

15/10/2020

$$Y(f) = Y(f) \times H(f)$$

prodotto in frequenza

per ottenere la forma del dominio:  $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} dt$

$$x(t) = y(t) * h(t)$$

### CONVOLUZIONE \*

→ Al prodotto in frequenza corrisponde una convoluzione nel tempo e viceversa, se ho un prodotto nel tempo avrò una convoluzione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(\lambda) \cdot h(t-\lambda) d\lambda$$

parametro

integrale di convoluzione

vorrebbe introdotti per la convoluzione, poi spiega che n'è vero

Poiché corrisponde ad una moltiplicazione nell'altro dominio e la moltiplicazione è commutativa sarà commutativa pure la convoluzione

$$x(t) = y(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) \cdot h(t-\lambda) d\lambda$$
$$\downarrow$$
$$x(t) = h(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \cdot y(t-\lambda) d\lambda$$

posso cioè scegliere quella definire in  $\lambda$  e quella in  $t-\lambda$

→ Segnale  $(t-\lambda)$  è segnale che al tempo posso ad poi viene ribaltato ( $-\lambda$ ) e traslato in anticipo di  $t$ . Quando si sostiene su  $\lambda$  fino a surrepporsi con l'altro segnale

## PROPRIETÀ CONVOLZIONE

1) commutativa

$$2) \text{ associative} : x(t) * [w(t) * z(t)] = [x(t) * w(t)] * z(t) \\ = [x(t) * z(t)] * w(t)$$

$$3) \text{ distributiva} : x(t) * [w(t) + z(t)] = x(t) * w(t) + x(t) * z(t)$$

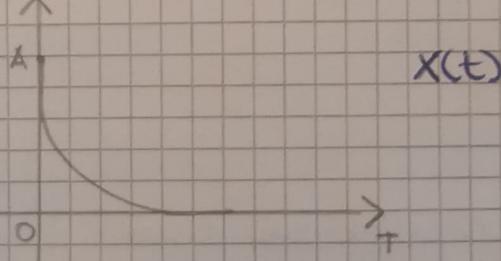
### ESEMPIO COMPLICATO

$$x(t) = \begin{cases} A e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{oltre} \end{cases} \quad \rightarrow \text{tende a decrescere}$$

$T = \text{costante}$

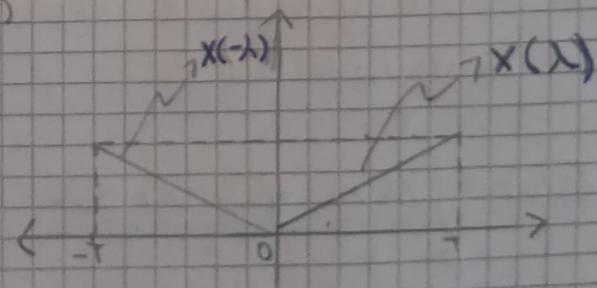
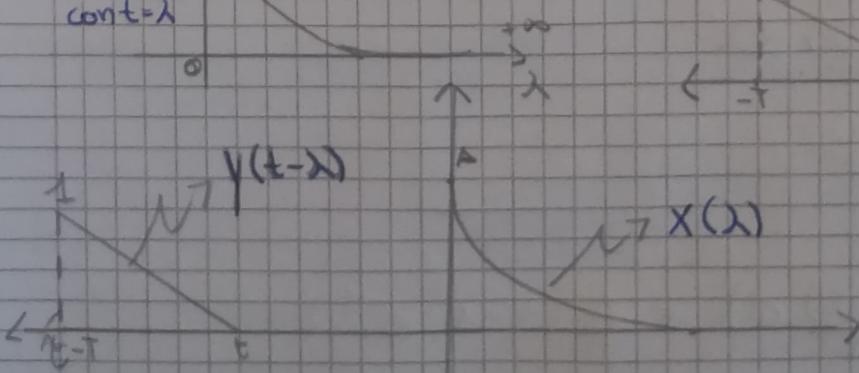
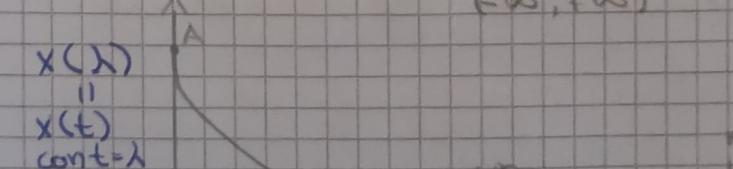
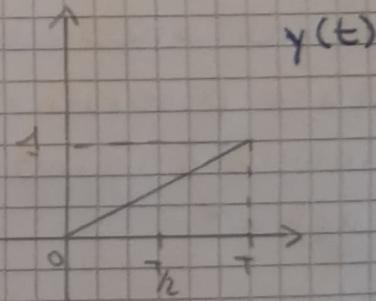
$$y(t) = \frac{t}{T} \cdot \text{Rect}_T(t - T/2) = \text{solo moltiplicate in intervalli di lunghezza } T \text{ a valore 1}$$

$$\text{Quindi} \quad z(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$



$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \cdot y(t - \lambda) d\lambda$$

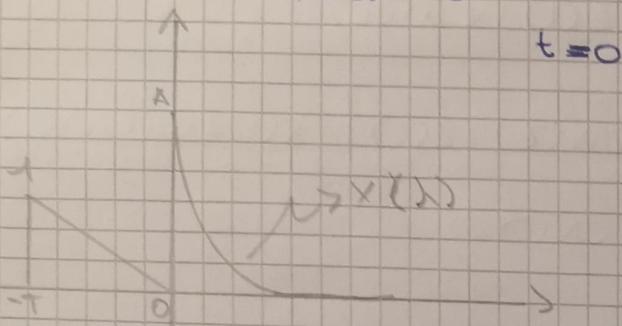
$\rightarrow$  moltiplica  
e traccia  $y(t)$   
 $\rightarrow$  parametra  
 $(-\infty, +\infty)$



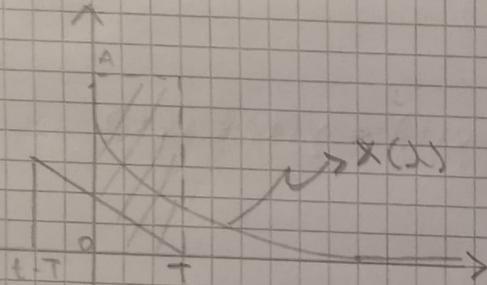
a sono voluti  
dai per cui il  $x(t)$   
segna non ha contatti  
con  $x(t - \lambda)$

→ Se non ho sovrapposizione l'integrale  $\bar{z} = 0$

Se l'estremo superiore di  $y(t-\lambda)$  è minore dell'infinito di  $x(\lambda)$  ho sovrapposizione nulla  
 $\Rightarrow t \leq 0 \rightarrow z(t) = 0$



