Discretas II

Luis Daniel Sanchez Molina

May 2023

1 Probar que el $Ker(\theta)$ e $Img(\theta)$ son subgrupos

1.1 Si $\theta : G \to H$ es un homomorfismo, entonces el $Ker(\theta)$ es un subgrupo de G

Sabemos que es un homomorfismo, entonces
$\theta(e) = e'$, siendo e y e' los elementos neutros de G y H
por tanto, $e \in Ker(\theta)$
Ahora, si $x, y \in ker(\theta) \to \theta(x) = \theta(y) = e'$
Usando que el transformado del inverso,
es el inverso del transformado:

$$\theta(xy^{-1}) = \theta(x) \cdot \theta(y^{-1}) = \theta(x) \cdot (\theta(y))^{-1}$$

$$= e' \cdot (e')^{-1} = e' \cdot e' = e'$$

$$\to xy^{-1} \in ker(\theta)$$

1.2 Demostrar que la $Img(\theta)$ es un subgrupo de H

$\theta(e) = e'$ siendo e y e' elementos
neutros de G y H respectivamente.
$e' \in Img(\theta)$. Si $x', y' \in Img(\theta)$

$$\to x' = \theta(x) \quad y' = \theta(y)$$

$$para\ \ ciertos \quad x, y \in G$$

$$x'(y')^{-1} = \theta(x) \cdot (\theta(y))^{-1} = \theta(x) \cdot \theta(y^{-1})$$

$$\theta(xy^{-1}) \to x'(y')^{-1} \in Img(\theta)$$

2 Demostrar Teorema

Sea X un subconjunto del grupo G, entonces hay un subgrupo más pequeño S de G que contiene a x, es decir, si T es cualquier otro subgrupo que contiene x, $s \subseteq T$.

Denotemos que $M = \{S \text{ subgrupo de } G : X \subseteq S\ \}$ Tambien tenemos que $M \neq \emptyset$ porque $G \in M$. Ahora $\cap_{S \in M} S$ es un subgrupo porque este es una intersección de subgrupos y es el subgrupo más pequeño que contiene a X ya que si Z es un subgrupo de G que contiene a X, también tendriamos que $Z \in M$ y por ende $\cap_{S \in M} S \subseteq Z$.