ODE 定性理论笔记

目录

Chapter 1 Ordinary Differential Equations

1.1 Basic notions

Prop 1.9

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集，则初值问题 $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 与 $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s$ 等价。

Def 1.11

变换族 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ 且 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ ，则称 φ_t 为一个**流 (flow)**。

Def 1.13

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续，$D \subset \mathbb{R}^n$ 开集，如果初值问题 $x' = f(x), x(0) = x_0$ 存在唯一解 $x(t, x_0) := \varphi_t(x_0)$ 是一个流。

证明：只需验证 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \Leftrightarrow x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$ 。

1.2 Existence and uniqueness of solutions

1.2.2 Contractions in metric spaces

Prop 1.30

全体连续有界函数 $x : I \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ 构成的集合 $X = C(I)$ 是完备（柯西列都有收敛子列）度量空间，度量定义为 $d(x,y) = \sup\{\|x(t) - y(t)\| : t \in I\}$ 。

Def 1.33

定义在度量空间 (X,d) 的一个映射 $T : X \to X$ 称为压缩映射，如果存在 $\lambda \in (0,1)$ 使得 $d(T(x), T(y)) \le \lambda d(x,y)$ 。

Thm 1.35

如果 $T : X \to X$ 是完备度量空间 (X,d) 的压缩映射，则 T 有唯一不动点，并且 $T^n(x)$ 收敛到不动点。

1.2.3 Proof of the theorem

关于 Lipschitz 和局部 Lipschitz，参看：什么是利普希茨条件？

Thm 1.18 (Picard-Lindelof theorem)

$f : D \to \mathbb{R}^n$ 连续、关于 x 局部 Lipschitz，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集。则对于任意 $(t_0, x_0) \in D$ ，初值问题 $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 的解在一个包含 t_0 的开区间 (a,b) 存在唯一。

证明: 取常数 $\beta > 0$ 和 $a_0 < t_0 < b_0$ 使得 $K = [a_0, b_0] \times \overline{B(x_0, \beta)} \subset D$ ，则 K 是紧集。设 f 在上面有最大值 M 。由于 f 在 D 关于 x 局部 Lipschitz，所以在紧集 $K \subset D$ 关于 x 全局 Lipschitz，设 Lipschitz 常数为 L 。

取常数 a, b 使得 $a_0 < a < t_0 < b < b_0$ 并且 $b - a < \min\{\beta/M, 1/L\}$ 。令 $X \subset C(a, b)$ 表示全体连续有界函数 $x : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ 满足 $\|x(t) - x_0\| \leq \beta, \forall t \in (a, b)$ 构成的集合，断言 X 在度量 $d(x, y) = \sup\{\|x(t) - y(t)\| : t \in I\}$ 下是完备度量空间。

取 Cauchy 列 $\{x_n(t)\} \subset X$ ，由 Prop1.30 可知 $x_n(t)$ 收敛于 $x(t) \in C(a, b)$ 。而 $\forall t \in (a, b), \|x(t) - x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n(t) - x_0\| \leq \beta$ ，说明 $x(t) \in X$ ，断言证完。

考虑映射 $T : X \to C(a, b)$ ，$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s$ 。

1. $\|T(x)(t) - x_0\| = \|\int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s\| \leq (b - a)M \leq \beta$ 对任意 $t \in (a, b)$ 成立，从而 $T(X) \subset X$ 。
2. $\|T(x)(t) - T(y)(t)\| = \|\int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\| \leq (b - a)Ld(x, y) < d(x, y)$ 对任意 $t \in (a, b)$ 成立，从而 $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ 。

这说明 $T : X \to X$ 是完备度量空间 X 上的压缩映射，存在唯一不动点 $x(t)$ ，满足 $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s$ 。由 Prop1.9 可知，这等价于它是初值问题 $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ 的解。

1.3 Additional properties

1.3.1 Lipschitz dependence on the initial conditions

Prop 1.39 (Gronwall's lemma)

$u, v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 连续，v 非负，$c \in \mathbb{R}$ 。若 $u(t) \leq c + \displaystyle\int_a^t u(s)v(s)\mathrm{d}s, \forall t \in [a, b]$ ，则 $u(t) \leq c \exp \displaystyle\int_a^t v(s)\mathrm{d}s, \forall t \in [a, b]$ 。

证明: 令 $R(t) = \displaystyle\int_a^t u(s)v(s)\mathrm{d}s$ ，$V(t) = \displaystyle\int_a^t v(s)\mathrm{d}s$ ，则 $R(a) = V(a) = 0$ ，$R'(t) = u(t)v(t) \leq (c + R(t))v(t)$ ，$V'(t) = v(t)$ 。由于 $R'(t) - v(t)R(t) \leq cv(t)$ ，考虑

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-V(t)}R(t)) &= \mathrm{e}^{-V(t)}[R'(t) - v(t)R(t)] \\ &\leq \mathrm{e}^{-V(t)}cv(t), \forall t \in [a, b]\end{aligned}$$