Per  $t > 0$  si avrà una sovrapposizione



c'è sovrapposizione parziale se  $t > 0$   
 Unione parziale finché l'estremo inferiore di  $y(t-\lambda)$   
 è minore o uguale all'estremo inferiore di  $x(\lambda)$   
 $\Rightarrow 0 \leq t \leq T$

La sovrapposizione determina gli estremi di integrazione su  $\lambda$

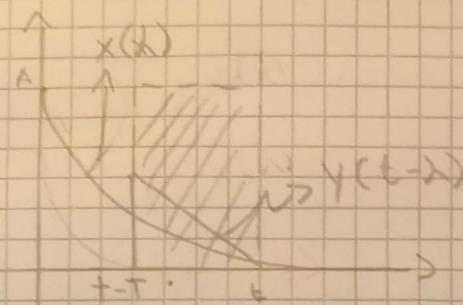
$$z(t) = \int_0^t x(\lambda) \cdot y(t-\lambda) d\lambda$$

$\downarrow$   
 $\lambda$ : t       $\frac{(t-\lambda)}{T}$

Pur che di 0 e dopo T  
 non ho alcuna sovrapposizione  
 $\Rightarrow 0$

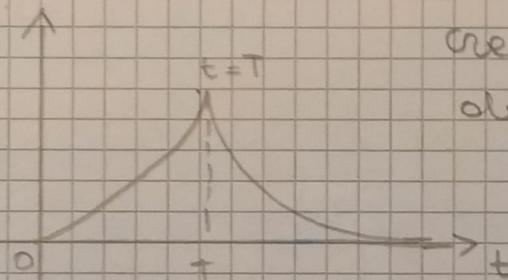
$$\int_0^t A \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{(t-\lambda)}{T} d\lambda = \frac{A}{T} (t-1 + e^{-t})$$

$t \geq T$



se vado a  $\infty$  convoluzione  $\rightarrow 0$   
l'area di sovrapposizione  $\rightarrow 0$

$$Z(t) = \int_{t-T}^t A e^{-\lambda} \cdot \frac{(t-\lambda)}{T} d\lambda$$



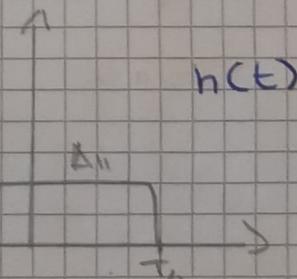
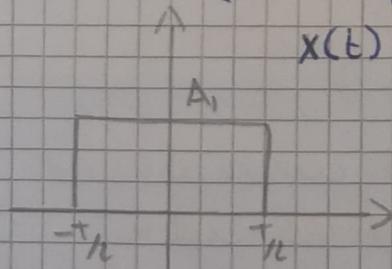
la zona di sovrapposizione  
è determinata dalla  
durata del segnale + costo  
perché esternamente  $x(\lambda)$  è molt  
per 0

cresce fino a  $t$  e poi  
decresce come exp.

### CONVOLZIONI DI RECT

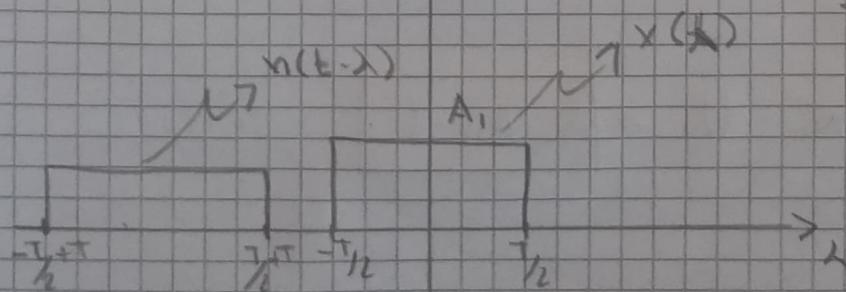
$$x(t) = A_1 \cdot \text{Rect}_+(t)$$

$$h(t) = A_2 \cdot \text{Rect}_+(t)$$



in questo  
caso se  
abbiamo  
non ha effetto  
perciò è pari

$$Z(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \cdot h(t-\lambda) d\lambda$$

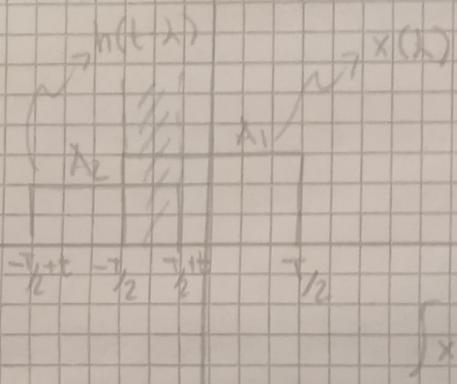


Se  $h(t-\lambda) < x(\lambda) \Rightarrow$  convoluzione = 0

$$\Rightarrow \frac{T}{2} + t \leq T \quad \text{ossia } t \leq \frac{T}{2} \Rightarrow Z(t) = 0$$

segno di simmetria  $\Rightarrow$  convoluzione simmetrica

no sovrapposizione forzata  
se  $t > T$



$$-T \leq t \leq \frac{T}{2} \rightarrow -\frac{T}{2} \leq t \leq 0$$

$$t \geq \frac{T}{2} \Rightarrow -\frac{T}{2} \leq t \leq 0$$

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T$$

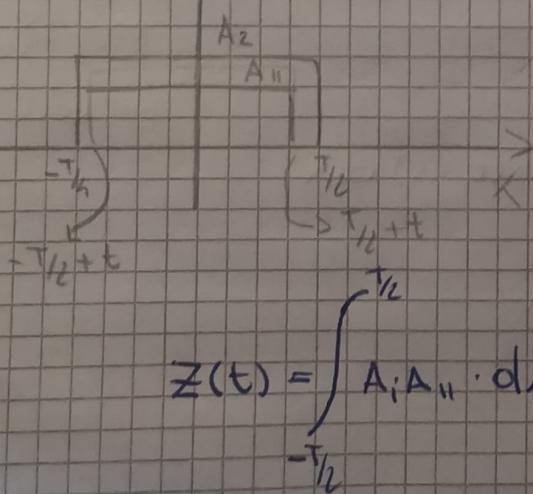
$$x(\lambda) = A$$

$$t + T = t + T$$

$$Z(t) = \int_{-T/2}^{T/2+t} A_1 \cdot A_{11} d\lambda + A_1 \cdot A_{11} \cdot 2 \boxed{-A_1 \cdot A_{11} \cdot (t+T)}$$

Segnali completamente sovrapposti

$$\frac{T}{2} + t = \frac{T}{2} \Rightarrow t = 0$$

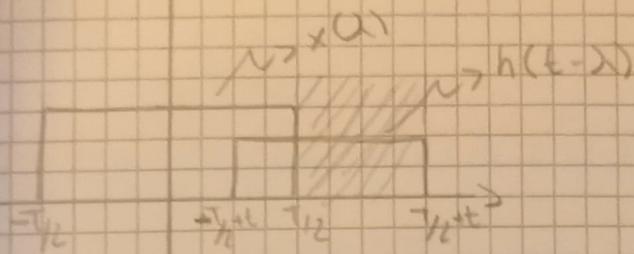


mo le convoluzioni  
non dipende da t  
ma è un valore ossia il  
valore max che convoluzioni  
assume.

