习题课 3

罗雁天

May 11, 2019

1. n 对夫妇共 2n 人待在一个房间内，现从中随机挑选 m 个人走出房间，问房间内还剩下的未被拆散的夫妇数目的均值。

   解. 房间内剩下的未被拆散的夫妇数目 X 满足

   $$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \quad C_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 对夫妇在房间} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 对夫妇不在房间} \end{cases} \tag{1}$$

   则由

   $$P(C_k = 1) = 1 - P(C_k = 0) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \tag{2}$$

   得到

   $$E(C_k) = 1 \times P(C_k = 1) + 0 \times P(C_k = 0) = \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \tag{3}$$

   从而

   $$\begin{aligned} E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\ &= n\left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

   □

2. 某商场发行 n 种购物券，每一次在该商场购物，即可获得一张种类随机选取的购物券。该商场规定，如果能够收集齐所有的购物券，那么就可以得到该商场的大奖。问获得大奖所需要的购物次数的期望是多少。

   解. 收集齐所有的购物券所需要的购物次数 X 可以写为

   $$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{5}$$

   其中 C_k 表示在收集到 $k-1$ 种购物券的前提下，收集到第 k 种购物券所需要的购物次数。由于手中已经有 $k-1$ 种购物券，因此收集到新购物券的可能只有 $n-k+1$ 种，所以 C_k 是几何分布随机变量，参数为 $p = (n-k+1)/n$，因此我们有：

   $$E(C_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1} \tag{6}$$

所以：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\
&= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\
&= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} \\
&= n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{7}
$$

由微积分的知识可以知道 $E(X) \approx n \ln n$，可见，当 n 较大时，如果想收集到所有的购物券，则需要付出数倍于购物券数目的购物次数 (以 30 张购物券为例，$\ln(30) \approx 3.4$) 。这正是商家的精明之处。 □

3. **司机在一年发生事故的次数满足 λ 的泊松分布，而 λ 服从参数为 μ 的指数分布，问某一司机上一年不发生事故，今年也不发生事故的概率。**

解. 假设该司机在一年发生事故的次数为 X，则有：

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \int_0^{+\infty} P(X = k|\lambda = x) f_\lambda(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \mu e^{-\mu x} dx \\
&= \frac{\mu}{k!} \int_0^{+\infty} x^k e^{-(\mu+1)x} dx \\
&= \frac{\mu}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+1)^{k+1}} \\
&= \frac{\mu}{(\mu+1)^{k+1}}
\end{aligned} \tag{8}
$$

因此，司机连续两年不发生事故的概率为 (两年发生事故相互独立)：

$$
P = \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^2 \tag{9}
$$

□

4. **设 R 罐中有 n 个红球，H 罐中有 n 个黑球。每次操作都从两个罐中各随机取出一球，交换放置 (R 罐中取出的放入 H 罐，H 罐中取出的放入 R 罐)，问 k 次操作后，R 罐中的红球数目的均值。**

解. k 次操作后 R 罐的红球数目满足：

$$
X = R_1 + R_2 + \cdots + R_n, \quad R_t = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 个红球仍在 } R \text{ 罐} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 个红球不在 } R \text{ 罐} \end{cases} \tag{10}
$$

对于操作开始前 R 罐中原有的每一个红球而言，其经过 k 次操作仍回到 R 罐意味着被选中的次数为偶数 (从来未被选中意味着选中次数为 0，仍为偶数)。所以：

$$P(R_t=1)=1-P(R_t=0)=\sum_{m=2i}\binom{k}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-m} \tag{11}$$

根据二项式定理，我们可以计算出偶数次项的和可以计算如下：

$$\sum_{m=2i}\binom{k}{m}a^m b^{k-m}=\frac{1}{2}\left((b+a)^k+(b-a)^k\right) \tag{12}$$

所以：

$$\begin{aligned}P(R_t=1)&=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^k+\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^k\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right)\end{aligned} \tag{13}$$

