习题课 1

罗雁天

March 2, 2019

1. 在单位圆内随机挑选一条弦，请问弦长大于圆内接等边三角形边长的概率是多大。

   解. 本题可以从三个方面考虑：

   - 如果固定住弦的一个端点 A，考察另外一个端点 B，那么样本空间就是圆周，等概指的是 B 在圆周上均匀分布。那么服从要求的 B 必然落在以 A 为端点的圆内接等边三角形中 A 的对边所对应的劣弧中。这一段劣弧的长度恰为圆周长度的 1/3，因此所求概率为 1/3。
   - 如果考察弦的中点 O，以单位圆盘作为样本空间，等概指的是 O 在圆盘上均匀分布。那么服从要求的 O 必然落在半径为 1/2 的单位圆的同心圆内。由于两个圆面积比为 1/4，因此所求概率为 1/4。
   - 同样考察弦的中点 O，不过以与该弦垂直的半径作为样本空间，等概指的是 O 在该半径上均匀分布。那么服从要求的 O 必然落在靠近圆心的一半上。因此所求概率为 1/2。

   三种角度三个答案，看似矛盾实际却很合理。样本空间不同导致概率模型本身存在差异，出现不同的结果也就不奇怪了。 □

2. 假定某赌徒携带 k 元赌资进入赌场，赌博规则很简单，每赢一局则赢 1 元，否则输 1 元。假定每局赌博，赌徒赢的概率都是 p，且各局间相互独立。试问，赌徒将所带赌资全部输光，被迫离开赌场的概率有多大?

   解. 设事件 A_k 表示赌徒拥有 k 元初始赌本并最终输光，事件 W 表示赌徒赢得一局。那么有：

   $$P(A_k) = P(A_k|W)P(W) + P(A_k|W^c)P(W^c) \tag{1}$$

   注意到 $P(A_k|W) = P(A_{k+1}), P(A_k|W^c) = P(A_{k-1})$，我们有：

   $$P(A_k) = pP(A_{k+1}) + (1-p)P(A_{k-1}) \tag{2}$$

   其中 $p = P(W)$ 表示赌徒赢一局的概率。通过此递推式我们可以得到：

   $$P(A_k) = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k \tag{3}$$

   其中 a, b 为确定性的参数，由初值决定。

   注意到 $P(A_0) = 1$，因此我们可以得到 $a + b = 1$；由于 $0 \leq P(A_k) \leq 1$。因此我们有如下结论：

   i) 如果 $p < 0.5$(大多数赌场都满足这一条件)，那么 $b = 0$，因此 $P(A_k) \equiv 1$。这一点不难理解，如果赌徒赢面小，那么输光应该是肯定的。

ii) 如果 $p > 0.5$(这种情况几乎不会出现)，那么

$$P(A_k) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k + a\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right) \tag{4}$$

iii) 如果 $p = 0.5$(赌场绝对公平)，那么 $P(A_k) \equiv 1$。这一点很让人惊讶。即使在绝对公平的赌场内，赌徒输光也几乎是肯定的。

$\square$