习题课 1

罗雁天

March 6, 2019

1. **在单位圆内随机挑选一条弦，请问弦长大于圆内接等边三角形边长的概率是多大。**

   解. 本题可以从三个方面考虑：

   - 如果固定住弦的一个端点 A，考察另外一个端点 B，那么样本空间就是圆周，等概指的是 B 在圆周上均匀分布。那么服从要求的 B 必然落在以 A 为端点的圆内接等边三角形中 A 的对边所对应的劣弧中。这一段劣弧的长度恰为圆周长度的 1/3，因此所求概率为 1/3。
   - 如果考察弦的中点 O，以单位圆盘作为样本空间，等概指的是 O 在圆盘上均匀分布。那么服从要求的 O 必然落在半径为 1/2 的单位圆的同心圆内。由于两个圆面积比为 1/4，因此所求概率为 1/4。
   - 同样考察弦的中点 O，不过以与该弦垂直的半径作为样本空间，等概指的是 O 在该半径上均匀分布。那么服从要求的 O 必然落在靠近圆心的一半上。因此所求概率为 1/2。

   三种角度三个答案，看似矛盾实际却很合理。样本空间不同导致概率模型本身存在差异，出现不同的结果也就不奇怪了。 □

2. **假定某赌徒携带 k 元赌资进入赌场，赌博规则很简单，每赢一局则赢 1 元，否则输 1 元。假定每局赌博，赌徒赢的概率都是 p，且各局间相互独立。试问，赌徒将所带赌资全部输光，被迫离开赌场的概率有多大?**

   解. 设事件 A_k 表示赌徒拥有 k 元初始赌本并最终输光，事件 W 表示赌徒赢得一局。那么有：

   $$P(A_k) = P(A_k|W)P(W) + P(A_k|W^c)P(W^c) \tag{1}$$

   注意到 $P(A_k|W) = P(A_{k+1}), P(A_k|W^c) = P(A_{k-1})$，我们有：

   $$P(A_k) = pP(A_{k+1}) + (1-p)P(A_{k-1}) \tag{2}$$

   其中 $p = P(W)$ 表示赌徒赢一局的概率。通过此递推式我们可以得到：

   $$P(A_k) = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k \tag{3}$$

   其中 a, b 为确定性的参数，由初值决定。

   注意到 $P(A_0) = 1$，因此我们可以得到 $a + b = 1$；由于 $0 \le P(A_k) \le 1$。因此我们有如下结论：

i) 如果 $p < 0.5$(大多数赌场都满足这一条件)，那么 $b = 0$，因此 $P(A_k) \equiv 1$。这一点不难理解，如果赌徒赢面小，那么输光应该是肯定的。

ii) 如果 $p > 0.5$(这种情况几乎不会出现)，那么

$$P(A_k) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k + a\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right) \tag{4}$$

iii) 如果 $p = 0.5$(赌场绝对公平)，那么 $P(A_k) \equiv 1$。这一点很让人惊讶。即使在绝对公平的赌场内，赌徒输光也几乎是肯定的。

□

3. **考虑医疗诊断问题，假设对于某种疾病，诊断的正确率为 p。也就是说，如果就诊者确实患有该病，则医生能够以概率 p 做出准确诊断；如果就诊者实际没有患该病，医生做出正确判断的概率也是 p。假设疾病自身的发病率是 q。现已知某就诊者被医生诊断为患病，则其实际患该病的概率是多少？从中能得到什么结论呢？**

解. 设事件 A 表示就诊者实际患病，D 表示就诊者被诊断为患病，那么由 Bayesian 公式：

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|A^c)P(A^c)} \tag{5}$$

带入 $P(A) = q, P(A^c) = 1 - q, P(D|A) = p, P(D|A^c) = 1 - p$ 得：

$$P(A|D) = \frac{pq}{pq + (1-p)(1-q)} \tag{6}$$

同理也可以得到：

$$P(A|D^c) = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p(1-q)} \tag{7}$$

