Appendix

A 引理 1 证明

现在给出引理 1 的证明：

Lemma 1. （引理 1）对于事件：

$$\xi_1 = \{\forall (h,i) \in T_t, \forall t : |\hat{\mu}^0_{h,i}(t) - f(\boldsymbol{v_{h,i}})| < B(T_{h,i}(t), \delta, t)\}$$

其以最少 $1-\delta$ 的概率成立。

用户对于一个视频的反馈可以视为一串独立同分布（i.i.d,independently identically distribution）的随机变量且范围为 [0,1]，定义事件 ξ_1^c 为事件 ξ_1 的对立事件，而后根据霍夫丁不等式，我们有：

$$\begin{aligned}
P[\xi_1^c] &\leq \sum_{(h,i)\in T_t} \sum_{T_{h,i}(t)=1}^{\infty} 2exp\left[\frac{-2T_{h,i}(t)^2}{T_{h,i}(t)\cdot 1^2} B(T_{h,i}(t),\delta,t)^2\right] \\
&= \sum_{(h,i)\in T_t} \sum_{T_{h,i}(t)=1}^{\infty} 2exp\left[ln\frac{3\delta}{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|}\right] \\
&= \sum_{(h,i)\in T_t} \sum_{T_{h,i}(t)=1}^{\infty} \frac{6\delta}{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|} \\
&= \sum_{(h,i)\in T_t} \frac{\delta}{|T_t|} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

因此有 $P[\xi_1] > 1-\delta$。

B 引理 2 证明

引理 2 如下：

Lemma 2. （引理 2）在事件 ξ_1 的情况下，对于 $\forall (h,i) \in T_t, \notin N_K(t), \forall (h_K, i_K) \in N_K(t), \forall t$，存在：

$$\hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) - f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) < B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t), \delta, t) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)$$

$\bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) = \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s\in\phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \lambda_s$

证明如下:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\\
&= \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s\in\phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \Big(r_s - \big[\hat{\mu}_{h,i}(s) - \hat{\mu}_{h_K,i_K}(s) + B(T_{h,i}(s),\delta,s) + B(T_{h_K,i_K}(s),\delta,s) + \lambda_s\big]^+\Big)\\
&\le \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s\in\phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \Big(r_s - \big[\hat{\mu}_{h,i}(s) - \hat{\mu}_{h_K,i_K}(s) + B(T_{h,i}(s),\delta,s) + B(T_{h_K,i_K}(s),\delta,s) + \lambda_s\big]\Big)\\
&\overset{(i)}{<} \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s\in\phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \Big(r_s - (f(\boldsymbol{v_{h,i}}) - f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) + \lambda_s)\Big)\\
&= \hat{\mu}^0_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) - f(\boldsymbol{v_{h,i}}) + f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) - \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s\in\phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \lambda_s\\
&= \hat{\mu}^0_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) - f(\boldsymbol{v_{h,i}}) + f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\\
&\overset{(ii)}{<} f(\boldsymbol{v_{h,i}}) + B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t),\delta,t) - f(\boldsymbol{v_{h,i}}) + f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\\
&= B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t),\delta,t) + f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) \rightarrow\\
&\hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) - f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) < B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t),\delta,t) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)
\end{aligned}
$$

引理 2得证。(i) 是因为事件 ξ_1 的条件，而 (ii) 是因为 $\{r_s\}_{s\in\phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)}$ 也是一串独立同分布的随机变量因此我们可以使用事件 ξ_1 对其进行处理。

C 引理 3 证明

引理 3 如下:

Lemma 3. （引理 3）在引理 2的条件下，对于 $\forall(h,i)\in T_t, \notin N_K(t), \forall(h_K,i_K)\in N_K(t), \forall t$ 存在:

$$\hat{\mu}_{h,i}(t) < \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) + B\Big(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|},\delta,t\Big) - \bar{\lambda}_{h,i}(t)$$

$\bar{\lambda}_{h,i}(t) = \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} \lambda_s$

证明如下：

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu}_{h,i}(t)\\
&=\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} r_s\\
&=\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{(h_K,i_K)\in N_K(t)} \hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\cdot T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\\
&\overset{(i)}{<}\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{(h_K,i_K)\in N_K(t)} \big(f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}})+B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t),\delta,t)-\bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\big)\cdot T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\\
&=\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}})+\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{(h_K,i_K)\in N_K(t)} T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t),\delta,t)-\bar{\lambda}_{h,i}(t)\\
&=\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}})+\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{(h_K,i_K)\in N_K(t)} \sqrt{\frac{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)}{2}ln\frac{\pi^2 T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)^2|T_t|}{3\delta}}-\bar{\lambda}_{h,i}(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(i) 使用了引理 2。我们定义一个函数 $g(N)=\sqrt{\frac{N}{2}ln\frac{\pi^2N^2|T_t|}{3\delta}}(N\geq 1)$，因为 $g(N)''<0$ 成立，因此 g(N) 是一个上凸函数，而后我们有：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(h_K,i_K)\in N_K(t)} g(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t))\\
&<|N_K(t)|g\big(\frac{1}{|N_K(t)|}\sum_{(h_K,i_K)\in N_K(t)} T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)\big)\\
&=|N_K(t)|g(\frac{1}{|N_K(t)|}T_{h,i}(t))
\end{aligned}
$$