从而

$$\begin{aligned}E(X)&=E(R_1+R_2+\cdots+R_n)\\&=E(R_1)+E(R_2)+\cdots+E(R_n)\\&=\frac{n}{2}\left(1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right)\end{aligned} \tag{14}$$

□

5. X,Y **独立都服从** $\mathcal{N}(0,1)$**，求** $E[(X-3Y)^2|2X+Y=3]$

解. 根据定义有：

$$E[(X-3Y)^2|2X+Y=3]=\frac{\iint_{2x+y=3}(x-3y)^2p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{2x+y=3}p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{15}$$

首先计算分母如下：

$$
\begin{aligned}
\iint_{2x+y=3} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{2x+y=3} p(x)p(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{2x+y=3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{2x+y=3} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\text{令} x = 1+t, y = 1-2t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(1+t)^2+(1-2t)^2}{2}\right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{5t^2-2t+2}{2}\right] \mathrm{d}t \\
&\text{令} x = t - \frac{1}{5} \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{5x^2}{2}\right] \mathrm{d}t \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10\pi}}
\end{aligned} \tag{16}
$$

然后计算分子如下：

$$
\begin{aligned}
\iint_{2x+y=3} (x-3y)^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{2x+y=3} (x-3y)^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{2x+y=3} (x-3y)^2 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\text{令} x = 1+t, y = 1-2t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (7t-2)^2 \exp\left[-\frac{5t^2-2t+2}{2}\right] \mathrm{d}t \\
&\text{令} x = t - \frac{1}{5} \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (7x - \frac{3}{5})^2 \exp\left[-\frac{5x^2}{2}\right] \mathrm{d}t \\
&= \exp\left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \times \frac{254}{25}
\end{aligned} \tag{17}
$$

所以：

$$
E[(X-3Y)^2 | 2X+Y=3] = \frac{254}{25} \tag{18}
$$

□

6. 设有 k 种不同的优惠券，每次收集到第 i 种优惠券的概率为 p_i，$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$，且每次收集之间是相互独立的。如果收集了 n 张优惠券，那么优惠券的种类的期望是多少？

解. 优惠券的种类数 X 满足:

$$X = H_1 + H_2 + \cdots + H_k, \quad H_i = \begin{cases} 1 & \text{收集到第 } i \text{ 种优惠券} \\ 0 & \text{没有收集到第 } i \text{ 种优惠券} \end{cases} \tag{19}$$

那么我们有:

$$P(H_i = 1) = 1 - P(H_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n \tag{20}$$

所以:

$$E(H_i) = 1 \times P(H_i = 1) + 0 \times P(H_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n \tag{21}$$

从而:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(H_1 + H_2 + \cdots + H_k) \\ &= E(H_1) + E(H_2) + \cdots + E(H_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (1 - (1 - p_i)^n) \end{aligned} \tag{22}$$

□

7. 假设 λ 服从以 α, β 为参数的 Gamma 分布，即 $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$。在给定 λ 的条件下，x 服从以 λ 为参数的 Poisson 的分布，即 $x|\lambda \sim Poisson(\lambda)$。试问，在给定 x 的条件下，λ 的分布是什么？

解. 由于 $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 我们有:

$$p(\lambda) = \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \tag{23}$$

又由于 $x|\lambda \sim Poisson(\lambda)$, 因而:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \tag{24}$$

所以，根据贝叶斯公式:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda|x) &= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)} \\
&= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{\int_0^{+\infty} p(x|\lambda)p(\lambda)\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}}{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\int_0^{+\infty}\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{\beta+1}\right)^{(\alpha+x-1)}e^{-u}\mathrm{d}\left(\frac{u}{\beta+1}\right)} \qquad (u=(\beta+1)\lambda) \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\frac{1}{(\beta+1)^{\alpha+x}}\int_0^{+\infty}u^{(\alpha+x-1)}e^{-u}\mathrm{d}u} \\
&= \frac{(\beta+1)^{\alpha+x}\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\Gamma(\alpha+x)}
\end{aligned} \tag{25}
$$