对两边关于 t 在 $[a, t]$ 上积分，则

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-V(t)}R(t) &\leq \int_a^t cv(s)\mathrm{e}^{-V(s)}\mathrm{d}s \\ &= -c\int_a^t \mathrm{e}^{-V(s)}\mathrm{d}(-V(s)) \\ &= c(1 - \mathrm{e}^{-V(t)}), \forall t \in [a, b]\end{aligned}$$

从而 $R(t) \le c\mathrm{e}^{V(t)} - c, \forall t \in [a,b]$ ，从而 $u(t) \le c + R(t) \le c\mathrm{e}^{V(t)}, \forall t \in [a,b]$ 。

Thm 1.40

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续、关于 x 局部 Lipschitz，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集。则对于任意 $(t_0, x_1) \in D$ ，存在常数 $\beta, C > 0$ 和开区间 $t_0 \in I$ 使得只要 $\|x_1 - x_2\| < \beta$ ，相应初值问题的的解就有 $\|x_1(t) - x_2(t)\| \le C\|x_1 - x_2\|$ 对任意的 $t \in I$ 成立。

证明： $\forall t \in I, x_i(t) = x_i + \int_{t_0}^t f(s, x_i(s))\mathrm{d}s$ 。令 $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ 。对于 $\forall t \in I \cap [t_0, +\infty)$ ，有 $\|y(t)\| \le \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^t \|y(t)\| L\mathrm{d}s$ 。由 Gronwall’s Lemma，有 $\|y(t)\| \le \|x_1 - x_2\| \exp\{L(t - t_0)\}$ 。反向同理。

解对初值的光滑依赖性略。

1.3.3 Maximal interval of existence

Prop 1.43

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续、关于 x 局部 Lipschitz，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集。则对于任意 $(t_0, x_0) \in D$ ，初值问题 $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 存在唯一的解 $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ 使得初值问题的其他任意解 $x: I_x \to \mathbb{R}^n$ 都有 $I_x \subset (a,b)$ 并且 $x(t) = \varphi(t), \forall t \in I_x$ 。这样的 (a,b) 称为解的**最大存在区间 (maximal interval)**。

Prop 1.46

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续、关于 x 局部 Lipschitz，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集。如果 $x' = f(t,x)$ 的解 $x(t)$ 具有最大存在区间 (a,b) ，则对于任意紧集 $K \subset D$ ，存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于任意 $t \in (a, a+\varepsilon) \cup (b-\varepsilon, b)$ 都有 $(t, x(t)) \subset D \backslash K$ 。

1.4 Existence of solutions for continuous fields

Prop 1.48 (Ascoli)

(a,b) 上的函数列 φ_k ，若一致有界且等度连续，则存在一致收敛的子列。

Prop 1.49 (Peano)

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集。则对于任意 $(t_0, x_0) \in D$，初值问题 $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 的解在一个开区间 $t_0 \in (a,b)$ 存在（不一定唯一）。

1.5 Phase portraits

1.5.1 Orbits

$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续，$D \subset \mathbb{R}^n$ 开集，考虑驻定方程 $x' = f(x)$ 。则 D 称为**相空间 (phase space)**。设它的解 $x = x(t)$ 的最大存在区间为 I ，则 $\{x(t): t \in I\}$ 称为**轨线 (orbit)**，它在 D 中的图像称为**相图 (phase portrait)**。使得 $f(x_0) = 0$ 的点 x_0 称为**临界点 (critical point)**。

Thm 1.54 (Flow box theorem)

$f: D \to \mathbb{R}^n \in C^1$ ，$D \subset \mathbb{R}^n$ 开集。给定 $p \in D, f(p) \neq 0$，则存在坐标变换 $y = g(x)$ 使得在 p 的一个邻域（维数为 $n-1$ ）内，方程 $x' = f(x)$ 变换为 $y' = v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 。

Def 1.55

轨线：**周期的 (periodic)**、**同宿的 (homoclinic)**、**异宿的 (heteroclinic)**

Def 1.56

一个解 $x = x(t)$ 是**全局的 (global)** 定义

Prop 1.57

轨线含于一个紧集（欧氏空间实际上就是有界闭集）的解是全局的。从而临界点、周期解、同宿轨线、异宿轨线都是由全局解得到的。

1.5.2 Phase portraits

考虑平面驻定微分方程组 $\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$ ，画的轨线的方法：

1. 直接求解；
2. 作商得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ ，解出 $y = y(x)$ 就是轨线；
3. 极坐标变换 $\begin{cases} r' = (\sqrt{x^2+y^2})' = \dfrac{xx'+yy'}{r} \\ \theta' = \left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)' = \dfrac{y'x-x'y}{r^2} \end{cases}$ ；
4. 取 $z = x + iy$ 转化为复常微分方程求解；
5. 首次积分法。

1.5.3 Conservative equations

Def 1.67

一个非常数的 C^1 的函数 $E: D \to \mathbb{R}$ 如果沿着方程 $x' = f(x)$ 的任意解 $x = x(t)$ 都是常数，即 $E(x(t))$ 是常数 $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x(t)) = 0$ ，则称为方程的**首次积分 (integral)**。若存在首次积分，则称方程是**保守的 (conservative)**。$\forall c \in \mathbb{R}$ ，$E(x) = c$ 是轨线。这是画相图的另一种方法。

e.g.