$$Z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} A_1 \cdot A_{11} \cdot d\lambda = \boxed{A_1 \cdot A_{11} \cdot T}$$

$$0 \leq t \leq T$$

$T_1 + t > T_2 \rightarrow t > 0$  sovrapposizione forzata



Qui la convoluzione decresce linearmente fino a 0 per la sovrapposizione  $\rightarrow 0$

$$Z(t) = \int_{-T_1+t}^{T_2} A_1 \cdot A_2 dt = A_1 A_2 \cdot (T-t)$$

$\rightarrow$  caso esattamente opposto, ossia  $t < T$  o il punto di ( $T+t$ ), e quello in cui  $t \leq T$ . Segnala poi per cui i comportamenti sono uguali a sx ( $-\infty$ ) e a dx ( $+\infty$ )

### Caso di non sovrapposizione

$$t \geq T \rightarrow Z(t) = 0$$

$$\text{A}_1 \cdot \text{A}_2 \cdot T$$

CONVOLUZIONE  
2 RECT

$$Z(t) = A_1 A_2 T R_U(t)$$

$$\begin{cases} 0, & t < -T \\ 0, & t > T \\ A_1 A_2 T \cdot \text{int}(t=0) \\ \{Z(t)\} = -T \leq t \leq 0 \\ \{Z(t)\} = 0 \quad 0 < t < T \end{cases}$$

la convoluzione di 2 rect con base uguale restituisce un triangolo con base doppia

altezza pari al prodotto dell'altezza delle 2 rect per le loro durate.

$\rightarrow$  è la lunghezza della semibase e dunque le lunghezze degli rect che hanno generato il triangolo

$$x(f) = A_1 T \cdot \text{sinc}(fT)$$

$$h(f) = A_2 T \cdot \text{sinc}(fT)$$

$$z(f) = x(f) \cdot h(f) = A_1 T \text{sinc}(fT) \cdot A_2 T \text{sinc}(fT) = A_1 \cdot A_2 \cdot \text{sinc}^2(fT)$$

$$W(f) = \text{sinc}^2(fT) \rightarrow W(t) = t u_T(t)$$

→ potrò usare queste formule (ossia il prodotto dei 2 segnali nello spazio) per trovare lo stesso risultato

→ Se sono noti i segnali di cui devo fare la convoluzione è già noto l'intervalle su cui disegnare  $z(t)$

$$\Rightarrow z(t) \text{ ha estremi:}$$

Somma algebrica degli estremi  
inferiori delle 2 funzioni auguali  
C'è no solo

$$\text{Sup} = \frac{T + T}{2} = +T \quad \text{giusto}$$

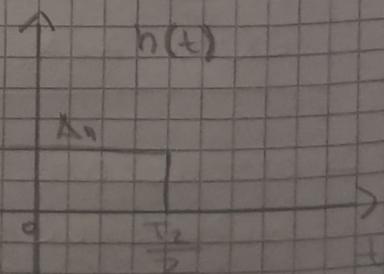
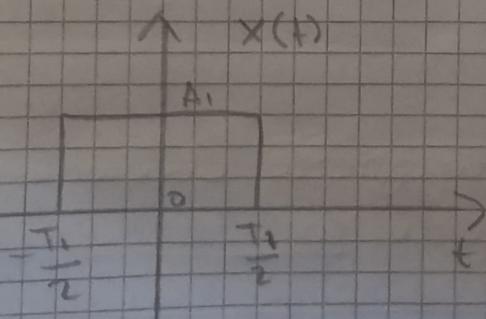
Somma algebrica est. superiori  
dei segnali auguali

$$\text{Inf} = -\frac{T}{2} + (-\frac{T}{2}) = -T$$

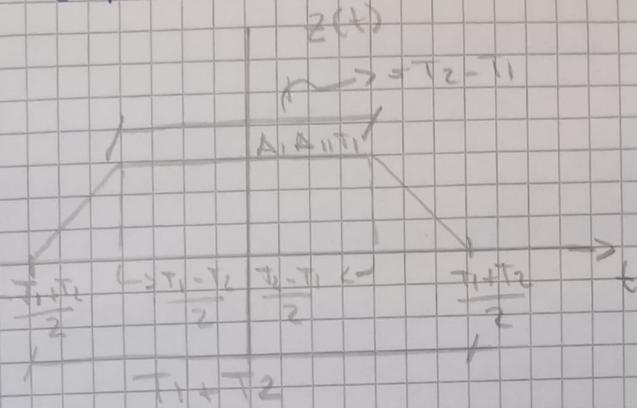
→ So anche dove centrone il segnale ph so sempre incovormi gli estremi

Rect con base diverse

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cdot \text{Rect}_{T_1}(t) \\ h(t) &= A_2 \cdot \text{Rect}_{T_2}(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Rect e positi} \end{array} \right\}$$



## GRAFICO CONVOLUZIONE



$$v_{\text{inf}} = -\frac{T_1}{2} + \left(\frac{T_1}{2}\right) = -\frac{T_1}{2}$$

$$\text{sup} = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$x(f) = A_1 T_1 \operatorname{sinc}(f T_1)$$

$$h(f) = A_2 T_2 \operatorname{sinc}(f T_2)$$

$$z(f) = A_1 \cdot A_2 \cdot T_1 T_2 \cdot \operatorname{sinc}(f T_1) \cdot \operatorname{sinc}(f T_2)$$

punti focali for  
convoluzione mt.

## CONVOLUZIONE PARI E REALE

- La convoluzione aumenta linearmente fino a  $x_0$   
e partire da  $-\frac{T_1+T_2}{2}$

- La convoluzione decresce linearmente da  $x_0$   
fino a  $\frac{T_1+T_2}{2}$

- al di fuori va a 0

- Con 2 Rect di base uguali la sovrapposizione completa delle 2 si ha un solo  $t$ , qui con 2 Rect di base diverse la sovrapposizione dura più di 1 solo istante ma oltre un intervallo pari alla differenza delle basi delle 2 rect (ossia costante)  $\Rightarrow$  trapezio

- L'altezza del trapezio =  $A_1 \cdot A_2 \cdot T_1$  (Rect + piccola)

