Facultad de Ingeniería Comisión Académica
de Posgrados

Teoría de Juegos Evolutivos

Análisis de ***The power of voting and corruption cycles***

15 de marzo de 2023

Autor:
Luciana Vidal

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo del presente documento es analizar el trabajo realizado por Accinelli et al. (2022), y ver cómo evoluciona la corrupción en un país a través de una serie de cambios, para esto formularon el problema como uno de teoría de juegos evolutivos para luego estudiar su evolución.

Tal como se menciona en David Torres (2022), la corrupción afecta distintas áreas en una sociedad, y tiene variados efectos: políticos, sociales, económicos, entre otros. Esto es porque la corrupción pone por delante intereses de unos pocos versus el interés general, lo que daña a la democracia.

Varios son los intentos de eliminar la corrupción, un ejemplo es la organización Transparencia Internacional que trabaja en más de 100 países en la lucha contra la corrupción. Índice de Percepción de la Corrupción (CPI) de Transparencia Internacional (2021) es un ranking en donde se busca clasificar a los países según los niveles percibidos de corrupción en el sector público. Daniel Eriksson (2022) explica que mediante los resultados del CPI del 2022 se puede concluir que los países no están logrando enfrentarse con éxito a la corrupción: 155 países no lograron avances contra la corrupción desde 2012, o incluso están peor; 26 países de un total de 180 países han caído a puntajes más bajos hasta el momento; entre otros resultados desalentadores.

Existen distintos tipos de corrupción, en Jain (2001) se los explican: corrupción que engloba la elite política, corrupción por parte de los funcionarios sobre los ciudadanos con los que trata y formulación de políticas del legislador. Por lo que Accinelli et al. (2022) proponen un juego evolutivo para estudiar la evolución de la corrupción en un estado democrático, en donde los actores son: la elite política representada por el gobierno electo, los funcionarios elegidos por el gobierno para llevar adelante acciones a los ciudadanos (por ejemplo: permiso de conducir), y finalmente los ciudadanos son aquellos con poder de voto.

Tal como se menciona en Accinelli et al. (2022) la teoría de juegos evolutivos es una buena opción para predecir la dinámica temporal de los agentes de dicho juego. Por lo que en su trabajo lo diseñaron así para analizar cómo se impacta en la corrupción ante una serie de cambios.

El documento está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se define el modelo del problema y en la Sección 3 el análisis del mismo desde el punto de vista de teoría de juegos evolutivos. Finalmente, en la Sección 4 se presentan las conclusiones alcanzadas.

Capítulo 2

Modelado del problema

En el problema planteado se estudia la corrupción que envuelve al gobierno, oficiales y ciudadanos, por lo que se tienen tres entidades en donde cada una es representada por una población que tiene dos estrategias posibles:

- Gobierno (Gob): es la autoridad máxima elegida por el voto popular, por lo que tiene gran influencia en la corrupción.

  Se tienen dos estrategias puras: ser corrupto (G) o no ($\bar{G}$).

- Oficiales (Ofi): son contratados por el gobierno para llevar acabo acciones que necesitan los ciudadanos. Un oficial corrupto le cobra al ciudadano para llevar a cabo dicha tarea, beneficiándose ilegalmente de la necesidad del ciudadano.

  La cantidad de oficiales es relativamente chica con respecto a la cantidad de ciudadanos, por lo que no tiene poder de voto (su decisión no afecta al gobierno elegido). Un oficial es corrupto cuando le cobra al ciudadano para llevar adelante su tarea.

  Se tienen dos estrategias puras: ser corrupto (O) o no ($\bar{O}$).

- Ciudadanos (Ciu): son aquellos con poder de voto, por lo que su decisión termina afectando en la elección del gobierno y por ende en la elección de oficiales.

  Los ciudadanos son corruptos (también llamado complaciente) cuando aceptan la corrupción que los rodea recibiendo un beneficio por parte del gobierno como lo puede ser la compra de votos y pagando a los oficiales para que realicen acciones. No intentan cambiar la situación mediante su voto dado que están conformes con la corrupción.

  Se tienen dos estrategias puras: ser corrupto (C) o no ($\bar{C}$).