基于以上，我们继续处理 (1) 式，

$$
\begin{aligned}
(1)&<\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}})+\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sqrt{\frac{|N_K(t)|\cdot T_{h,i}(t)}{2}ln\frac{\pi^2T_{h,i}(t)^2|T_t|}{3\delta\cdot|N_K(t)|^2}}-\bar{\lambda}_{h,i}(t)\\
&=\frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}})+B(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|},\delta,t)-\bar{\lambda}_{h,i}(t)
\end{aligned}
$$

引理 3 得证。

D 引理 4 证明

引理 4 是关于覆盖树 T_t 高度的相关结论，也就是：

Lemma 4. （引理 4）

$$
H(t)\leq H(t)_{max}<log_m\big[\frac{\nu_1^2(1-\rho^2)t}{c^2}+1\big]+1
$$

$m=\rho^{-2}$, $c=2\sqrt{1/(1-\rho)}$

根据 HCT 算法，一个叶子节点 (h,i) 当 $\nu_1\rho^h \geq c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}$ 成立时被扩展，因此我们有：

$$T_{h,i}(t) \geq \frac{c^2 ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{\nu_1^2}\rho^{-2h} \geq \frac{c^2}{\nu_1^2}\rho^{-2h}$$

显然，当此覆盖树是一个线性树，也就是，在每一层只有一个节点被扩展时，树的高度最大，因此我们有：

$$\begin{aligned}
T &\geq \sum_{h=1}^{H(T)-1} \frac{c^2}{\nu_1^2}\rho^{-2h} = \frac{c^2}{\nu_1^2}\sum_{h=1}^{H(T)-1}\rho^{-2h} \\
&= \frac{c^2}{\nu_1^2}\rho^{-2}\frac{1-\rho^{-2(H(T)-1)}}{1-\rho^{-2}} \\
&= \frac{c^2}{\nu_1^2}\frac{\rho^{-2(H(T)-1)}-1}{1-\rho^2} \rightarrow \\
\rho^{-2(H(T)-1)} - 1 &\leq \frac{\nu_1^2(1-\rho^2)T}{c^2} \rightarrow \\
H(T) &\leq log_{\rho^{-2}}\Big[\frac{\nu_1^2(1-\rho^2)T}{c^2}+1\Big]+1
\end{aligned}$$

引理 4得证。

E 引理 5 证明

引理 5 是关于覆盖树 T_t 节点个数的相关结论，也就是：

Lemma 5. （引理 5）

$$|T_t| \leq |T_t|_{max} < 4\Big(t\nu_1^2(2-\rho^2)/(2c^2)+1\Big)^E - 1$$

$E = log_{2\rho^{-2}}2.$

如引理 4中所说，一个叶子节点在满足条件 $T_{h,i}(t) \geq \frac{c^2}{\nu_1^2}\rho^{-2h}$ 时被扩展，随着高度增加，被扩展时所需的的阈值也就越大，显然，当 HCT 的覆盖树是一个完全二叉树时，其节点数最多，因此我们有：

$$\begin{aligned}
T &\geq \sum_{h=1}^{H(T)-1} \frac{c^2}{\nu_1^2}\rho^{-2h}\cdot 2^h = \sum_{h=1}^{H(T)-1}\frac{c^2}{\nu_1^2}(2\rho^{-2})^h \\
&= 2\frac{c^2}{\nu_1^2}\frac{(2\rho^{-2})^{H(T)-1}-1}{2-\rho^2} \rightarrow \\
(2\rho^{-2})^{H(T)-1} - 1 &\leq \frac{T\nu_1^2(2-\rho^2)}{2c^2} \rightarrow \\
H(T) &\leq log_{2\rho^{-2}}\Big[\frac{T\nu_1^2(2-\rho^2)}{2c^2}+1\Big]+1
\end{aligned}$$

而后我们使用 $2^{H(T)+1}-1$ 去计算节点数并得到引理 5。

F 结论 1 证明

结论 1 展示了攻击消耗的上界，也就是：

Theorem 1. （结论 1）

$$
\begin{aligned}
C(T) &\leq 2(f_{max} - f_{min} + 4B(1,\delta,T))|T_T| \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(T)|}{2} ln \frac{\pi^2 T^2 |T_T|}{3\delta \cdot |N_K(T)|^2}} + 2c\sqrt{ln(1/\tilde{\delta}(T^+))}\right)^2}{\alpha_T^2} \\
&= O(\frac{1}{\alpha_T^2}(lnT)^3 T^E)
\end{aligned}
$$

以最少 $(1-\delta)(1-\delta_u)$ 的概率成立，其中 $E = log_{2\rho^{-2}} 2$, $T^+ = 2^{\lfloor lnT \rfloor + 1}$, $\tilde{\delta}(t) = min\{c_1 \delta_u / t, 1\}(c_1 = \sqrt[8]{\rho/(3\nu_1)})$ 且 $\alpha_T > \min_{(h_a,i_a),(h_b,i_b)\in T_T} \{|f(\boldsymbol{v_{h_a,i_a}}) - f(\boldsymbol{v_{h_b,i_b}})|\}$.

