习题课 2

罗雁天

March 22, 2019

1. 再次考虑“匹配”问题。n 个人随机地选取帽子，试问恰好戴上了自己帽子的人数的期望是多少。

解. 带上自己帽子的人数 X 满足:

$$X = H_1 + H_2 + \cdots + H_n, \quad H_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 个人戴对帽子} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 个人戴错帽子} \end{cases} \tag{1}$$

则由

$$P(H_k = 1) = 1 - P(H_k = 0) = \frac{1}{n} \tag{2}$$

得到

$$E(H_k) = 1 \times P(H_k = 1) + 0 \times P(H_k = 0) = \frac{1}{n} \tag{3}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) \\ &= E(H_1) + E(H_2) + \cdots + E(H_n) \\ &= n \times \frac{1}{n} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

即戴上自己帽子的人数的期望值为 1。也就是说，平均只有一个人戴上自己的帽子。相比于上次习题课得到的人数分布的结果，这里给出的期望能够更加直观地表明恰好匹配 (戴上自己的帽子) 是较为困难的事情。 □

2. n 对夫妇共 2n 人呆在一个房间内，现从中随机挑选 m 个人走出房间，问房间内还剩下的未被拆散的夫妇数目的均值。

解. 房间内剩下的未被拆散的夫妇数目 X 满足

$$X = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \quad C_k = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 对夫妇在房间} \\ 0 & \text{第 } k \text{ 对夫妇不在房间} \end{cases} \tag{5}$$

则由

$$P(C_k=1)=1-P(C_k=0)=\frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}}=\left(1-\frac{m}{2n}\right)\left(1-\frac{m}{2n-1}\right) \tag{6}$$

得到

$$E(C_k)=1\times P(C_k=1)+0\times P(C_k=0)=\left(1-\frac{m}{2n}\right)\left(1-\frac{m}{2n-1}\right) \tag{7}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X)&=E(H_1+H_2+\cdots+H_n)\\ &=E(H_1)+E(H_2)+\cdots+E(H_n)\\ &=n\times\left(1-\frac{m}{2n}\right)\left(1-\frac{m}{2n-1}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

□

3. 某商场发行 n 种购物券，每一次在该商场购物，即可获得一张种类随机选取的购物券。该商场规定，如果能够收集齐所有的购物券，那么就可以得到该商场的大奖。问获得大奖所需要的购物次数的期望是多少。

解. 收集齐所有的购物券所需要的购物次数 X 可以写为

$$X=C_1+C_2+\cdots+C_n \tag{9}$$

其中 C_k 表示在收集到 $k-1$ 种购物券的前提下，收集到第 k 种购物券所需要的购物次数。由于手中已经有 $k-1$ 种购物券，因此收集到新购物券的可能只有 $n-k+1$ 种，所以 C_k 是几何分布随机变量，参数为 $p=(n-k+1)/n$，因此我们有：

$$E(C_k)=\frac{1}{p}=\frac{n}{n-k+1} \tag{10}$$

所以：

$$\begin{aligned} E(X)&=E(C_1+C_2+\cdots+C_n)\\ &=E(C_1)+E(C_2)+\cdots+E(C_n)\\ &=1+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-2}+\cdots+\frac{n}{1}\\ &=n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

由微积分的知识可以知道 $E(X)\approx n\ln n$，可见，当 n 较大时，如果想收集到所有的购物券，则需要付出数倍于购物券数目的购物次数 (以 30 张购物券为例，$\ln(30)\approx 3.4$) 。这正是商家的精明之处。 □

4. 设 R 罐中有 n 个红球，H 罐中有 n 个黑球。每次操作都从两个罐中各随机取出一球，交换放置 (R 罐中取出的放入 H 罐，H 罐中取出的放入 R 罐)，问 k 次操作后，R 罐中的红球数目的均值。

解. k 次操作后 R 罐的红球数目满足：

$$X = R_1 + R_2 + \cdots + R_n, \quad R_t = \begin{cases} 1 & \text{第 } t \text{ 个红球仍在 } R \text{ 罐} \\ 0 & \text{第 } t \text{ 对夫妇不在 } R \text{ 罐} \end{cases} \tag{12}$$

对于操作开始前 R 罐中原有的每一个红球而言，其经过 k 次操作仍回到 R 罐意味着被选中的次数为偶数 (从来未被选中意味着选中次数为 0，仍为偶数)。所以：

$$P(R_t = 1) = 1 - P(R_t = 0) = \sum_{m=2i} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-m} \tag{13}$$

根据二项式定理，我们可以计算出偶数次项的和可以计算如下：

$$\sum_{m=2i} \binom{k}{m} a^m b^{k-m} = \frac{1}{2}\left((b+a)^k + (b-a)^k\right) \tag{14}$$

所以：

$$\begin{aligned} P(R_t = 1) &= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right) \end{aligned} \tag{15}$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(R_1 + R_2 + \cdots + R_n) \\ &= E(R_1) + E(R_2) + \cdots + E(R_n) \\ &= \frac{n}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right) \end{aligned} \tag{16}$$

□