AUTOMAZIONE INDUSTRIALE I - FORMULARIO COMPLETO (RETI DI CODE)

ALESSANDRO MAGGI

Si prega di leggere attentamente il disclaimer allegato a questo documento prima di visionarne il contenuto.

1. Definizioni

- Valore atteso del numero dei clienti nel sistema: $N = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$
- Valore atteso del tempo di arrivo: $A = \frac{1}{\lambda}$
- Valore atteso del tempo di servizio: $W_s = \frac{1}{\mu}$
- Valore atteso del numero di clienti in coda: $L = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n$

2. Leggi di Little

Hanno validità del tutto generale, salvo utilizzare i valori delle grandezze d'interesse calcolati opportunamente per il sistema in esame.

(1) $N = \lambda \cdot W$

(2) $L = \lambda \cdot W_q$

(3) $W = W_q + W_s = \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$

3. Code

3.1. M/M/1.

- $P_n = \rho^n \cdot P_0$
- $P_0 = 1 - \rho$

dove $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ da cui definisco la stazionarietà della coda con la condizione $\rho < 1$.

Grandezze derivate:

- $N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
- $W = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- $W_q = W - W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}$
- $L = \lambda W_q = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}$

Date: 22/04/2009.

3.2. **M/M/S.**

- $P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n < s \\ \frac{1}{s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n \geq s \end{cases}$
- $P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}}$

dove si è assunto che il sistema sia stazionario, cioè che sia rispettata: $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$.

Attenzione! $\rho_{MMS} \neq \rho_{MM1}$

Grandezze derivate:

- $L = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} P_0$
- $N = L + \frac{\lambda}{\mu}$ (cioè il numero atteso di clienti nel sistema è dato dal valore atteso dei clienti in coda più il numero medio di serventi occupati)

Per le ulteriori grandezze derivate si usano le Leggi di Little (si evita di espandere le formule che sarebbero molto lunghe):

- $W = \frac{N}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$
- $W_q = W - W_s = \frac{L}{\lambda}$

3.3. **M/M/∞.** (*attenzione!* Non è richiesto per la preparazione dell'esonero saper calcolare esplicitamente la probabilità di uno stato per questi sistemi)

- $P_n = \frac{1}{n!} \cdot \rho^n \cdot e^{-\rho}$
- $P_0 = e^{-\rho}$

dove il sistema è sempre stabile e il fattore di utilizzazione è $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

- $L = 0$ e $W_q = 0$ (nessun cliente in coda)
- $N = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$
- $W = \frac{1}{\mu}$

3.4. **M/M/1/K.**

- $P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$
- $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$

dove λ è la frequenza di arrivo al sistema se $n < k$, e il fattore di utilizzazione è $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (si assume sempre che il sistema sia stazionario, cioè che sia rispettata: $\rho =< 1$).

NOTA: la professoressa Adacher nel caso di sistemi M/M/1/K ha chiamato γ la frequenza di arrivo finché il buffer non è pieno e $\bar{\rho}$ il fattore di utilizzazione (cui qui ci si riferisce con la notazione usuale λ e ρ per uniformità di trattazione).

Grandezze derivate:

- $N = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{\left(1-(k+1)\rho^k+k\rho^{k+1}\right)\rho}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}$
- Fattore di Perdita $(1-\epsilon) = P_k = \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$

NOTA: le seguenti derivazioni non sono state fatte a lezione! (sono messe qui solo per completezza)

- $W = \frac{N}{\lambda_{ing}} = \frac{N}{\lambda \cdot \frac{1-\rho^k}{1-\rho^{k+1}}} = \frac{1-(k+1)\rho^k+k\rho^{k+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^k)}$
- $W_q = W - W_s = \frac{N}{\lambda_{ing}} - \frac{1}{\mu} = \frac{\left(1-k\rho^{k-1}+(k-1)\rho^k\right)\rho}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}$
- $L = \lambda_{ing} W_q = N - \frac{\lambda_{ing}}{\mu} = \frac{\left(1-k\rho^{k-1}+(k-1)\rho^k\right)\rho^2}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}$

