INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campos do Jordão

ESTRUTURA DE DADOS

Grafos

Conceitos e Representações

Professor Mestre Igor de Moraes Sampaio
igor.sampaio@ifsp.edu.br

Grafos

O que é uma Grafo?

Um grafo é uma estrutura matemática usada para modelar relações entre objetos.

Composto por:

- Vértices (ou nós): representados por pontos.
- Arestas (ou arcos): conexões entre pares de vértices.

Definição Formal

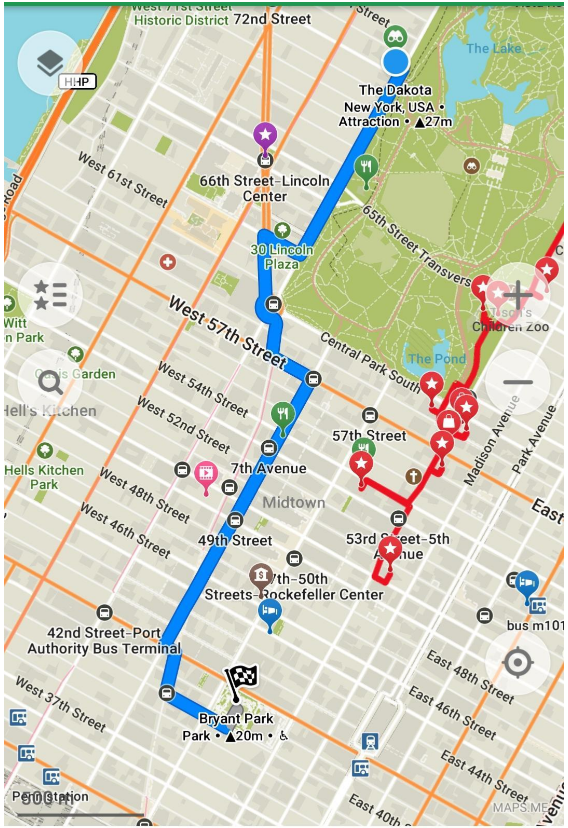
Definição Formal

- **Um grafo (G) é um par ordenado (V, A), onde:**
  - **V (Vértices/Nós):** Um conjunto finito e não vazio de entidades ou elementos.
  - **A (Arestas/Arrestas):** Um conjunto de pares de vértices, representando as conexões ou relações entre eles.

Aplicações

Aplicações

- Podem ser utilizados para representar uma infinidade de situações/problemas
  - **Redes Sociais:** Conexões entre usuários, grupos, curtidas.
  - **Sistemas de Navegação (GPS):** Cidades como vértices, estradas como arestas (otimização de rotas).

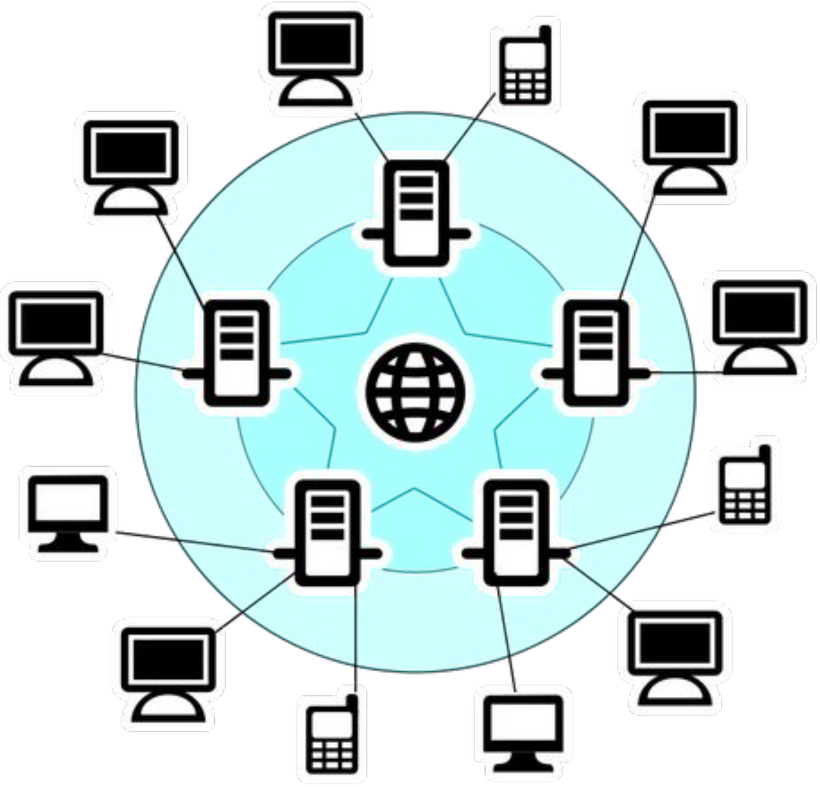


Aplicações

- **Motores de Busca:** Páginas da web (vértices) e links (arestas) para ranqueamento.