El juego se define por la tripleta $J = \{P, S, U\}$, en donde:

- $P = \{Gob, Ofi, Ciu\}$ representa a los jugadores.
- $S = S^{Gob} x S^{Ofi}, S^{Ciu}$ representa al espacio de estrategias, en donde $S^{Gob} = \{G, \bar{G}\}$ son las estrategias del Gobierno, $S^{Ofi} = \{O, \bar{O}\}$ de los oficiales y $S^{Ciu} = \{C, \bar{C}\}$ de los ciudadanos.
- U representa las utilidades obtenidas por cada jugador según las estrategias elegidas.

TABLA 2.1: Matriz de utilidad de los ciudadanos

	G, O	$G, \bar{O}$	$\bar{G}, O$	$\bar{G}, \bar{O}$
C	$L-1$	L	-1	0
$\bar{C}$	$UG-(1+UO)$	UG	$U\bar{G}-(1+UO)$	$U\bar{G}$

2.1. Matriz Utilidad

La matriz de utilidad representa los pagos que recibe y debe realizar cada población según la estrategia que elija y la estrategia de las otras poblaciones.

En las siguientes subsecciones se presentan las matrices de cada población, en donde se analizan las distintas estrategias de una población contra las estrategias de las otras dos poblaciones.

2.1.1. Ciudadanos

La utilidad de los ciudadanos es representada por la Tabla 2.1, los parámetros utilizados son:

- Utilidad negativa:
  - 1: pago del ciudadano a un oficial corrupto para que realice una tarea.
  - UO: pago del ciudadano no corrupto a un oficial corrupto.
- Utilidad positiva:
  - L: pago del gobierno corrupto a un ciudadano corrupto para comprar su voto.
  - UG: pago externo que recibe el ciudadano no corrupto cuando el gobierno es corrupto.
  - $U\bar{G}$: pago externo que recibe el ciudadano no corrupto cuando el gobierno es no corrupto.

2.1.2. Oficiales

La utilidad de los oficiales es representada por la Tabla 2.2, los parámetros utilizados son:

- Utilidad negativa:
  - PO: pago que debe hacer el oficial corrupto al gobierno corrupto para que lo mantenga en el cargo.
  - F: pago que debe hacer el oficial corrupto al gobierno no corrupto dado que recibe una multa por ser corrupto.
  - $P\bar{O}$: pago que debe hacer el oficial no corrupto al gobierno corrupto.
- Utilidad positiva:
  - 1: pago del ciudadano a un oficial corrupto para que realice una tarea.

TABLA 2.2: Matriz de utilidad de los oficiales

	G, C	$G, \bar{C}$	$\bar{G}, C$	$\bar{G}, \bar{C}$
O	$1 - PO$	$1 - PO$	$1 - F$	$1 - F$
$\bar{O}$	$-P\bar{O}$	$-P\bar{O}$	0	0

TABLA 2.3: Matriz de utilidad del gobierno

	O, C	$O, \bar{C}$	$\bar{O}, C$	$\bar{O}, \bar{C}$
G	$PO - L$	PO	$P\bar{O} - L$	$P\bar{O}$
$\bar{G}$	$VC + F - J$	$V\bar{C} + F - J$	VC	$V\bar{C}$

2.1.3. Gobierno

La utilidad del gobierno es representada por la Tabla 2.3, los parámetros utilizados son:

- Utilidad negativa:
  - L: pago del gobierno corrupto a un ciudadano corrupto para comprar su voto.
  - J: pago del gobierno no corrupto contra la corrupción de un oficial corrupto.
- Utilidad positiva:
  - PO: pago que debe hacer el oficial corrupto al gobierno corrupto para que lo mantenga en el cargo.
  - $P\bar{O}$: pago que debe hacer el oficial no corrupto al gobierno corrupto.
  - VC: pago externo que recibe el gobierno no corrupto de un ciudadano corrupto.
  - $V\bar{C}$: pago externo que recibe el gobierno no corrupto de un ciudadano no corrupto.