4. Reti di Code

4.1. **Teorema di Jackson:**

Definisco:

- M =numero di stazioni;
- N =valore atteso del numero di clienti nella rete;
- N_j = valore atteso del numero di clienti nella stazione j;
- $\lambda'_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{M} P_{ij}\lambda'_i$ = frequenza di arrivo effettiva nella stazione j;

Ipotesi:

- il tempo di arrivo deve essere distribuito esponenzialmente;
- il tempo di servizio deve essere distribuito esponenzialmente;
- disciplina FIFO;
- buffer illimitati;
- la somma della probabilità associata agli archi uscenti da una stazione deve essere 1;
- ciascuna stazione deve essere stabile;

Sotto queste ipotesi vale il teorema di Jackson:

$P(n) = P\left(n_1, n_2, ..., n_M\right) = \prod_{j=1}^{M} P_j\left(n_j\right)$

dove:

$$P_j\left(n_j\right)=\begin{cases}\frac{1}{n_j!}\left(\frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)_j^n P_j(0) & n_j\le s_j\\ \frac{1}{s_j!s_j^{n_j-s_j}}\left(\frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)_j^n P_j(0) & n_j\ge s_j\end{cases}$$

dove s è il numero di serventi e $P_j(0)$ è la probabilità che ci siano 0 clienti nella stazione (calcolabile tramite le formule per le singole stazioni M/M/1 o M/M/S utilizzando λ'_j al posto di λ_j).

4.2. **Reti Aperte:**

Definisco il *visit-count* della stazione i-esima (numero di volte che il cliente visita la stazione i prima di uscire dalla rete) come: $\nu_i=\frac{\lambda'_i}{\sum\lambda_{\text{esterni}}}$.

- $N=\sum_{i=1}^{M}N_i$
- $L=\sum_{i=1}^{M}L_i$
- $W=\sum_{i=1}^{M}W'_i=\sum_{i=1}^{M}\nu_iW_i$
- $W_q=\sum_{i=1}^{M}W'_{qi}=\sum_{i=1}^{M}\nu_iW_{qi}$
- $W_s=\sum_{i=1}^{M}W'_{si}=\sum_{i=1}^{M}\nu_iW_{si}$

Dove si noti che, ad esempio, con W_i si indica il *tempo di attraversamento della stazione i-esima*, mentre con $W'_i=\nu_iW_i$ si indica il valore atteso del *tempo speso da un cliente nella stazione i-esima* (un discorso analogo vale per W_{qi}/W'_{qi} e W_{si}/W'_{si}).

Le Leggi di Little sono ancora valide purché si utilizzi $\lambda=\sum\lambda_{\text{esterni}}$.

Le grandezze di interesse per i singoli centri, in virtù del Teorema di Jackson, possono essere calcolate con le formule introdotte nello studio di sistemi M/M/1 e M/M/S, con l'accortezza di utilizzare la frequenza di arrivo effettiva λ'_j invece che λ_j.

4.2.1. *Singole stazioni:*

Numero atteso di clienti nella stazione i:

M/M/1: $N_i=\frac{\lambda'_i}{\mu_i-\lambda'_i}$

M/M/S: $N_i=L_i+\frac{\lambda'_i}{\mu_i}=\frac{1}{s_i!}\left(\frac{\lambda'_i}{\mu_i}\right)^{s_i}\frac{\lambda'_i}{s_i\mu_i}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda'_i}{s_i\mu_i}\right)^2}P_i(0)+\frac{\lambda'_i}{\mu_i}=...$

Valore atteso del tempo speso da un cliente nella stazione i:

M/M/1: $W'_i=\nu_iW_i=\frac{\nu_iN_i}{\lambda'_i}=\frac{\nu_i}{\mu_i-\lambda'_i}$

M/M/S: $W'_i=\nu_iW_i=\frac{\nu_iN_i}{\lambda'_i}=\frac{\nu_iL_i}{\lambda'_i}+\frac{\nu_i}{\mu_i}$

Valore atteso del tempo speso in servizio da un cliente nella stazione i:

M/M/1: $W'_{si}=\nu_iW_{si}=\frac{\nu_i}{\mu_i}=x_i$

M/M/S: $W'_{si} = \nu_i W_{si} = \frac{\nu_i}{\mu_i} = x_i$

Valore atteso del tempo speso in coda da un cliente nella stazione i:

M/M/1: $W'_{qi} = \nu_i W_{qi} = \nu_i \left(W_i - W_{si}\right) = \frac{\nu_i}{\mu_i - \lambda'_i} - \frac{\nu_i}{\mu_i}$

M/M/S: $W'_{qi} = \nu_i W_{qi} = \nu_i \left(W_i - W_{si}\right) = \frac{\nu_i L_i}{\lambda'_i}$

Valore atteso del numero di clienti in coda nella stazione i:

M/M/1: $L_i = \lambda'_i W_{qi} = \frac{\lambda'_i}{\mu_i - \lambda'_i} - \frac{\lambda'_i}{\mu_i}$

M/M/S: $L_i = \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\lambda'_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \frac{\lambda'_i}{s_i \mu_i} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda'_i}{s_i \mu_i}\right)^2} P_i(0)$

Throughput

Definizione: numero di pezzi prodotti per unità di tempo nel sistema/stazione.

Singola stazione:

- *T. teorico*: $X_{Ti} = \frac{s_i \mu_i}{\nu_i}$
- *T. reale*: $X_{Ri} = \lambda'_i$

Intera rete:

- *T. teorico*: $X_T = \min\left\{\frac{s_i \mu_i}{\nu_i}\right\}$
- *T. reale*: $X_R = \sum \lambda_{\text{esterni}}$

<u>Il sistema è stazionario se e solo se</u> $X_R < X_T$.

$sotto - utilizzo = X_T - X_R$

Il sotto-utilizzo è la quantità di cui posso aumentare gli arrivi dall'esterno per portare il throughput reale al valore massimo per la rete mantenendo il sistema stazionario (cioè a $X_{R_{\max}} = X_T - \epsilon$).

Il throughput teorico può essere aumentato agendo sulle caratteristiche della stazione "collo di bottiglia". Nello specifico è possibile aumentarne la velocità di servizio (modifica che lascia inalterata la struttura dell'intero sistema), aumentarne il numero di serventi (cioè modificare la struttura della stazione), o cambiare le connessioni e/o le probabilità di instradamento agendo sul visit-count (modifiche che cambiano la struttura della rete). Di quanto posso aumentare la velocità di servizio della stazione collo di bottiglia? Considero le stazioni i e j della rete aventi throughput minore (ipotizzo che il collo di bottiglia sia la stazione i). Le modifiche apportate alla stazione i avranno effetto sul throughput della rete fintanto che $X'_{Ti} \leq X_{Tj}$, perciò: $\frac{s_i(\mu_i + \Delta\mu_i)}{\nu_i} \leq \frac{s_j \mu_j}{\nu_j}$ da cui l'incremento massimo della velocità di servizio operabile sulla stazione collo di bottiglia è: $\Delta\mu_i = \frac{s_j \nu_i}{s_i \nu_j} \cdot \mu_j - \mu_i$.

4.3. **Teorema di Gordon:**

Definisco:

- $M =$ numero di stazioni;
- $N =$numero di clienti nella rete (deterministico);

- N_j =valore atteso del numero di clienti nella stazione j;
- λ_j =frequenza di arrivo nella stazione j (non esponenziale);
- $\nu_i = \sum_{j=1}^{M} P_{ji}\nu_j$con $i = 1, 2, ..., M$ il visit count della stazione i (poiché sono definiti a meno di una costante, laddove non esplicitato è lecito porre a 1 il visit count della stazione di carico/scarico);
- $x_j = \frac{\nu_j}{\mu_j}$ =valore atteso del tempo speso in servizio dal generico cliente nella stazione j;

Ipotesi:

- il tempo di servizio deve essere distribuito esponenzialmente;
- disciplina FIFO;
- buffer illimitati, o con capacità almeno pari a $N - S$;
- la somma della probabilità associata agli archi uscenti da una stazione deve essere 1;

Sotto queste ipotesi vale il teorema di Gordon:

$P(n) = P(n_1, n_2, ..., n_M) = \frac{\prod_{i=1}^{M} f_i(n_i)}{G(M,N)}$

dove:

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!} & n_j \le s_j \\ \frac{x_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i - s_i}} & n_i \ge s_i \end{cases}$$

e la funzione G rappresenta il numero di modi possibili per distribuire N clienti su M macchine:

$$G(N) = G(M, N) = \sum_{n=0}^{N} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i)$$

e può essere calcolata in modo ricorsivo (numerando le stazioni) con la formula:

$$G(j, n) = \sum_{k=0}^{n} f_j(k) G(j-1, n-k)$$

avente casi base:

- $G(1, 0) = 1$
- $G(1, n) = f_1(n)$

4.4. **Reti Chiuse:**

Throughput

Definizione: numero di pezzi prodotti per unità di tempo nel sistema/stazione.

Singola stazione:

- *T. teorico*: $X_{Ti} = \frac{s_i \mu_i}{\nu_i}$
- *T. reale*: $X_{Ri} = \lambda_i = \nu_i X_R$

Intera rete:

- *T. teorico*: $X_T = \min\left\{\frac{s_i \mu_i}{\nu_i}\right\}$
- *T. reale*: $X_R = \frac{G(M,N-1)}{G(M,N)}$

Valgono le stesse considerazioni fatte nelle reti aperte per quanto concerne sotto-utilizzo e aumento del troughput teorico.

Per aumentare il throughput reale di una rete chiusa posso aumentare N (che ricordiamo è deterministico), ma devo comunque rispettare le condizioni di stazionarietà $X_R < X_T$.

Il fatto che N sia un parametro della rete mi permette di ricavare immediatamente tutte le grandezze derivate del sistema tramite le Leggi di Little:

- $W = \sum_{i=1}^{M} W_i' = \sum_{i=1}^{M} \nu_i W_i = \frac{N}{X_R}$
- $W_s = \sum_{i=1}^{M} W_{si}' = \sum_{i=1}^{M} \nu_i W_{si} = \sum_{i=1}^{M} x_i$
- $W_q = \sum_{i=1}^{M} W_{qi}' = \sum_{i=1}^{M} \nu_i W_{qi} = W - W_s = \frac{N}{X_R} - \sum_{i=1}^{M} x_i$
- $L = X_R W_q = N - X_R \sum_{i=1}^{M} x_i$

I valori per le singole stazioni sono ricavabili tramite le formule dei sistemi M/M/1 e M/M/S, usando il fatto che $\lambda_i = X_{Ri} = \nu_i X_R$.

Attenzione! La probabilità di avere k clienti in una stazione che non sia quella ordinata come ultima nel calcolo di G(M,N) non può essere calcolata a meno che k=N. In questo caso: $P(n_i = N) = \frac{f_i(N)G(i-1,0)}{G(M,N)} = \frac{f_i(N)}{G(M,N)}$.

Altrimenti le stazioni vanno riordinate mettendo per ultima la stazione di interesse e a quel punto la probabilità può essere calcolata come: $P(n_M = k) = \frac{f_M(k)G(M-1,N-k)}{G(M,N)}$.

4.4.1. *Singole stazioni:*

Nel caso di reti chiuse non si distingue nelle formule il caso di stazioni M/M/1 o M/M/S, poiché le caratteristiche della stazione vengono già prese in considerazione al momento della costruzione di G(M,N) nel calcolo di N_i.

- Valore atteso del numero di clienti presenti nella stazione M (ultima):
$N_M = \sum_{n_M=1}^{N} n_M P_{n_M} = \sum_{n_M=1}^{N} \left[n_M f_M(n_M) \frac{G(M-1, N-n_M)}{G(M,N)} \right]$(attenzione! Posso calcolarla solo per la stazione ordinata come ultima nella costruzione di G(M,N)!)
- Valore atteso del tempo speso da un cliente nella stazione i:
$W_i' = \nu_i W_i = \frac{N_i}{X_R}$
- Valore atteso del tempo speso in servizio da un cliente nella stazione i:
$W_{si}' = \nu_i W_{si} = \frac{\nu_i}{\mu_i} = x_i$
- Valore atteso del tempo speso in coda da un cliente nella stazione i:
$W_{qi}' = \nu_i W_{qi} = \nu_i (W_i - W_{si}) = \frac{N_i}{X_R} - x_i$
- Valore atteso del numero di clienti in coda nella stazione i:
$L_i = \lambda_i W_{qi} = \nu_i X_R W_{qi} = X_R W_{qi}' = N_i - x_i X_R$