所以, $\lambda|x \sim \Gamma(\lambda|\alpha+x,\beta+1)$ □

8. **公交站起点站等可能发出 a,b 两班汽车，其中 a 停 m 站，b 停 n 站，车上人数服从参数为 λ 的泊松分布，每名乘客在各站下车的概率相同，如果该站没有乘客下车，则公交车不停站。求一辆从起点站开出的公交车停站的期望。**

解. 一辆从起点站开出的公交车停站的次数 X 的期望满足:

$$E(X) = \frac{1}{2}E(X_a) + \frac{1}{2}E(X_b) \tag{26}$$

其中，X_a 表示如果开出的是 a 车停站的次数，X_b 表示如果开出的是 b 车停站的次数。对 a 车和 b 车的讨论类似，我们这里这讨论 a 车的情况。我们有：

$$X_a = X_{a1} + X_{a2} + \cdots + X_{am}, \quad X_{at} = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 站有人下车} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 站没有人下车} \end{cases} \tag{27}$$

由于人数 K 服从参数为 λ 的泊松分布，则有：

$$P(X_{at}=1|K=k) = 1 - P(X_{at}=0) = 1 - \left(1-\frac{1}{m}\right)^k \tag{28}$$

所以：

$$
\begin{aligned}
E(X_{at}|K=k) &= 1\times P(X_{at}=1|K=k) + 0\times P(X_{at}=0|K=k) \\
&= 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^k
\end{aligned} \tag{29}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
E(X_{at}) &= E(E(X_{at}|K=k)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} E(X_{at}|K=k)P(K=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^k\right)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= 1-e^{-\frac{\lambda}{m}}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

所以我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
E(X_a) &= E(X_{a1}+X_{a2}+\cdots+X_{am}) \\
&= E(X_{a1})+E(X_{a2})+\cdots+E(X_{am}) \\
&= m\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

同理我们可以得到：

$$
E(X_b) = n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \tag{32}
$$

所以：

$$
E(X) = \frac{1}{2}\left(m\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)+n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right) \tag{33}
$$

□

9. **设随机变量** X,Y **均服从均值为** 0**,方差为** 1 **的正态分布,且相互独立,试求:**$E\left[X^2+Y^2|\cos\left(\frac{X}{Y}\right)\right]$

解. 根据课后习题中的结论，我们有：

$$
X^2+Y^2 \text{与} \frac{X}{Y} \text{相互独立} \tag{34}
$$

因此，

$$
X^2+Y^2 \text{与} \cos\left(\frac{X}{Y}\right) \text{相互独立} \tag{35}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
E\left[X^2+Y^2|\cos\left(\frac{X}{Y}\right)\right] &= E\left[X^2+Y^2\right] \\
&= E\left[X^2\right]+E\left[Y^2\right] \\
&= 2
\end{aligned}
\tag{36}
$$

□

10. **篮球赛时长** n **分钟，某球员每一分钟有一次投篮机会，投中概率为** p**，并且教练规定，若一次投篮不中，下一分钟不得投篮，需将机会交给队友，请计算一场球赛中该队员投中次数的均值**

解. 该队员投中次数 X 满足

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \quad C_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 分钟投中} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 分钟未投或者未投中} \end{cases} \tag{37}$$

引入随机变量 $Y_k(k = 1, 2, \cdots, n)$:

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 分钟投了} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 分钟未投} \end{cases} \tag{38}$$

我们有：

$$\begin{aligned} P(Y_k = 1) &= P(Y_k = 1|Y_{k-1} = 1)P(Y_{k-1} = 1) + P(Y_k = 1|Y_{k-1} = 0)P(Y_{k-1} = 0) \\ &= p \times P(Y_{k-1} = 1) + 1 \times P(Y_{k-1} = 0) \\ &= p \times P(Y_{k-1} = 1) + 1 - P(Y_{k-1} = 1) \end{aligned} \tag{39}$$

