

附录

A 引理 1 证明

现在给出引理 1 的证明：

Lemma 1. (引理 1) 对于事件：

$$\xi_1 = \{\forall (h, i) \in T_t, \forall t : |\hat{\mu}_{h,i}^0(t) - f(\mathbf{v}_{h,i})| < B(T_{h,i}(t), \delta, t)\}$$

其以最少 $1 - \delta$ 的概率成立。

用户对于一个视频的反馈可以视为一串独立同分布 (i.i.d, independently identically distribution) 的随机变量且范围为 $[0, 1]$ ，定义事件 ξ_1^c 为事件 ξ_1 的对立事件，而后根据霍夫丁不等式，我们有：

$$\begin{aligned} P[\xi_1^c] &\leq \sum_{(h,i) \in T_t} \sum_{T_{h,i}(t)=1}^{\infty} 2\exp\left[\frac{-2T_{h,i}(t)^2}{T_{h,i}(t) \cdot 1^2} B(T_{h,i}(t), \delta, t)^2\right] \\ &= \sum_{(h,i) \in T_t} \sum_{T_{h,i}(t)=1}^{\infty} 2\exp\left[\ln \frac{3\delta}{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|}\right] \\ &= \sum_{(h,i) \in T_t} \sum_{T_{h,i}(t)=1}^{\infty} \frac{6\delta}{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|} \\ &= \sum_{(h,i) \in T_t} \frac{\delta}{|T_t|} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

因此有 $P[\xi_1] > 1 - \delta$ 。

B 引理 2 证明

引理 2 如下：

Lemma 2. (引理 2) 在事件 ξ_1 的情况下，对于 $\forall (h, i) \in T_t, \notin N_K(t), \forall (h_K, i_K) \in N_K(t), \forall t$ ，存在：

$$\hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) - f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) < B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t), \delta, t) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)$$

$$\bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) = \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s \in \phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \lambda_s$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
& \hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) \\
&= \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s \in \phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} (r_s - [\hat{\mu}_{h,i}(s) - \hat{\mu}_{h_K,i_K}(s) + B(T_{h,i}(s), \delta, s) + B(T_{h_K,i_K}(s), \delta, s) + \lambda_s]^+) \\
&\leq \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s \in \phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} (r_s - [\hat{\mu}_{h,i}(s) - \hat{\mu}_{h_K,i_K}(s) + B(T_{h,i}(s), \delta, s) + B(T_{h_K,i_K}(s), \delta, s) + \lambda_s]) \\
&\stackrel{(i)}{<} \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s \in \phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} (r_s - (f(\mathbf{v}_{h,i}) - f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) + \lambda_s)) \\
&= \hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}^0(t) - f(\mathbf{v}_{h,i}) + f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) - \frac{1}{T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \sum_{s \in \phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)} \lambda_s \\
&= \hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}^0(t) - f(\mathbf{v}_{h,i}) + f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) \\
&\stackrel{(ii)}{<} f(\mathbf{v}_{h,i}) + B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t), \delta, t) - f(\mathbf{v}_{h,i}) + f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) \\
&= B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t), \delta, t) + f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) \rightarrow \\
&\hat{\mu}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t) - f(\mathbf{v}_{h_K,i_K}) < B(T_{(h,i),(h_K,i_K)}(t), \delta, t) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)
\end{aligned}$$

引理 2 得证。(i) 是因为事件 ξ_1 的条件，而 (ii) 是因为 $\{r_s\}_{s \in \phi_{(h,i),(h_K,i_K)}(t)}$ 也是一串独立同分布的随机变量因此我们可以使用事件 ξ_1 对其进行处理。

C 引理 3 证明

引理 3 如下：

Lemma 3. (引理 3) 在引理 2 的条件下，对于 $\forall (h,i) \in T_t, \notin N_K(t), \forall (h_K,i_K) \in N_K(t), \forall t$ 存在：

$$\hat{\mu}_{h,i}(t) < \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_K s, i_K s}) + B\left(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|}, \delta, t\right) - \bar{\lambda}_{h,i}(t)$$

$$\bar{\lambda}_{h,i}(t) = \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} \lambda_s$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
& \hat{\mu}_{h,i}(t) \\
&= \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} r_s \\
&= \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{(h_K, i_K) \in N_K(t)} \hat{\mu}_{(h,i),(h_K, i_K)}(t) \cdot T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t) \\
&\stackrel{(i)}{<} \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{(h_K, i_K) \in N_K(t)} (f(\mathbf{v}_{h_K, i_K}) + B(T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t), \delta, t) - \bar{\lambda}_{(h,i),(h_K, i_K)}(t)) \cdot T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t) \\
&= \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_K, i_K}) + \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{(h_K, i_K) \in N_K(t)} T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t) B(T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t), \delta, t) - \bar{\lambda}_{h,i}(t) \\
&= \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_K, i_K}) + \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{(h_K, i_K) \in N_K(t)} \sqrt{\frac{T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t)}{2} \ln \frac{\pi^2 T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t)^2 |T_t|}{3\delta}} - \bar{\lambda}_{h,i}(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

(i) 使用了引理 2。我们定义一个函数 $g(N) = \sqrt{\frac{N}{2} \ln \frac{\pi^2 N^2 |T_t|}{3\delta}}$ ($N \geq 1$)，因为 $g(N)'' < 0$ 成立，因此 $g(N)$ 是一个上凸函数，而后我们有：

$$\begin{aligned}
& \sum_{(h_K, i_K) \in N_K(t)} g(T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t)) \\
&< |N_K(t)| g\left(\frac{1}{|N_K(t)|} \sum_{(h_K, i_K) \in N_K(t)} T_{(h,i),(h_K, i_K)}(t)\right) \\
&= |N_K(t)| g\left(\frac{1}{|N_K(t)|} T_{h,i}(t)\right)
\end{aligned}$$