Capítulo 3

Análisis del problema

El objetivo del trabajo es responder a la pregunta: ¿cómo evoluciona la corrupción en un país a través de una serie de cambios? Para esto se analizó la dinámica del replicador en donde para cada población se compara su utilidad esperada según las estrategias puras que sigan los otros jugadores. En la ecuación (3.1) se muestra la dinámica, en donde g es la probabilidad de que el gobierno sea corrupto y $\dot{g}$ la probabilidad de que el gobierno siga un comportamiento corrupto, las definiciones son análogas para el resto de las poblaciones:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= g(1-g)(E(G) - E(\bar{G})) \\ \dot{o} &= o(1-o)(E(O) - E(\bar{O})) \\ \dot{c} &= c(1-c)(E(C) - E(\bar{C})) \end{aligned} \tag{3.1}$$

La esperanza $E(G)$ es el valor esperado de que el gobierno sea corrupto, por lo que la suma de las utilidades que percibe el gobierno corrupto por la probabilidad de que eso ocurra, siendo esto último la probabilidad de que los oficiales y los ciudadanos sigan la estrategia que le da esa utilidad al gobierno corrupto. Cuanto más grande sea $E(G)$, más grande será $\dot{g}$ por lo que habrán más corruptos. Suponiendo que las probabilidades de que ocurra O, G y C son independientes, se tiene la ecuación (3.2):

$$\begin{aligned} E(G) &= (PO - L)P(O \cap C) + POP(O \cap \bar{C}) + (P\bar{O} - L)P(\bar{O} \cap C) + P\bar{O}P(\bar{O} \cap \bar{C}) \\ &= (PO - L)(oc) + PO(o(1-c)) + (P\bar{O} - L)((1-o)c) + P\bar{O}((1-o)(1-c)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Desarrollando todas las ecuaciones, siguiendo la idea presentada en (3.2), se puede reescribir (3.1) formando un nuevo sistema de ecuaciones (3.3) para la dinámica del replicador.

$$\begin{aligned} &\text{Sean} \\ EG &= J + PO - F - P\bar{O} \\ BG &= V\bar{C} - VC - L \\ DG &= P\bar{O} - V\bar{C} \\ AO &= F + P\bar{O} - PO \\ DO &= 1 - F \\ AC &= UC + U\bar{G} - UG \end{aligned} \tag{3.3}$$

La dinámica del replicador se define como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= g(1-g)(oEG + cBG + DG) \\ \dot{o} &= o(1-o)(gAO + DO) \\ \dot{c} &= c(1-c)(gAC + oUO - U\bar{G}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para analizar el equilibrio del sistema de ecuaciones (3.3) se lo debe resolver una vez los parámetros estén fijos. El espacio de soluciones de la dinámica se representa con un cubo $C = [0,1]^3$ en donde las aristas representan a las poblaciones que siguen la misma estrategia pura, y las aristas son donde dos poblaciones siguen el mismo tipo mientras la tercera sigue una estrategia mixta o tiene individuos que siguen distintas estrategias puras. Los vértices son puntos de equilibrio y las aristas o caras del cubo son invariantes para la dinámica.

En la Figura 3.1 se muestra el cubo, en donde el eje de las x son los oficiales, el de las y el gobierno y la z los ciudadanos, y las flechas hacia donde se mueve la dinámica. Por ejemplo, el punto $(0,0,0)$ indica que las tres poblaciones son no corruptas, desde ese estado a uno en donde el gobierno sea corrupto (punto $(0,1,0)$) se debe tomar la ecuación de $\dot{g}$ y reemplazar c y o por cero y el valor obtenido debe ser positivo entonces se cumplirá si los parámetros respetan lo siguiente: $DG > 0$, y si del nuevo estado se desea pasar a que los ciudadanos también sean corruptos se toma $\dot{c}$ y se reemplazan $g = 1$ y $o = 0$ por lo que se tendrá la transición si los parámetros respetan lo siguiente: $AC - U\bar{G} > 0$. Y de la misma forma se itera en el cubo para agregar todos los pesos.

3.1. Punto interior

Para encontrar el punto interior $Q^* = (g^*, o^*, c^*)$ se debe resolver (3.3) cuando todas las estrategias son igualmente probables, o dicho de otro modo $E(G) = E(\bar{G})$), $E(O) = E(\bar{O})$) y $E(C) = E(\bar{C})$)

$$\begin{aligned} g^* &= -\frac{DO}{AG} \\ o^* &= \frac{AO\,U\bar{G} + AC\,DO}{AO\,UO} \\ c^* &= -\frac{AO(DG\,UO + EG\,U\bar{G}) + AC\,EG\,DO}{AO\,BG\,UO} \end{aligned} \tag{3.5}$$

El punto de equilibrio Q^* es un punto interior del cubo si $0 < g^*, o^*, c^* < 1$, y es el punto de equilibrio de Nash. Para estudiar la estabilidad del punto hallado