下面我们通过一些有趣的计算来进一步认识这一问题。如果疾病的发病率很低 $(q = 0.01)$，医生的医术值得信任，诊断的正确率很高 $(p = 0.99)$，那么在诊断患病的条件下，我们有：

$$P(A|D) = \frac{0.99 \times 0.01}{0.99 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

也就是说，真实患病的概率只有 50%。不难发现，条件概率的计算中，疾病本身较低的发病率使得医生判断的准确性大打折扣。尝试将发病率 q 升高至 0.5(例如普通感冒)，那么在医生医术保持不变的情况下，有：

$$P(A|D) = \frac{0.99 \times 0.5}{0.99 \times 0.5 + 0.01 \times 0.5} = 0.99 \tag{9}$$

可见，对于普通常见病，医生的水平能够得到充分的体现。但如果进一步降低发病率 $(q = 0.001)$，即所谓“疑难杂症”，如果维持医生水平不变，那么：

$$P(A|D) = \frac{0.99 \times 0.001}{0.99 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999} = 0.09 \tag{10}$$

诊断的实际准确率连 10% 都不到，误报 (实际没病，诊断有病) 的概率达到了 90%。看起来，即使是非常称职的医生，当面临疑难杂症的时候也难免误报，患者应给予充分的理解，并在得知诊断结果之后保持冷静，争取用复诊的方法进一步确定是否患病。另一方面：

$$P(A|D^c) = \frac{0.01 \times 0.001}{0.01 \times 0.001 + 0.99 \times 0.999} \approx 10^{-5} \ll 1 \tag{11}$$

这说明，尽管误报的概率很高，但是漏报 (实际患病，诊断无病) 的概率却很低。所以，如果医生真的非常称职且水平很高，那么漏报性质的误诊率是能够充分降低的，即使面对的是十分罕见的疑难杂症。 □

4.（匹配问题）n 个人随机地选取帽子，试问至少有一人戴上了自己帽子的概率是多少。

解. 设 B_k 表示第 k 个人戴对的所有可能结果构成的集合。则至少有一人戴对的所有可能结果可以描述为:

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \tag{12}$$

我们的任务是计算这个集合的概率。由于：

$$P(B_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, P(B_k \cap B_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \cdots \tag{13}$$

所以根据容斥原理，我们有：

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) =& \sum_{k=1}^{n} P(B_k) - \sum_{j<k} P(B_j \cap B_k) + \sum_{i<j<k} P(B_i \cap B_j \cap B_k) \\ & - \cdots + (-1)^{n+1} P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \\ =& n \times \frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \\ =& 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \\ =& \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \end{aligned} \tag{14}$$

即，至少有一人带上自己帽子的概率为 $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$ □

5. 重新考虑匹配问题。n 个人随机地选取帽子，试问恰好有 k 人戴上了自己帽子的概率是多少。

解. 考虑戴上了自己帽子的 k 个人，第一个人戴对的概率是 $1/n$; 第二个人受到了第一个人戴对的条件限制，戴对的概率是 $1/(n-1)$，以此类推，得到

$$P(A_1) = \frac{1}{n}, P(A_2|A_1) = \frac{1}{n-1}, P(A_3|A_2A_1) = \frac{1}{n-2}, \cdots \tag{15}$$

因此:

$$P(A_1A_2\cdots A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\cdots P(A_k|A_{k-1}\cdots A_1) = \frac{(n-k)!}{n!} \tag{16}$$

另一方面，在 k 个人戴对的情况下，剩下 $n-k$ 个人都没有戴对，根据上一道题的结论，我们有：

$$P(B_1B_2\cdots B_{n-k}|A_1A_2\cdots A_k) = \sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \tag{17}$$

则有：

$$P(A_1A_2\cdots A_kB_1B_2\cdots B_{n-k}) = \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \tag{18}$$

考虑到戴对帽子的 k 个人的任意性，最终所求概率为：

$$P = \binom{n}{k}P(A_1A_2\cdots A_kB_1B_2\cdots B_{n-k}) = \frac{1}{k!}\sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \tag{19}$$

□