- **Circuitos Elétricos:** Componentes (vértices) e fios (arestas).

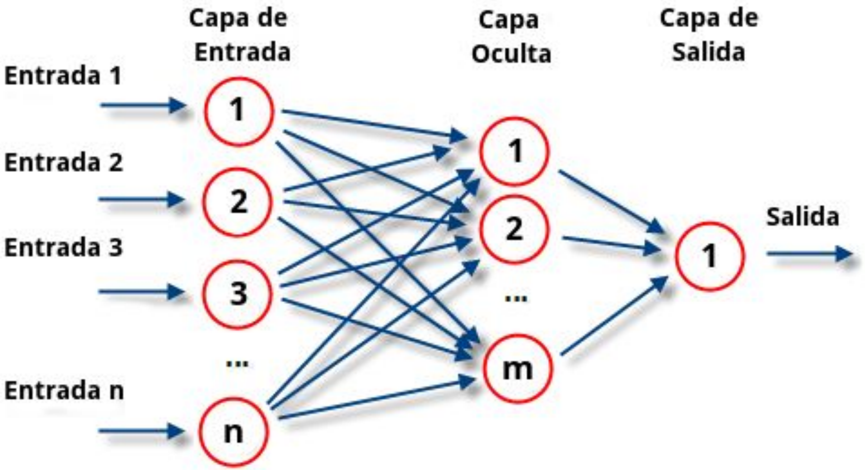
- **Modelagem de Redes de Computadores:** Dispositivos (vértices) e cabos/conexões (arestas).



