习题课 2

罗雁天

March 25, 2019

1. 再次考虑“匹配”问题。n 个人随机地选取帽子，试问恰好戴上了自己帽子的人数的期望和方差是多少。

解. 带上自己帽子的人数 X 满足:

$$X = H_1 + H_2 + \cdots + H_n, \quad H_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 个人戴对帽子} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 个人戴错帽子} \end{cases} \tag{1}$$

则由

$$P(H_k = 1) = 1 - P(H_k = 0) = \frac{1}{n} \tag{2}$$

得到

$$E(H_k) = 1 \times P(H_k = 1) + 0 \times P(H_k = 0) = \frac{1}{n} \tag{3}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) \\ &= E(H_1) + E(H_2) + \cdots + E(H_n) \\ &= n \times \frac{1}{n} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

即戴上自己帽子的人数的期望值为 1。也就是说，平均只有一个人戴上自己的帽子。相比于上次习题课得到的人数分布的结果，这里给出的期望能够更加直观地表明恰好匹配 (戴上自己的帽子) 是较为困难的事情。

接下来求方差，首先求 $E(X^2)$ 如下：

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left((H_1 + H_2 + \cdots + H_n)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{n} H_k^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} H_i H_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} E(H_k^2) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} E(H_i H_j) \end{aligned} \tag{5}$$

根据我们的定义，我们可以得到：

$$E(H_k^2) = 1 \times P(H_k = 1) + 0 \times P(H_k = 0) = \frac{1}{n} \tag{6}$$

H_iH_j 表示第 i, j 两人均带对帽子，因此：

$$P(H_iH_j = 1) = 1 - P(H_iH_j = 0) = \frac{1}{n(n-1)} \tag{7}$$

因此：

$$E(H_iH_j) = 1 \times P(H_iH_j = 1) + 0 \times P(H_iH_j = 0) = \frac{1}{n(n-1)} \tag{8}$$

带入式 (5) 中得：

$$E(X^2) = n \times \frac{1}{n} + n(n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = 2 \tag{9}$$

因此：

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 \tag{10}$$

□

2. n 对夫妇共 2n 人呆在一个房间内，现从中随机挑选 m 个人走出房间，问房间内还剩下的未被拆散的夫妇数目的均值。

解. 房间内剩下的未被拆散的夫妇数目 X 满足

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \quad C_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 对夫妇在房间} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 对夫妇不在房间} \end{cases} \tag{11}$$

则由

$$P(C_k = 1) = 1 - P(C_k = 0) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \tag{12}$$

得到

$$E(C_k) = 1 \times P(C_k = 1) + 0 \times P(C_k = 0) = \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \tag{13}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\ &= n \times \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

□

3. 某商场发行 n 种购物券，每一次在该商场购物，即可获得一张种类随机选取的购物券。该商场规定，如果能够收集齐所有的购物券，那么就可以得到该商场的大奖。问获得大奖所需要的购物次数的期望是多少。

解. 收集齐所有的购物券所需要的购物次数 X 可以写为

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{15}$$

其中 C_k 表示在收集到 $k-1$ 种购物券的前提下，收集到第 k 种购物券所需要的购物次数。由于手中已经有 $k-1$ 种购物券，因此收集到新购物券的可能只有 $n-k+1$ 种，所以 C_k 是几何分布随机变量，参数为 $p = (n-k+1)/n$，因此我们有：

$$E(C_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1} \tag{16}$$

所以：

$$\begin{aligned} E(X) &= E(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &= E(C_1) + E(C_2) + \cdots + E(C_n) \\ &= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

由微积分的知识可以知道 $E(X) \approx n \ln n$，可见，当 n 较大时，如果想收集到所有的购物券，则需要付出数倍于购物券数目的购物次数 (以 30 张购物券为例，$\ln(30) \approx 3.4$) 。这正是商家的精明之处。 □

4. **设 R 罐中有 n 个红球，H 罐中有 n 个黑球。每次操作都从两个罐中各随机取出一球，交换放置 (R 罐中取出的放入 H 罐，H 罐中取出的放入 R 罐)，问 k 次操作后，R 罐中的红球数目的均值。**