- Soverapposizione completa = entro mf  $x(t) \geq h(t)$   $T_2 > T_1$

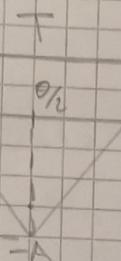
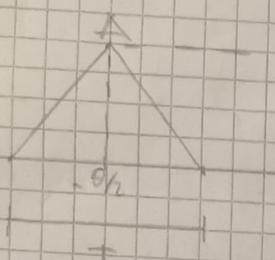
$$-\frac{T_1+T_2}{2} > \frac{T_1}{2}$$

$$= -\frac{T_1+T_2}{2} \text{ positivo}$$

$$> \frac{T_1-T_2}{2} \text{ neg}$$

20/10/2020

### CORREZIONE ESEMPIO

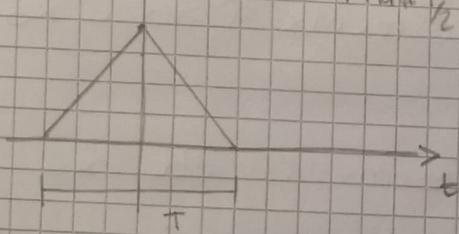


Ricordo

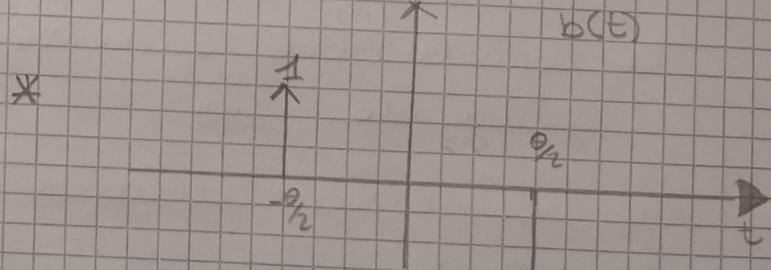
$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$x(t-\tau) = x(t) * (\delta(t-\tau))$$

$$a(t) = ATR / \frac{\theta_1}{2}(t)$$



$\theta_1/2$  = base di ogni rect (sono i)



$\delta$  offre 1 perché il prodotto delle ampiezze deve essere pari all'ampiezza del triangolo

$$x(f) = a(t) \cdot b(t)$$

$$x(f) = AT \frac{\sin^2(\pi f \frac{\theta_1}{2})}{2} \rightarrow 2 \text{ rect}$$

TH: duplice

$$2j \sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow \begin{matrix} F & f_0 & f_0 \\ & \downarrow & \uparrow \\ & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$f_0 = \frac{\theta_1}{2}$$

$$2j \sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow \begin{matrix} & f_0 & f_0 \\ 1 & \downarrow & \uparrow \\ & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$x(f) = \frac{AT}{2} \sin^2(f \frac{\theta_1}{2}) \cdot 2j \sin(\pi \theta_1/2 f) = jAT \sin^2(f \frac{\theta_1}{2}) \sin(\pi \theta_1 f)$$

$$x(f)|_{f=0} = 0$$

## CORRELAZIONE

- Verifica una somiglianza fra 2 serie di dati
- Il ricevitore non conosce quel'è il segnale trasmesso, altrimenti non avrebbe senso la comunicazione, conosce solo come dovrebbe esser fatto, ossia le forme d'onde. Conoscendo questo dettaglio mettendo a confronto un segnale ricevuto con i segnali predefiniti può capire se si tratta di segnali utili o segnali rumore

Esistono 2 tipi di correlazione

$C_{xy}$   
CROSS-CORRELAZIONE: Correlazione di 2 segnali diversi  $x(t)$  e  $y(t)$

$C_{xx}$   
AUTO-CORRELAZIONE: Correlazione di 2 segnali uguali

## PROPRIETÀ AUTOCORRELAZIONE

- Supponendo di avere due segnali uguali uno a - $\infty$  uno a  $+\infty$ , spostandosi si vede che quello a - $\infty$  aumenterà sempre più l'area di sovrapposizione con l'oltre fino ad arrivare alla sovrapposizione massima in 0.  $\rightsquigarrow C_{xx}(T) \underset{T=0}{=} \max C_{xx}(T) \rightsquigarrow$  massima correlazione

- $C_{xy}(t) \neq C_{yx}(t)$  invece  $C_{xx}(t) = C_{xx}(-t)$  ossia nelle cross correlazione l'ordine in cui x risuona su x è diverso da quello con cui y risuona su x cosa che invece nell'auto correlazione non importa essendo  $x(t) = y(t)$

- Per  $x(t)$  complesso no simmetria hermitiana in autocorrelato?  
ossia per  $m$  domino reale e disponibile immaginario

## Integrale di convoluzione

$$(x_y(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\lambda) \cdot y(t+\lambda) d\lambda)$$

↓

$$(x_x(t) = y(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(\lambda) \cdot x(t+\lambda) d\lambda)$$

→ non è commutativo  $x_y(t) = y_x(-t)$

$$(x_x(t) = x(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\lambda) \otimes x(t+\lambda) d\lambda)$$

**ANALOGIA CON CONVOLUZIONE**

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \cdot y(t-\lambda) d\lambda$$

↔ CONVOLUZIONE  
↔ VALE LA COMMUTATIVITÀ

I. di convoluzione

$$(x_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\lambda) \cdot y(t+\lambda) d\lambda)$$

Sostituisco  $(t+\lambda)=k \rightarrow \lambda=k-t \rightarrow d\lambda=dk$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(k-t) \cdot y(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} y(k) \cdot x^*[-(t-k)] dk$$

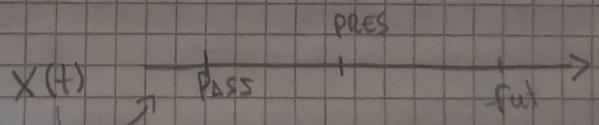
integrale di convoluzione  
di  $y(k)$  e  $x$  comp. conuge

substituto

$$\Rightarrow \boxed{x^*(-t) * y(t)}$$

*1° segnale*

$$\boxed{C_{xx}(t) = x^*(-t) * y(t)}$$



tempo disollevamento  $\leftarrow X(t) \rightarrow t$

Segnali

$t=0$  segnale perf. ellinico

similitudine  
in utero

## TRASFORMATA FOURIER CORRELAZIONE

$$C_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

$\Downarrow F.$  trasf

$$\underline{Exx(f) = x^*(f) * y(f)}$$

proprietà convoluzione

incluso

$$C_{xx}(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$$

$\Downarrow F$

$$\underline{Exx = x^*(f) * x(f) = |f(x)|^2}$$

densità spettrale energie: trasformate fourier autocorrelazione

$$C_{xx}(\tau) \underset{x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} Exx(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |x(f)|^2 df = \underline{Ex}$$

$\circlearrowleft$

energia segnali  
reali e > 0

22/10/2020

## DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$C_{xy}(\tau) \leq \sqrt{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)} \quad o \quad C_{yx}(\tau) \leq \sqrt{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)}$$

- Già visto che le crosscorrelazioni dei segnali  $x$  e  $y$  calcolata per ogni  $\tau$  sono sempre minore o al massimo uguale allo scarto quadrato del volto massimo dell'autocorrelazione di  $x$  moltiplicato col volto massimo dell'autocorrelazione di  $y$ . Ricordo: l'autocorrelazione in (0) è più dell'energia del segnale