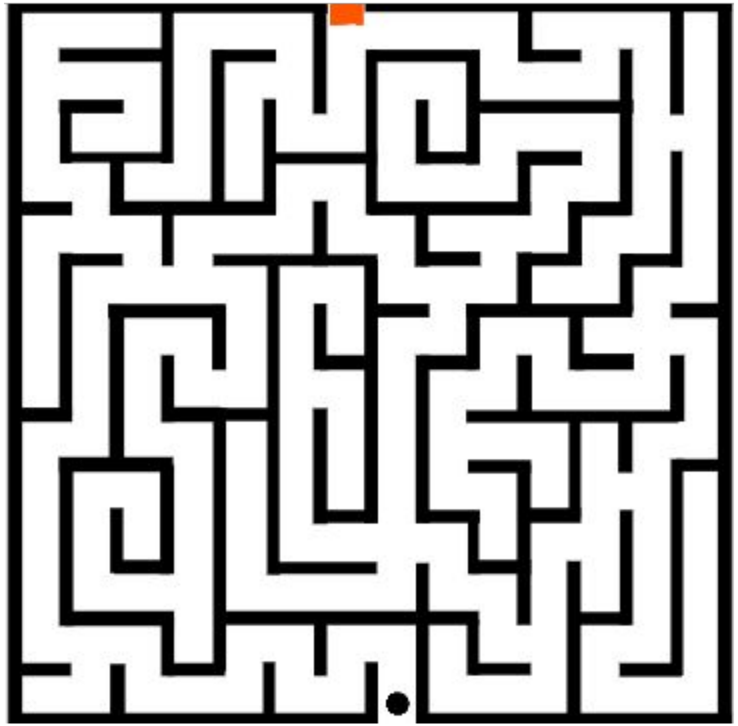
Aplicações

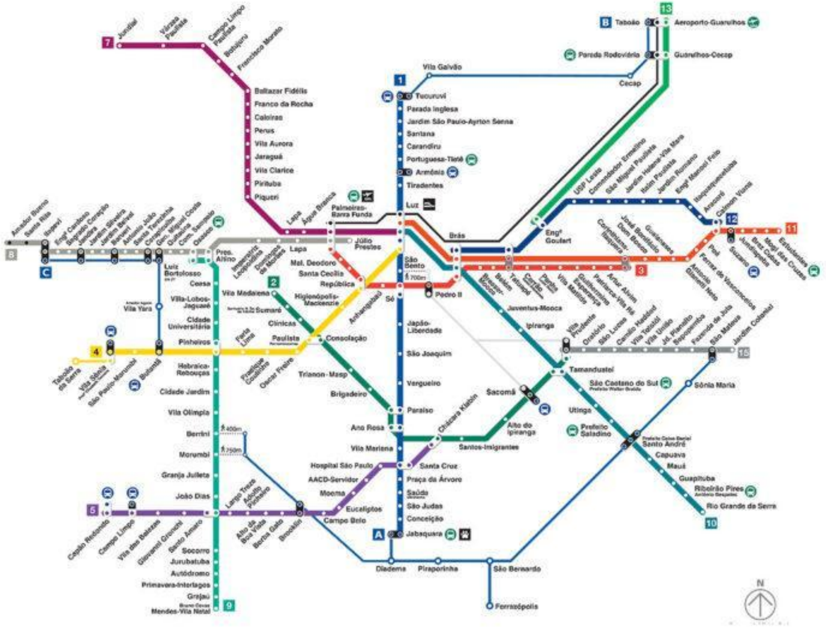
- **Inteligência Artificial/Machine Learning:** Redes neurais, grafos de conhecimento.

- **Bancos de Dados Orientados a Grafos:** Para dados altamente conectados.



Aplicações



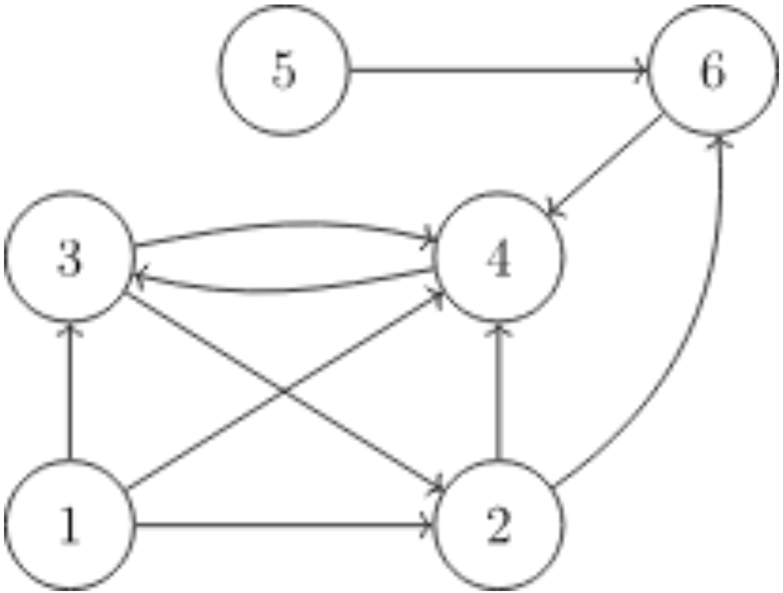


Representação

Definição Formal

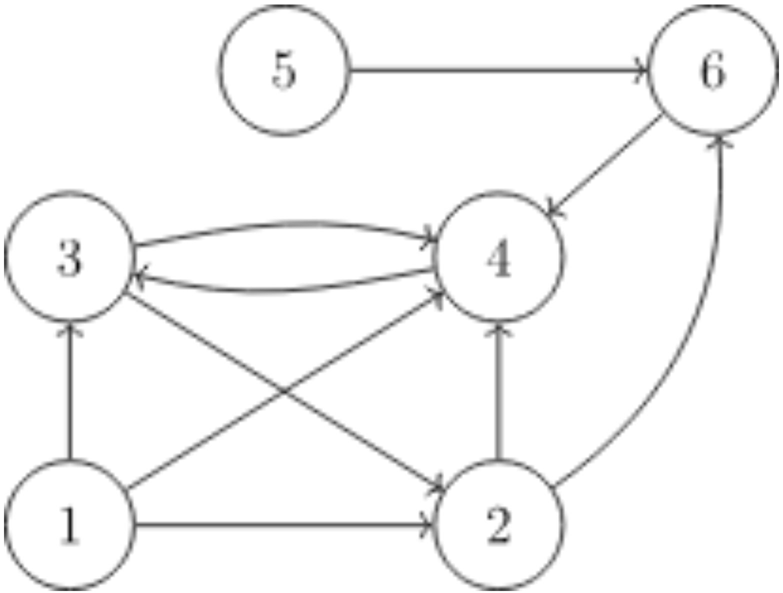
- **Vértices (Nós):**
  - Representam entidades. Podem ter atributos (ex: nome da cidade, ID do usuário).
  - Podem ser desenhados como círculos, caixas, etc.

