Métodos Iterativos para Equações Algébricas e Transcendentes

{Método de Newton e Método das Cordas}

Rafaela Souza Alcântara

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática
Universidade Federal da Bahia

1. Método da Newton
   - Fórmula do Método de Newton
   - Escolhendo o x_0
   - Exemplo
2. Método das Cordas
   - Introdução
   - Interpretação Geométrica
   - Algoritmo
   - Exemplo

Método da Newton

Introdução

- Sendo **f(x)** uma função contínua no intervalo **[a,b]** e ξ o seu único zero nesse intervalo
- **Comportamento do método:**
  - Equivalente a fazer a substituição de um pequeno arco da curva $f(x) = y$ por uma reta tangente à curva, traçada a partir de um ponto existente na curva

Interpretação Geométrica

- Analisando no gráfico, o método de Newton pode ser descrito como:

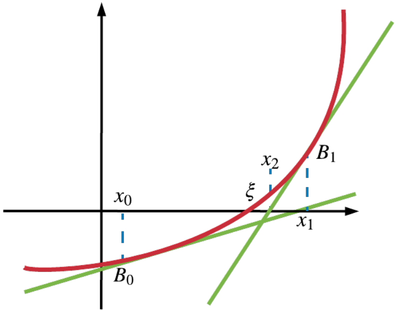

Figure: Interpretação Geométrica do Método de Newton

Interpretação Geométrica

- Transcrevendo o que o gráfico mostrou...
  - Para melhorar a aproximação x_0 da raiz exata ξ, é traçada uma reta tangente à curva y = f(x), a partir do ponto $B_0[x_0, f(x_0)]$. Dessa forma, ao interceptar o eixo x, teremos x_1, uma raiz mais aproximada da raiz exata ξ
  - No próximo ponto, $B_1[x_1, f(x_1)]$ traça-se novamente outra tangente à curva y = f(x).Dessa forma, ao interceptar o eixo x, teremos x_2, uma raiz mais aproximada da raiz exata ξ
  - **O processo é repetido até que encontremos** $x_n = \overline{x}$ com a tolerância especificada atingida.

Fórmula do Método de Newton

- Sabendo que o coeficiente angular da reta tangente de uma função pode ser descrito como sua derivada, podemos calcular a tangente de uma função a partir de:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Sabendo que a reta tangente, nesse caso não é vertical $(\alpha \neq 90^\circ)$

Fórmula do Método de Newton

- Igualando y = 0, teremos:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$x - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Por indução, teremos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Escolhendo o x_0

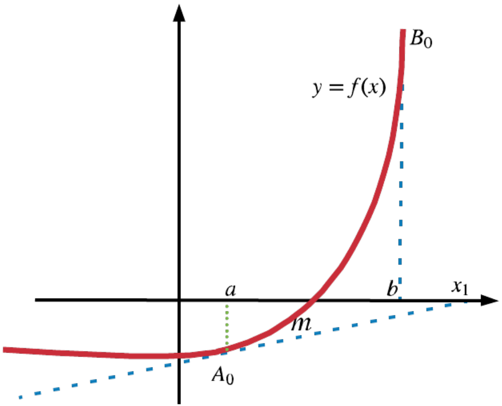

Figure: Interpretação Geométrica do Método de Newton

Escolhendo o x_0

- Se fôssemos observar a figura acima, veríamos que trançando uma reta tangente a partir do ponto $A_0[x_0, f(x_0)]$:
  - encontraríamos um valor $x_1 \notin [a, b]$
  - e desse modo, o Método de Newton não poderá garantir a convergência.
  - Se escolhermos b $= x_0$, o Método de Newton irá convergir

Escolhendo o x_0

- **Condição suficiente**:

$$f'(x) \text{ e } f''(x) \neq 0 \text{ e preservem o sinal } \forall x \in [a, b]$$
$$x_0 \text{ deve ser escolhido, tq } f(x_0) \times f''(x_0) > 0$$

Exemplo

- Vamos analisar a função a seguir:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$\varepsilon < 10^{-3}$$

$$\xi \in (0, 1)$$

- As derivadas de $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f''(x) = 6x$$

Exemplo

- Para o ponto $x_0 = 0$

$$f(0) = 3$$
$$f''(0) = 0 \rightarrow \text{Não atingiu a condição suficiente}$$

- Para o ponto $x_0 = 1$

$$f(1) = -5$$
$$f''(1) = 6$$
$$f(1) \times f''(1) < 0 \rightarrow \text{Não atingiu a condição suficiente}$$

Exemplo

- Para o ponto $x_0 = 0.5$

$$f(0.5) = -1.375$$
$$f''(0.5) = 3$$
$$f(0.5) \times f''(0.5) < 0 \rightarrow \text{Não atingiu a condição suficiente}$$

- Escolhemos $x_0 = 0.3$, pois $f(0.3) \times f''(0.3) > 0$ Condição satisfeita!

Exemplo

- Aplicando o Método de Newton, onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ teremos:}$$

k	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0.3374570	0.0374
1	0.3376089	0.0001

- Condição de parada atingida no $k = 1$, logo minha raiz aproximada será $\overline{x} = x_2 = 0.3376089$

Método das Cordas

Introdução

- Fazendo uma comparação, existe uma desvantagem na utilização do Método de Newton, tendo em vista que a cada iteração deverá ser calculado a $f'(x)$ para o novo ponto

- O Método das Cordas, traz uma nova abordagem, eliminando a derivada de f(x) e substituindo-a pelo quociente das diferenças

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

- Para esse método, são necessárias duas aproximações para iniciar as iterações

Interpretação Geométrica

- A partir das duas aproximações x_{k-1} e x_k, obtemos o ponto x_{k+1} sendo este a abcissa do ponto de interseção do eixo x e da reta secante que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$

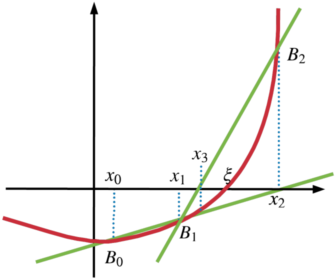

Figure: Interpretação Geométrica do Método da Secante

Algoritmo

1. Dados inciais: x_0, x_1 e $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
2. Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\overline{x} = x_0$ **FIM**
3. $\left\{ \begin{array}{r} |f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ ou \\ |x_1 - x_0| < \varepsilon_2 \end{array} \right\}$ faça $\overline{x} = x_1$ **FIM**
4. $k = 1$
5. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$
6. $\left\{ \begin{array}{r} |f(x_{k+1})| < \varepsilon_1 \\ ou \\ |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2 \end{array} \right\}$ faça $\overline{x} = x_{k+1}$ **FIM**
7. $k = k + 1$ **GOTO passo 5**

Exemplo

- Vamos analisar a função abaixo:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$
$$x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.3$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$$

k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	0.3371169	0.0042	0.0371
2	0.3375998	0.000079273	0.0004

- $\overline{x} = x^3 = 0.3375998$