首先我们假设在第 t 轮，用户沿着路径 P_t 选择了一个不包含目标视频 v_K 的节点 (h,i)，对于此路径我们有：

$$
B_{h',i'}(t) \leq U_{h,i}(t)(h' < h, (h',i') \in P_t). \tag{2}
$$

其中 $B_{h,i}(t)$，$U_{h,i}(t)$ 为节点 (h,i) 截止轮次 t 的两个置信上界。因为根节点包含视频 v_K，因此在此路径中，一定存在一个节点 $(h_K,i_K)(h_K < h)$ 包含目标视频 v_K。同时，因为在用户选择了一个包含视频 v_K 的节点时，攻击者不会攻击，因此我们仍然可以使用 HCT 算法的性质，也就是，论文 [azar, M.G., Lazaric, A. Brunskill, E.. (2014). Online Stochastic Optimization under Correlated Bandit Feedback.[C] Proceedings of the 31st In-ternational Conference on Machine Learning, in PMLR 32(2):1557-1565] 引理 3（Lemma 3）中的事件 ξ_t 来对其进行分析，在事件 ξ_t 下，我们有：

$$
\begin{aligned}
U_{h_K,i_K}(t) &= \hat{\mu}_{h_K,i_K}(t) + \nu_1 \rho^{h_K} + \sqrt{\frac{c^2 \log(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h_K,i_K}(t)}} \\
&\overset{(i)}{\geq} f(\boldsymbol{v_{h_K,i_K}}) + \nu_1 \rho^{h_K} \\
&\geq f(\boldsymbol{v_K}).
\end{aligned}
$$

(i) 是在事件 ξ_t $(P[\xi_t] \geq 1-\delta_u)$ 的条件下。对于包含视频 $\boldsymbol{v_K}$ 的叶子节点 (h_n,i_n)，显然，我们有：

$$
B_{h_n,i_n}(t) = U_{h_n,i_n}(t) \geq f(\boldsymbol{v_K}),
$$

并且根据在 HCT 算法中 B 值的定义，我们有：

$$
B_{h_K,i_K}(t) = \min \left[U_{h_K,i_K}(t), \max_{j\in\{2i_K-1,2i_K\}} B_{h_K+1,j}(t) \right], \tag{3}
$$

成立, 并且在节点 $(h_K+1, 2i_K-1)$ 以及 $(h_K+1, 2i_K)$ 之间, 必然存在一个节点包含视频 v_K, 并且节点 (h_K,i_K) 一定是节点 (h_n,i_n) 的祖先，现在通过式 (3)，从节点 (h_n,i_n) 迭代至节点 (h_K,i_K)，我们可以证明 $B_{h_K,i_K}(t)$ 仍然是 $f(v_K)$ 的一个上界。

而后根据式 (2)，我们有：

$$
\begin{aligned}
&U_{h,i}(t) \geq B_{h_K,i_K}(t) > f(\boldsymbol{v_K}) \rightarrow \\
&\hat{\mu}_{h,i}(t) + \nu_1\rho^h + c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \geq f(\boldsymbol{v_K}) \overset{(i)}{\rightarrow} \\
&f(\boldsymbol{v_K}) \leq \frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) + B(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|},\delta,t) - \bar{\lambda}_{h,i}(t) + \nu_1\rho^h + c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \\
&\quad \overset{(ii)}{<} \frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) + B(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|},\delta,t) - \bar{\lambda}_{h,i}(t) + 2c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \rightarrow \\
&f(\boldsymbol{v_K}) + \bar{\lambda}_{h,i}(t) - \frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) < B(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|},\delta,t) + 2c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \rightarrow \\
&\quad \alpha_t < B(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|},\delta,t) + 2c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}\big(\alpha_t = f(\boldsymbol{v_K}) + \bar{\lambda}_{h,i}(t) - \frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}})\big) \\
&\qquad = \sqrt{\frac{|N_K(t)|}{2T_{h,i}(t)} ln\frac{\pi^2 T_{h,i}(t)^2|T_t|}{3\delta\cdot|N_K(t)|^2}} + 2c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}
\end{aligned}
$$

(i) 是因为在引理 3的条件下，(ii) 是因为在 HCT 算法中，每一轮被选择的节点满足条件 $\nu_1\rho^h < c\sqrt{\frac{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}$。我们把 $T_{h,i}(t)$ 看作未知量，而后解上述不等式得到：

$$
T_{h,i}(t) < \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(t)|}{2} ln\frac{\pi^2 T_{h,i}(t)^2|T_t|}{3\delta\cdot|N_K(t)|^2}} + 2c\sqrt{ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}\right)^2}{\alpha_t^2}
$$

设不包含目标视频 $\boldsymbol{v_K}$ 的节点截止轮次 t 被选择的次数为 $A(t)$，因此我们有：

$$
\begin{aligned}
A(T) &= \sum_{(h,i)\in T_T, \boldsymbol{v_K}\notin\mathcal{P}_{h,i}} T_{h,i}(T) \\
&< \sum_{(h,i)\in T_T, \boldsymbol{v_K}\notin\mathcal{P}_{h,i}} \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(T)|}{2} ln\frac{\pi^2 T_{h,i}(T)^2|T_T|}{3\delta\cdot|N_K(T)|^2}} + 2c\sqrt{ln(1/\tilde{\delta}(T^+))}\right)^2}{\alpha_T^2} \\
&< |T_T|\frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(T)|}{2} ln\frac{\pi^2 T^2|T_T|}{3\delta\cdot|N_K(T)|^2}} + 2c\sqrt{ln(1/\tilde{\delta}(T^+))}\right)^2}{\alpha_T^2}
\end{aligned} \tag{4}
$$