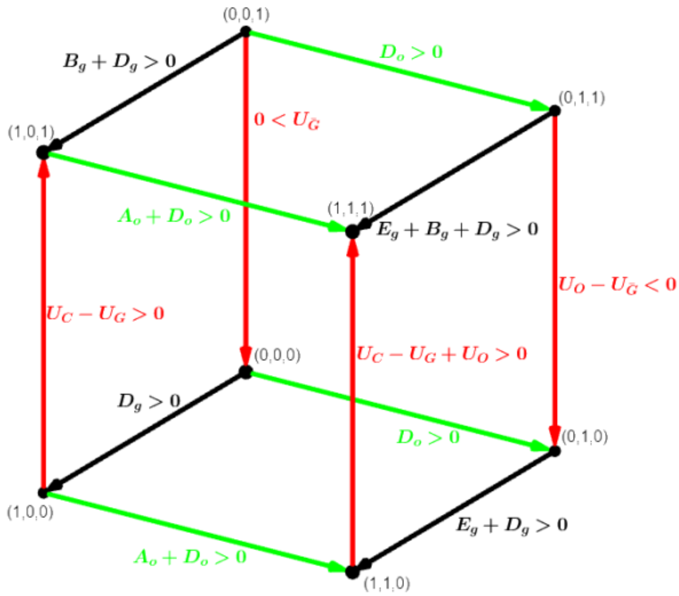

FIGURA 3.1: Cubo para la dinámica del replicador. Fuente Accinelli et al. (2022).

se definen nuevas variables: $G^* = g^*(1-g^*)$, $O^* = o^*(1-o^*)$ y $C^* = c^*(1-c^*)$. Cuando $G^*\ O^*\ C^* = 0$ entonces al menos uno de los componentes es cero, por lo que el punto está en una cara del cubo, un vértice o una arista.

Se estudia el Jacobiano (3.6), para analizar los autovalores del punto fijo Q^*. El polinomio resultante: $\lambda^3 - \lambda(G^*\ O^*\ EG\ AO + G^*\ C^* BG\ AC) - G^*\ O^*\ C^*\ BG\ AO\ UO < 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & G^*\ EG & G^* BG \\ O^*\ AO & 0 & 0 \\ C^*\ AC & C^* UO & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Dado que es un cubo, existe una raíz real. Se tienen dos posibles casos:

- $BG\ AG\ UO = 0$: una de las raíces es cero, mientras que las otras dos tienen componentes imaginarios. En este caso, dado que se supone que $U0 > 0$, $AG = O$ o $BG = 0$, por lo que sustituyendo en (3.3) da indefinido, por lo que si el equilibrio mixto existe, es del tipo silla de montar.

- $BG\ AO\ UO \neq 0$: cero no es una raíz, por lo que se tiene una raíz real que no es cero. Por el teorema de Hartman-Grobman, el equilibrio mixto es del tipo de silla de montar.

3.2. Extremos: corrupción o no corrupción

Un estudio interesante es analizar los posibles extremos: todas las poblaciones son corruptas, punto $(1,1,1)$ o no lo son $(0,0,0)$. Para esto se estudian los parámetros para ver cuándo los punto se vuelven atractores, gráficamente esto ocurre cuando todas las aristas que lo componen apuntan en su dirección.

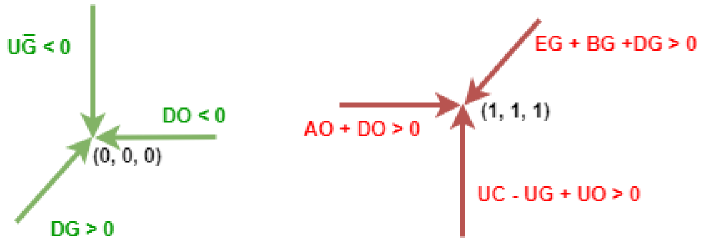

FIGURA 3.2: Dinámica para las poblaciones no corruptas (derecha, verde) y todos corruptos (izquierda, rojo).

3.2.1. No corrupción

Para el caso en donde no hay corrupción en ninguna de las poblaciones, el punto de equilibrio es $(0,0,0)$ y para que sea asintóticamente estable se deben cumplir las siguientes desigualdades: $DG < 0$, $DO < 0$ y $U\bar{G} > 0$, gráficamente se puede ver en la Figura 3.2 a la izquierda (color verde).

