Spazi vettoriali su Reali

Definizione: Sia dato un insieme NON VUOTO V, i cui elementi sono chiamati vettori. Chiameremo scalari gli elementi di $\mathbb{R}$. In V sia definita un'operazione binaria interna cioè una legge che associa ad ogni coppia (v, w) di vettori di V un vettore di V che chiameremo somma $v+w$

Sia definita un'operazione binaria esterna ossia la moltiplicazione di un vettore w di V per uno scalare k.

L'insieme V è uno spazio vettoriale se:

1) $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u, v, w \in V$
2) $u+v = v+u \quad \forall u, v \in V$
3) $u+0 = u \quad \forall u \in V$ (VETTORE NULLO)
4) $u+(-u) = 0 \quad \forall u \in V$ (VETTORE OPPOSTO)
5) $1u = u \quad \forall u \in V$
6) $h(Ku) = (hK)u \quad \forall u \in V, \forall h, K \in \mathbb{R}$
7) $(h+K)u = hu + Ku \quad \forall u \in V, \forall h, K \in \mathbb{R}$
8) $h(u+v) = hu + hv \quad \forall u, v \in V, \forall h \in \mathbb{R}$

Proprietà Spazi vettoriali

1) Legge di cancellazione della somma:

Siano u, v, w vettori di V

$u+v = u+w$ se e solo se $v = w$

$\longrightarrow u+v = u$ se e solo se $v = 0$

$\longrightarrow u+v = w$ se e solo se $v = w-u$

casi particolari

DIMOSTRAZIONE

Se $v = w \Rightarrow u+v = u+w$

$\Rightarrow -u+(u+v) = -u(w+u) =$

P. associativa $= (-u+u)+v = (-u+u)+w \Rightarrow v = w$

2) $0v = 0 \quad \forall v \in V$

$h0 = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONI

1) Per la proprietà di spazi vettoriali ho $0v = (0+0)v =$
$= 0v + 0v \Rightarrow$ Per la legge di cancellazione ho : $0v = 0$

2) $h \cdot 0 = h(0+0) = h0 + h0 \Rightarrow$ Per legge di cancellazione ho $h0 = 0$

3) Sia v un vettore di uno spazio vettoriale V, e sia h in $\mathbb{R}$

$$\text{Se } hv = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ o } v = 0$$

Dimostrazione

So che $hv = 0$

Se $h = 0 \Rightarrow 0v = 0$

Se $h \neq 0 \Rightarrow hv = 0$

$\Rightarrow h^{-1}(hv) = h^{-1}0 \Rightarrow (h^{-1}h)v = 1v = v$

$= 1v = 0$

4) Se v è un vettore di uno spazio vettoriale V, allora vale $(-1)v = -v$

DIMOSTRAZIONE

Dimostro che $(-v)$ è l'opposto di v

ossia che $(-v) + v = 0$

$\Rightarrow v + (-1v) = 1v - 1v = [1 + (-1)]v = 0v = 0$

Sottospazi vettoriali

- Un sottoinsieme NON VUOTO E di uno spazio vettoriale V si dice sottospazio vettoriale se:

1) $u + v \in E \quad \forall u, v \in E$

2) $ku \in E \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall u \in E$

- Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V allora 0 è in E e, $\forall u \in E$, il vettore $(-u)$ è in E, allora E stesso è uno spazio vettoriale

DIMOSTRAZIONE

- Voglio mostrare che 0 è in E
So che se $K \in \mathbb{R}$ e $v \in E$ allora $Kv \in E$ in particolare è vero anche se $K = 0 \Rightarrow 0v \in E$ ma $0v = 0 \Rightarrow 0 \in E$
- Voglio mostrare che se v è un vettore di E allora anche $(-v)$ è un vettore di E.
So che $Kv \in E$ in particolare se $K = -1 \Rightarrow (-1)v \in E$
ma $(-1)v = -v \Rightarrow -v \in E$

- Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore 0, allora E non è un sottospazio vettoriale di V.