因为 $\boldsymbol{v_K} \in (h_{Ks}, i_{Ks})$，因此近似地，我们认为 $f(v_K) \approx \frac{1}{T_{h,i}(t)}\sum_{s\in\phi_{h,i}(t)} f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}})$，而后便有 $\alpha_t \approx \bar{\lambda}_{h,i}(t) > \min_{(h_a,i_a),(h_b,i_b)\in T_t}\{|f(\boldsymbol{v_{h_a,i_a}}) - f(\boldsymbol{v_{h_b,i_b}})|\}$。同时，我们定义函数 $h(N) = B(N,\delta,t)(N \geq 1)$，显然，函数 $h(N)$ 是一个单调递减函数，因此有 $h(1) \geq h(N)$。而后对于 $\forall(h_a,i_a),(h_b,i_b) \in T_t$，存

在：

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu}^0_{h_a,i_a}(t) - \hat{\mu}^0_{h_b,i_b}(t) + B(T_{h_a,i_a}(t),\delta,t) + B(T_{h_b,i_b}(t),\delta,t) \\
&< \big(\hat{\mu}^0_{h_a,i_a}(t) - B(T_{h_a,i_a}(t),\delta,t)\big) - \big(\hat{\mu}^0_{h_b,i_b}(t) + B(T_{h_b,i_b}(t),\delta,t)\big) + 2B(T_{h_a,i_a}(t),\delta,t) + 2B(T_{h_b,i_b}(t),\delta,t) \\
&\overset{(i)}{<} f(\boldsymbol{v_{h_a,i_a}}) - f(\boldsymbol{v_{h_b,i_b}}) + 2B(T_{h_a,i_a}(t),\delta,t) + 2B(T_{h_b,i_b}(t),\delta,t) \\
&< f(\boldsymbol{v_{h_a,i_a}}) - f(\boldsymbol{v_{h_b,i_b}}) + 4B(1,\delta,t) \\
&< f_{max} - f_{min} + 4B(1,\delta,t)
\end{aligned}
$$

(i) 是在事件 ξ_1 的条件下。

而后我们给出 $|\eta_t|$ 的一个上界，也就是：

$$
|\eta_t| \leq I\{(h_t,i_t) \notin N_K(t)\}\Big(2\big(f_{max} - f_{min} + 4B(1,\delta,t)\big)\Big) \tag{5}
$$

最后，结合式 (4)，式 (5)，引理 4以及引理 5，我们得到结论 1。

G 结论 2 证明

此结论给出了一个 HCT 算法在我们所提出的攻击下期望回归的一个下界，也就是：

Theorem 2. （结论 2）

$$
\begin{aligned}
R(T) > &\ \Omega\big[(f_{max} - f(\boldsymbol{v_K}))A - \sqrt{2Aln(A/\delta)}\big] \\
&+ \Omega\big[(f_{max} - f(\boldsymbol{v_K}))B - (ln(B/\delta_u))^{1/(d+2)}B^{(d+1)/(d+2)} - \sqrt{2Bln(B/\delta)}\big] \\
&= \Omega((f_{max} - f(\boldsymbol{v_K}))T)
\end{aligned}
$$

以最少 $(1-\delta_u)(1-\delta)$ 的概率成立。

根据对于期望回归的定义，有：

$$
\begin{aligned}
R(T) &= Tf_{max} - \sum_{t=1}^{T} r_t \\
&= \sum_{t=1}^{T}(f_{max} - r_t) \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f_{max} - r_s) + \sum_{s\in\mathcal{A}}(f_{max} - r_s) \\
&= \widehat{R}(T) + \tilde{R}(T)
\end{aligned}
$$

接下来我们开始处理 $\widehat{R}(T)$，对于集合 $\mathcal{A}^c$ 中的轮次，攻击者不进行攻击，也就是说用户选择了一

个包含目标视频 $\boldsymbol{v_K}$ 的节点 (h,i)。首先，我们对 $\widehat{R}(T)$ 进行一些转换如下：

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(T) &= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f_{max} - r_s) \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f_{max} - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}}) + f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}}) - r_s) \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}[f_{max} - f(\boldsymbol{v_K}) + f(\boldsymbol{v_K}) - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}}) + f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}}) - r_s] \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f_{max} - f(\boldsymbol{v_K})) - \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}}) - f(\boldsymbol{v_K})) - \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(r_s - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}})) \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f_{max} - f(\boldsymbol{v_K})) - (a) - (b).
\end{aligned} \tag{6}$$

对于 (b)，我们这里先定义 $X_n = \sum_{s=1}^{n}(r_s - f(\boldsymbol{v_s}))$，且 $E(r_s - f(\boldsymbol{v_s})) = 0$，因此有 $E(X_{n+1}|X_1...X_n) = X_n$，因此 X_n 是鞅，并且 $r_s \in [0,1]$，因此有 $|X_n - X_{n-1}| \le 1$，那么我们可以得到：

$$(b) = \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(r_s - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}})) \le \sqrt{2Blog(B/\delta)}. \tag{7}$$

