\right)}{P\left(B\right)}\\&=\frac{\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)}\\&=\frac{\lambda^2}{8\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)}\end{aligned} \tag{19}$$

□

8. **设随机变量 X 取值于 $[0,1]$，若 $P\left(x\leq X\leq y\right)$ 只与长度 $y-x$ 有关（对一切 $0\leq x\leq y\leq 1$），求 X 的概率分布。**

解. 记 $P\left(x\leq X\leq y\right)=f\left(y-x\right)$，则对 $x=0$，$\forall y\in[0,1]$，有

$$P\left(0\leq X\leq y\right)=f\left(y\right) \tag{20}$$

对 $\forall y_1,y_2\in[0,1]$ 且 $y_1<y_2$, 有

$$P\left(0\leq X\leq y_1+y_2\right)=P\left(0\leq X<y_1\right)+P\left(y_1\leq X\leq y_1+y_2\right) \tag{21}$$

即有

$$f\left(y_1+y_2\right)=f\left(y_1\right)+f\left(y_2\right) \tag{22}$$

因此

$$f\left(y\right)=Cy \tag{23}$$

由 $f(1)=f(1-0)=P(0\le X\le 1)=1$ 推得 $C=1$，所以 $f(x)=x$，即

$$P(0\le X\le x)=f(x),x\in[0,1] \tag{24}$$

因而 X 服从均匀分布，即 $X\sim U(0,1)$。 □

9. **设 X 为伯努利试验中第一个游程 (连续的成功或失败) 的长，求 X 的概率分布及其期望。**

解. 设每次试验中成功的概率为 p，则失败的概率为 $1-p$，则随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=p^k(1-p)+p(1-p)^k,k=1,2,\cdots \tag{25}$$

期望为

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[kp^k(1-p)+kp(1-p)^k\right]\\&=\frac{p}{1-p}+\frac{1-p}{p}\end{aligned} \tag{26}$$

□