El gobierno es no corrupto cuando ni los ciudadanos ni los oficiales son corruptos, y $DG < 0$ por lo que $P\bar{O} < V\bar{C}$ lo que significa que el pago que recibe el gobierno corrupto del oficial no corrupto es menor al pago que recibe el gobierno no corrupto de un ciudadano no corrupto. Por lo que la utilidad que recibe el gobierno no corrupto es mayor a la que tendría si ejerciera la corrupción.

Por otro lado, los oficiales son no corruptos cuando ni los ciudadanos ni el gobierno son corruptos, y $DO < 0$ por lo que $F > 1$ lo que significa que el pago que debe hacer el oficial corrupto al gobierno no corrupto es mayor al pago que recibiría del ciudadano no corrupto en caso de ejercer la corrupción. Por lo tanto, los impuestos por parte del gobierno no corrupto son mayores que la utilidad que recibiría el oficial si fuera corrupto.

Finalmente, los ciudadanos son no corruptos cuando ni el gobierno ni los oficiales son corruptos, y $U\bar{G} > 0$ por lo que el pago que recibe el ciudadano no corrupto del gobierno no corrupto es positivo y por lo tanto es protegido por el sistema.

3.2.2. Corrupción

El caso en donde todas las poblaciones son corruptas, se da en el punto $(1,1,1)$. El punto es asintóticamente estable sí y sólo sí $AO + DO > 0$, $EG + BG + DG > 0$ y $L - UG + UO > 0$, gráficamente se lo presenta en la Figura 3.2 a la derecha (color rojo).

El gobierno es corrupto cuando tanto los ciudadanos como los oficiales lo son, y $EG + BG + DG > 0$ por lo que $J + PO - F - P\bar{O} + V\bar{C} - VC - L + P\bar{O} - V\bar{G}\bar{C} = J + PO - F - VC - L > 0$ entonces $J + PO + > F + VC + L$. Por lo tanto, las ganancias a obtener de la corrupción superan los impuestos que debe pagar contra la corrupción.

Por otro lado, los oficiales son corruptos cuando tanto el gobierno como los ciudadanos son corruptos, y $AO + DO > 0$ por lo que $F + P\bar{O} - PO + 1 - F > 0$ entonces $1 - PO > P\bar{O}$. Por lo tanto, la ganancia obtenida por parte de los oficiales al ser corruptos es mayor a lo que obtendrían los oficiales no corruptos por parte del gobierno corrupto.