以最少 $1-\delta/B$ 的概率成立。

而后对于 (a)，我们有：

$$\begin{aligned}
(a) &= \sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f(v_{h_s,i_s}) - f(v_K)) \\
&= \sum_{(h,i)\in T_t}\sum_{s\in\mathcal{A}^c}(f(v_{h,i}) - f(v_K))I_{(h_s,i_s)=(h,i)} \\
&\le \sum_{(h,i)\in T_t}\sum_{s\in\mathcal{A}^c}(\nu_1\rho^h)I_{(h_s,i_s)=(h,i)} \\
&\overset{(i)}{\le} \sum_{(h,i)\in T_t}\sum_{s\in\mathcal{A}^c} c\sqrt{\frac{log(1/\tilde{\delta}(s^+))}{T_{h,i}(s)}}I_{(h_s,i_s)=(h,i)} \\
&\overset{(ii)}{\le} \left(\frac{2^{2(d+3)}\nu_1^{2(d+1)}C\nu_2^{-d}\rho^d}{(1-\rho)^{d/2+3}}\right)^{\frac{1}{d+2}}\left(\log\left(\frac{2B}{\delta_u}\sqrt[8]{\frac{3\nu_1}{\rho}}\right)\right)^{\frac{1}{d+2}}B^{\frac{d+1}{d+2}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

I_ξ 是指示函数，如果 ξ 成立则取值为 1，否则为 0。(i) 是因为在 HCT 算法在每一轮 t 选择的节点满足以下条件，也就是：

$$\nu_1\rho^h < c\sqrt{\frac{\log(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}. \tag{9}$$

(ii) 是根据论文 [azar, M.G., Lazaric, A. Brunskill, E.. (2014). Online Stochastic Optimization under Correlated Bandit Feedback.[C] Proceedings of the 31st In-ternational Conference on Machine Learning, in PMLR 32(2):1557-1565] 中关于 HCT 算法期望回归（regret）的结论 1（***Theorem* 1**），其以最少 $1-\delta_u$ 的概率成立。

而后结合式 (6)、(7) 以及 (8)，我们得到：

$$\widehat{R}(T) \geq B(f_{max} - f(\boldsymbol{v_K})) - \sqrt{2Blog(B/\delta)} - \\ \left(\frac{2^{2(d+3)}\nu_1^{2(d+1)}C\nu_2^{-d}\rho^d}{(1-\rho)^{d/2+3}}\right)^{\frac{1}{d+2}}\left(\log\left(\frac{2B}{\delta_u}\sqrt[8]{\frac{3\nu_1}{\rho}}\right)\right)^{\frac{1}{d+2}} B^{\frac{d+1}{d+2}}. \tag{10}$$

而后我们分析 $\tilde{R}(T)$，也就是：

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(T) &= \sum_{s\in\mathcal{A}}(f_{max} - r_s) \\
&\geq \sum_{s\in\mathcal{A}}\left(f_{max} - (r_s^0 - \hat{\mu}^0_{h_s,i_s}(s) + \hat{\mu}^0_{h_{Ks},i_{Ks}}(s) - B(T_{h_s,i_s}(s),\delta,s) - B(T_{h_{Ks},i_{Ks}}(s),\delta,s) - \lambda_s)\right) \\
&\overset{(i)}{\geq} \sum_{s\in\mathcal{A}}\left(f_{max} - (r_s^0 - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}}) + f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) - \lambda_s)\right) \\
&\geq \sum_{s\in\mathcal{A}}\left[f_{max} - f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) - (r_s^0 - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}})) + \lambda_s\right] \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}}\left[f_{max} - f(\boldsymbol{v_K}) + [\lambda_s - (f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) - f(\boldsymbol{v_K}))] - (r_s^0 - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}})\right] \\
&= \sum_{s\in\mathcal{A}}\left[f_{max} - f(\boldsymbol{v_K})\right] + (c) - (d)
\end{aligned} \tag{11}$$

对于 (d)，类似于 (b)，根据吾妻不等式，可以得到：

$$(d) = \sum_{s\in\mathcal{A}}(r_s^0 - f(\boldsymbol{v_{h_s,i_s}})) \leq \sqrt{2Alog(A/\delta)} \tag{12}$$

以最少 $1-\delta/A$ 的概率成立。

对于 (c)，根据 λ_s 的定义以及 $\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}, \boldsymbol{v_K} \in \mathcal{P}_{h_{Ks},i_{Ks}}$ 的事实，而有：

$$(c) = \sum_{s\in\mathcal{A}}\lambda_s - (f(\boldsymbol{v_{h_{Ks},i_{Ks}}}) - f(\boldsymbol{v_K})) > 0$$

而后结合式 (11) 以及 (12)，我们得到：

$$\tilde{R}(T) > A(f_{max} - f(\boldsymbol{v_K})) - \sqrt{2Alog(A/\delta)} \tag{13}$$