设 $E: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是 C^1 的，则 $E(x,y)$ 是平面驻定微分方程组 $\begin{cases} x' = E_y \\ y' = -E_x \end{cases}$ 的首次积分，因此该方程组是保守的。

e.g.

平面驻定微分方程组 $\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$ ，其中 $P, Q \in C^1$。如果 $P_x + Q_y = 0$，则 $E(x,y) = -\int Q(x,y)\mathrm{d}x + \int \left[P(x,y) + \int Q_y(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ 是首次积分，因此该方程组是保守的。

注意到 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[P(x,y) + \int Q_y(x,y)\mathrm{d}x\right] = P_x + Q_y = 0$，所以 $\varphi(y) = P(x,y) + \int Q_y(x,y)\mathrm{d}x$ 只与 y 有关。因此 $E_y = P$，$-E_x = Q$，于是 E 是首次积分。

e.g.

平面驻定微分方程组 $\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) \end{cases}$ 是保守的，$E(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2 - \displaystyle\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$ 是首次积分。记 $V(x) = -\displaystyle\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$ 。

将方程改写为 $x'' = y' = f(x)$ 。将 x 看作是位移，$y = x'$ 看作是速度，$f(x) = y'$ 看作是力（加速度），则 $E(x,y)$ 可看作是动能 $\dfrac{1}{2}y^2$ 和势能 $V(x,y)$ 的和，即总能量。

Chapter 2 Linear Equations and Conjugacies

2.1 Nonautonomous linear equations

这部分我们回顾齐次线性微分方程组 $x' = A(t)x$ 的一般理论。其中 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续，$t \in \mathbb{R}$ 。

容易证明 $A(t)x$ 关于 x 局部 Lipschitz，从而初值问题 $x' = A(t)x, x(t_0) = x_0$ 在一个包含 t_0 的开区间内存在唯一。

Prop 2.1

$x' = A(t)x$ 的解都是全局的，即最大存在区间都是 $\mathbb{R}$ 。

Prop 2.4

$x' = A(t)x$ 的全体解构成 n 维线性空间，称为解空间。初值问题 $x' = A(t)x, x(t_0) = e_i$ 的解 $x_i, 1 \le i \le n$ 是一组基。

Def 2.5

如果 $X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的列向量是 $x' = A(t)x$ 解空间的一组基，则称 $X(t)$ 为**基解矩阵 (fundamental solution)**。

1. 基解矩阵 $X(t)$ 满足 $X'(t) = A(t)X(t)$；
2. 初值问题 $x' = A(t)x, x(t_0) = e_i$ 的解可以表示为 $x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0$；
3. 若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都是基解矩阵，则存在可逆阵 C 使得 $X(t) = Y(t)C$ 。

2.2 Equations with constant coefficients

2.2.1 Exponential of a matrix

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，矩阵指数函数定义为 $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$。容易证明它一定是一致收敛的。

如果 A 有 Jordan 标准型 $S^{-1}AS = J$，则 $\exp A = S\exp(S^{-1}AS)S$。

如果 A 具有特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和特征向量 $v_1, \dots, v_n$，则 $\exp A$ 具有特征值 $\exp \lambda_1, \dots, \exp \lambda_n$ 和特征向量 $v_1, \dots, v_n$。

2.2.2 Solving the equations

Prop 2.19

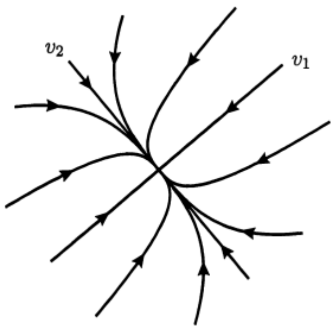
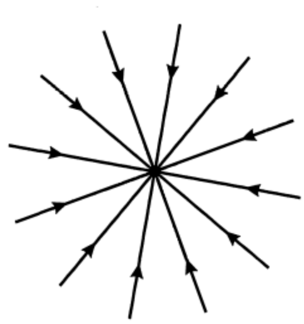
$\exp(At)$ 是常系数齐次微分方程组 $x' = Ax$ 的一个基解矩阵。从而初值问题 $x' = Ax, x(t_0) = x_0$ 的解可以表示为 $x(t) = \exp[A(t - t_0)]x_0$。

2.2.3 Phase portraits

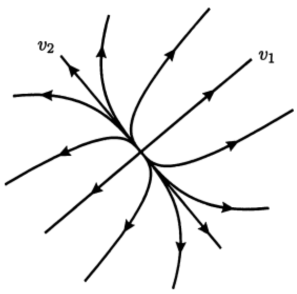
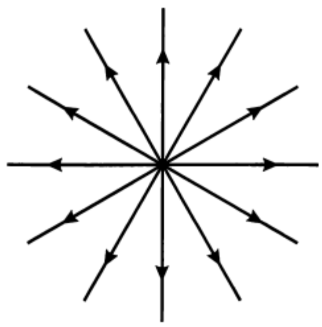
考虑二维常系数齐次微分方程组 $x' = Ax$，其中 A 是二阶方阵。我们来分析临界点 $(0, 0)$ 的性质。