基于以上，我们继续处理 (1) 式，

$$\begin{aligned}
(1) &< \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_K, i_K}) + \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sqrt{\frac{|N_K(t)| \cdot T_{h,i}(t)}{2} \ln \frac{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|}{3\delta \cdot |N_K(t)|^2}} - \bar{\lambda}_{h,i}(t) \\
&= \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_K, i_K}) + B\left(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|}, \delta, t\right) - \bar{\lambda}_{h,i}(t)
\end{aligned}$$

引理 3 得证。

D 引理 4 证明

引理 4 是关于覆盖树 T_t 高度的相关结论，也就是：

Lemma 4. (引理 4)

$$H(t) \leq H(t)_{\max} < \log_m \left[\frac{\nu_1^2 (1 - \rho^2) t}{c^2} + 1 \right] + 1$$

$$m = \rho^{-2}, c = 2\sqrt{1/(1 - \rho)}$$

根据 HCT 算法，一个叶子节点 (h, i) 当 $\nu_1 \rho^h \geq c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}$ 成立时被扩展，因此我们有：

$$T_{h,i}(t) \geq \frac{c^2 \ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{\nu_1^2} \rho^{-2h} \geq \frac{c^2}{\nu_1^2} \rho^{-2h}$$

显然，当此覆盖树是一个线性树，也就是，在每一层只有一个节点被扩展时，树的高度最大，因此我们有：

$$\begin{aligned} T &\geq \sum_{h=1}^{H(T)-1} \frac{c^2}{\nu_1^2} \rho^{-2h} = \frac{c^2}{\nu_1^2} \sum_{h=1}^{H(T)-1} \rho^{-2h} \\ &= \frac{c^2}{\nu_1^2} \rho^{-2} \frac{1 - \rho^{-2(H(T)-1)}}{1 - \rho^{-2}} \\ &= \frac{c^2}{\nu_1^2} \frac{\rho^{-2(H(T)-1)} - 1}{1 - \rho^2} \rightarrow \\ \rho^{-2(H(T)-1)} - 1 &\leq \frac{\nu_1^2(1 - \rho^2)T}{c^2} \rightarrow \\ H(T) &\leq \log_{\rho^{-2}} \left[\frac{\nu_1^2(1 - \rho^2)T}{c^2} + 1 \right] + 1 \end{aligned}$$

引理 4 得证。

E 引理 5 证明

引理 5 是关于覆盖树 T_t 节点个数的相关结论，也就是：

Lemma 5. (引理 5)

$$|T_t| \leq |T_t|_{\max} < 4(t\nu_1^2(2 - \rho^2)/(2c^2) + 1)^E - 1$$

$$E = \log_{2\rho^{-2}} 2.$$

如引理 4 中所说，一个叶子节点在满足条件 $T_{h,i}(t) \geq \frac{c^2}{\nu_1^2} \rho^{-2h}$ 时被扩展，随着高度增加，被扩展时所需的的阈值也就越大，显然，当 HCT 的覆盖树是一个完全二叉树时，其节点数最多，因此我们有：

$$\begin{aligned} T &\geq \sum_{h=1}^{H(T)-1} \frac{c^2}{\nu_1^2} \rho^{-2h} \cdot 2^h = \sum_{h=1}^{H(T)-1} \frac{c^2}{\nu_1^2} (2\rho^{-2})^h \\ &= 2 \frac{c^2}{\nu_1^2} \frac{(2\rho^{-2})^{H(T)-1} - 1}{2 - \rho^2} \rightarrow \\ (2\rho^{-2})^{H(T)-1} - 1 &\leq \frac{T\nu_1^2(2 - \rho^2)}{2c^2} \rightarrow \\ H(T) &\leq \log_{2\rho^{-2}} \left[\frac{T\nu_1^2(2 - \rho^2)}{2c^2} + 1 \right] + 1 \end{aligned}$$

而后我们使用 $2^{H(T)+1} - 1$ 去计算节点数并得到引理 5。

F 结论 1 证明

结论 1 展示了攻击消耗的上界，也就是：

Theorem 1. (结论 1)

$$C(T) \leq 2(f_{max} - f_{min} + 4B(1, \delta, T))|T_T| \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(T)|}{2} \ln \frac{\pi^2 T^2 |T_T|}{3\delta \cdot |N_K(T)|^2}} + 2c\sqrt{\ln(1/\tilde{\delta}(T^+))}\right)^2}{\alpha_T^2}$$

$$= O\left(\frac{1}{\alpha_T^2} (\ln T)^3 T^E\right)$$

以最少 $(1 - \delta)(1 - \delta_u)$ 的概率成立，其中 $E = \log_{2\rho^{-2}} 2$, $T^+ = 2^{\lfloor \ln T \rfloor + 1}$, $\tilde{\delta}(t) = \min\{c_1 \delta_u / t, 1\}$ ($c_1 = \sqrt[8]{\rho/(3\nu_1)}$) 且 $\alpha_T > \min_{(h_a, i_a), (h_b, i_b) \in T_T} \{|f(\mathbf{v}_{h_a, i_a}) - f(\mathbf{v}_{h_b, i_b})|\}$.