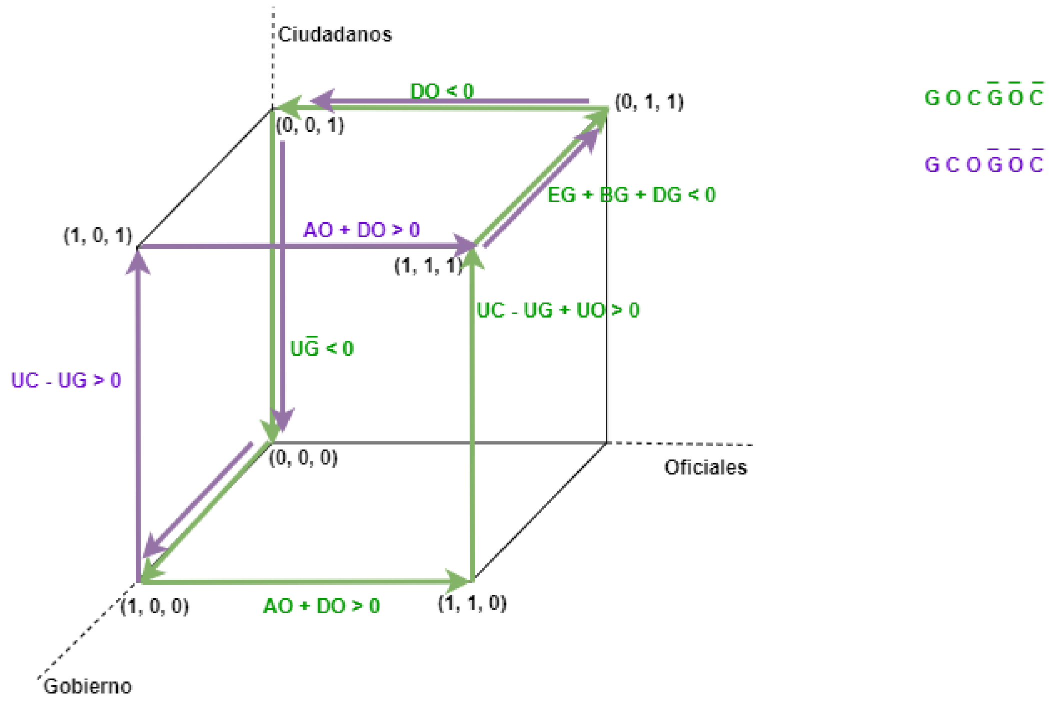

FIGURA 3.3: Movimiento de la dinámica para el ciclo $GOC\bar{G}\bar{O}\bar{C}$ (en verde) y $GCO\bar{G}\bar{O}\bar{C}$ (en violeta).

Finalmente, los ciudadanos son corruptos cuando tanto el gobierno como los oficiales son corruptos, y $L - UG + UO > 0$ entonces $L > UG - UO$. Por lo tanto, el pago que recibe el ciudadano de un gobierno corrupto por la compra de su voto es mayor a lo que recibiría un ciudadano no corrupto por su lucha contra la corrupción y el pago que le debe hacer a un oficial corrupto para que lleve a cabo su tarea.

3.3. Ciclos

Los ciclos heteroclínicos están determinados por seis letras, en donde cada una representa qué va a pasar en el grupo de la arista que se está considerando, y el orden representa cómo se van dando los eventos. Por lo tanto, cada ciclo está determinado por seis inecuaciones.

En la Figura 3.3 se diagrama el movimiento de la dinámica (dado por la dirección de las aristas) para el ciclo $GOC\bar{G}\bar{O}\bar{C}$ con flechas verdes, mientras que el ciclo $GCO\bar{G}\bar{O}\bar{C}$ en violeta, comenzando desde el punto sin corrupción $(0, 0, 0)$. Observando el diagrama, se puede determinar que las inecuaciones para el ciclo $GOC\bar{G}\bar{O}\bar{C}$ son las expresadas en (3.7) a (3.12), mientras que para el otro ciclo son las mismas salvo que se intercambia la (3.9) por $UC - UG > 0$. Ambos ciclos pueden coexistir.

$$DG > 0 \tag{3.7}$$
$$AO + DO > 0 \tag{3.8}$$
$$UC - UG + UO > 0 \tag{3.9}$$
$$EG + GB + DG < 0 \tag{3.10}$$
$$DO < 0 \tag{3.11}$$
$$U\bar{G} > 0 \tag{3.12}$$

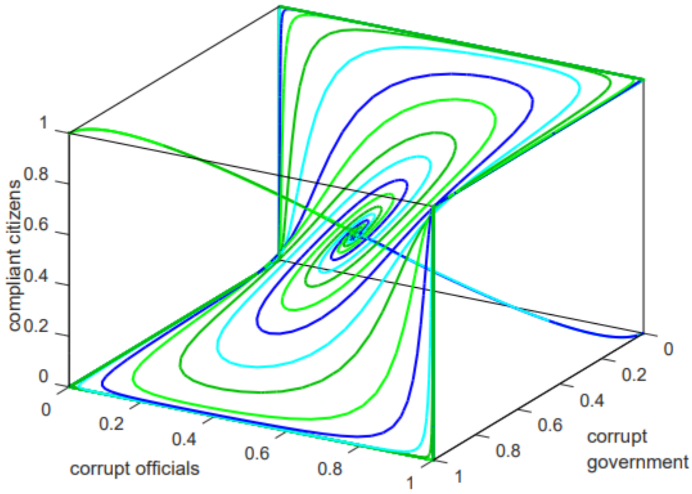

FIGURA 3.4: Ciclo $GOC\bar{G}\bar{O}\bar{C}$. Fuente Accinelli et al. (2022).