若 A 有 Jordan 标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，其中 λ_i 为非零实数，则有如下情况。

稳定结点 (stable node)：$\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$

稳定结点	稳定奇结点
	

不稳定结点 (unstable node)：$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$

不稳定结点	不稳定奇结点
	

鞍点 (saddle point)：$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

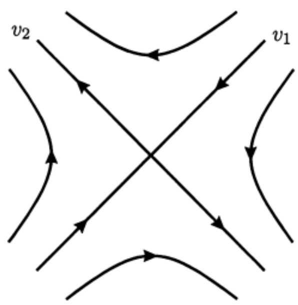


Figure 1: 鞍点

若 A 有 Jordan 标准型 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$，其中 λ 为非零实数，则有如下情况。

稳定结点 (stable node)： $\lambda < 0$

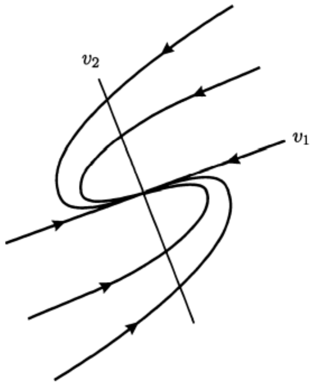


Figure 2: 稳定退化结点

不稳定结点 (unstable node)： $\lambda > 0$

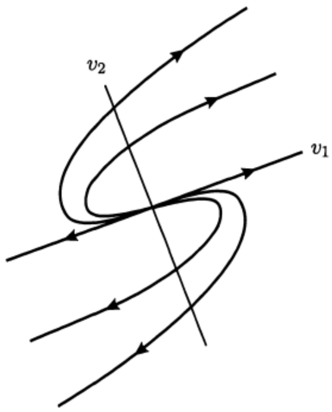


Figure 3: 不稳定退化结点

若 A 的特征值是一对共轭复根 $a \pm ib, b \neq 0$，则有如下情况。

中心 (center)： $a = 0$

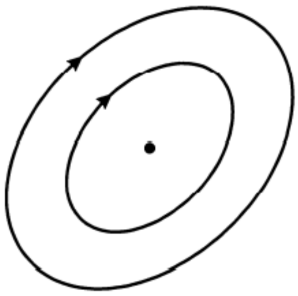


Figure 4: 中心

稳定焦点 (stable focus)： $a < 0$

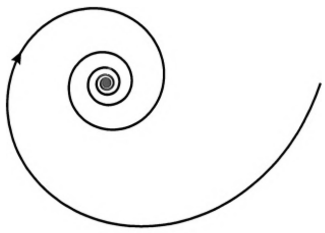


Figure 5: 稳定焦点

不稳定焦点 (unstable focus)： $a > 0$

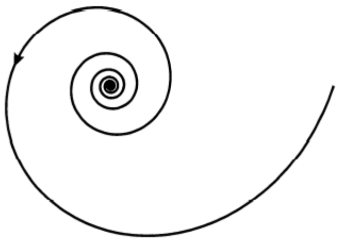


Figure 6: 不稳定焦点

2.4 Equations with periodic coefficients

Thm 2.31 (Floquet)

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 连续、以 T 为周期，则 $x' = A(t)x$ 的任何基解矩阵都可以表示为 $X(t) = P(t)\exp(Bt)$，其中 $P(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 连续、以 T 为周期，$B \in \mathbb{C}^{n \times n}$。

证明： 注意到若 $X(t)$ 是基解矩阵，则 $X(T+t)$ 也是基解矩阵，从而存在可逆阵 C 使得 $X(t+T) = X(t)C$。定义矩阵对数函数可以证明，存在 B 使得 $C = \exp(BT)$。取 $P(t) = X(t)\exp(-Bt)$ 即可。

Def 2.32

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续、以 T 为周期，$X(t)$ 是 $x' = A(t)x$ 的基解矩阵：

1. 可逆阵 C 使得 $X(t+T) = X(t)C$ 称为**单值矩阵 (monodromy matrix)**；
2. 单值矩阵的特征值称为**特征乘子 (characteristic multipliers)**；
3. 复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\mathrm{e}^{\lambda T}$ 是特征乘子称为**特征指数 (characteristic exponent)**。

显然特征指数相差 $2\pi i/T$ 仍是特征指数。例如 Floquet 定理中的 $\exp(BT)$ 就是单值矩阵，它的特征值是特征乘子，从而 B 的特征值就是特征指数。

注意该定义不要求 T 是最小正周期，因此该定义（包括下面的定理与命题）**与 T 的选取有关!!!**

Prop 2.33

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续、以 T 为周期，$X(t), Y(t)$ 是 $x' = A(t)x$ 的基解矩阵，相应的单值矩阵为 C, D，则 C 与 D 相似。因此特征乘子与基解矩阵的选取无关。

