Aufgabe 1: 24 Punkte

Gegeben ist das im Bild 1 dargestellte Signal x(t), von dem die Fourier-Transformierte X(jω) berechnet werden soll.

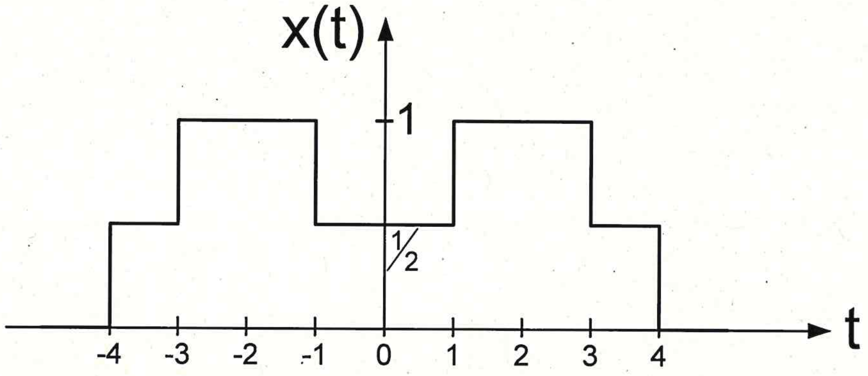

Bild 1

a) Welche generellen Eigenschaften besitzt X(jω) aufgrund der Form des Signals x(t)?

b) Stellen Sie x(t) durch bekannte mathematische Funktionen dar und berechnen Sie die erste Ableitung von x(t), d.h. x'(t).

c) Zeigen Sie, dass für x'(t) die Fourier-Transformierte

$$\mathbf{F}\left\{x'(t)\right\} = j\left[-\sin(\omega) + \sin(3\omega) + \sin(4\omega)\right]$$

gilt.

d) Ermitteln Sie mit dem Ergebnis aus c) die gesuchte Fourier-Transformation X(jω) und vergleichen Sie das Resultat mit den Eigenschaften aus a).

e) Stellen Sie das Signal x(t) als Funktion der im Bild 2 gezeigten Funktion u(t) dar und geben Sie den Zusammenhang zwischen X(jω) und U(jω) an. U(jω) muss **nicht** ermittelt werden!

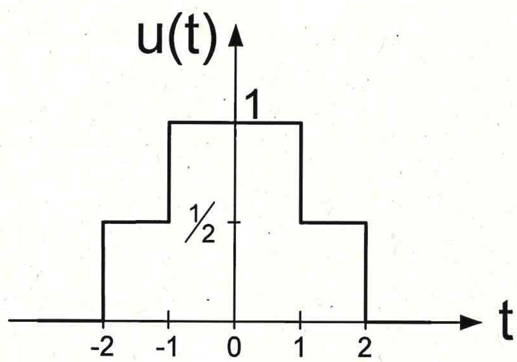

Bild 2

Aufgabe 2: 24 Punkte

Gegeben sei das im Bild 3 dargestellte Netzwerk, das zum Zeitpunkt $t=0_-$ energiefrei ist.

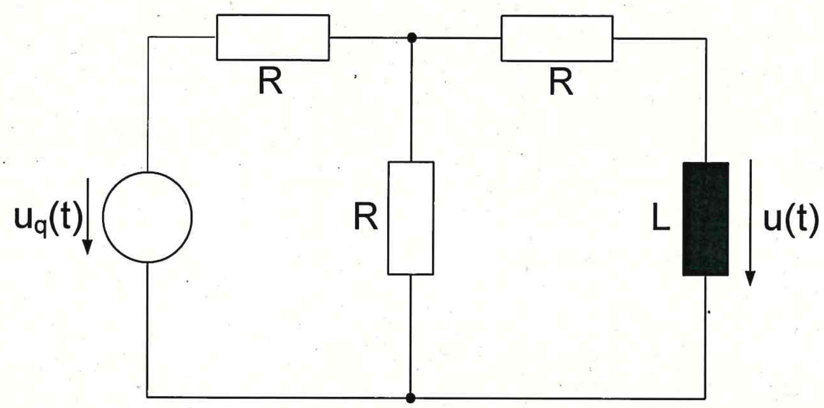

Bild 3

a) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion $G(s)=\frac{U(s)}{U_q(s)}$ gilt:

$$G(s)=\frac{1}{2}\frac{s}{s+\frac{3}{2}\frac{R}{L}}.$$

b) Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellendiagramm. Ist das System stabil (Begründung!)?

c) Berechnen Sie die Impulsantwort g(t).

d) Zeigen Sie, dass für die Sprungantwort h(t) gilt:

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3R}{2L}t}\cdot s(t)$$

gilt. Wenden Sie zur Kontrolle die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation an und interpretieren Sie die Werte $h(0_+)$ und $\lim_{t\to\infty} h(t)$ aus physikalischer Sicht.

Aufgabe 3: 27 Punkte

Gegeben sei ein zeitdiskretes System, das beschrieben wird durch die Differenzengleichung

$$y(k)-\frac{5}{8}y(k-1)+\frac{1}{16}y(k-2)=x(k-2).$$

Zum Zeitpunkt k=0 seien die Speicher des Systems leer.

a) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Systems mit minimaler Anzahl an Elementen.

b) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion gilt:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^2-\frac{5}{8}z+\frac{1}{16}}.$$

c) Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellendiagramm des Systems. Ist das System stabil?

d) Berechnen Sie die Sprungantwort h(k) und markieren Sie im Ergebnis den Einschwing- und den Anregungsanteil.

e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus d) mit Hilfe des Anfangs- und Endwertsatzes der z-Transformation.

Aufgabe 4: 17 Punkte

Ein LTI-System werde durch die Differentialgleichung

$$y''(t) + 1.5y'(t) + 0.5y(t) = x''(t) + x(t)$$

2. Ordnung mit linearen Koeffizienten beschrieben. Das System werde durch das Eingangssignal

$$x(t) = \sin(t) \cdot s(t)$$

ab dem Zeitpunkt $t=0_+$ angeregt. Dabei seien alle Anfangswerte 0.

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differentialgleichung, d.h. bestimmen Sie y(t).

Aufgabe 5: 8 Punkte

Ein zeitkontinuierliches System werde durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{s^4 + 5s^3 + 40s^2 + 50s + 40}$$

mit einem nicht näher bestimmten Zählerpolynom Z(s) beschrieben. Überprüfen Sie, ob das System stabil ist.