- **Arestas (Arcos):**
  - Representam a relação entre dois vértices.
  - Podem ter atributos (ex: distância da estrada, peso do link).
  - Podem ser desenhadas como linhas simples.



Representações

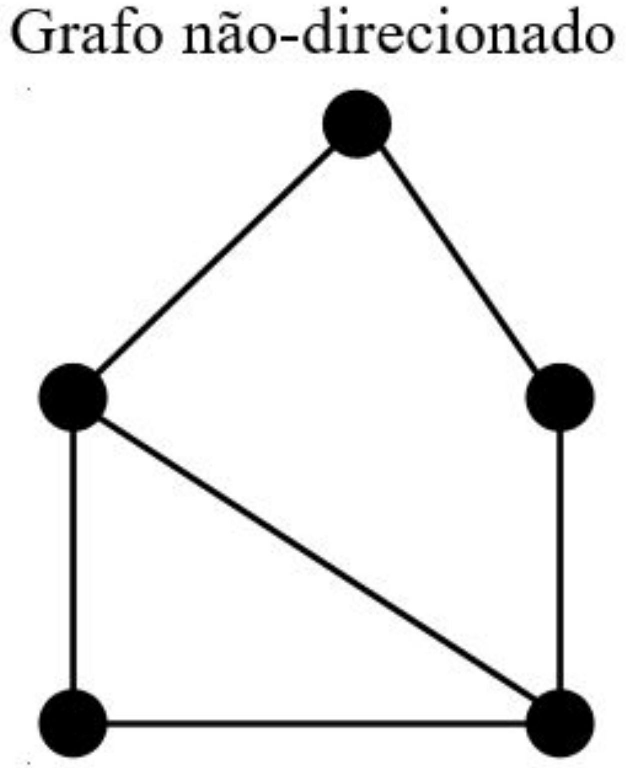
- Mais opções no final



Direcionados vs. Não Direcionados

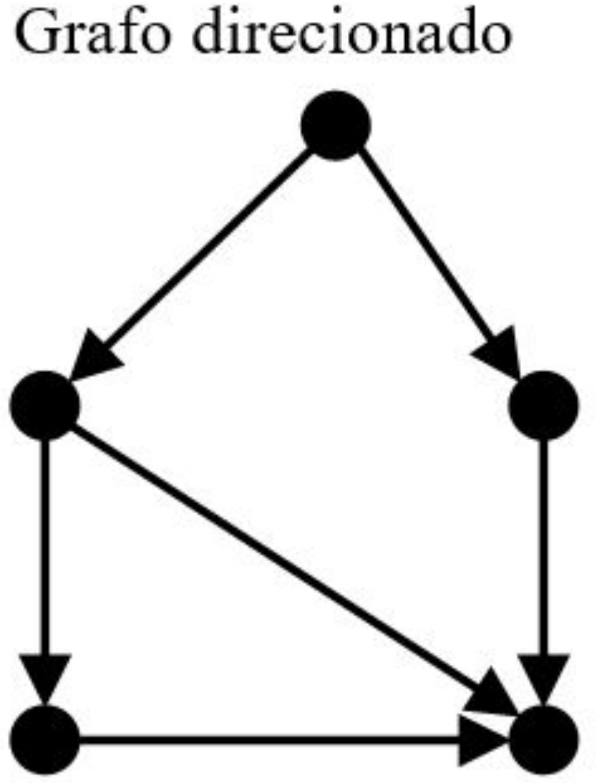
Grafo Não Direcionado

- **Grafo Não Direcionado (Não Orientado):**
  - As arestas não têm direção. A relação é mútua.
  - Se A está conectado a B, B está conectado a A.
  - Exemplo: Amizade no Facebook (se A é amigo de B, B é amigo de A).
  - Representação: (u,v) é o mesmo que (v,u).



Grafo Direcionado

- **Grafo Direcionado (Orientado / Dígrafo):**
  - As arestas têm uma direção. A relação pode ser unilateral.
  - Se A aponta para B, B não necessariamente aponta para A.
  - Exemplo: Seguir alguém no Twitter (eu sigo você, mas você não precisa me seguir).
  - Representação: (u→v) indica que a aresta vai de u para v.