Si verifica come uguaglianza solo se:

- $y$  e  $x$  sono stessi segnali ma con ampiezza diversa ossia:  $y(t) = \alpha x(t-\tau)$  dove  $\tau$  tiene

conto dello shift temporale

- $x=y$ , caso particolare, in cui si ha l'autocorrelazione

### SISTEMI LINEARI TEMPO-INARIANTI (LTI)

- deve valere il principio di sovrapposizione degli effetti ossia sia dato:

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t)$$

si ha

$$y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)]$$

usato del sistema

trasformazione che il blocco opera sul segnale d'ingresso

- Deve essere un sistema causale ossia col un ingresso ritardato di  $t$  corrisponde un'uscita anch'essa ritardata di  $t$ .

$$F[x(t-t_d)] = y(t-t_d)$$

- solitamente i trasmettitori e i ricevitori sono collegati distortamente perciò il ritardo uscente deve il medesimo, nei sistemi reale invece dovrà calcolare anche il tempo di propagazione del segnale, oltre al ritardo  $t$ .

Ogni blocco del sistema LTI ha una sua  $F(x)$  particolare.

- anche filtri e c. di comunicazione sono sistemi LTI

Come lego l'ingresso e l'uscita conoscendo  $F$

- Suppongo che in ingresso ho una delta di dirac:

$$H(t) = F[\delta(t)]$$

↳ uscite impulsive del sistema.

Ricordo: Qualsunque segnale può essere scritto come convoluzione di se stesso con una delta

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot \delta(t-\lambda) d\lambda$$

$$y(t) = F \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot \delta(t-\lambda) d\lambda \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot F[\delta(t-\lambda)] d\lambda$$

$$\begin{array}{l} h(t) = F[\delta(t)] \\ h(t-\lambda) = F[\delta(t-\lambda)] \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot h(t-\lambda) d\lambda = \boxed{x(t) * h(t)}$$

- L'uscita di questo "sistema" è poi la convoluzione del segnale in ingresso con le uscite impulsive.

$$\boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)} \rightarrow \text{funzione di trasferimento}$$

Se di  $x(t)$  conosco l'autocorrelazione?

$$\begin{aligned} C_{xx}(t) &= x^*(-t) * x(t) = [x^*(-t) * h(t)] * [x(-t) * h(t)] = \\ &= [x^*(-t) * x(t)] * [h^*(-t) * h(t)] \\ &= C_{xx}(t) * C_{hh}(t) \\ &= E_{xx}(f) = E_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2 \end{aligned}$$

## Distorsioni

- Si verificano quando le opposte carattere lavorano in regime non lineare.
- Non esistono sistemi perfetti che non introducono alcuna distorsione, infatti il segnale multa accettabile in ricezione se è simile a quello in trasmissione
- distorsioni lineari: possono essere compensate
- distorsioni non lineari: danneggiano irreversibilmente il segnale

Ipostizzo un collegamento ideale in cui il segnale ricevuto è uguali a quello inviato ma scalato in ampiezza per effetto di attenuazioni o amplificazioni del canale. Mi aspetto dunque:

$$Y(t) = K \cdot x(t - t_d)$$

$t_d$  = ritardo di propagazione  
 $K$  = fattore di scala  
 $K > 1$  = amplificazione  
 $K < 1$  = attenuazione

trasformo in Fourier

$$Y(f) = K \cdot e^{-j2\pi f t_d} \cdot X(f)$$

$$\rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

$$H(f) = K \cdot e^{-j2\pi f t_d} \rightarrow \text{funtione di trasferimento}$$

distorsioneless

con  $t_d$  = costante

$$|H(f)| = K \rightarrow \text{ampiezza costante}$$

$$\arg H(f) = -2\pi f t_d \pm 180^\circ \rightarrow \text{fase costante}$$

DISTORSIONI DI AMPIEZZA

$$|H(f)| \neq K$$

DISTORSIONI DI FASE

$$\arg H(f) \neq -2\pi f t_d \pm 180^\circ$$

Egalizzatore = filtro con

$$F = \frac{1}{H(f)}$$

TRANSFORMATA  $\cos^2(2\pi f_0 t)$

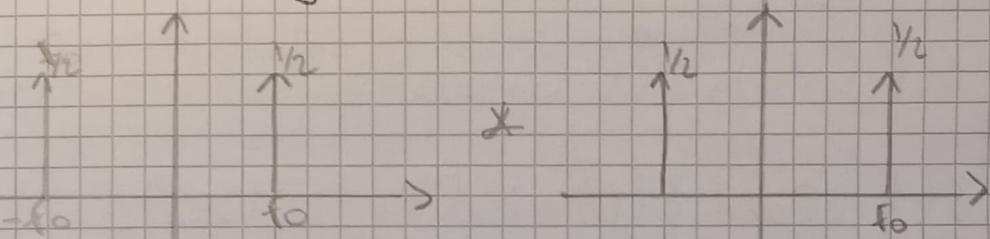
$$x(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{\cos(2\pi f_0 t)}{a(t)} \cdot \frac{\cos(2\pi f_0 t)}{b(t)}$$

$$x(f) = A(f) * B(f)$$

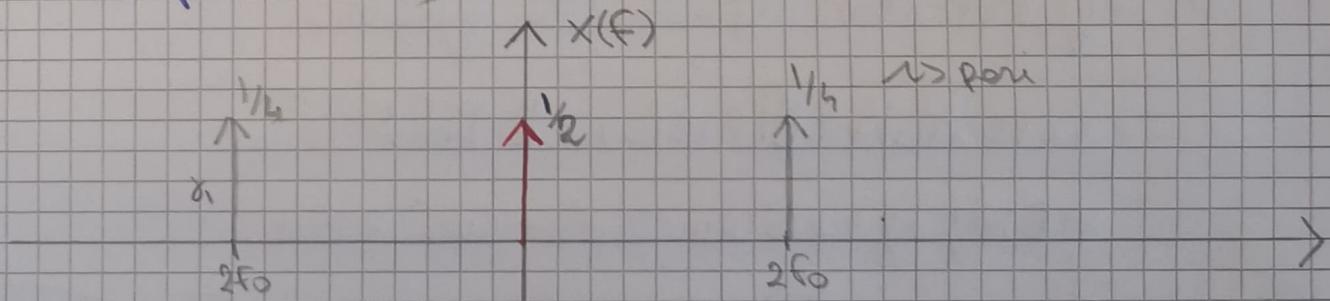
$$A(f) = \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

$$B(f) = \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

metodo grafico



ne porto uno a  $-\infty$  e lo trasano verso l'altro



So già dove disegnare la convoluzione perché gli estremi superiori e inferiori di queste vengono le somme algebriche degli estremi superiori e inferiori dei segnali da convolare.