Prop 2.36

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续、以 T 为周期。则 λ 是 $x' = A(t)x$ 的特征指数当且仅当存在非零的 T 周期函数 $p(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ 使得 $\mathrm{e}^{\lambda t}p(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 是方程的解。

由命题可知，若 1 是特征乘子，则 $\lambda = 2\pi i/T$ 是特征指数，则方程有 T 周期解 $\mathrm{e}^{\lambda t}p(t)$ 。

Prop 2.39

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续、以 T 为周期，$x' = A(t)x$ 的特征乘子为 $\rho_i = \mathrm{e}^{\lambda_i T}$ ，$i = 1, 2, \ldots, n$ ，则

1. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \rho_i = \exp \int_0^T \mathrm{tr} A(s) \mathrm{d}s$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{tr} A(s) \mathrm{d}s \mod \frac{2\pi i}{T}$

令 $s = \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ，则由 Prop2.36 可知

1. 若 $s > 0$ ，则存在某个 $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$ ，从而方程有解在 $\mathbb{R}^+$ 无界；
2. 若 $s < 0$ ，则存在某个 $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ ，从而方程有解在 $\mathbb{R}^-$ 无界。

2.5 Conjugacies between linear equations

2.5.1 Notion of conjugacy

两个不同的常系数线性微分方程组的相图可能是一样的，这是因为相图丢失了时间 t 的信息。我们希望从定性的角度研究它们之间的关系。

Def 2.44

常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ 和 $y' = By$ 的解分别为 $x(t) = \mathrm{e}^{At}x(0)$ 和 $y(t) = \mathrm{e}^{Bt}y(0)$ 。如果存在双射 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得 $h(\mathrm{e}^{At}x) = \mathrm{e}^{Bt}h(x)$ 对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，并且

1. 若 h 是同胚（即 h, h^{-1} 都连续），则称这两个动力系统**拓扑共轭 (topologically conjugate)**；
2. 若 h 是微分同胚（即 h, h^{-1} 都可微），则称这两个动力系统**微分共轭 (differentially conjugate)**；
3. 若 h 是线性函数（即 $h(x) = Cx, x \in \mathbb{R}^{n\times n}$），则称这两个动力系统**线性共轭 (linearly conjugate)**。

这两个动力系统定义了两个流 $\varphi_t(x) = \mathrm{e}^{At}x$ 和 $\psi_t(x) = \mathrm{e}^{Bt}x$，从而 $h(\mathrm{e}^{At}x) = \mathrm{e}^{Bt}h(x)$ 实际上是在说下面的图是交换的，即 $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "h"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi_t"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Figure 7: 拓扑共轭交换图

2.5.2 Linear conjugacies

Prop 2.45

常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ 和 $y' = By$ 微分共轭当且仅当线性共轭。

Prop 2.47

常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ 和 $y' = By$ 线性共轭当且仅当矩阵 A, B 相似。

2.5.3 Topological conjugacies

Def 2.48

如果 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值的实部都非零，则称 A 是**双曲的 (hyperbolic)**。

Def 2.49

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则 $m(A)$ 表示 A 的具有正实部的特征值个数（计算重数）。

Thm 2.50

设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是双曲的，若 $m(A) = m(B)$，则常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ 和 $y' = By$ 拓扑共轭。

双曲的条件不能去掉，反例：$\begin{cases} x' = -ay \\ y' = ax \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x' = -by \\ y' = bx \end{cases}$ 不拓扑共轭，其中 $0 < a < b$（它们实际上是两个角速度不一样的中心）。

证明：在极坐标下它们的解分别是 $\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = at + \theta_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases}$。

若两系统拓扑共轭，则 $h(r_0, at+\theta_0) = (h_1(r_0), bt+h_2(\theta_0))$ 。它的第二个分量 h_2 满足 $h_2(at+\theta_0) = bt+h_2(\theta_0)$ 。从而 h_2 将区间 $(\theta_0, 2\pi a/b+\theta_0)$ 映成 $(h_2(\theta_0), 2\pi+h_2(\theta_0))$ 。从而 h_2 将圆弧映成圆周，这与 h 是双射矛盾。

Chapter 3 Stability and Lyapunov Function

3.1 Notions of stability

设 $f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续，$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 开集，初值问题 $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 的解记作 $x(t, t_0, x_0)$ 。

Def 3.1

称 $x(t,t_0,x_0)$ **稳定 (stable)**，如果 $\forall\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $\|x_0' - x_0\| < \delta$ ，则

1. $x(t,t_0,x_0')$ 和 $x(t,t_0,x_0)$ 对于任意 $t > t_0$ 有定义；
2. $\|x(t,t_0,x_0') - x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ 对于任意 $t > t_0$ 成立。

Def 3.4

称 $x(t,t_0,x_0)$ **渐近稳定 (asymptotic)**，如果

1. $x(t,t_0,x_0)$ 稳定；
2. 存在 $\alpha > 0$ 使得只要 $\|x_0' - x_0\| < \alpha$ ，则 $\|x(t,t_0,x_0') - x(t,t_0,x_0)\| \to 0$ 当 $t \to +\infty$ 。