首先我们假设在第 t 轮，用户沿着路径 P_t 选择了一个不包含目标视频 v_K 的节点 (h, i) ，对于此路径我们有：

$$B_{h', i'}(t) \leq U_{h, i}(t) (h' < h, (h', i') \in P_t). \quad (2)$$

其中 $B_{h, i}(t)$, $U_{h, i}(t)$ 为节点 (h, i) 截止轮次 t 的两个置信上界。因为根节点包含视频 v_K ，因此在此路径中，一定存在一个节点 (h_K, i_K) ($h_K < h$) 包含目标视频 v_K 。同时，因为在用户选择了一个包含视频 v_K 的节点时，攻击者不会攻击，因此我们仍然可以使用 HCT 算法的性质，也就是，论文 [azar, M.G., Lazaric, A. Brunskill, E.. (2014). Online Stochastic Optimization under Correlated Bandit Feedback.[C] Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning, in PMLR 32(2):1557-1565] 引理 3 (Lemma 3) 中的事件 ξ_t 来对其进行分析，在事件 ξ_t 下，我们有：

$$U_{h_K, i_K}(t) = \hat{\mu}_{h_K, i_K}(t) + \nu_1 \rho^{h_K} + \sqrt{\frac{c^2 \log(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h_K, i_K}(t)}}$$

$$\stackrel{(i)}{\geq} f(\mathbf{v}_{h_K, i_K}) + \nu_1 \rho^{h_K}$$

$$\geq f(\mathbf{v}_K).$$

(i) 是在事件 ξ_t ($P[\xi_t] \geq 1 - \delta_u$) 的条件下。对于包含视频 \mathbf{v}_K 的叶子节点 (h_n, i_n) ，显然，我们有：

$$B_{h_n, i_n}(t) = U_{h_n, i_n}(t) \geq f(\mathbf{v}_K),$$

并且根据在 HCT 算法中 B 值的定义，我们有：

$$B_{h_K, i_K}(t) = \min [U_{h_K, i_K}(t), \max_{j \in \{2i_K - 1, 2i_K\}} B_{h_K + 1, j}(t)], \quad (3)$$

成立，并且在节点 $(h_K + 1, 2i_K - 1)$ 以及 $(h_K + 1, 2i_K)$ 之间，必然存在一个节点包含视频 v_K ，并且节点 (h_K, i_K) 一定是节点 (h_n, i_n) 的祖先，现在通过式 (3)，从节点 (h_n, i_n) 迭代至节点 (h_K, i_K) ，我们可以证明 $B_{h_K, i_K}(t)$ 仍然是 $f(v_K)$ 的一个上界。

而后根据式 (2)，我们有：

$$\begin{aligned}
U_{h,i}(t) &\geq B_{h_K, i_K}(t) > f(\mathbf{v}_K) \rightarrow \\
\hat{\mu}_{h,i}(t) + \nu_1 \rho^h + c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} &\geq f(\mathbf{v}_K) \xrightarrow{(i)} \\
f(\mathbf{v}_K) &\leq \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) + B\left(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|}, \delta, t\right) - \bar{\lambda}_{h,i}(t) + \nu_1 \rho^h + c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \\
&\stackrel{(ii)}{<} \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) + B\left(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|}, \delta, t\right) - \bar{\lambda}_{h,i}(t) + 2c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \rightarrow \\
f(\mathbf{v}_K) + \bar{\lambda}_{h,i}(t) - \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) &< B\left(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|}, \delta, t\right) + 2c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \rightarrow \\
\alpha_t &< B\left(\frac{T_{h,i}(t)}{|N_K(t)|}, \delta, t\right) + 2c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}} \left(\alpha_t = f(\mathbf{v}_K) + \bar{\lambda}_{h,i}(t) - \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}})\right) \\
&= \sqrt{\frac{|N_K(t)|}{2T_{h,i}(t)} \ln \frac{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|}{3\delta \cdot |N_K(t)|^2}} + 2c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}
\end{aligned}$$

(i) 是因为在引理 3 的条件下，(ii) 是因为在 HCT 算法中，每一轮被选择的节点满足条件 $\nu_1 \rho^h < c \sqrt{\frac{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h,i}(t)}}$ 。我们把 $T_{h,i}(t)$ 看作未知量，而后解上述不等式得到：

$$T_{h,i}(t) < \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(t)|}{2}} \ln \frac{\pi^2 T_{h,i}(t)^2 |T_t|}{3\delta \cdot |N_K(t)|^2} + 2c \sqrt{\ln(1/\tilde{\delta}(t^+))}\right)^2}{\alpha_t^2}$$

设不包含目标视频 \mathbf{v}_K 的节点截止轮次 t 被选择的次数为 $A(t)$ ，因此我们有：

$$\begin{aligned}
A(T) &= \sum_{(h,i) \in T_T, \mathbf{v}_K \notin \mathcal{P}_{h,i}} T_{h,i}(T) \\
&< \sum_{(h,i) \in T_T, \mathbf{v}_K \notin \mathcal{P}_{h,i}} \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(T)|}{2}} \ln \frac{\pi^2 T_{h,i}(T)^2 |T_T|}{3\delta \cdot |N_K(T)|^2} + 2c \sqrt{\ln(1/\tilde{\delta}(T^+))}\right)^2}{\alpha_T^2} \\
&< |T_T| \frac{\left(\sqrt{\frac{|N_K(T)|}{2}} \ln \frac{\pi^2 T^2 |T_T|}{3\delta \cdot |N_K(T)|^2} + 2c \sqrt{\ln(1/\tilde{\delta}(T^+))}\right)^2}{\alpha_T^2} \tag{4}
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_K \in (h_{Ks}, i_{Ks})$ ，因此近似地，我们认为 $f(v_K) \approx \frac{1}{T_{h,i}(t)} \sum_{s \in \phi_{h,i}(t)} f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}})$ ，而后便有 $\alpha_t \approx \bar{\lambda}_{h,i}(t) > \min_{(h_a, i_a), (h_b, i_b) \in T_t} \{|f(\mathbf{v}_{h_a, i_a}) - f(\mathbf{v}_{h_b, i_b})|\}$ 。同时，我们定义函数 $h(N) = B(N, \delta, t) (N \geq 1)$ ，显然，函数 $h(N)$ 是一个单调递减函数，因此有 $h(1) \geq h(N)$ 。而后对于 $\forall (h_a, i_a), (h_b, i_b) \in T_t$ ，存