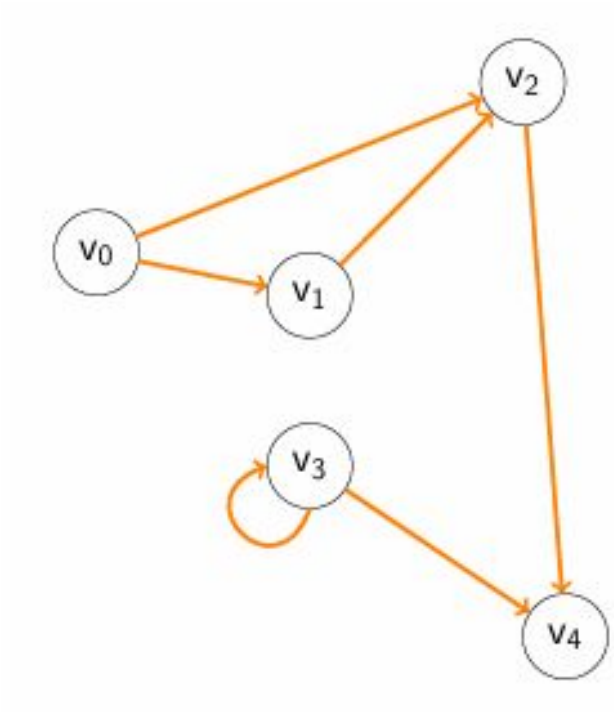


Conceitos

Loops

- Um laço (ou loop) é uma aresta $e=(v,v)$, onde os dois extremos da aresta são o mesmo vértice v.

- Em grafos não direcionado loops não são permitidos.



Arestas - Conceitos

- **Se (u, v) é uma aresta no grafo, então:**
    - Dizemos que v é adjacente a u.
    - Alternativamente, dizemos que v é vizinho de u.
    - Em grafos dirigidos, (u, v) indica que a aresta sai de u e entra em v.

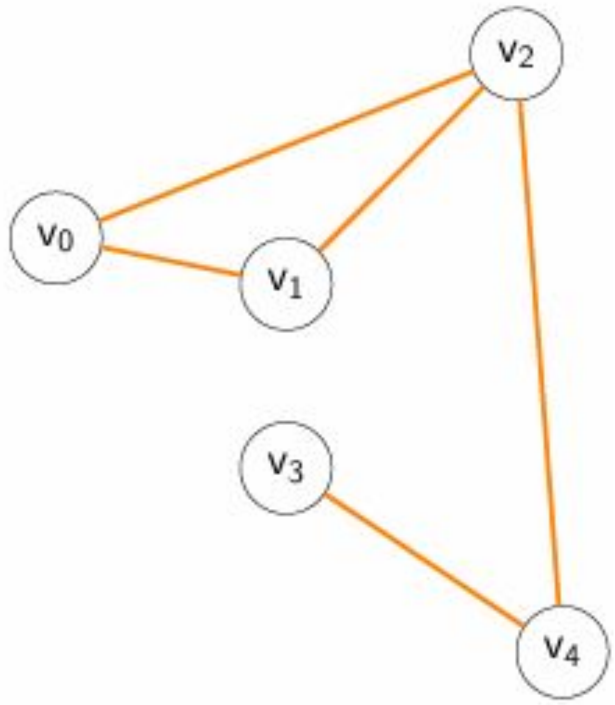
Arestas - Conceitos

- **Em grafos não dirigidos, a relação de adjacência é simétrica:**
  - $(u,v) \Leftrightarrow (v,u)$
- **Já em grafos dirigidos, não há simetria garantida:**
  - Pode existir a aresta (v_0,v_1),
  - Mas não necessariamente existe a aresta (v_1,v_0).

Grau de um Vértice

- Em grafos não dirigidos, o grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.