一般来说，以上的定义与初始时间 t_0 有关，但容易证明对于驻定方程，解的（渐近）稳定性与初始时间无关。

3.2 Stability of linear equations

3.2.1 Nonautonomous linear equations:general case

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续。

Prop 3.7

1. $x' = A(t)x$ 的零解的（渐近）稳定性与初始时间 t_0 无关；
2. $x' = A(t)x$ 的零解（渐近）稳定当且仅当 $x' = A(t)x$ 的任意解都（渐近）稳定。

Def 3.8

如果零解是（渐近）稳定的，则称方程 $x' = A(t)x$ 是（渐近）稳定的。

Thm 3.9

设 $X(t)$ 是 $x' = A(t)x$ 的任意一个基解矩阵，则

1. $x' = A(t)x$ 稳定当且仅当 $X(t)$ 对 t 一致有界；
2. $x' = A(t)x$ 渐近稳定当且仅当任意范数 $\|X(t)\| \to 0$ ， $t \to +\infty$ 。

3.2.2 Constant coefficients and periodic coefficients

Thm 3.10

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ，则

1. $x' = Ax$ 稳定当且仅当 A 的特征值的实部都非正，并且实部为零的特征值相应的 Jordan 块是对角阵；
2. $x' = Ax$ 渐近稳定当且仅当 A 的特征值的实部都小于零；
3. $x' = Ax$ 不稳定当且仅当 A 的特征值至少有一个实部大于零，或者实部为零的特征值相应的 Jordan 块不是对角阵；

Thm 3.11

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续，以 T 为周期，则由 Floquet 定理，其任意基解矩阵形如 $X(t) = P(t)\exp(Bt)$ 并且 B 的特征值就是方程的特征指数（模 $2\pi i/T$ ），则

1. $x' = A(t)x$ 稳定当且仅当特征指数的实部都非正，并且实部为零的特征指数在 B 中相应的 Jordan 块是对角阵；
2. $x' = A(t)x$ 渐近稳定当且仅当特征指数的实部都小于零；
3. $x' = A(t)x$ 不稳定当且仅当特征指数至少有一个实部大于零，或者实部为零的特征指数在 B 中相应的 Jordan 块不是对角阵。

3.3 Stability under nonlinear perturbations

Thm 3.12

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值的实部都是负数，$g: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 连续、关于 x 局部 Lipschitz 。若 $g(t,0) = 0$（为了保证下面相应的非齐次方程有零解），且 $\lim_{x\to 0}\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{\|g(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ （即 g 是高阶项），则

1. 非齐次方程 $x' = Ax + g(t,x)$ 的零解渐近稳定；
2. 存在常数 $C, \lambda, \delta > 0$ ，使得对于任意 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和解 $x(t)$ ，只要 $\|x(t_0)\| < \delta$ ，则 $\|x(t)\| \leq Ce^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\|$ 对任意 $t > t_0$ 成立。

Thm 3.13

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的，x_0 是 $x' = f(x)$ 的临界点，并且 f 在 x_0 处的 Jacobi 矩阵 $d_{x_0}f$ 特征值的实部都是负数，则

1. 对于任意 $t_0 \in \mathbb{R}$ ，初值问题 $x' = f(x), x(t_0) = x_0$ 的解渐近稳定；
2. 存在常数 $C, \lambda, \delta > 0$ ，使得对于任意 $t_0 \in \mathbb{R}$ ，只要 $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta$ ，则初值问题 $x' = f(x), x(t_0) = \tilde{x}_0$ 的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t) - x_0\| \leq Ce^{-\lambda(t-t_0)}\|\tilde{x}_0 - x_0\|$ 对任意 $t > t_0$ 成立。

Rmk

Thm4.9 将这个定理推广到了 $d_{x_0}f$ 是双曲（Def2.48，即特征值的实部都非零）的情况

Thm 3.14

设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续。若 $x' = A(t)x$ 的基解矩阵 $X(t)$ 满足 $\|X(t)X(s)^{-1}\| \leq c\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}$ 对任意 $t \geq s$ 成立，其中 $c, \mu > 0$，则非齐次方程 $x' = A(t)x + g(t,x)$ 的零解渐近稳定。

3.4 Lyapunov functions

3.4.1 Basic notions

设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足局部 Lipschitz 条件，$V : D \to \mathbb{R}$ 可微。定义一个新的函数 $\dot{V}(x) = \nabla V \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$，称为 V 通过 f 的全导数。

设初值问题 $x' = f(x), x(0) = x$ 的解为 $\varphi_t(x) = x(t,x)$，则 $\dot{V}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\varphi_t(x))|_{t=0}$。

Def 3.16

给定临界点 $x_0 \in D$，即 $f(x_0) = 0$，若一个可微函数 $V : D \to \mathbb{R}$

1. 存在 x_0 的开邻域 $U \subset D$ 使得 V 定正并且 $\dot{V}$ 常负，则称 V 为 x_0 处的 **Lyapunov 函数**；
2. 存在 x_0 的开邻域 $U \subset D$ 使得 V 定正并且 $\dot{V}$ 定负，则称 V 为 x_0 处的**严格 Lyapunov 函数**。