在：

$$\begin{aligned}
& \hat{\mu}_{h_a, i_a}^0(t) - \hat{\mu}_{h_b, i_b}^0(t) + B(T_{h_a, i_a}(t), \delta, t) + B(T_{h_b, i_b}(t), \delta, t) \\
& < (\hat{\mu}_{h_a, i_a}^0(t) - B(T_{h_a, i_a}(t), \delta, t)) - (\hat{\mu}_{h_b, i_b}^0(t) + B(T_{h_b, i_b}(t), \delta, t)) + 2B(T_{h_a, i_a}(t), \delta, t) + 2B(T_{h_b, i_b}(t), \delta, t) \\
& \stackrel{(i)}{<} f(\mathbf{v}_{h_a, i_a}) - f(\mathbf{v}_{h_b, i_b}) + 2B(T_{h_a, i_a}(t), \delta, t) + 2B(T_{h_b, i_b}(t), \delta, t) \\
& < f(\mathbf{v}_{h_a, i_a}) - f(\mathbf{v}_{h_b, i_b}) + 4B(1, \delta, t) \\
& < f_{max} - f_{min} + 4B(1, \delta, t)
\end{aligned}$$

(i) 是在事件 ξ_1 的条件下。

而后我们给出 $|\eta_t|$ 的一个上界，也就是：

$$|\eta_t| \leq I\{(h_t, i_t) \notin N_K(t)\} \left(2(f_{max} - f_{min} + 4B(1, \delta, t)) \right) \quad (5)$$

最后，结合式 (4)，式 (5)，引理 4 以及引理 5，我们得到结论 1。

G 结论 2 证明

此结论给出了一个 HCT 算法在我们所提出的攻击下期望回归的一个下界，也就是：

Theorem 2. (结论 2)

$$\begin{aligned}
R(T) & > \Omega[(f_{max} - f(\mathbf{v}_K))A - \sqrt{2A \ln(A/\delta)}] \\
& + \Omega[(f_{max} - f(\mathbf{v}_K))B - (\ln(B/\delta_u))^{1/(d+2)} B^{(d+1)/(d+2)} - \sqrt{2B \ln(B/\delta)}] \\
& = \Omega((f_{max} - f(\mathbf{v}_K))T)
\end{aligned}$$

以最少 $(1 - \delta_u)(1 - \delta)$ 的概率成立。

根据对于期望回归的定义，有：

$$\begin{aligned}
R(T) & = T f_{max} - \sum_{t=1}^T r_t \\
& = \sum_{t=1}^T (f_{max} - r_t) \\
& = \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f_{max} - r_s) + \sum_{s \in \mathcal{A}} (f_{max} - r_s) \\
& = \hat{R}(T) + \tilde{R}(T)
\end{aligned}$$

接下来我们开始处理 $\hat{R}(T)$ ，对于集合 \mathcal{A}^c 中的轮次，攻击者不进行攻击，也就是说用户选择了一

个包含目标视频 \mathbf{v}_K 的节点 (h, i) 。首先，我们对 $\hat{R}(T)$ 进行一些转换如下：

$$\begin{aligned}
\hat{R}(T) &= \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f_{\max} - r_s) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f_{\max} - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) + f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) - r_s) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{A}^c} [f_{\max} - f(\mathbf{v}_K) + f(\mathbf{v}_K) - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) + f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) - r_s] \\
&= \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f_{\max} - f(\mathbf{v}_K)) - \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) - f(\mathbf{v}_K)) - \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (r_s - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s})) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f_{\max} - f(\mathbf{v}_K)) - (a) - (b). \tag{6}
\end{aligned}$$

对于 (b)，我们这里先定义 $X_n = \sum_{s=1}^n (r_s - f(\mathbf{v}_s))$ ，且 $E(r_s - f(\mathbf{v}_s)) = 0$ ，因此有 $E(X_{n+1} | X_1 \dots X_n) = X_n$ ，因此 X_n 是鞅，并且 $r_s \in [0, 1]$ ，因此有 $|X_n - X_{n-1}| \leq 1$ ，那么我们可以得到：

$$(b) = \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (r_s - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s})) \leq \sqrt{2B \log(B/\delta)}. \tag{7}$$

以最少 $1 - \delta/B$ 的概率成立。

而后对于 (a)，我们有：

$$\begin{aligned}
(a) &= \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) - f(\mathbf{v}_K)) \\
&= \sum_{(h, i) \in T_t} \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) - f(\mathbf{v}_K)) I_{(h_s, i_s) = (h, i)} \\
&\leq \sum_{(h, i) \in T_t} \sum_{s \in \mathcal{A}^c} (\nu_1 \rho^h) I_{(h_s, i_s) = (h, i)} \\
&\stackrel{(i)}{\leq} \sum_{(h, i) \in T_t} \sum_{s \in \mathcal{A}^c} c \sqrt{\frac{\log(1/\tilde{\delta}(s^+))}{T_{h, i}(s)}} I_{(h_s, i_s) = (h, i)} \\
&\stackrel{(ii)}{\leq} \left(\frac{2^{2(d+3)} \nu_1^{2(d+1)} C \nu_2^{-d} \rho^d}{(1 - \rho)^{d/2+3}} \right)^{\frac{1}{d+2}} \left(\log \left(\frac{2B}{\delta_u} \sqrt[8]{\frac{3\nu_1}{\rho}} \right) \right)^{\frac{1}{d+2}} B^{\frac{d+1}{d+2}}. \tag{8}
\end{aligned}$$

I_ξ 是指示函数，如果 ξ 成立则取值为 1，否则为 0。(i) 是因为在 HCT 算法在每一轮 t 选择的节点满足以下条件，也就是：

$$\nu_1 \rho^h < c \sqrt{\frac{\log(1/\tilde{\delta}(t^+))}{T_{h, i}(t)}}. \tag{9}$$

(ii) 是根据论文 [azar, M.G., Lazaric, A. Brunskill, E.. (2014). Online Stochastic Optimization under Correlated Bandit Feedback.[C] Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning, in PMLR 32(2):1557-1565] 中关于 HCT 算法期望回归 (regret) 的结论 1 (**Theorem 1**)，其以最少 $1 - \delta_u$ 的概率成立。

