Teorema di Rouchè - Capelli

→ Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema S e sia A' la matrice completa del sistema.

Il sistema è risolubile se e solo se RK(A) = RK(A')

→ Sia S un sistema lineare risolubile e siano A e A' rispettivamente la matrice dei coefficienti di S e la matrice completa di S.

Sia n il rango di A e di A' (il sistema deve essere risolubile) e sia B un minore invertibile di A di ordine n. Allora S' ottenuto considerando solo le n equazioni corrispondenti alle righe del minore B, è un sistema equivalente a S

quindi se S' ≠ S ⇒ Sol(S) = Sol(SR)
↳ sistema ridotto

→ Sia S un sistema risolubile di p equazioni in q incognite. Sia n il rango della matrice del sistema, allora le soluzioni del sistema dipendono da q-n parametri. Se q=n allora ho una soluzione

Procedimento

1) Calcoliamo il rango di A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante non nullo

2) Calcoliamo il rango della matrice A' ottenuta orlando il minore B con le restanti righe e colonne di A: (matrice completa)
   - Se uno degli orlati ha det ≠ 0, allora il rango di A' è uguale all'ordine di quella matrice, e perché RK(A') ≠ RK(A) ⇒ sistema non risolubile
   - Se nessun orlato ha det ≠ 0 allora RK(A') = RK(A) ⇒ sistema risolubile

3) Consideriamo il sistema ridotto SR formato dalle n equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore B.

4) Pongo le incognite a secondo membro uguali ai parametri. => $k = q - n$ (ossia le n equazioni che non fanno parte di B)

5) Risolvo il sistema cramerano:

- Se $q = n \Rightarrow k = q - n = 0$ di conseguenza avrò una sola soluzione.
- Se $q < n \Rightarrow k = q - n = \lambda \in \mathbb{R}$ dove λ raffigura i parametri reali della soluzione. Dunque avrò infinite soluzioni dipendenti da $\lambda \Rightarrow \infty^{\lambda}$ soluzioni

Metodo di Gauss

- L'obbiettivo di questo metodo è quello di ridurre una matrice ad una equivalente più semplice da studiare e che rispetti le seguenti caratteristiche:
  - Sia una matrice a scalini (tutti gli elementi sotto la scala devono essere nulli). => Matrice triangolare superiore
  - Ogni scalino deve avere altezza unitaria
- Se in un sistema sommiamo a un'equazione un'altra equazione del sistema moltiplicata per una costante otteniamo un sistema S' equivalente a S
- Se in un sistema moltiplichiamo un'equazione per una costante non nulla, otteniamo un sistema S' equivalente a S
- Se in un sistema scambiamo due equazioni otteniamo un sistema equivalente

Operazioni elementari su matrici

- Sommare alla riga i-esima, la riga j-esima moltiplicata per una costante K con $K \in \mathbb{R}$ e $i \neq j$
- Scambiare tra loro due righe.

↳ Operazioni elementari di riga

Se posso passare da una matrice ad un'altra attuando una di queste procedure allora mi trovo di fronte a 2 matrici equivalenti per riga

- Le matrici equivalenti per riga soddisfano le proprietà:
  - Riflessiva: ogni matrice è equivalente a se stessa per riga. (nessuna operazione)
  - Simmetrica: se A equivale ad A' per riga allora anche A' equivale per riga ad A
  - TRANSITIVA: Se A equivale ad A' per riga e A' equivale ad A'' per riga allora A' equivale per riga ad A''

Calcolo determinante con GAUSS

- Sia A una matrice quadrata e sia A' la matrice ottenuta da A sommando alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per $K \in \mathbb{R}$. $\Longrightarrow$

$Det(A) = Det(A')$

- Se A e A' sono matrici equivalenti per riga e A' è la matrice ottenuta da A scambiando un m numero di righe allora

$Det(A') = (-1)^m \det(A)$ ⟶ Per proprietà Det

Calcolo del Rango con Gauss

- Se A e A' sono matrici equivalenti per righe, allora hanno ranghi uguali $\Rightarrow RK(A') = RK(A)$
- Il rango di una matrice è uguale al numero degli scalini (pivot) della matrice:

Esempi:

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} (-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} (-3/2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix} \quad m = 1$$

$$C' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolo determinante:

- Ricordo la proprietà del determinante di una matrice triangolare superiore.
- ho scambiato una riga quindi $Det(C) = -Det(C')$

$DET(C') = [2 \cdot 2 \cdot (-2)] = -8$ $\qquad det(C) = (-1)^m det(C')$

$$\Rightarrow Det(C) = -(-8) = 8$$

Calcolo rango

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

scalini
PIVOT

ho 3 scalini (PIVOT)
$\Rightarrow RK(C) = 3$

! NON SEMPRE CON GAUSS POSSO CALCOLARE DETERMINANTE !

$$A: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in M(4,5,\mathbb{R})$ con Gauss calcolo il $RK(A)$ ossia 3.

non essendo quadrata non posso calcolare il $det(A)$ con Gauss ma solo con il metodo dei minori.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

$$A: \begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

USO SARRUS

$$A: \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = \left[(1\cdot 3\cdot(-1)) + (1\cdot 2\cdot 1) + (1\cdot 2\cdot 2)\right] +$$

$$-\left[(1\cdot 3\cdot 1) + (2\cdot 2\cdot 1) + (-1\cdot 2\cdot 1)\right] =$$

$$\left[-3+2+4\right] - \left[3+4-2\right] = 3-5 = -2$$

$RKA = 3$

$$C: \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

USO GAUSS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad RK(C)=3$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli, poichè $RK(A)=RK(C)$ il sistema ammette soluzioni.

Poichè $RK(A)=RK(C)=$ numero incognite allora ho 1 sola soluzione

Soluzioni crameriane al SISTEMA

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \qquad \Delta=-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad x=\frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$y=\frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad z=\frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Poichè $0 \notin S$ soluzione del sistema allora S è un sottospazio affine di dimensione 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

METODO COFATTORI

$$DET = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \left[3 \cdot (-1) - (2 \cdot 2) \right] - 1 \cdot \left[2 \cdot (-1) - (2 \cdot (-1)) \right] + 1 \left[2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \right]$$

$$= 1 \left[-7 \right] - 1 \left[-4 \right] + 1 \left[1 \right] = -7 + 4 + 1 = -2$$

$$DET(A) = -2 \Rightarrow RK(A) = 3$$

METODO GAUSS

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$DET(A) = 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$$

$$\Rightarrow RK(A) = 3$$