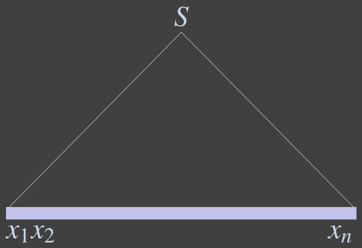
CYK-Algorithmus

Wortproblem für kontextfreie Sprachen: Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache und sei $w = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^*$, gilt $w \in L$?

Der folgende von Cocke, Kasami und Younger unabhängig voneinander entworfene Algorithmus löst das Wortproblem für kontextfreie Sprachen, die durch eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform gegeben sind.

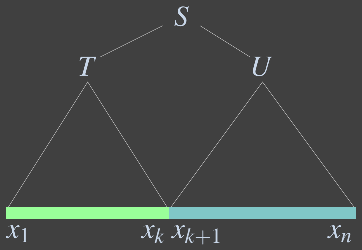
Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform und sei $w = x_1 \dots x_n$ mit $x_i \in \Sigma$ für $i = 1, \dots, n$.

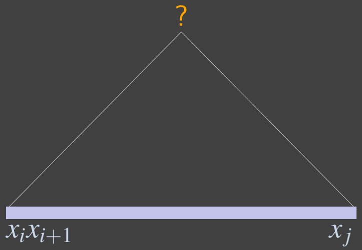
$w \in L(G)$ g.d.w. $S \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. es bezüglich G einen Syntaxbaum mit Beschriftung $w = x_1 \dots x_n$ und Wurzel S gibt.



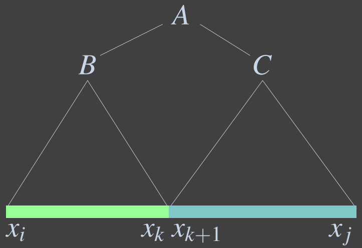
O.B.d.A. sei $n > 1$.

Falls $S \Rightarrow_G x_1 \dots x_n$, so gibt es ein k, $1 \leq k < n$ und $T, U \in V$, so dass $T \Rightarrow_G x_1 \dots x_k$ und $U \Rightarrow_G x_{k+1} \dots x_n$.





Für $1 \leq i \leq j \leq n$ sei $N[i, j]$ die Menge aller Symbole aus V, aus denen das Teilwort $x_i \ldots x_j$ abgeleitet werden kann.



$$i < j\colon\;\; N[i,j] = \{A \in V \mid A \to_G BC,\; BC \in \bigcup_{i \le k < j} N[i,k] \circ N[k+1,j]\;\}$$

$$i = j\colon\;\; N[i,i] = \{A \in V \mid A \to_G x_i\}$$

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{i \le k < j} && N[i,k] \circ N[k+1,j] \\
= & && N[i,i] \circ N[i+1,j] \\
& \cup && N[i,i+1] \circ N[i+2,j] \\
& && \vdots \\
& \cup && N[i,k] \circ N[k+1,j] \\
& && \vdots \\
& \cup && N[i,j-1] \circ N[j,j]
\end{aligned}
$$

$\mathrm{CYK}(G = (V, \Sigma, R, S), w = x_1 \ldots x_n)$

```
for i ← 1 to n
      do N[i,i] ← {A ∈ V | es gibt A → x_i in R}
         for j ← i+1 to n
              do N[i,j] ← ∅
for s ← 1 to n−1
      do for i ← 1 to n−s
              do for k ← i to i+s−1
                      do if ( es gibt A → BC in R mit
                              B ∈ N[i,k] und C ∈ N[k+1,i+s] )
                            then füge A zu N[i,i+s] hinzu
if ( S ∈ N[1,n] )
    then return "w ∈ L(G)"
    else return "w ∉ L(G)"
```

Lemma:
Nach s Iterationen, $0 \leq s \leq n$, von $\mathrm{CYK}((V,\Sigma,R,S),x_1 \ldots x_n)$ gilt für alle $i = 1,\ldots,n-s$,

$$N[i,i+s] = \{A \in V \mid A \Rightarrow_G^* x_i \ldots x_{i+s}\}$$

Beweisskizze: Induktion über s. ■

Aus dem Lemma folgt, dass $x \in L(G)$ genau dann wenn $S \in N[1,n]$.