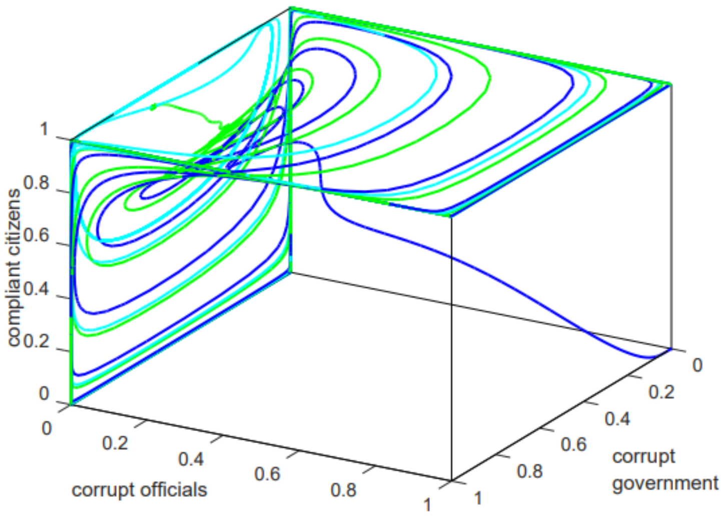

FIGURA 3.5: Ciclo $GCO\bar{G}\bar{O}\bar{C}$. Fuente Accinelli et al. (2022).

Al proyectar algunas trayectorias del ciclo $GOC\bar{G}\bar{O}\bar{C}$, se obtiene la Figura 3.4. Es un ciclo heteroclínico que conecta vértices del cubo y las conexiones son las aristas. Además, es atractor porque cualquier trayectoria que comienza dentro del cubo se le acerca, con excepción del estado estacionario mixto que es un equilibrio del sistema. El equilibrio mixto interno tiene una superficie inestable y una variedad transversal estable con dimensión 1. La superficie es topológicamente como un disco que contiene el equilibrio mixto interior dentro del cubo. El ciclo heteroclínico es el límite de la superficie con el cubo cuya intersección produce el ciclo mencionado. Finalmente en la Figura 3.5 se grafica el cubo $GCO\bar{G}\bar{O}\bar{C}$.

Capítulo 4

Conclusiones

El trabajo de Accinelli et al. (2022) estudia un relevante tema como lo es la corrupción, presente en varios países en diferente grado. Y es una problemática que aqueja a las poblaciones hace mucho tiempo, teniendo diversas afectaciones tales como: problemas sociales, económicos y políticos.

La corrupción fue modelada como un problema de teoría de juegos evolutivo dado que es una buena táctica para estudiar la evolución de una dinámica. El juego está conformado por tres poblaciones: ciudadanos, oficiales y gobierno, en donde cada uno posee dos estrategias posibles: ser corruptos o no. Sobre el juego, estudiaron la evolución del mismo utilizando la dinámica del replicador en donde vieron: el punto interior, los extremos posibles (ninguno corrupto, todos corruptos) y los ciclos de corrupción. Y estos datos los analizaron desde el punto de vista socio económico.

El punto interior lo formularon determinando que las estrategias de cada población es igual de probable, y llegaron a la conclusión de que el equilibrio mixto existente es del tipo de silla de montar.

Sobre los extremos, se analizó el comportamiento en donde todos son corruptos y se encontraron tres inecuaciones que se requieren para que se cumpla, y lo mismo para el comportamiento en donde ninguna población es corrupta. Por lo tanto, la forma de cortar con uno de esos comportamientos, es variar los parámetros de forma tal que las inecuaciones no se cumplan.

Finalmente, sobre los ciclos, los mismos pueden ser estables pero dependen de los valores de los parámetros. Se analizaron dos ciclos heteroclínicos que pueden coexistir.

Bibliografía

Accinelli, E., Martins, F., Pinto, A. A., Afsar, A., y Oliveira, B. M. P. M. (2022). The power of voting and corruption cycles. *The Journal of Mathematical Sociology*, *46*, 56-79.

Daniel Eriksson. (2022). Los efectos del fenómeno de la corrupción [Último acceso: 10/03/2022]. https://www.transparency.org/en/cpi/2022

David Torres. (2022). Los efectos del fenómeno de la corrupción [Último acceso: 10/03/2022]. https://idehpucp.pucp.edu.pe/analisis1/los-efectos-del-fenomeno-de-la-corrupcion

Jain, K. (2001). Corruption: A review. *Journal of Economic Surveys*, *15*, 1-51.

Transparencia Internacional. (2021). EL ABC DEL CPI [Último acceso: 10/03/2022]. https://www.transparency.org/es/news/how-cpi-scores-are-calculated