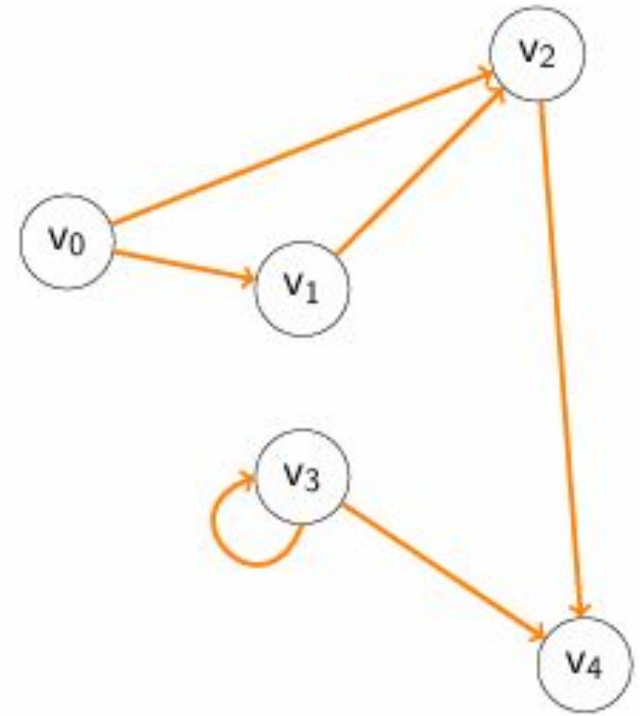
    - gr(v0) = gr(v1) = gr(v4) = 2
    - gr(v2) = 3
    - gr(v3) = 1



Grau de um Vértice

- Já em grafos dirigidos, o grau de um vértice é o número de arestas que saem do vértice mais o número de arestas que chegam nele.

  - gr(v0) = gr(v1) = gr(v4) = 2
  - gr(v2) = gr(v3) = 3



Grau de um Vértice

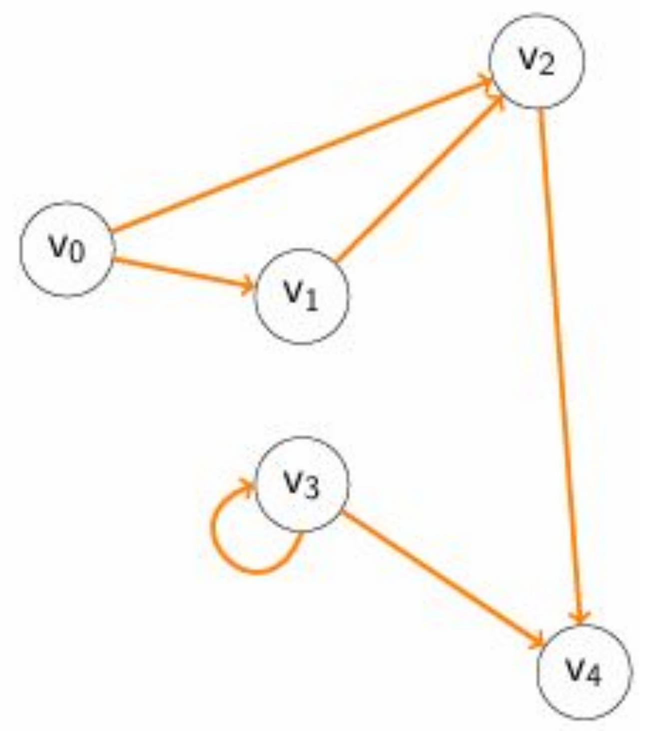
- **No caso de grafos dirigidos, há dois tipos específicos de graus de vértice:**
  - **Grau de saída:** número de arestas que saem do vértice.
  - **Grau de entrada:** número de arestas que chegam no vértice.

Caminho

- Um caminho de um vértice x a um vértice y é uma sequência de vértices em que, para cada vértice, do primeiro ao penúltimo, há uma aresta ligando esse vértice ao próximo na sequência.