最后，我们结合式 (10) 以及 (13) 得到结论 2。

H 附加实验

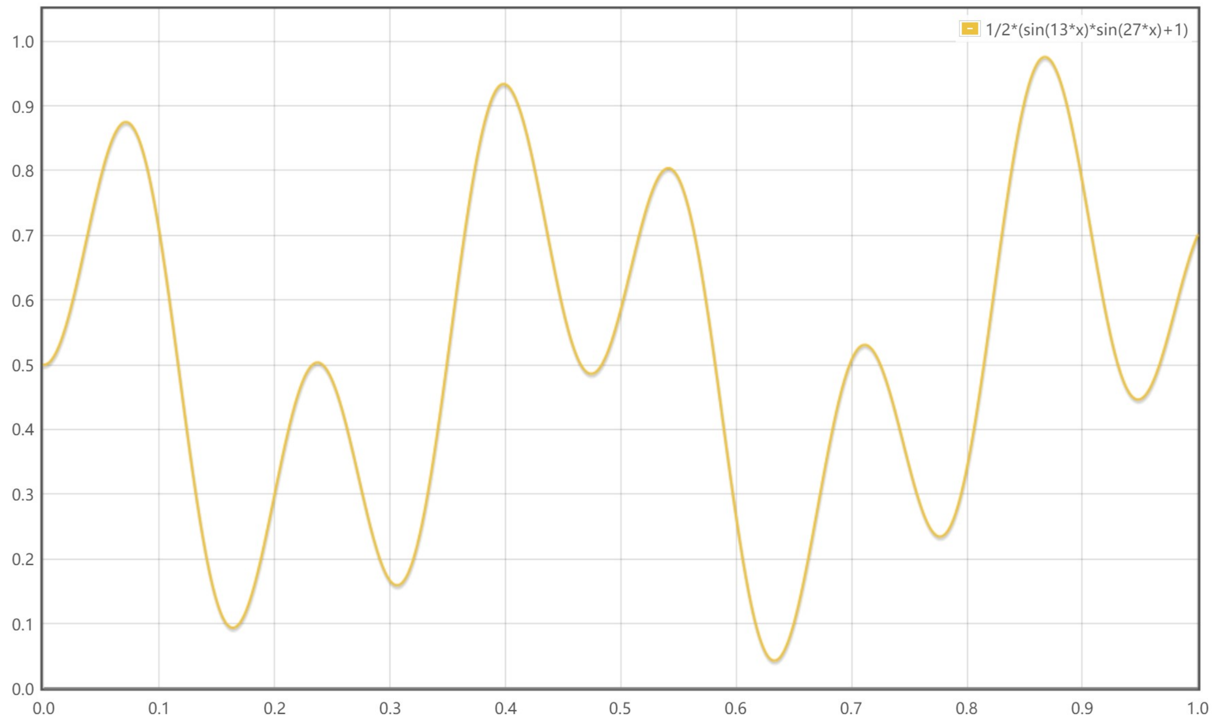
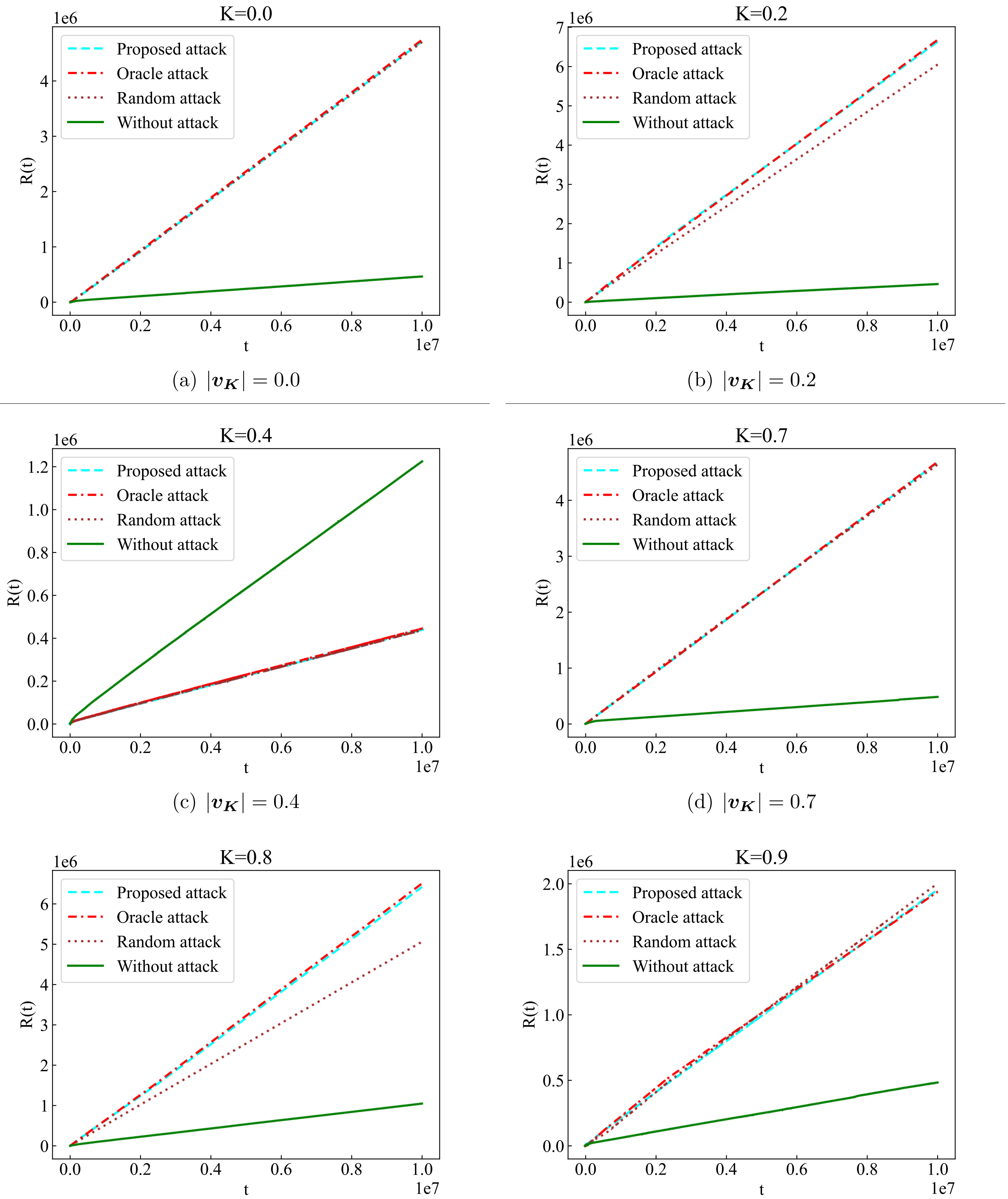