解. k 次操作后 R 罐的红球数目满足：

$$X = R_1 + R_2 + \cdots + R_n, \quad R_t = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 个红球仍在 } R \text{ 罐} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 对夫妇不在 } R \text{ 罐} \end{cases} \tag{18}$$

对于操作开始前 R 罐中原有的每一个红球而言，其经过 k 次操作仍回到 R 罐意味着被选中的次数为偶数 (从来未被选中意味着选中次数为 0，仍为偶数)。所以：

$$P(R_t = 1) = 1 - P(R_t = 0) = \sum_{m=2i} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-m} \tag{19}$$

根据二项式定理，我们可以计算出偶数次项的和可以计算如下：

$$\sum_{m=2i} \binom{k}{m} a^m b^{k-m} = \frac{1}{2}\left((b+a)^k + (b-a)^k\right) \tag{20}$$

所以：

$$\begin{aligned} P(R_t = 1) &= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right) \end{aligned} \tag{21}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(R_1 + R_2 + \cdots + R_n) \\ &= E(R_1) + E(R_2) + \cdots + E(R_n) \\ &= \frac{n}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right) \end{aligned} \tag{22}$$

□

5. **设随机变量 $X \sim N(0, \sigma^2), Y = [X]$，即 Y 是 X 的整数部分（例如：$[1.2] = 1, [-2.3] = -3$），计算 Y 的期望**

解. 设 X 的分布函数为 $f_X(x)$，Y 是整数集上的离散随机变量，我们有：

$$P(Y = n) = \int_n^{n+1} f_X(x)dx \tag{23}$$

考虑到 $f_X(x)$ 是偶函数，所以:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \times P(y = n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \times \int_n^{n+1} f_X(x)dx \\ &= \int_1^2 f_X(x)dx + 2\int_2^3 f_X(x)dx + \cdots \\ &- \int_0^1 f_X(x)dx - 2\int_1^2 f_X(x)dx - 3\int_2^3 f_X(x)dx - \cdots \\ &= -\int_0^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

□

6. **设有 k 种不同的优惠券，每次收集到第 i 种优惠券的概率为 p_i，$\sum_{i=1}^k p_i = 1$，且每次收集之间是相互独立的。如果收集了 n 张优惠券，那么优惠券的种类的期望是多少？**

解. 优惠券的种类数 X 满足:

$$X = H_1 + H_2 + \cdots + H_k, \quad H_i = \begin{cases} 1 & \text{收集到第 } i \text{ 种优惠券} \\ 0 & \text{没有收集到第 } i \text{ 种优惠券} \end{cases} \tag{25}$$

那么我们有：

$$P(H_i = 1) = 1 - P(H_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n \tag{26}$$

所以：

$$E(H_i) = 1 \times P(H_i = 1) + 0 \times P(H_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n \tag{27}$$

从而：

$$\begin{aligned} E(X) &= E(H_1 + H_2 + \cdots + H_k) \\ &= E(H_1) + E(H_2) + \cdots + E(H_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (1 - (1 - p_i)^n) \end{aligned} \tag{28}$$

□

7. **在单位圆上随机取两个点构成一条弦，试计算从原点到该弦的距离所服从的概率密度函数**

解. 设两点对圆心的张角为 θ，则 $\theta \sim U(0, \pi)$，我们有：

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi} \tag{29}$$

设从原点到弦的距离为 r，则 $r = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$。由于在 $\theta \in [0, \pi], r \in [0, 1]$ 时，r 是 θ 的单调函数，于是：

$$f_r(r) = f_\theta(\theta) \left| \frac{d\theta}{dr} \right| = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - r^2}}, r \in [0, 1] \tag{30}$$

注意：这里的随机取点认为是两者所对的圆心角 (取范围 $[0, \pi]$) 服从均匀分布，若选用其他方式，例如弦中点到圆心的距离服从均匀分布，则会得到不同的结果，这与 Bertrand 悖论的道理是相同的，即不同的样本空间会导致不同的结果。 □