而后结合式 (6)、(7) 以及 (8)，我们得到：

$$\begin{aligned} \hat{R}(T) &\geq B(f_{max} - f(\mathbf{v}_K)) - \sqrt{2B \log(B/\delta)} - \\ &\quad \left(\frac{2^{2(d+3)} \nu_1^{2(d+1)} C \nu_2^{-d} \rho^d}{(1-\rho)^{d/2+3}} \right)^{\frac{1}{d+2}} \left(\log \left(\frac{2B}{\delta_u} \sqrt[8]{\frac{3\nu_1}{\rho}} \right) \right)^{\frac{1}{d+2}} B^{\frac{d+1}{d+2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

而后我们分析 $\tilde{R}(T)$ ，也就是：

$$\begin{aligned} \tilde{R}(T) &= \sum_{s \in \mathcal{A}} (f_{max} - r_s) \\ &\geq \sum_{s \in \mathcal{A}} (f_{max} - (r_s^0 - \hat{\mu}_{h_s, i_s}^0(s) + \hat{\mu}_{h_{Ks}, i_{Ks}}^0(s) - B(T_{h_s, i_s}(s), \delta, s) - B(T_{h_{Ks}, i_{Ks}}(s), \delta, s) - \lambda_s)) \\ &\stackrel{(i)}{\geq} \sum_{s \in \mathcal{A}} (f_{max} - (r_s^0 - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}) + f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) - \lambda_s)) \\ &\geq \sum_{s \in \mathcal{A}} [f_{max} - f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) - (r_s^0 - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s})) + \lambda_s] \\ &= \sum_{s \in \mathcal{A}} [f_{max} - f(\mathbf{v}_K) + [\lambda_s - (f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) - f(\mathbf{v}_K))] - (r_s^0 - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s}))] \\ &= \sum_{s \in \mathcal{A}} [f_{max} - f(\mathbf{v}_K)] + (c) - (d) \end{aligned} \quad (11)$$

对于 (d)，类似于 (b)，根据吾妻不等式，可以得到：

$$(d) = \sum_{s \in \mathcal{A}} (r_s^0 - f(\mathbf{v}_{h_s, i_s})) \leq \sqrt{2A \log(A/\delta)} \quad (12)$$

以最少 $1 - \delta/A$ 的概率成立。

对于 (c)，根据 λ_s 的定义以及 $\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}, \mathbf{v}_K \in \mathcal{P}_{h_{Ks}, i_{Ks}}$ 的事实，而有：

$$(c) = \sum_{s \in \mathcal{A}} \lambda_s - (f(\mathbf{v}_{h_{Ks}, i_{Ks}}) - f(\mathbf{v}_K)) > 0$$

而后结合式 (11) 以及 (12)，我们得到：

$$\tilde{R}(T) > A(f_{max} - f(\mathbf{v}_K)) - \sqrt{2A \log(A/\delta)} \quad (13)$$

最后，我们结合式 (10) 以及 (13) 得到结论 2。

H 附加实验

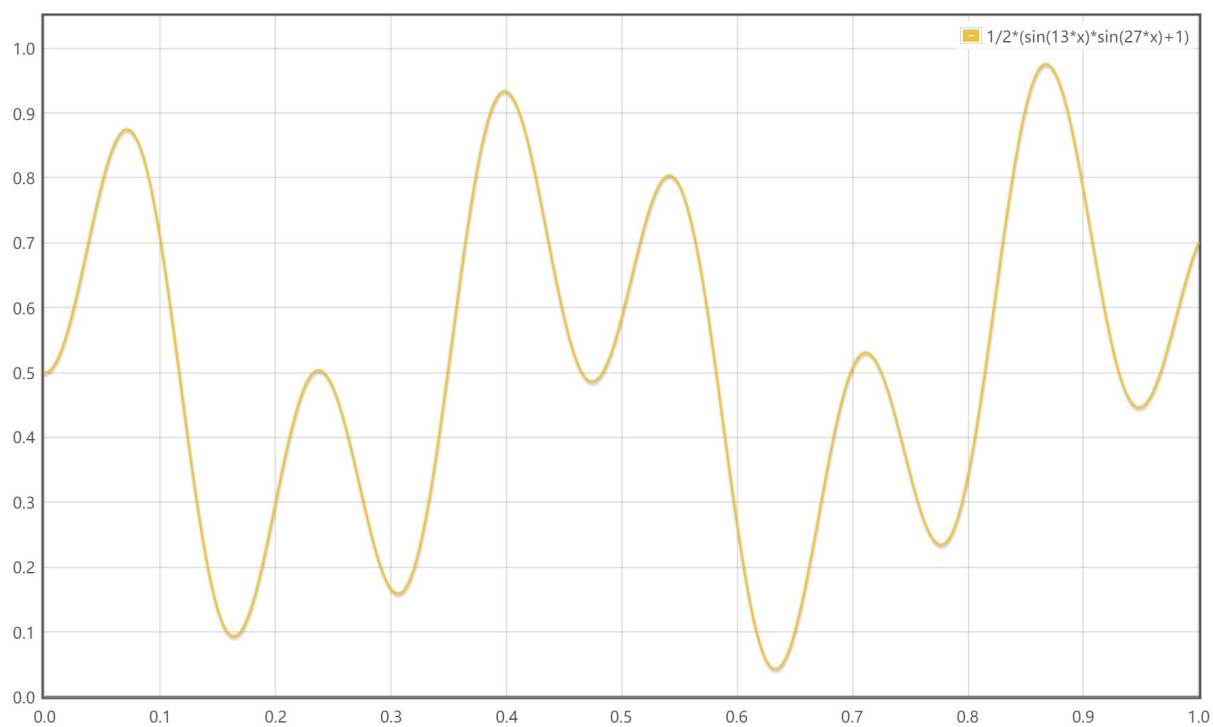
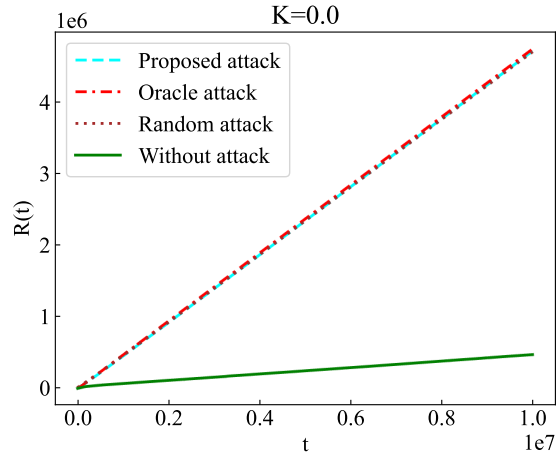
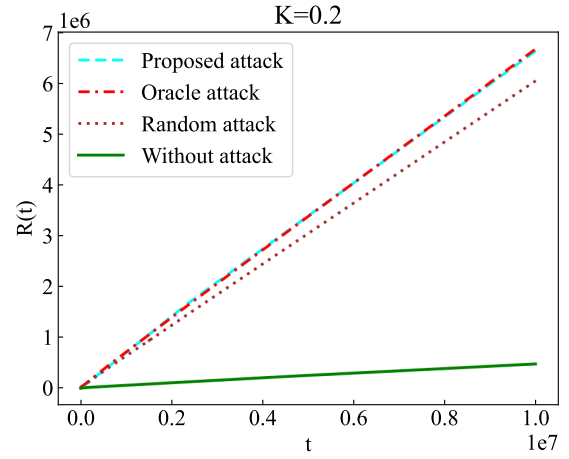