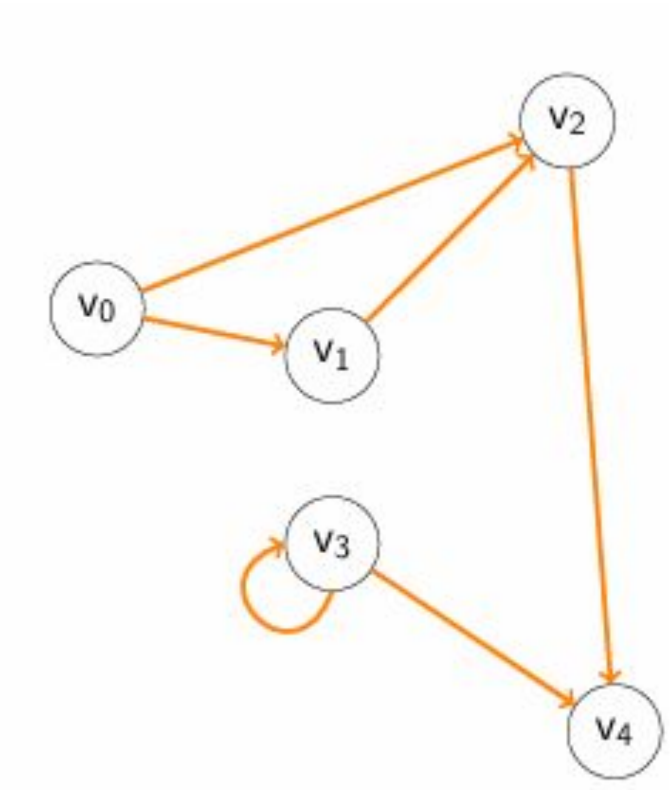
Caminho

- No caso ao lado, alguns caminhos são.
    - (v0, v1, v2, v4)
    - (v3, v4)
    - (v0, v1, v2)
    - (v3, v3, v4)



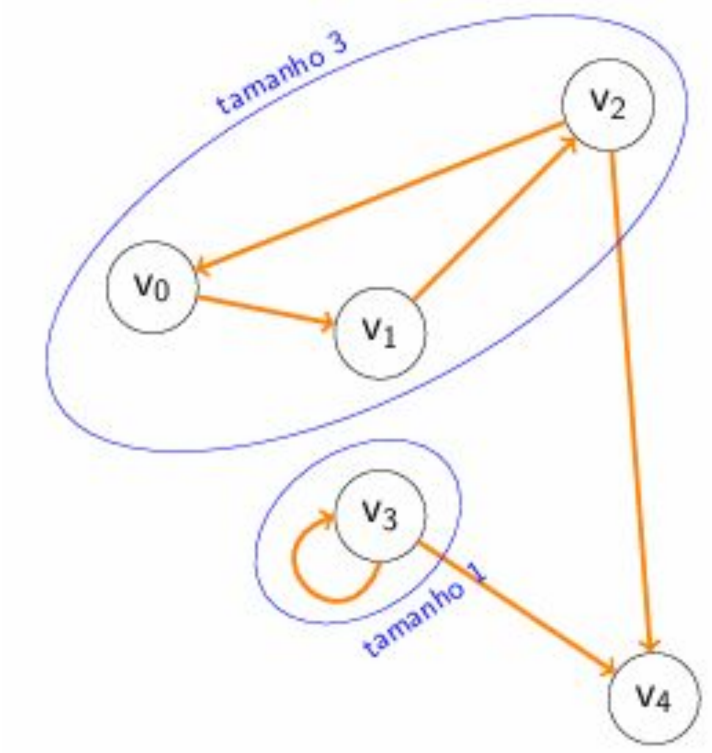
Caminho

- O comprimento de uma caminho é o número de arestas nele.
  - compr(v0, v1, v2, v4) = 3
  - compr(v3, v4) = 1
  - compr(v0, v1, v2) = 2
  - compr(v3, v3, v4) = 2



