Aufgabe 1: 20 Punkte

Gegeben sei die im Bild 1 dargestellte Schaltung, bei der die Kapazität nicht ideal ist, sondern einen Ohmschen Verlustwiderstand besitzt. Zum Zeitpunkt t=0_ ist der Kondensator energiefrei.

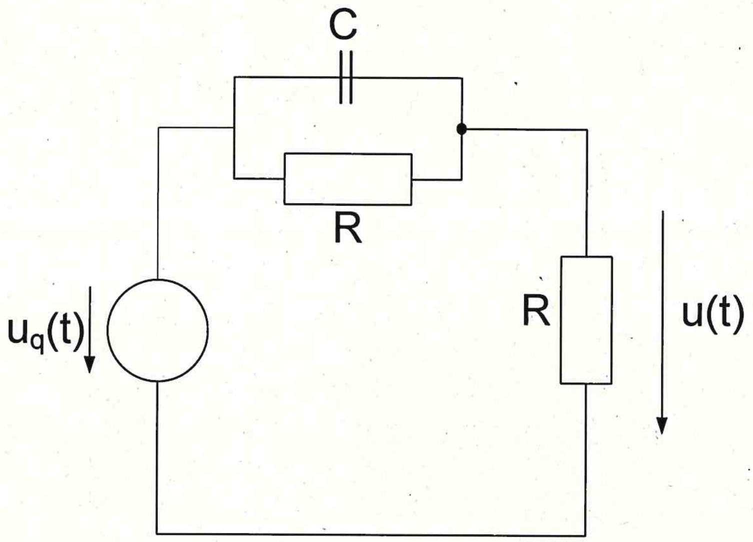

Bild 1

a) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{U(s)}{U_q(s)}$ gilt:

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{RC}}{s + \frac{2}{RC}}.$$

b) Bestimmen Sie Pole und Nullstellen. Ist das System stabil (Begründung!)?

c) Ab jetzt gelte R = C = 1, d.h. alle Bauelemente seien auf Eins normiert. Berechnen Sie für diesen Fall die Impulsantwort g(t).

d) Es sei jetzt $u_q(t) = U_q \cdot s(t)$. Bestimmen Sie die Ausgangsspannung u(t).

e) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis aus d) mit den Grenzwertsätzen der Laplace-Transformation und erklären Sie diese Grenzwerte u(0) und u(∞) aus physikalischer Sicht.

Aufgabe 2: 20 Punkte

Gegeben ist die im Bild 2 dargestellte **Sprungantwort** h(t) eines LTI-Systems

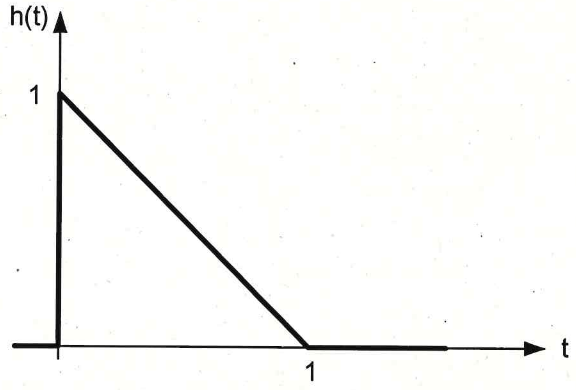

Bild 2

a) Berechnen und skizzieren Sie die **Impulsantwort** g(t) des Systems und verwenden Sie dabei zur mathematischen Beschreibung die Rampenfunktion $r(t) = t \cdot s(t)$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion G(s) des Systems..

c) Auf das System werde jetzt das im Bild 3 dargestellte Signal x(t) gegeben. Stellen Sie x(t) durch bekannte mathematische Funktionen dar und berechnen Sie die Laplace-Transformierte X(s) des Signals x(t).

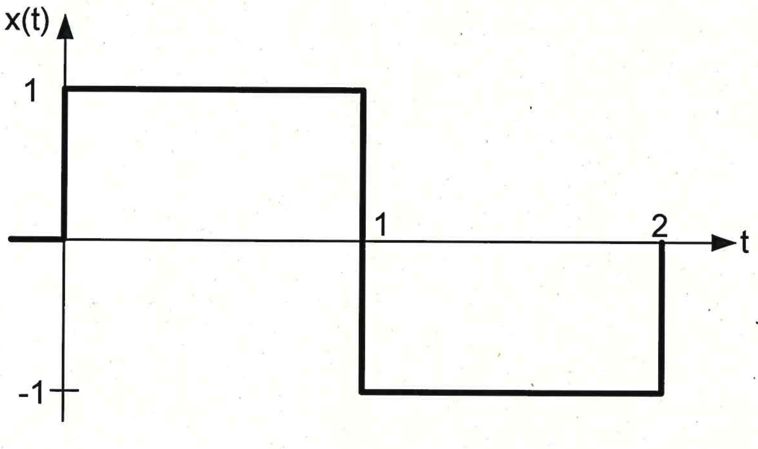

Bild 3

d) Berechnen Sie das Ausgangssignal y(t). Beachten Sie dabei den Zusammenhang $L\{r(t)\} = \frac{1}{s^2}$.