由于 $P(Y_1 = 1) = 1$，求解上述递推式我们可以得到：

$$P(Y_k = 1) = \frac{1}{2-p}\left[1 - (p-1)^k\right] \tag{40}$$

因此：

$$\begin{aligned} P(C_k = 1) &= P(C_k = 1|Y_k = 1)P(Y_k = 1) + P(C_k = 1|Y_k = 0)P(Y_k = 0) \\ &= p \times P(Y_k = 1) + 0 \times P(Y_k = 0) \\ &= \frac{p}{2-p}\left[1 - (p-1)^k\right] \end{aligned} \tag{41}$$

所以：

$$\begin{aligned} E(C_k) &= 1 \times P(C_k = 1) + 0 \times P(C_k = 0) \\ &= P(C_k = 1) \\ &= \frac{p}{2-p}\left[1 - (p-1)^k\right] \end{aligned} \tag{42}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{2-p}\left[1 - (p-1)^k\right] \\ &= \frac{np}{2-p} - \frac{p(p-1)}{(2-p)^2} + \frac{p(p-1)^{n+1}}{(2-p)^2} \end{aligned} \tag{43}$$

□

11. **设 $U_1, U_2, \cdots$ 为一相互独立的 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量序列，求 $E[N]$。其中：**

$$N = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}$$

解. 我们将得到一个更一般的结果。对于 $x \in [0,1]$，令：

$$N(x) = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > x\right\} \tag{44}$$

再令：

$$m(x) = E[N(x)] \tag{45}$$

即 $N(x)$ 是部分和 $\sum_{i=1}^{n} U_i$ 超过 x 的最小指标 n，$m(x)$ 是 $N(x)$ 的期望值。将 U_1 作为条件，我们有：

$$m(x) = E\left[E[N(x)|U_1 = y]\right] = \int_0^1 E[N(x)|U_1 = y]dy \tag{46}$$

对于条件期望 $E[N(x)|U_1 = y]$，我们有：

$$E[N(x)|U_1 = y] = \begin{cases} 1, & y > x \\ 1 + m(x-y), & y \le x \end{cases} \tag{47}$$

代入上式可得：

$$\begin{aligned} m(x) &= 1 + \int_0^x m(x-y)dy \\ &= 1 + \int_0^x m(u)du \qquad (\text{做变量替换} u = x - y) \end{aligned} \tag{48}$$

对上式两边求微分可以得到：

$$m'(x) = m(x) \tag{49}$$

求解上述微分方程可以得到：

$$m(x) = ke^x \tag{50}$$

又由于 $m(0) = 1$ 可以得到 $k = 1$，因此：

$$m(x) = e^x \tag{51}$$

所以，原问题 $E[N] = m(1) = e$ □

12. (平面上的随机徘徊) 设在平面坐标系的原点放一质点，质点在平面上作如下的随机徘徊。

1) 每一步质点移动一个单位的距离，且前进方向与 x 轴的夹角 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布；
2) 每一步质点移动一个单位的距离，前进方向只有上、下、左、右四种情况且概率相等。

假设每秒运动一次，以第 n 秒时质点所在位置与原点的距离为半径画圆，请计算两种情况下圆面积的均值。

解. 用 (X_i, Y_i) 表示第 i 秒坐标的变化量，

1) 对于此问，我们有：

$$X_i = \cos\theta_i \qquad Y_i = \sin\theta_i \tag{52}$$

其中 $\theta_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为相互独立且在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。经过 n 秒之后，质点的位置为 $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i)$，则质点所在位置与原点距离的平方 R^2 可以计算如下：