8. **假设 λ 服从以 α, β 为参数的 Gamma 分布，即 $\lambda \sim \Gamma(\lambda|\alpha, \beta)$。在给定 λ 的条件下，x 服从以 λ 为参数的 Poisson 的分布，即 $x|\lambda \sim Poisson(x|\lambda)$。试问，在给定 x 的条件下，λ 的分布是什么？**

解. 由于 $\lambda \sim \Gamma(\lambda|\alpha, \beta)$, 我们有:

$$p(\lambda) = \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \tag{31}$$

又由于 $x|\lambda \sim Poisson(x|\lambda)$, 因而:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \tag{32}$$

所以，根据贝叶斯公式:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda|x) &= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)} \\
&= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{\int_0^{+\infty} p(x|\lambda)p(\lambda)\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}}{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\int_0^{+\infty}\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{\beta+1}\right)^{(\alpha+x-1)}e^{-u}\mathrm{d}\left(\frac{u}{\beta+1}\right)} \qquad (u=(\beta+1)\lambda) \\
&= \frac{\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\frac{1}{(\beta+1)^{\alpha+x}}\int_0^{+\infty}u^{(\alpha+x-1)}e^{-u}\mathrm{d}u} \\
&= \frac{(\beta+1)^{\alpha+x}\lambda^{(\alpha+x-1)}e^{-(\beta+1)\lambda}}{\Gamma(\alpha+x)}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

所以, $\lambda|x \sim \Gamma(\lambda|\alpha+x,\beta+1)$ □

9. **司机在一年发生事故的次数满足 λ 的泊松分布，而 λ 服从参数为 μ 的指数分布，问某一司机上一年不发生事故，今年也不发生事故的概率。**

解. 假设该司机在一年发生事故的次数为 X，则有：

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \int_0^{+\infty} P(X=k|\lambda=x)f_\lambda(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x^k e^{-x}}{k!}\mu e^{-\mu x}dx \\
&= \frac{\mu}{k!}\int_0^{+\infty}x^k e^{-(\mu+1)x}dx \\
&= \frac{\mu}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+1)^{k+1}} \\
&= \frac{\mu}{(\mu+1)^{k+1}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

因此，司机连续两年不发生事故的概率为 (两年发生事故相互独立):

$$
P=\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^2 \tag{35}
$$

□

10. 公交站起点站等可能发出 a, b 两班汽车，其中 a 停 m 站，b 停 n 站，车上人数服从参数为 λ 的泊松分布，每名乘客在各站下车的概率相同，如果该站没有乘客下车，则公交车不停站。求一辆从起点站开出的公交车停站的期望。

解. 一辆从起点站开出的公交车停站的次数 X 的期望满足：

$$E(X) = \frac{1}{2}E(X_a) + \frac{1}{2}E(X_b) \tag{36}$$

其中，X_a 表示如果开出的是 a 车停站的次数，X_b 表示如果开出的是 b 车停站的次数。对 a 车和 b 车的讨论类似，我们这里这讨论 a 车的情况。我们有：

$$X_a = X_{a1} + X_{a2} + \cdots + X_{am}, \quad X_{at} = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 站有人下车} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 站没有人下车} \end{cases} \tag{37}$$

由于人数 K 服从参数为 λ 的泊松分布，则有：

$$P(X_{at} = 1|K = k) = 1 - P(X_{at} = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \tag{38}$$

所以：

$$\begin{aligned} E(X_{at}|K = k) &= 1 \times P(X_{at} = 1|K = k) + 0 \times P(X_{at} = 0|K = k) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \end{aligned} \tag{39}$$

因此：

$$\begin{aligned} E(X_{at}) &= E(E(X_{at}|K = k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} E(X_{at}|K = k)P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k\right) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}} \end{aligned} \tag{40}$$

所以我们可以得到：

$$\begin{aligned} E(X_a) &= E(X_{a1} + X_{a2} + \cdots + X_{am}) \\ &= E(X_{a1}) + E(X_{a2}) + \cdots + E(X_{am}) \\ &= m\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

同理我们可以得到：

$$E(X_b) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \tag{42}$$

所以：

$$E(X) = \frac{1}{2}\left(m\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right) + n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right) \tag{43}$$

□