

# 习题课 1

罗雁天

March 4, 2019

1. 在单位圆内随机挑选一条弦，请问弦长大于圆内接等边三角形边长的概率是多大。

解. 本题可以从三个方面考虑：

- 如果固定住弦的一个端点  $A$ ，考察另外一个端点  $B$ ，那么样本空间就是圆周，等概指的是  $B$  在圆周上均匀分布。那么服从要求的  $B$  必然落在以  $A$  为端点的圆内接等边三角形中  $A$  的对边所对应的劣弧中。这一段劣弧的长度恰为圆周长度的  $1/3$ ，因此所求概率为  $1/3$ 。
- 如果考察弦的中点  $O$ ，以单位圆盘作为样本空间，等概指的是  $O$  在圆盘上均匀分布。那么服从要求的  $O$  必然落在半径为  $1/2$  的单位圆的同心圆内。由于两个圆面积比为  $1/4$ ，因此所求概率为  $1/4$ 。
- 同样考察弦的中点  $O$ ，不过以与该弦垂直的半径作为样本空间，等概指的是  $O$  在该半径上均匀分布。那么服从要求的  $O$  必然落在靠近圆心的一半上。因此所求概率为  $1/2$ 。

三种角度三个答案，看似矛盾实际却很合理。样本空间不同导致概率模型本身存在差异，出现不同的结果也就不奇怪了。  $\square$

2. 假定某赌徒携带  $k$  元赌资进入赌场，赌博规则很简单，每赢一局则赢 1 元，否则输 1 元。假定每局赌博，赌徒赢的概率都是  $p$ ，且各局间相互独立。试问，赌徒将所带赌资全部输光，被迫离开赌场的概率有多大？

解. 设事件  $A_k$  表示赌徒拥有  $k$  元初始赌本并最终输光，事件  $W$  表示赌徒赢得一局。那么有：

$$P(A_k) = P(A_k|W)P(W) + P(A_k|W^c)P(W^c) \quad (1)$$

注意到  $P(A_k|W) = P(A_{k+1})$ ,  $P(A_k|W^c) = P(A_{k-1})$ ，我们有：

$$P(A_k) = pP(A_{k+1}) + (1-p)P(A_{k-1}) \quad (2)$$

其中  $p = P(W)$  表示赌徒赢一局的概率。通过此递推式我们可以得到：

$$P(A_k) = a + b \left( \frac{1-p}{p} \right)^k \quad (3)$$

其中  $a, b$  为确定性的参数，由初值决定。

注意到  $P(A_0) = 1$ ，因此我们可以得到  $a + b = 1$ ；由于  $0 \leq P(A_k) \leq 1$ 。因此我们有如下结论：

- i) 如果  $p < 0.5$  (大多数赌场都满足这一条件), 那么  $b = 0$ , 因此  $P(A_k) \equiv 1$ 。这一点不难理解, 如果赌徒赢面小, 那么输光应该是肯定的。
- ii) 如果  $p > 0.5$  (这种情况几乎不会出现), 那么

$$P(A_k) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k + a \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right) \quad (4)$$

- iii) 如果  $p = 0.5$  (赌场绝对公平), 那么  $P(A_k) \equiv 1$ 。这一点很让人惊讶。即使在绝对公平的赌场内, 赌徒输光也几乎是肯定的。

□

3. 考虑医疗诊断问题, 假设对于某种疾病, 诊断的正确率为  $p$ 。也就是说, 如果就诊者确实患有该病, 则医生能够以概率  $p$  做出准确诊断; 如果就诊者实际没有患该病, 医生做出正确判断的概率也是  $p$ 。假设疾病自身的发病率是  $q$ 。现已知某就诊者被医生诊断为患病, 则其实际患该病的概率是多少? 从中能得到什么结论呢?

解. 设事件  $A$  表示就诊者实际患病,  $D$  表示就诊者被诊断为患病, 那么由 Bayesian 公式:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|A^c)P(A^c)} \quad (5)$$

带入  $P(A) = q, P(A^c) = 1 - q, P(D|A) = p, P(D|A^c) = 1 - p$  得:

$$P(A|D) = \frac{pq}{pq + (1-p)(1-q)} \quad (6)$$

同理也可以得到:

$$P(A|D^c) = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p(1-q)} \quad (7)$$

下面我们通过一些有趣的计算来进一步认识这一问题。如果疾病的发病率很低 ( $q = 0.01$ ), 医生的医术值得信任, 诊断的正确率很高 ( $p = 0.99$ ), 那么在诊断患病的条件下, 我们有:

$$P(A|D) = \frac{0.99 \times 0.01}{0.99 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

也就是说, 真实患病的概率只有 50%。不难发现, 条件概率的计算中, 疾病本身较低的发病率使得医生判断的准确性大打折扣。尝试将发病率  $q$  升高至 0.5 (例如普通感冒), 那么在医生医术保持不变的情况下, 有:

$$P(A|D) = \frac{0.99 \times 0.5}{0.99 \times 0.5 + 0.01 \times 0.5} = 0.99 \quad (9)$$

可见, 对于普通常见病, 医生的水平能够得到充分的体现。但如果进一步降低发病率 ( $q = 0.001$ ), 即所谓“疑难杂症”, 如果维持医生水平不变, 那么:

$$P(A|D) = \frac{0.99 \times 0.001}{0.99 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999} = 0.09 \quad (10)$$

诊断的实际准确率连 10% 都不到，误报 (实际没病，诊断有病) 的概率达到了 90%。看起来，即使是非常称职的医生，当面临疑难杂症的时候也难免误报，患者应给予充分的理解，并在得知诊断结果之后保持冷静，争取用复诊的方法进一步确定是否患病。另一方面：

$$P(A|D^c) = \frac{0.01 \times 0.001}{0.01 \times 0.001 + 0.99 \times 0.999} \approx 10^{-5} \ll 1 \quad (11)$$

这说明，尽管误报的概率很高，但是漏报 (实际患病，诊断无病) 的概率却很低。所以，如果医生真的非常称职且水平很高，那么漏报性质的误诊率是能够充分降低的，即使面对的是十分罕见的疑难杂症。  $\square$