- $\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$ Questa matrice $M(2,2,\mathbb{R})$, genera un sottoinsieme non vuoto perché, sicuramente conterrà la matrice nulla.

$$M\begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad N\begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (M+N)\begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

- $(M+N) \in E$ se e solo se $a_3 = (a_1 + a_2)$ e $b_3 = (b_1 + b_2)$

$KM\begin{pmatrix} a_4 & a_4 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$ • $(KM) \in E$ se e solo se $a_4 = Ka_1$ e $b_4 = Kb_1$

- Con l'esempio sopra si può verificare che il sottoinsieme delle Matrici triangolari superiori $T^{\mathbb{R}}(n)$ di $M(n,n,\mathbb{R})$ è un sottospazio v., infatti:

1) Questo sottospazio non è vuoto perché la matrice nulla è una particolare matrice triangolare superiore
2) La somma di 2 matrici triangolari superiori è una matrice triangolare superiore
3) Se moltiplico una matrice triangolare superiore ottengo sempre una matrice triangolare superiore

C.V.D

- Il sottoinsieme delle matrici triangolari inferiore $T_A(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n,n,\mathbb{R})$
- Il sottoinsieme delle matrici simmetriche $S(n,\mathbb{R})$ è un sottospazio di $M(n,n,\mathbb{R})$ $\Rightarrow {}^tA = A$

DIMOSTRAZIONE

Siano A e B due matrici simmetriche:

→ So che ${}^tA = A$ e ${}^tB = B$ voglio dimostrare che ${}^t(A+B) = A+B$

Si ha che ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$

→ So che ${}^tA = A$ devo dimostrare che ${}^t(KA) = KA$

Si ha che ${}^t(KA) = K\,{}^t(A) = KA$

- Il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche $A(n,\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = -A$

- L'insieme $\mathbb{R}^{\geq 0}$ non è sottospazio di $\mathbb{R}$ perché se moltiplico $\mathbb{R}$ con un K, ad esempio (-1), $K\mathbb{R} \notin \mathbb{R}^{\geq 0}$

- Le soluzioni di un sistema lineare S, Sol(S) sono un sottospazio vettoriale di $M(q,1,\mathbb{R})$ (matrice incognite) se e solo se $AX = B$ con $X = 0 \Rightarrow A0 = B = 0$ $\stackrel{\in Sol}{\Rightarrow}$ ossia la matrice di soluzione è la matrice nulla

- Un sistema lineare i cui termini noti sono tutti nulli si chiama sistema omogeneo lineare. Dunque $S: AX = 0$ è sempre risolubile perché ammette come soluzione la soluzione nulla (o banale) $\Rightarrow RK(A) = RK(A')$

Sottospazi banali

- Il sottoinsieme $\{0\}$ (vettore nullo) dello spazio V
- Lo spazio vettoriale contenente tutto V

! Un sistema lineare NON omogeneo NON contiene la soluzione banale (o nulla) quindi non è un sottospazio vettoriale

! Un sistema lineare omogeneo può ammettere altre soluzioni oltre quella banale

TEOREMA: Se S è un sistema lineare omogeneo di p equazioni in q incognite, esso è un sottospazio vettoriale.

DIMOSTRAZIONE:

1) $Sol(S)$ è non vuoto perché contiene la matrice nulla

2) X_1 e $X_2 \in Sol(S) \Rightarrow AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$
ho che $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 \Rightarrow (AX_1 + AX_2) \in Sol(S)$

3) $X_1 \in Sol(S)$ $k \in \mathbb{R} \Rightarrow A(kX_1) = 0$?
$A(kX_1) = k(AX_1) = k \cdot 0 = 0$

CVD

! Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali se e solo se $q - rkA > 0$ con q = n. incognite $\Rightarrow$ ossia ho soluzioni dipendenti da parametri

- Il sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, 0)$ è un sottospazio perché posso vederlo come un sistema lineare omogeneo (0 è la soluzione banale) $\Rightarrow$ Se invece di 0 avessi 1 allora non avrei più il sottospazio vettoriale perché il sistema non ammetterebbe più soluzione banale