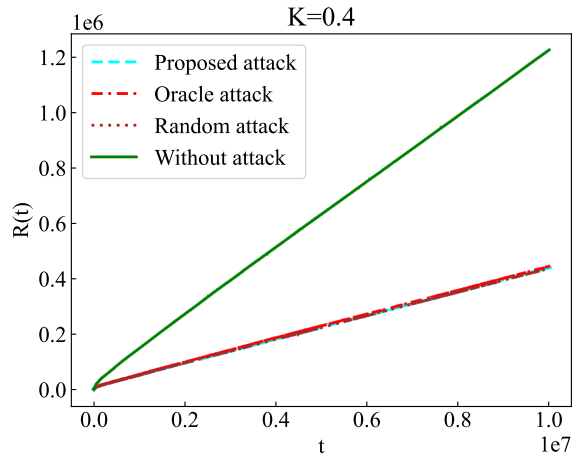
Figure 1: $f(x) = 1/2(\sin(13x)\sin(27x) + 1)$



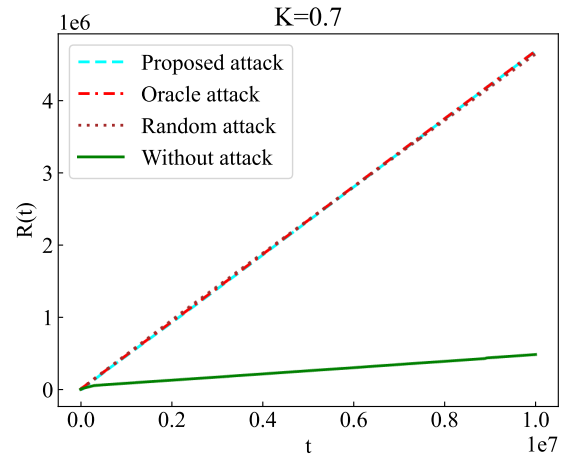
(a) $|\mathbf{v}_K| = 0.0$



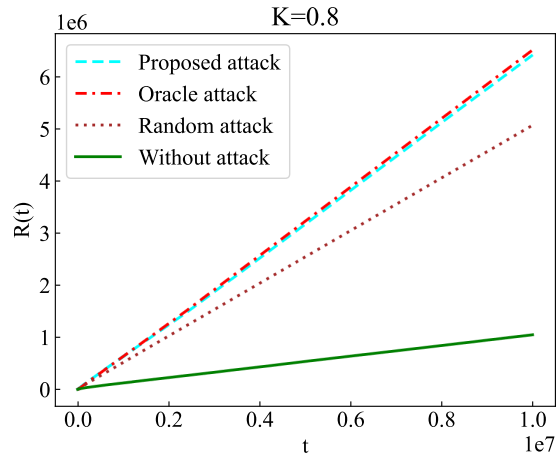
(b) $|\mathbf{v}_K| = 0.2$



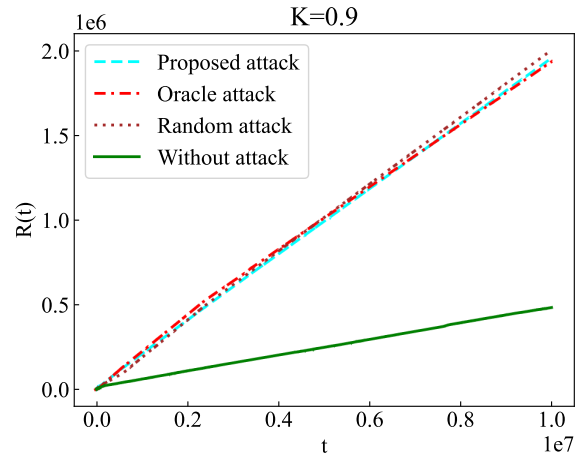
(c) $|\mathbf{v}_K| = 0.4$



(d) $|\mathbf{v}_K| = 0.7$



(e) $|\mathbf{v}_K| = 0.8$



