Tareas Discretas II

Luis Daniel Sanchez Molina

February 2023

1 Tarea 1:

Si G es un conjunto finito de n elementos, entonces M se puede escribir como una tabla de multiplicación. Demostrar la asociatividad de la operación dada con base a la siguiente tabla.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Para demostrar si es o no asociativa la operación, basta con usar los siguientes elementos:

$$(b \cdot c) \cdot d = b \cdot (c \cdot d)$$

$$b \cdot c = d \cdot d$$

$$d = b$$

No se cumple la asociatividad.

2 Tarea 2:

Demostrar que la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa. En este caso estoy demostrando que se cumple para matrices cuadradas de tamaño 2x2.

$$A, B, C \in M_{2x2}, n \in N$$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

Demostración de las matrices 2x2.

$$(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ec + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ie + fk & ej + lf \\ ig + kh & gj + hl \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ iec + idg + kcf + kdh & jec + jdg + lcf + ldh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aie + afk + big + bkh & aej + alf + bgj + bhl \\ cie + cfk + dig + dkh & cej + clf + dgj + dhl \end{bmatrix}$$

De este modo queda demostrada la asociatividad entre matrices cuadradas de tamaño 2x2. Sin embargo si deseamos una forma mas generalizada para matrices cudradas de tamaño nxn, donde n $\in$ N, podemos recurrir a la siguiente demostración:

$$A, B, C \in M_{nxn}, n \in N$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Sean:

$$D = A \cdot B, D \in M_{nxn}$$

$$E = B \cdot C, E \in M_{nxn}$$

Ahora tenemos que demostrar que: (DC)$_{ij} = (AE)_{ij}$

$$(DC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ij} c_{kj}$$

$$d_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}$$

$$(DC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

$$(AE)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj}$$

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj}$$

$$(AE)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Podemos observar que estos dos terminos son iguales:

$$(DC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$(AE)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Se cumple la asociatividad.

3 Tarea 3

Demostrar que la multiplicación de números complejos es asociativo.

$$|v| = \text{longitud del vector}$$

En coordenadas polares, obtenemos lo siguiente:

$$a = |v| \cdot cos\theta$$

$$b = |v| \cdot sen\theta$$

$$a + bi = (|v| \cdot cos\theta) + (|v| \cdot sen\theta)i$$

$$a + bi = |v| \cdot (cos\theta + sen\theta i)$$

$$cos(x) + sen(x)i = e^{ix}$$

$$a + bi = |v| \cdot (e^{i\theta})$$

Dados 3 números complejos en coordenadas polares, demostrar:

$$(|v_1|e^{i\theta} \cdot |v_2|e^{i\alpha}) \cdot |v_3|e^{i\gamma} = |v_1|e^{i\theta} \cdot (|v_2|e^{i\alpha} \cdot |v_3|e^{i\gamma})$$

$$|v_1| \cdot |v_2|(e^{i\theta + i\alpha})|v_3|e^{i\gamma} = |v_1|e^{i\theta} \cdot |v_2| \cdot |v_3|(e^{i\alpha + i\gamma})$$

$$|v_1| \cdot |v_2| \cdot |v_3|(e^{i\theta + i\alpha + i\gamma}) = |v_1| \cdot |v_2| \cdot |v_3|(e^{i\alpha + i\gamma + i\theta})$$

Se cumple la asociatividad.