Figure 1: $f(x) = 1/2(sin(13x)sin(27x) + 1)$



(a) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.0$

(b) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.2$

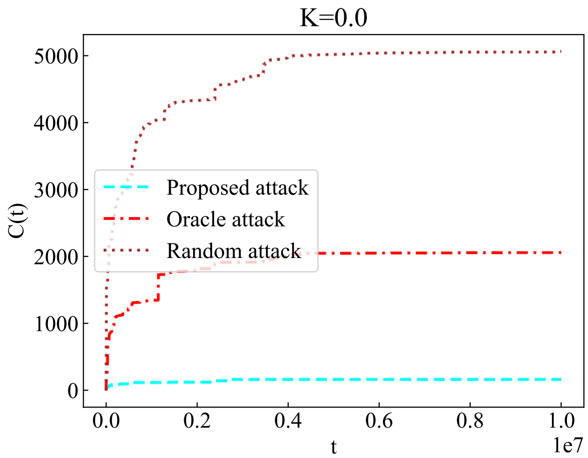
(c) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.4$

(d) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.7$

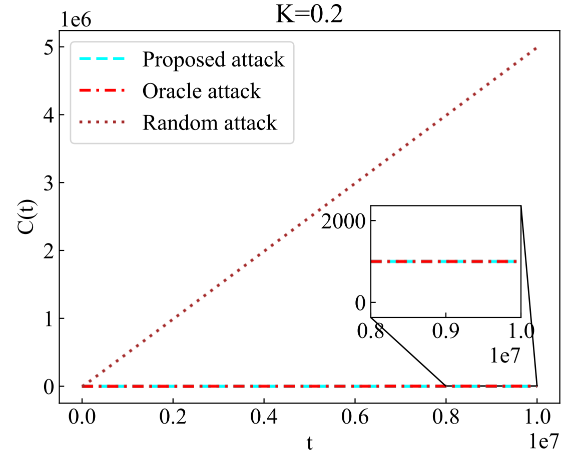
(e) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.8$

(f) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.9$

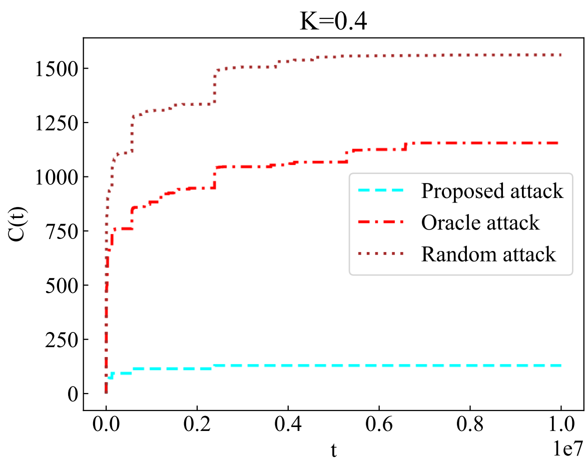
Figure 2: $R(t) - t$ 曲线图



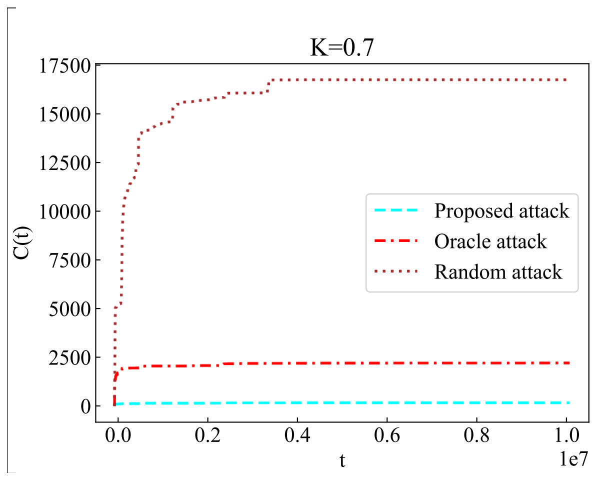
(a) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.0$



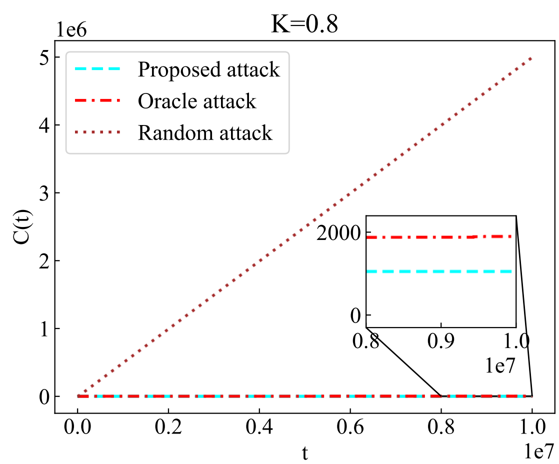
(b) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.2$