Rmk

1. f 在 $U \ni x_0$ 定正是指 $f(x) \geq 0, x \in U$ 并且 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$；
2. f 在 $U \ni x_0$ 常正是指 $f(x) \geq 0, x \in U$。

3.4.2 Stability criterion

Thm 3.18

设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足局部 Lipschitz 条件，$x_0 \in D$ 是方程 $x' = f(x)$ 的一个临界点，则

1. 若存在一个 x_0 处的 Lyapunov 函数，则 x_0 稳定；
2. 若存在一个 x_0 处的严格 Lyapunov 函数，则 x_0 渐近稳定。

3.4.3 Instability criterion

Thm 3.23

设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足 Lipschitz 条件，$x_0 \in D$ 是方程 $x' = f(x)$ 的一个临界点。若存在满足 C^1 的函数 $V : U \to \mathbb{R}$ 定义在 x_0 的一个邻域 $U \subset D$ 使得

1. $V(x_0) = 0$ 且 $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U \backslash \{x_0\}$；
2. V 在 x_0 的任意邻域都能取到正值，

则 x_0 不稳定。

Chapter 4 Hyperbolicity and Topological Conjugacies

4.1 Hyperbolic critical points

Def 4.1

方程 $x' = f(x)$ 的临界点 x_0 （即 $f(x_0) = 0$ ）称是**双曲临界点 (hyperbolic critical point)** 如果 Jacobi 矩阵 $d_{x_0}f$ 是双曲的（Def2.48，即特征值的实部都非零）。

Def 4.2

设 x_0 是 $x' = f(x)$ 的双曲临界点，则

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{e}^{At}x \to 0, t \to +\infty\}$$

和

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{e}^{At}x \to 0, t \to -\infty\}$$

分别称为 x_0 的**稳定空间 (stable spaces)** 和**不稳定空间 (unstable spaces)** 。

Prop 4.3

设 x_0 是 $x' = f(x)$ 的双曲临界点，则

1. 作为线性空间，E^s 和 E^s 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，并且 $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$ （子空间的直和）；
2. 若 $x \in E^s, y \in E^u$ ，则对于任意 $t \in \mathbb{R}$ ，$\mathrm{e}^{At}x \in E^s, \mathrm{e}^{At}y \in E^u$ 。

4.2 The Grobman-Hartman theorem

Thm 4.7 (Grobman-Hartman theorem)

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的，x_0 是 $x' = f(x)$ 的双曲临界点，则方程 $x' = f(x)$ 和 $y' = (d_{x_0}f)y$ 的解分别在 x_0 和 0 的邻域拓扑共轭。具体来说，设 $\varphi_t(z)$ 和 $\psi_t(z)$ 分别是初值问题 $x' = f(x), x(0) = z$ 和 $y' = (d_{x_0}f)y, y(0) = z$ 定义的流，则存在 $x_0, 0$ 的开邻域 U, V 和同胚 $h : U \to V$ 使得 $h(x_0) = 0$ ，并且只要 z 和 $\varphi_t(z) \in U$ ，则有 $h(\varphi_t(z)) = \psi_t(h(z))$

下面的是 Thm3.13 的推广，解决了部分非齐次方程的临界点的稳定性判定问题。

Thm 4.9

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的，x_0 是 $x' = f(x)$ 的双曲临界点，则

1. 若矩阵 $d_{x_0}f$ 的特征值的实部都是负数，则 x_0 渐近稳定；
2. 若矩阵 $d_{x_0}f$ 的特征值的实部存在正数，则 x_0 不稳定。

Chapter 6 Index Theory

6.1 Index for vector fields in the plane

若连续函数 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2):I=[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 满足 $\gamma(0)=\gamma(1)$ 且 $\gamma|_{(0,1)}$ 是单射，则称 γ 为一个闭道路。

设 $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 的向量场，则有第二类曲线积分

$$\int_\gamma f=\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\mathrm{d}t+f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\mathrm{d}t$$

Def 6.3

给定一个闭道路 γ 使得 f 在 γ 上不取零，则

$$\mathrm{Ind}_f(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{f_1\nabla f_2-f_2\nabla f_1}{f_1^2+f_2^2}$$

称为 γ 关于 f 的**指标 (index)**。显然 $\mathrm{Ind}_f(-\gamma)=-\mathrm{Ind}_f(\gamma)$ 。

Prop 6.4

设 $f(x)\neq 0$ ，则函数

$$\theta(x)=\begin{cases}\arctan(f_2(x)/f_1(x)) & f_1(x)>0\\ \pi/2 & f_1(x)=0\ \&\ f_2(x)>0\\ \arctan(f_2(x)/f_1(x))+\pi & f_1(x)<0\\ -\pi/2 & f_1(x)=0\ \&\ f_2(x)<0\end{cases}$$

表示在 x 处，向量场 $f(x)$ 的辐角。注意到 $\theta(x)$ 的梯度

$$\nabla\theta=\frac{f_1\nabla f_2-f_2\nabla f_1}{f_1^2+f_2^2}$$

在 $\{x:f(x)\neq 0\}$ 有定义。则容易证明

$$\mathrm{Ind}_f(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\nabla\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(\gamma(t))\mathrm{d}t$$