$$mf = -f_0 - f_0 = -2f_0 \quad \text{Sup} = f_0 + f_0 = 2f_0$$

- Quando i due età si sovrappongono ha come risultato  $\frac{1}{2}$  con oltre 2 punti ad H<sub>1</sub> · H<sub>2</sub>  $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Quando i due età sono completamente sovrapposti avrò un  $\frac{1}{2}$  con oltre 2 punti alle somme dei piccoli ossia  $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  posizionata a distanza 2f<sub>0</sub> dalle punte ossia  $(-2f_0 + 2f_0) \Rightarrow$  origine

Segnale con contenuto energetico e basse e od alte frequenze poiché moltiplica per un coseno

→ Modulazione

p. di struttura

Via analitica

$$x(f) = Y_2 [\gamma(f-f_0) + \gamma(f+f_0)] * h[\gamma(f-f_0) + \gamma(f+f_0)]$$

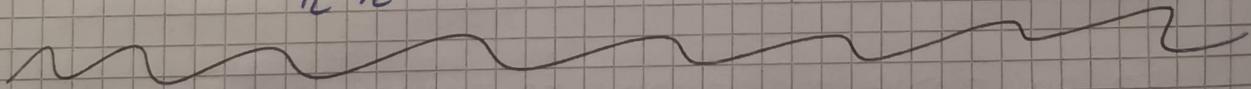
$$= \frac{1}{4} [\gamma(f-f_0-f_0) + \gamma(f-f_0+f_0) + \gamma(f_0-f_0+f) + \gamma(f+f_0+f_0)]$$

$$= \frac{1}{4} [\gamma(f-2f_0) + \gamma(f) + \gamma(f) + \gamma(f+2f_0)]$$

$$= \frac{1}{4} [\gamma(f-2f_0) + \gamma(f+2f_0)] + \frac{1}{2} \gamma(f)$$

$$= \frac{1}{4} \gamma(f-2f_0) + \frac{1}{4} \cancel{\gamma}(f+2f_0) + \frac{1}{2} \gamma(f)$$

$$x(t) = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_0 t) = \cos^2(2\pi f_0 t)$$



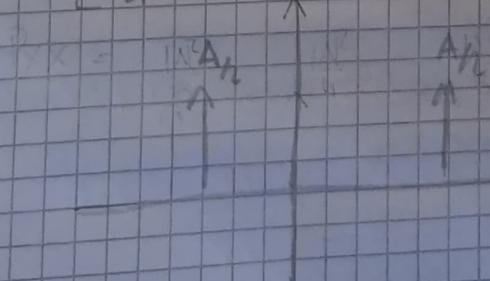
$$x(t) \rightarrow A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$C_{xx}(t) = x^*(t) * x(t) = F^{-1} \{ P_{xx}(f) \}$$

$$P_{xx}(f) = |x(f)|^2$$

$$x(f) = \left[ \frac{A}{2} \gamma(f-2\pi f_0 t) + \frac{A}{2} \gamma(f+2\pi f_0 t) \right] \times \left[ \frac{A}{2} \gamma(f-2\pi f_0 t) + \frac{A}{2} \gamma(f+2\pi f_0 t) \right]$$

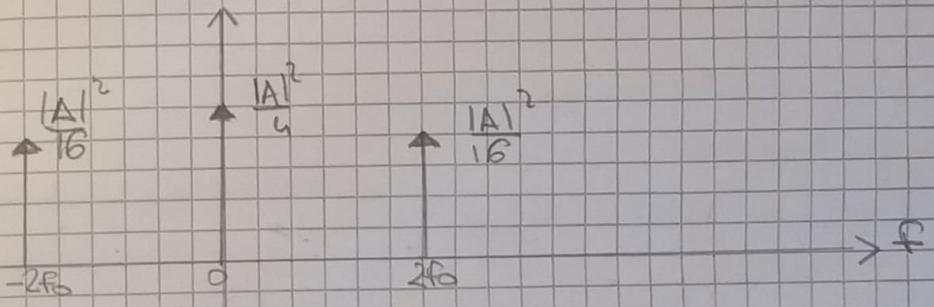
$$= \left[ \frac{A^2}{4} \gamma(f-2\pi f_0 t) + \frac{A^2}{4} \gamma(f+2\pi f_0 t) + \frac{A^2}{2} \delta(f) \right]$$



$$\text{est. sup} = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4}$$

$$\frac{A^2}{2}$$

Grafico  $f_{xx}(f)$



$$C_{xx}(t) = \frac{|A|^2}{4} + \frac{|A|^2}{8} \cos(2\pi 2f_0 t) \rightarrow \text{antitrasformata } P_{xx}(f)$$

$C_{xx}(0) \rightarrow \text{Area } P_{xx}(f) \text{ cioè Potenza } P_x \rightarrow$

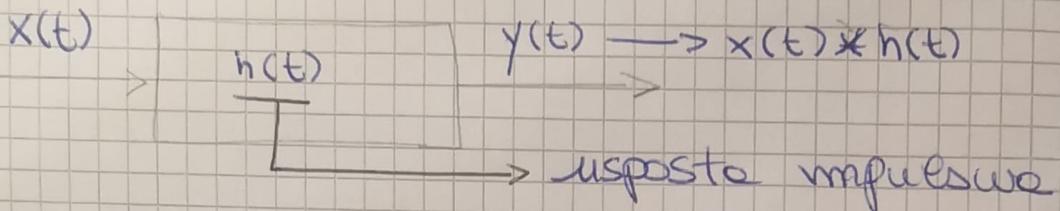
Per Poiseval

$$\sum_n |C_n|^2 = \frac{|A|^2}{16} + \frac{|A|^2}{16} + \frac{|A|^2}{16} = \frac{1+1+1}{16} = \frac{3}{16} |A|^2$$

$$P_x = C_{xx}(0) = \frac{|A|^2}{4} + \frac{|A|^2}{8} \cos(2\pi 2f_0 \cdot 0) = \frac{|A|^2}{4} + \frac{|A|^2}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8} |A|^2$$

27/10/2020

## Sistemi LTI



$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \Rightarrow \text{filtraggio}$$

funzione trasferimento

$$C_{xx}(t) \quad h(t) \quad C_{yy}(t)$$

Note: l'auto-correlazione di un segnale non so determinare unicamente il segnale generatore.

$$\begin{aligned} C_{yy}(t) &= y^*(-t) * y(t) \\ \text{Poiché } y &\text{ è l'uscita} \\ \text{di un LTI} &= [x^*(t) * h^*(-t)] * [x(t) * h(t)] \\ &= [x^*(-t) * x(t)] * [h^*(-t) * h(t)] \\ &= C_{xx}(t) * C_{hh}(t) \end{aligned}$$

trasformata  $C_{yy}$  è la densità spettrale  
 $E_{yy}(f) = E_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2$

→ ph non è un segnale classico

## Collegamento senza distorsioni

(senza rumore)

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = Kx(t-t_0)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot K e^{-j2\pi f t_0}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = K e^{-j2\pi f t_0}$$

con  $\begin{cases} K = \text{costante} \\ \{t_0\} = \text{costante} \end{cases}$