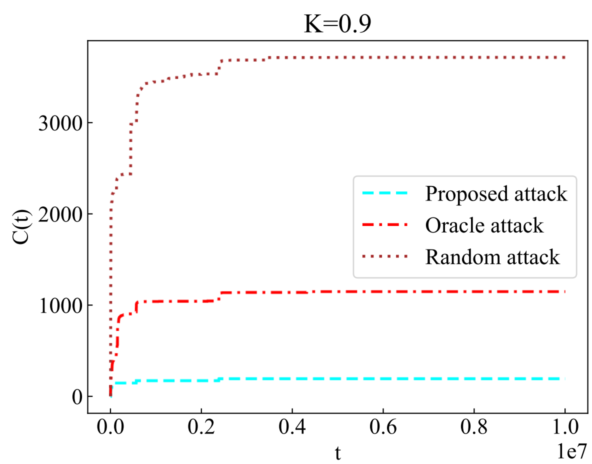
(c) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.4$



(d) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.7$

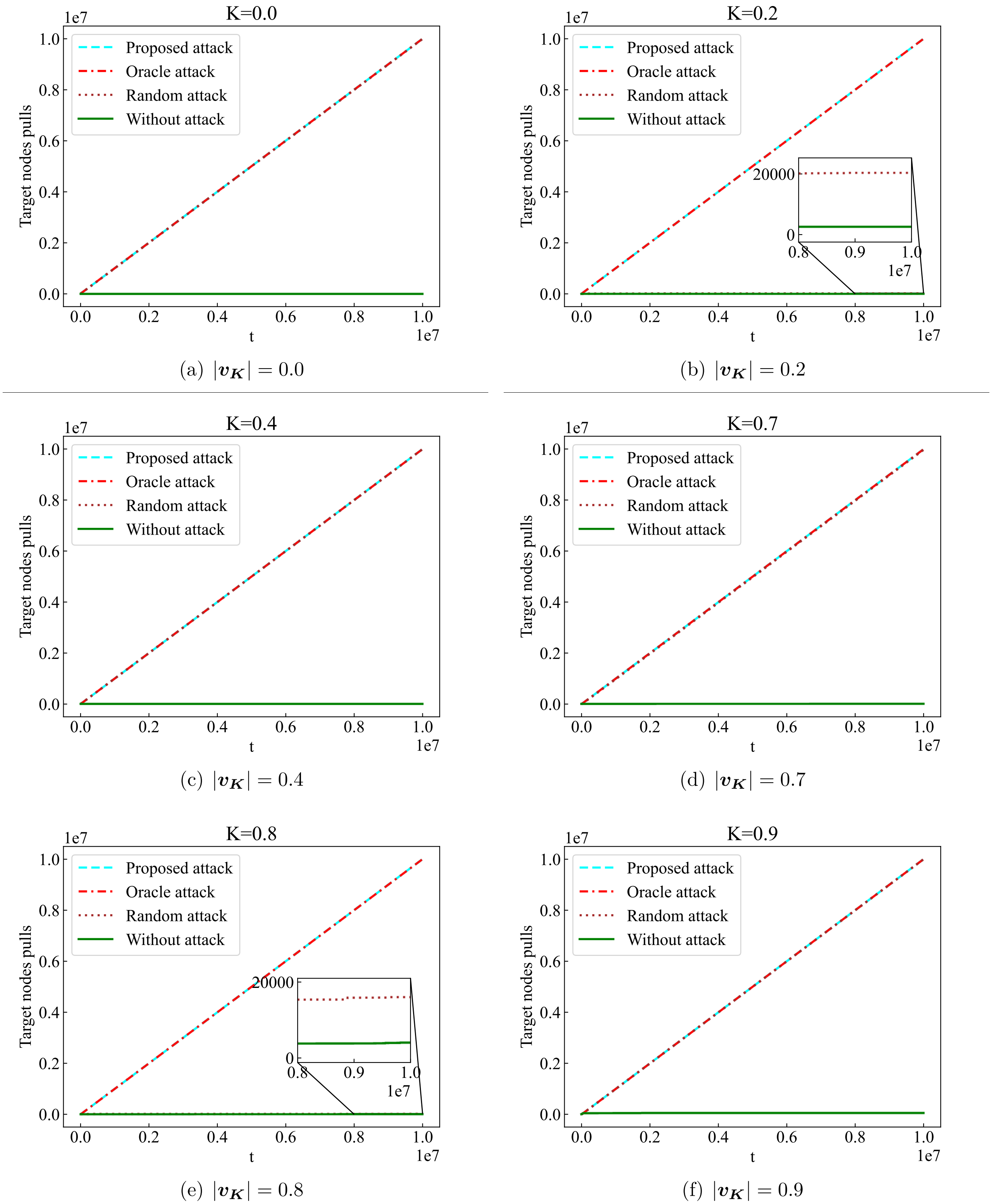


(e) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.8$



(f) $|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}| = 0.9$

Figure 3: $C(t) - t$ 曲线图



(a) $|\boldsymbol{v_K}| = 0.0$

(b) $|\boldsymbol{v_K}| = 0.2$

(c) $|\boldsymbol{v_K}| = 0.4$

(d) $|\boldsymbol{v_K}| = 0.7$

(e) $|\boldsymbol{v_K}| = 0.8$

(f) $|\boldsymbol{v_K}| = 0.9$

Figure 4: Target nodes pulls$-t$ 曲线图