

二元一次不定方程

by luoyu_xingu

1. 解决 $ax + by = \gcd(a, b)$ 问题

过程如下:

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

$$bx_2 + (a - a/b * b)y_2 = \gcd(b, a \% b)$$

$$ay_2 + b * (x_2 - (a/b) * y_2) = \gcd(b, a \% b)$$

$$x = y_2, y = x_2 - a/b * y_2$$

.....

$$if(b == 0) : x = 1, y = 0$$

采用扩展欧几里得算法 (*exgcd*)

```
template <typename T, typename U>
void exgcd(T a, T b, U &x, U &y) {
    if (b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return;
    }

    exgcd(b, a % b, x, y);
    auto t = y;
    y = x - a / b * y;
    x = t;
}
```

2. 裴蜀定理

$ax + by = c$ 有解, 当且仅当 $\gcd(a, b) | c$

凭借直觉可证

3. 计算 $ax + by = c \ (\gcd(a, b) | c)$

$$d = c / \gcd(a, b)$$

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

$$\text{exgcd}(a, b, x, y)$$

$$x_0 = d * x, y_0 = d * y$$

4. 求 $ax + by = c$ 通解

$$x = x_0 + (b/d) * n$$

$$y = y_0 + (a/d) * n$$

其中 $n(1, 2, 3, 4, \dots)$

5. 扩展

1. 求乘法逆元

$$ax \% p = 1$$

$$ax + pb = 1$$

这里要求 a, p 互质

2. 求符合要求的特解

这里给出洛谷测试 <https://www.luogu.com.cn/problem/P5656> 下面是本蒟蒻的解答

https://github.com/luoyu-xingu/MODEL_luoyu/blob/main/model/Maths/exgcd.cpp