Se  $k$  e  $t_d \neq 0$  si introducono interferenze

- distorsione in ampiezza: distruttiva per audio  
metà per segnali multimed.
- " fase": distruttive per s. multimed  
- per audio

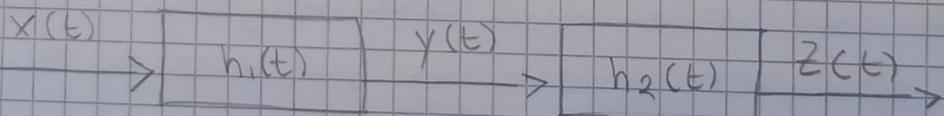
$$K=0 \quad t_d=0$$

non c'è amplificazione  
ampliato 1 = non c'è attenuazione

Come è fatta la risposta impulsiva di un sistema distortivo?

$$h(t) = k \cdot \delta(t - t_d)$$

## INTERCONNESSIONE IN SERIE



$$Z(f) = Y(f) \cdot H_2(f) = \cancel{X(f)} \cdot \underline{H_1(f) \cdot H_2(f)}$$

→ prodotto funzione  
di trasferimento

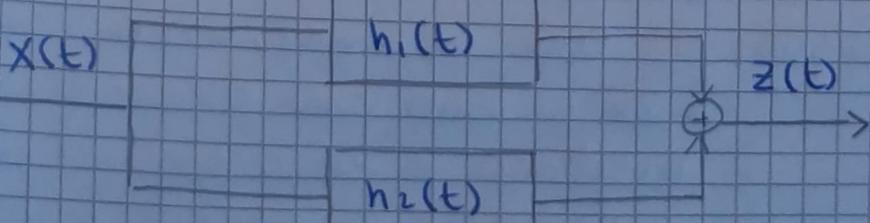
$$Z(t) = x(t) * \underline{[h_1(t) * h_2(t)]}$$

→ risposte impulsive  
convolute

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

## INTERCONNESSIONE IN PARALLELO



$$\begin{aligned}
 z(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\
 &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]
 \end{aligned}$$

Somme uscita impulsiva

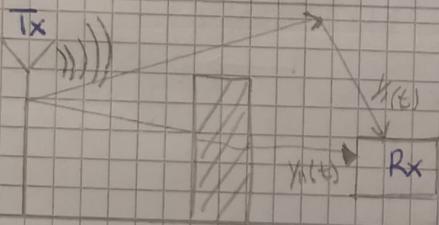
$$z(f) = X(f) \left[ H_1(f) * H_2(f) \right]$$

Somma Funzione trasformata

Sono più frequenti le rappresentazioni in serie dove  $h_1, h_2, \dots, h_n$  rappresentano i canali di comunicazione e tutti i canali che vengono attraversati dal segnale e i blocchi che formano il ricevitore.

dunque il ricevitore vede il segnale come il risultato del passaggio del segnale utile tramite l'interconnessione di più blocchi in serie.

## TRASMISSIONE WIRELESS



Percorsi multipli

- "riflessioni multipli"

- COMUNICAZIONE:
- LOS: line of sight, visibilità diretta tra Tx e Rx.
    - Cammino con Potenza maggiore ossia elevato SNR
    - Cammino + veloce
  - N·LOS: No line of sight, ossia fra Tx e Rx ci sono vari ostacoli che riflettono e rifrangono il segnale dissipandone la potenza e intorbidendo l'immagine

$$\left. \begin{array}{l} y_1(t) = K_1 \cdot x(t - T_1) \\ y_2(t) = K_2 \cdot x(t - T_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{segnali ricevuti: attenuati} \\ \text{di } K \quad (K_1 \neq K_2) \text{ e ritardati di} \\ T \quad (T_1 \neq T_2) \end{array}$$

$$\Downarrow \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

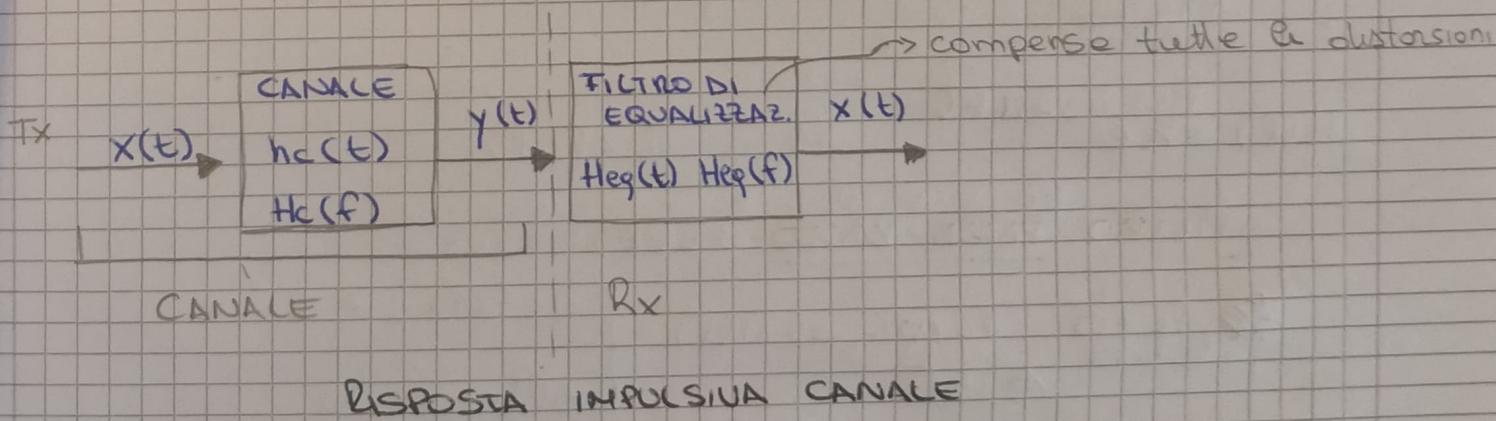
$T_2 > T_1$ :  $T_2$  ha percorso più lungo  
e quindi  $y_2$  è **ECHO** di  $y_1$

Le riflessioni multiple sono più canali di trasmissione in cui viaggia  $x(t)$  ritardato e attenuato con fattori  $K$  e  $T$  diversi, e sono interconnessi in parallelo  $\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$= K_1 x(t - T_1) + K_2 x(t - T_2)$$