(f) $|\mathbf{v}_K| = 0.9$

Figure 2: $R(t) - t$ 曲线图

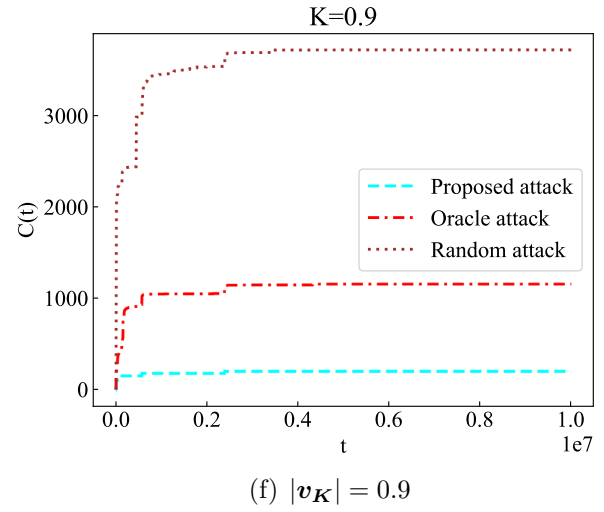
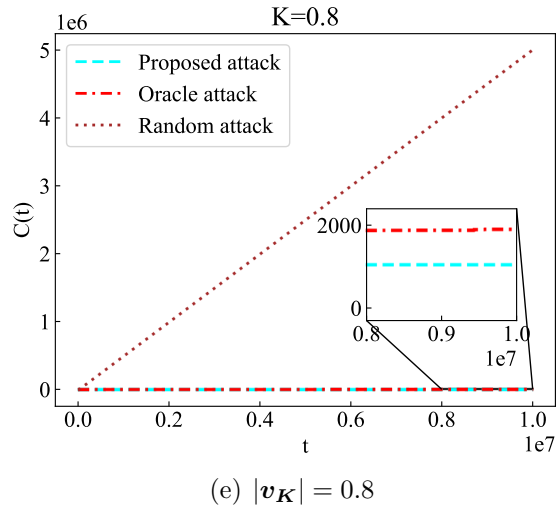
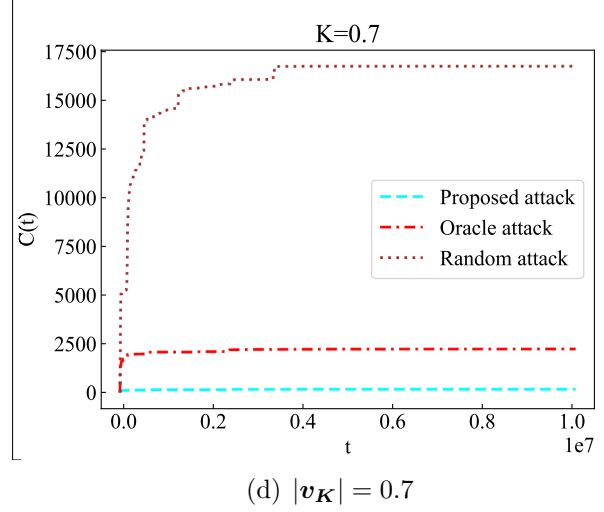
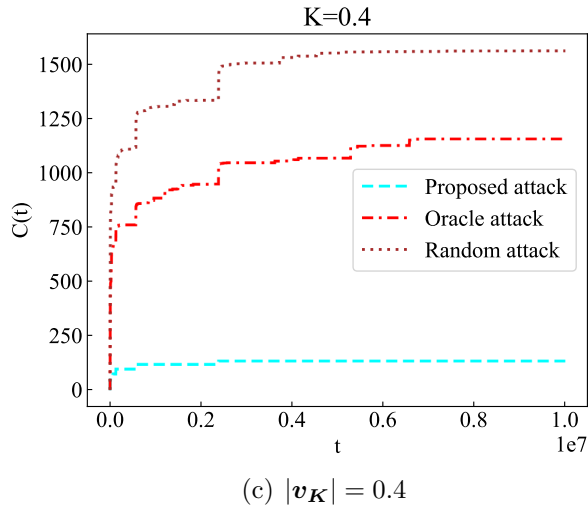
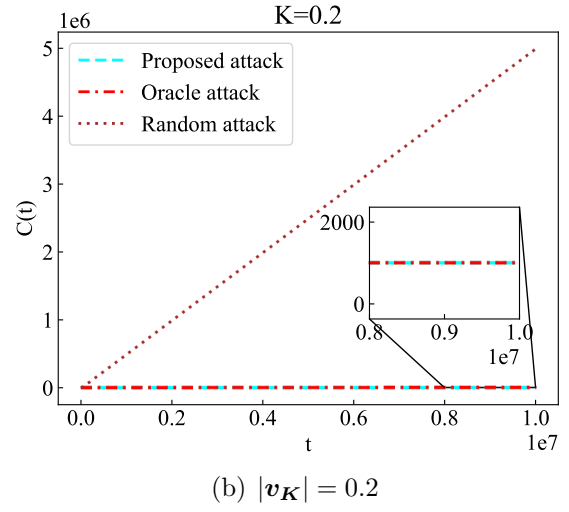
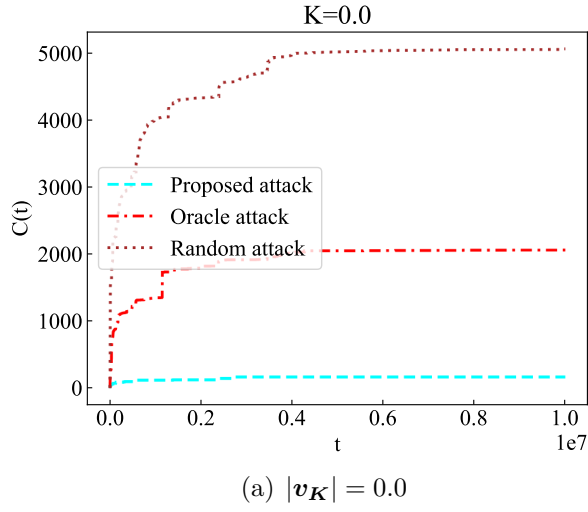
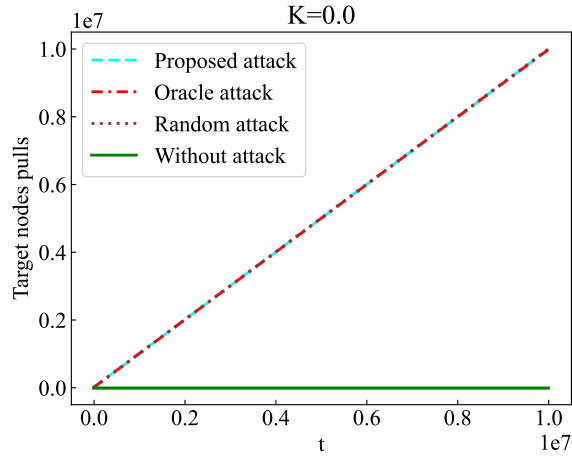
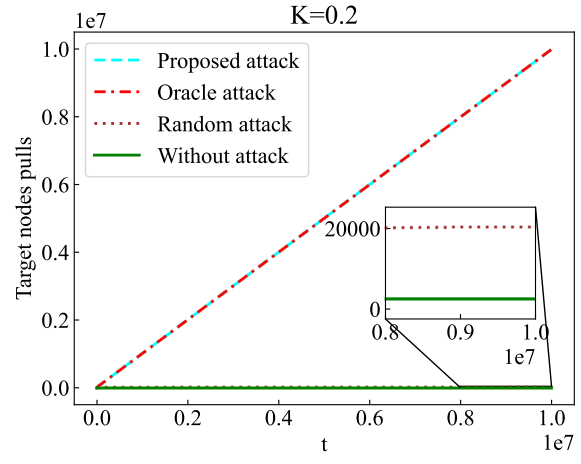