4.5. **Equazione di equilibrio:** (valida sia per reti aperte che chiuse, con l'accortezza che in queste ultime non ci sono ingressi dall'esterno che possono modificare lo stato)

Dato uno stato del sistema $(n_1, n_2, ..., n_M)$, l'equazione di equilibrio è realizzabile eguagliando la probabilità di uscire da questo stato con quella di entrarvi da altri stati compatibili.

Uscita

Il calcolo delle uscite è immediato: $USCITE = \left(\sum \lambda_{\text{esterni}} + \sum_{i=1}^{M} (1 - P_{\text{loop}i}) \cdot \min\{s_i, n_i\} \cdot \mu_i \right) P(n_1, n_2, ..., n_M)$.

dove si noti che il contributo al processamento di un cliente della stazione i-esima è nullo se nello stato che stiamo considerando $n_i = 0$.

Entrata

L'espressione delle entrate è matematicamente molto più complessa e meno intuitiva. Tenendo in considerazione che sarà la somma di un certo numero di termini che rappresenta il numero di stati da cui si può provenire per entrare nello stato desiderato, esaminiamo un caso particolare:

Ipotizziamo di voler calcolare la probabilità di entrare nello stato (4,2,1) nella rete aperta con tre stazioni e N=7 dell'esercizio dell'esonero Aprile 2008 (B). Individuo prima da quali stati posso raggiungere lo stato (4,2,1):

- caso 1: arrivo dall'esterno alla stazione [j] (sottraggo 1 al numero di clienti nella stazione [j]);
- caso 2: un cliente viene processato e passa da una stazione [j] ad una stazione [i] (sommo e sottraggo 1 rispettivamente al numero di clienti nelle stazioni [j] e [i]);
- caso 3: un cliente viene processato nella stazione [j] ed esce dalla rete (sommo 1 al numero di clienti nella stazione [j]);

Applico al caso in esame:

```
(3,2,1) arrivo dall'esterno in ->[1]
(5,2,0) [1]->[3]
(4,2,2) [2]-> uscita dalla rete
(3,2,2) [3]->[1]
(4,1,2) [3]->[2]
(5,1,1) [1]->[2]
(4,2,1) [2]->[2] (loop)
(4,3,1) [2]-> uscita dalla rete
```

A questo punto occorre esprimere questi stati in forma di probabilità e sommarli pesandoli con il coefficiente λ_i per gli arrivi dall'esterno alla stazione i-esima e con il coefficiente $P_{ji} \cdot \min\left\{s_j, n'_j\right\} \cdot \mu_j$ per i clienti processati dalla stazione j-esima verso la stazione i-esima o verso l'esterno (dove n'_j è il numero di clienti della stazione j-esima nello stato di partenza da cui si entra nello stato desiderato, e P_{ji} è la probabilità di instradamento dalla stazione j alla stazione i di destinazione o dalla stazione j verso l'esterno nel caso il cliente debba uscire dalla rete - qualora non esplicitata nello schema grafico, nel calcolo fare attenzione ad eventuali loop sulla stazione).

Riferimenti bibliografici

[1] Adacher L., *Introduzione ai sistemi di code*, `http://adacher.dia.uniroma3.it/automazione1/TeoriaCode.pdf`

[2] Agnetis A., *Introduzione alle reti di code nei sistemi manufatturieri*, `http://adacher.dia.uniroma3.it/automazione1/RetiCode.pdf`

[3] Appunti del corso tenuto dalla professoressa Adacher, anno accademico 2008-'09

[4] Carli M., *Teoria delle code*, `http://www.comlab.uniroma3.it/Sistemi1/Sistemi1_Code2.pdf`