Sono rappresentazioni diverse di uno stesso  $x(t)$   
quindi combinandole possiamo ottenere + segnali utile



$$x(t) = y(t) * h_{eq}(t)$$

$$x(f) = y(f) \cdot H_{eq}(f)$$

$$= x(f) \cdot H_c(f) \cdot H_{eq}(f)$$

Per avere  $x(f)$  misurato

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{H_c(f)}$$

come

filtro inverso

$$H_c(f) \cdot H_{eq}(f) = 1$$

$$H_C(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = K_1 e^{-j2\pi f T_1} + K_2 e^{-j2\pi f T_2}$$

$$h_C(t) = K_1 \delta(t - T_1) + K_2 \delta(t - T_2)$$

ideologicamente obbligato se ricevitore è un filtro  
invece più è in grado di muovere  $H_C(f)$

$$H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j2\pi f t}}{K_1 e^{-j2\pi f T_1} + K_2 e^{-j2\pi f T_2}}$$

$$\text{con } t=0 \quad = \quad \frac{1}{K_1 e^{-j2\pi f T_1} + K_2 e^{-j2\pi f T_2}}$$

può fatto  
mtg: non introduce distorsione

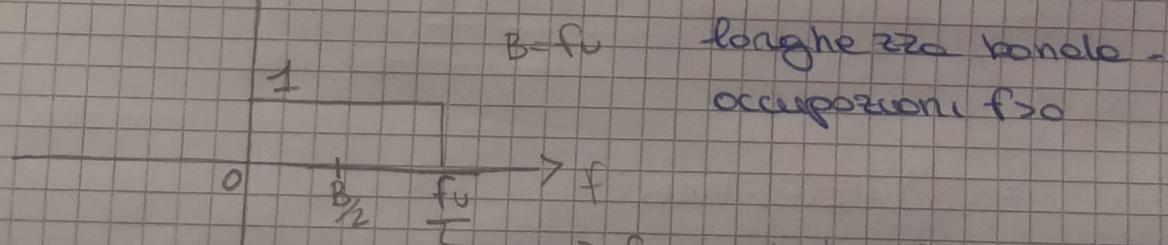
## TIPI DI FILTRO

FILTRI IDEALI  $\rightsquigarrow$  non implementabili

$$H(f) = K e^{-j2\pi f T} = 1 \quad \begin{matrix} \text{lower} \\ f_L < f < f_U \\ \text{upper} \end{matrix}$$

## FILTRO PASSA-BASSO (LPF)

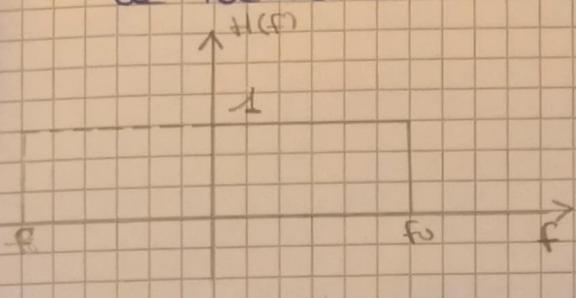
$$f_L = 0 \quad f_U \neq 0 \quad \Rightarrow H(f) = \begin{cases} 0 \leq f \leq f_U, & = 1 \\ \text{altrove}, & 0 \end{cases}$$



- Permette il passaggio delle sole frequenze minori di  $f_U$ . tutte le frequenze  $< f_U$  sono moltiplicate per 1 (stesso ampiezza) le restanti per 0

Non ha simmetria  $\Rightarrow H(t)$  è complesso

fa rendo simmetrica



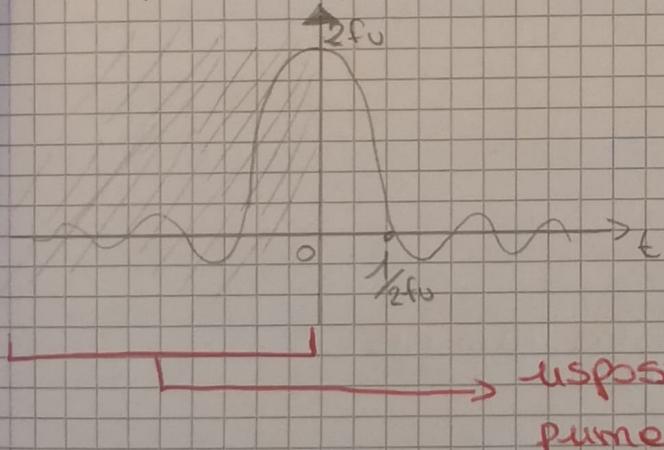
stesse bande B

$\Rightarrow$  segnali reali con  $H(t)$  reale

$$0 \leq |f| \leq f_u$$

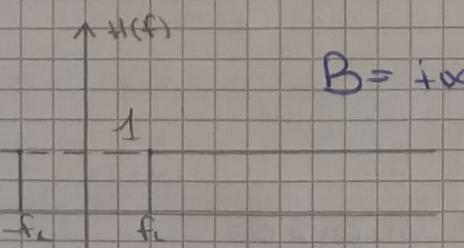
$$H(t) = \text{sinc}(2f_u t) \cdot 2f_u$$

è un sistema ideale perché ci sono discontinuità  
e perché la sua risposta impulsiva è  $\text{sinc}(2f_u t)$



### Filtro passa-alto (PFPA)

$$f_l \neq 0 \quad f_u = +\infty$$



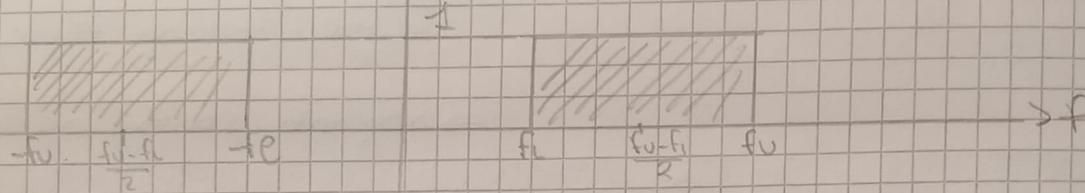
$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \geq f_e \\ 0, & \text{oltre} \end{cases}$$

## PASSA-BANDA (BPS)

$$f_L \neq 0 \quad f_U \neq 0$$

$$H(f)$$

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_L \leq |f| \leq f_U \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



- Permette il passaggio delle sole frequenze  $f_U < B < f_L$

$\uparrow$   
2 sec

$$h(t) = 2B \operatorname{sinc}(BT) \cdot \cos\left(\frac{f_U + f_L T}{2}\right)$$

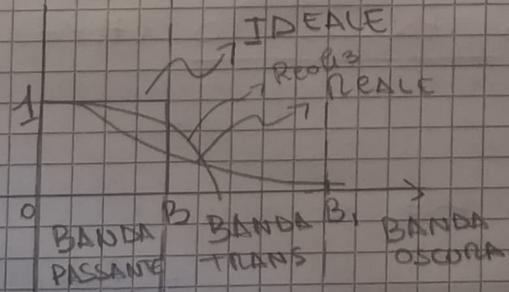
IDEALE PERCHÉ SIA SINC CHE COS HANNO RISPOSTE PRIMA  $T=0$

## FILTRI STOP

$$H(f) = 0$$

↪ Segnale ricevuto è solo rumore

## Filtri reali



raggiungere 0 in  $B_1 > B$

- andamento piatto in b. passante
- decresce in b. di transizione
- 0 in banda oscura