Beispiel:

$$S \rightarrow AB \mid BC$$
$$A \rightarrow BA \mid a$$
$$B \rightarrow CC \mid b$$
$$C \rightarrow AB \mid a$$

	1	2	3	4	5
	b	a	a	b	a
1	$\{B\}$	.	.	.	.
2		$\{A,C\}$	.	.	.
3			$\{A,C\}$	.	.
4				$\{B\}$	.
5					$\{A,C\}$

$x_i = a$: $\quad N[i,i] = \{A,C\}$ $\qquad$ $x_i = b$: $\quad N[i,i] = \{B\}$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid BC \\
A &\to BA \mid a \\
B &\to CC \mid b \\
C &\to AB \mid a
\end{aligned}
$$

	1	2	3	4	5
	b	a	a	b	a
1	$\{B\}$	$\{A,S\}$	.	.	.
2		$\{A,C\}$	.	.	.
3			$\{A,C\}$	.	.
4				$\{B\}$	.
5					$\{A,C\}$

$$N[1,1] \circ N[2,2] = \{B\} \circ \{A,C\} = \{BA, BC\}$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid BC\\
A &\to BA \mid a\\
B &\to CC \mid b\\
C &\to AB \mid a
\end{aligned}
$$

	1	2	3	4	5
	b	a	a	b	a
1	$\{B\}$	$\{A,S\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{A,C,S\}$
2		$\{A,C\}$	$\{B\}$	$\{B\}$	$\{A,C,S\}$
3			$\{A,C\}$	$\{C,S\}$	$\{B\}$
4				$\{B\}$	$\{A,S\}$
5					$\{A,C\}$

$$
\begin{aligned}
N[1,1]\circ N[2,5] \cup N[1,2]\circ N[3,5] \cup N[1,3]\circ N[4,5] \cup N[1,4]\circ N[5,5]&\\
= \{BA, BC, BS, AB, SB\}&
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & (& (&) & (& (&) &) &) \\
1 & \{A\} & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & & \{A\} & . & . & . & . & . & . \\
3 & & & \{E\} & . & . & . & . & . \\
4 & & & & \{A\} & . & . & . & . \\
5 & & & & & \{A\} & . & . & . \\
6 & & & & & & \{E\} & . & . \\
7 & & & & & & & \{E\} & . \\
8 & & & & & & & & \{E\}
\end{array}
$$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	.	.	.	.	.	.
2		$\{A\}$	.	.	.	.	.	.
3			$\{E\}$	.	.	.	.	.
4				$\{A\}$	.	.	.	.
5					$\{A\}$	.	.	.
6						$\{E\}$	.	.
7							$\{E\}$	.
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	.	.	.	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	.	.	.	.	.
3			$\{E\}$	.	.	.	.	.
4				$\{A\}$	.	.	.	.
5					$\{A\}$	.	.	.
6						$\{E\}$	.	.
7							$\{E\}$	.
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	.	.	.	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	.	.	.	.	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	.	.	.	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	.	.	.
5					$\{A\}$	$\{S\}$	.	.
6						$\{E\}$	$\emptyset$	.
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	.	.	.	.	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	.	.	.	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	.	.	.
5					$\{A\}$	$\{S\}$	.	.
6						$\{E\}$	$\emptyset$	.
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	.	.	.	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	.
6						$\{E\}$	$\emptyset$	.
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	.	.	.	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	.
6						$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	.
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	.
6						$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	$\{T\}$
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	$\emptyset$
6						$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	.
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	$\{T\}$
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	$\emptyset$
6						$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	.
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	$\{T\}$
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	$\{T\}$
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	$\emptyset$
6						$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$

Beispiel: $\{S \to SS \mid AT \mid AE,\ T \to SE,\ A \to (,\ E \to)\ \}$

$w = (()(()))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	(	(	)	(	(	)	)	)
1	$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$
2		$\{A\}$	$\{S\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	$\{T\}$
3			$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
4				$\{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$	$\{T\}$
5					$\{A\}$	$\{S\}$	$\{T\}$	$\emptyset$
6						$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
7							$\{E\}$	$\emptyset$
8								$\{E\}$