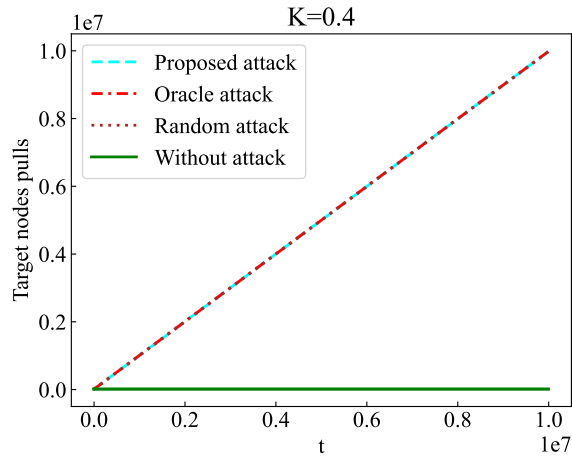
Figure 3: $C(t) - t$ 曲线图



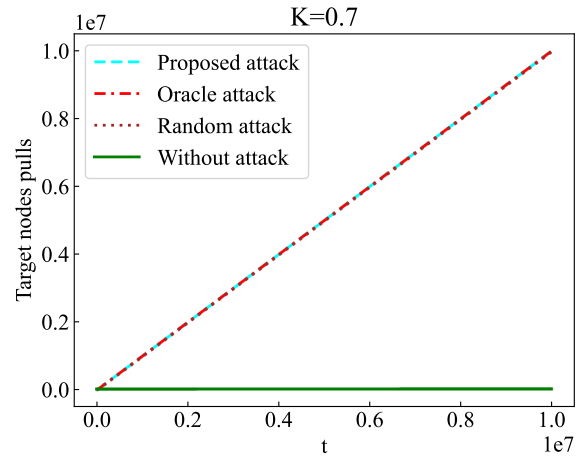
(a) $|\mathbf{v}_K| = 0.0$



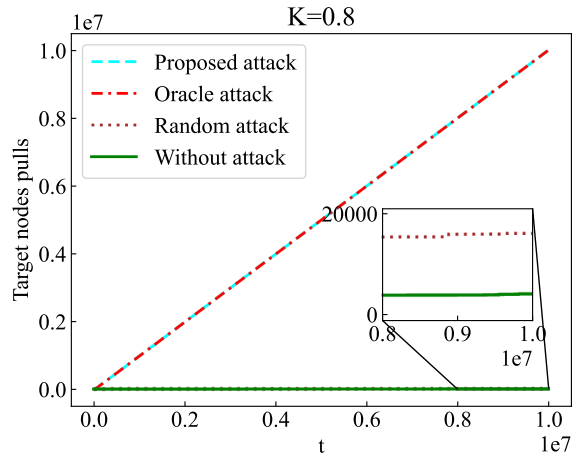
(b) $|\mathbf{v}_K| = 0.2$



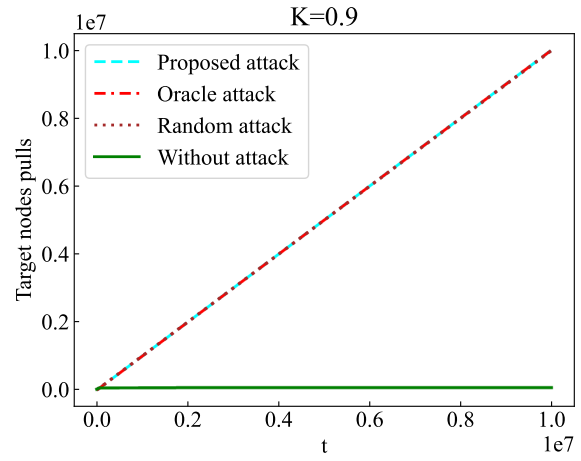
(c) $|\mathbf{v}_K| = 0.4$



(d) $|\mathbf{v}_K| = 0.7$



(e) $|\mathbf{v}_K| = 0.8$



(f) $|\mathbf{v}_K| = 0.9$

Figure 4: Target nodes pulls- t 曲线图