Aufgabe 3: 20 Punkte

Für das in Bild 4 dargestellte Signal soll die Fourier-Transformation berechnet werden.

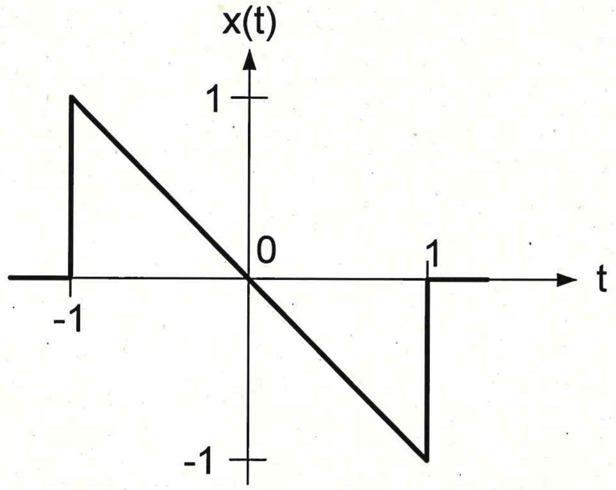

Bild 4

a) Stellen Sie das Signal x(t) durch bekannte Funktionen dar.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Ableitung x'(t) des Signals x(t)

c) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformation der Ableitung x'(t) gilt:

$$\mathbf{F}\{x'(t)\} = 2\cos(\omega) - \frac{2}{\omega}\sin(\omega)$$

d) Ermitteln Sie mit dem Ergebnis aus c) die gesuchte Fourier-Transformierte $X(j\omega) = \mathbf{F}\{x(t)\}$. Überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis die Eigenschaften der Fourier-Transformation für das dargestellte Signal x(t) erfüllt.

Aufgabe 4: 20 Punkte

Gegeben ist das im Bild 5 dargestellte zeitdiskrete System, bei dem die Speicher zum Zeitpunkt k=0 leer sind.

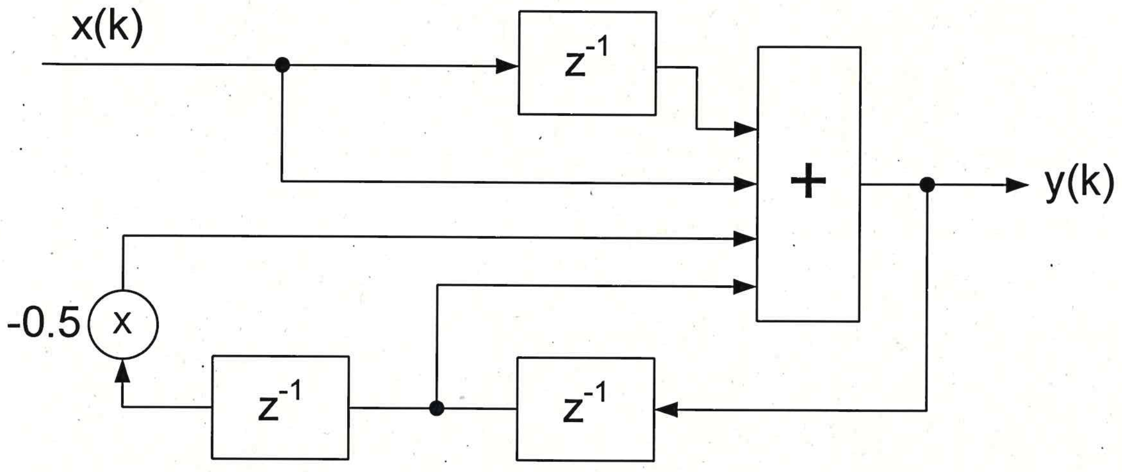

Bild 5

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des Systems, d.h. den zeitlichen Zusammenhang zwischen x(k) und y(k).

b) Zeichnen Sie ein äquivalentes System mit minimaler Anzahl an Speicherelementen.

c) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion G(z) gilt:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + 0.5}$$

d) Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellen-Diagramm. Ist das System stabil?

Aufgabe 5: 20 Punkte

Ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Eingangssignal x(t) und Ausgangssignal y(t) werde durch die Differentialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x(t)$$

beschrieben. Die Anfangsbedingungen seien y'(0) = y(0) = 0.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Reaktion y(t), wenn x(t) = s(t) ist.

b) Verifizieren Sie Ihre Lösung durch Einsetzen von y(t) in die Differentialgleichung und durch Kontrolle der beiden Anfangswerte.

Beachten Sie:

Bei doppelten Polstellen gilt für den Ansatz bei der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{s(s+a)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{(s+a)^2}$$