由于 $\gamma(0)=\gamma(1)$ ，$\mathrm{Ind}_f(\gamma)$ 是整数。其几何意义是沿着 γ 绕一圈，向量场 f 转的圈数。

Prop 6.6

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 的向量场，若 $f(x_0)\neq 0$ ，则在 x_0 的一个充分小的邻域内的任意闭道路 γ 的指标 $\mathrm{Ind}_f(\gamma)=0$ 。

Prop 6.8, 6.9

1. 若 γ_0,γ_1 同伦、每一个切片都是闭道路，并且 f 在每一个切片上都不为零，则 $\mathrm{Ind}_f(\gamma_0)=\mathrm{Ind}_f(\gamma_1)$ ；
2. 若 f_0,f_1 同伦、每一个切片都是 C^1 的，并且每一个切片 f_s 在 γ 上都不为零，则 $\mathrm{Ind}_{f_0}(\gamma)=\mathrm{Ind}_{f_1}(\gamma)$ 。

6.2 Applications of the notion of index

Prop 6.13

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 的向量场，$\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ 是闭道路，则

1. 若 γ 所围的内部没有方程 $x'=f(x)$ 的临界点，则 $\text{Ind}_f(\gamma)=0$；
2. 若 $\text{Ind}_f(\gamma)\neq 0$，则 γ 所围的内部至少有一个方程 $x'=f(x)$ 的临界点。

Prop 6.14

1. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 的向量场，$\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ 是闭道路，若 $\gamma([0,1])$ 是 $x'=f(x)$ 的一个周期轨道，则 $\text{Ind}_f(\gamma)=\pm 1$；
2. $x'=f(x)$ 的任意周期轨道所围的内部至少含有一个临界点。

6.3 Index of an isolated critical point

Def 6.19

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 的向量场，x_0 是 $x'=f(x)$ 的孤立临界点，若 γ（取正方向）包围的内部只含有 x_0，则 $\text{Ind}_f(\gamma)$ 称为 x_0 的指标，记作 $\text{Ind}_f(x_0)$。

Prop 6.20

鞍点的指标是 -1，其余孤立临界点的指标是 1。

Prop 6.21

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 的向量场，γ（取正方向）包围的内部含有有限个孤立临界点 $x_1,x_2,\dots,x_n$，则

$$\text{Ind}_f(\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\text{Ind}_f(x_i)$$

Chapter 7 Poincare-Bendixson Theory

7.1 Limit sets

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续、满足 Lipschitz 条件，初值问题 $x'=f(x),x(0)=x_0$ 的解记作 $\varphi_t(x_0)$，最大存在区间记作 I_{x_0}。

Def 7.1

若集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 满足 $\forall x\in A,t\in I_x$ 都有 $\varphi_t(x)\in A$，则称 A 是**不变的 (invariant)**。

Def 7.3

给定 $x\in\mathbb{R}^n$

1. $\gamma(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x\}$ 是轨线 (orbit)；
2. $\gamma^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^+\}$ 是正半轨线 (positive semiorbit)；
3. $\gamma^-(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^-\}$ 是负半轨线 (negative semiorbit)。

Def 7.4

给定 $x \in \mathbb{R}^n$

1. $\alpha(x) = \bigcap_{y \in \gamma(x)} \overline{\gamma^-(y)}$ 称为 α-极限集
2. $\omega(x) = \bigcap_{y \in \gamma(x)} \overline{\gamma^+(y)}$ 称为 ω-极限集

Prop 7.8

若 $\gamma^+(x)$ 有界，则

1. $\omega(x)$ 紧致、连通、非空；
2. $y \in \omega(x)$ 当且仅当存在数列 $t_k \to +\infty$ 使得 $\varphi_{t_k}(x) \to y$；
3. 对任意 $t > 0$ 和 $y \in \omega(x)$ 都有 $\varphi_t(y) \in \omega(x)$；
4. 距离 $d(\varphi_t(x), \omega(x)) \to 0$，$t \to +\infty$。

若 $\gamma^-(x)$ 有界，则

1. $\alpha(x)$ 紧致、连通、非空；
2. $y \in \alpha(x)$ 当且仅当存在数列 $t_k \to -\infty$ 使得 $\varphi_{t_k}(x) \to y$；
3. 对任意 $t < 0$ 和 $y \in \alpha(x)$ 都有 $\varphi_t(y) \in \alpha(x)$；
4. 距离 $d(\varphi_t(x), \alpha(x)) \to 0$，$t \to -\infty$。

7.2 The Poincare-Bendixson theorem

Thm 7.11（Poincare − Bendixson）

设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是 C^1 的，对于方程 $x' = f(x)$

1. 若 $\gamma^+(x)$ 有界，且极限集 $\omega(x)$ 不含有临界点，则 $\omega(x)$ 是一个周期轨线；
2. 若 $\gamma^-(x)$ 有界，且极限集 $\alpha(x)$ 不含有临界点，则 $\alpha(x)$ 是一个周期轨线。