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_i^2 + Y_i^2\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} (X_i X_j + Y_i Y_j) \\ &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} (\cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j) \end{aligned} \tag{53}$$

由于 θ_i θ_j 相互独立并且：

$$\begin{aligned} E[\cos\theta_i] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta_i \, \mathrm{d}\theta_i = 0 \\ E[\sin\theta_i] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta_i \, \mathrm{d}\theta_i = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

因此，对于圆面积 $S = \pi R^2$，我们有：

$$E[S] = \pi E[R^2] = n\pi \tag{55}$$

2) 对于此问，质点每一步的移动都是上、下、左、右四个方向之一，因此我们可以得到 X_i 和 Y_i 的联合分布为如表 1所示。

Table 1: X, Y 的联合分布

P \ Y, X	0	1	-1
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0
-1	$\frac{1}{4}$	0	0

经过 n 秒之后，质点的位置为 $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i)$，则质点所在位置与原点距离的平方 R^2 可以计算如下：

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_i^2 + Y_i^2\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} (X_i X_j + Y_i Y_j) \\ &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} (X_i X_j + Y_i Y_j) \end{aligned} \tag{56}$$

下面我们计算 $E[X_iX_j]$:

$$\begin{aligned}E[X_iX_j] &= 0\times P(X_iX_j=0)+(-1)\times P(X_iX_j=-1)+1\times P(X_iX_j=1)\\ &= 0\times\frac{3}{4}+(-1)\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{8}\\ &= 0\end{aligned}\tag{57}$$

同理我们有 $E[Y_iY_j]=0$，因此因此，对于圆面积 $S=\pi R^2$，我们有：

$$E[S]=\pi E[R^2]=n\pi\tag{58}$$

综上所述，两种情况下圆面积的均值均为 $n\pi$ □

13. **已知** $(X_1,X_2)\sim\mathcal{N}(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$**，设** $Y_1=\cos X_1, Y_2=\cos X_2$**，试求** Y_1,Y_2 **的协方差**

解. 首先我们证明一个结论，方便之后的计算。对于任意的正态分布 $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$$\begin{aligned}g_X(t)=E(e^{jtX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2\sigma^2jtx}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\\ &\text{令} y=x-\sigma^2jt\\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y\\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\end{aligned}\tag{59}$$

利用此结论，计算 $E[Y_1]$ 如下：

$$\begin{aligned}E[Y_1]=E[\cos X_1] &= E\left[\frac{e^{jX_1}+e^{-jX_1}}{2}\right]\\ &= \frac{1}{2}E\left[e^{jX_1}\right]+\frac{1}{2}E\left[e^{-jX_1}\right]\\ &= \frac{1}{2}g_{X_1}(1)+\frac{1}{2}g_{X_1}(-1)\\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2}\\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2}\end{aligned}\tag{60}$$

同理我们可以得到 $E[Y_2]$:

$$E[Y_2]=e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2}\tag{61}$$

下面计算 $E[Y_1Y_2]$:

$$\begin{aligned}E[Y_1Y_2] &= E[\cos X_1\cos X_2]\\ &= E\left[\frac{1}{2}\left(\cos(X_1+X_2)+\cos(X_1-X_2)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}E\left[\cos(X_1+X_2)\right]+\frac{1}{2}E\left[\cos(X_1-X_2)\right]\end{aligned}\tag{62}$$

可以证明：

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2) \\ X_1 - X_2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) \end{aligned} \tag{63}$$

所以根据式 (60) 的计算方式可以得到：

$$\begin{aligned} E\left[\cos(X_1 + X_2)\right] &= e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)} \\ E\left[\cos(X_1 - X_2)\right] &= e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)} \end{aligned} \tag{64}$$

代入式 (62) 得：

$$E[Y_1Y_2] = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)} \tag{65}$$

所以 Y_1, Y_2 的协方差为：

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= E[Y_1Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)} - e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)} - e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \end{aligned} \tag{66}$$

$\square$