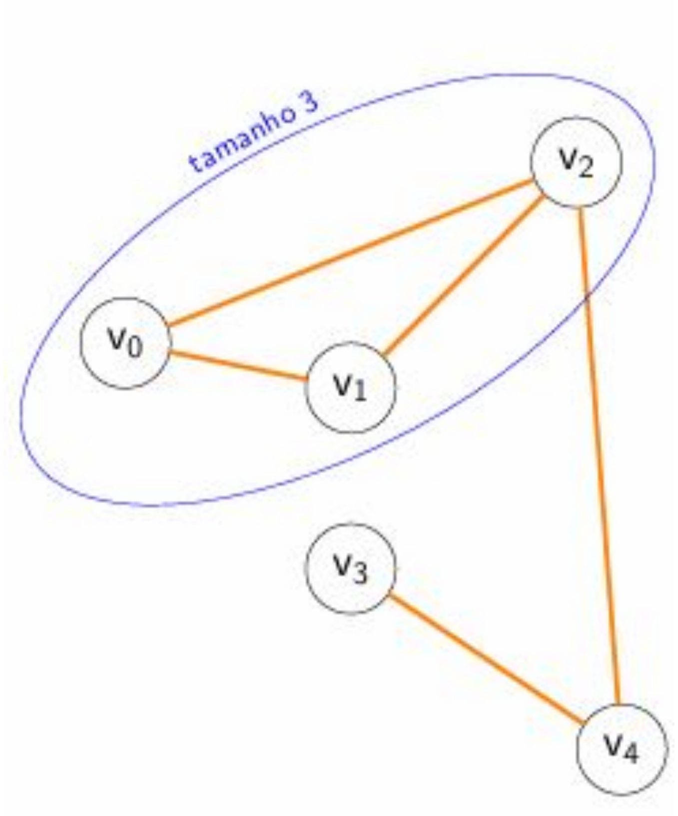
Ciclo

- Um ciclo acontece quando, a partir de um determinado vértice, podermos percorrer algum caminho que nos leve a esse mesmo vértice.
  - Em grafos dirigidos, o caminho deve conter pelo menos uma aresta.



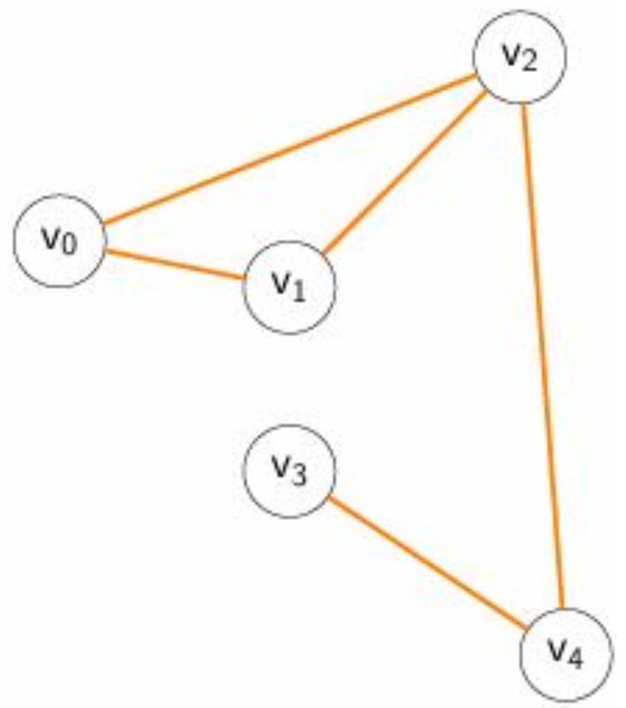
Ciclo

- **Em grafos não dirigidos, um ciclo deve conter pelo menos 3 arestas.**
    - Grafos em que há ao menos um ciclo são chamados de cíclicos.
    - Grafos em que não há ciclos são chamados de acíclicos.



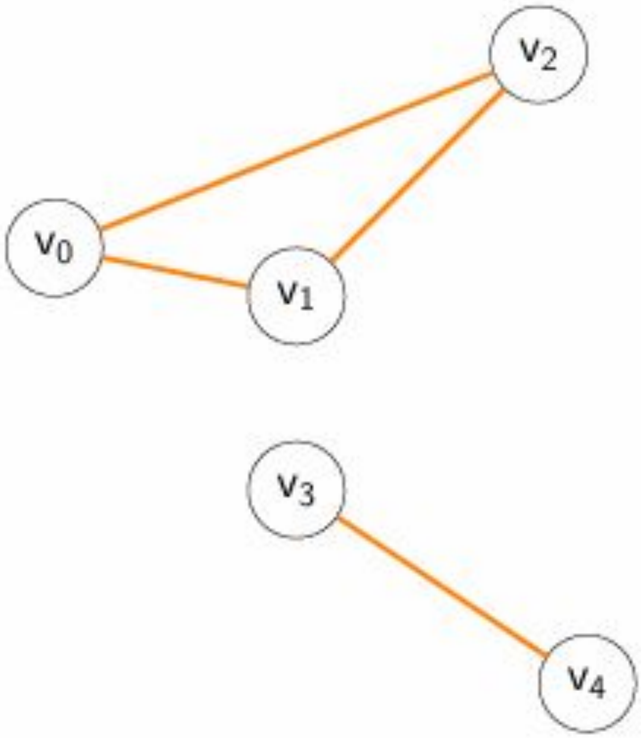
Conectividade

- Um grafo não direcionado é conexo (ou conectado) se cada par de vértices nele estiver conectado por um caminho.
    - O grafo ao lado é conexo.



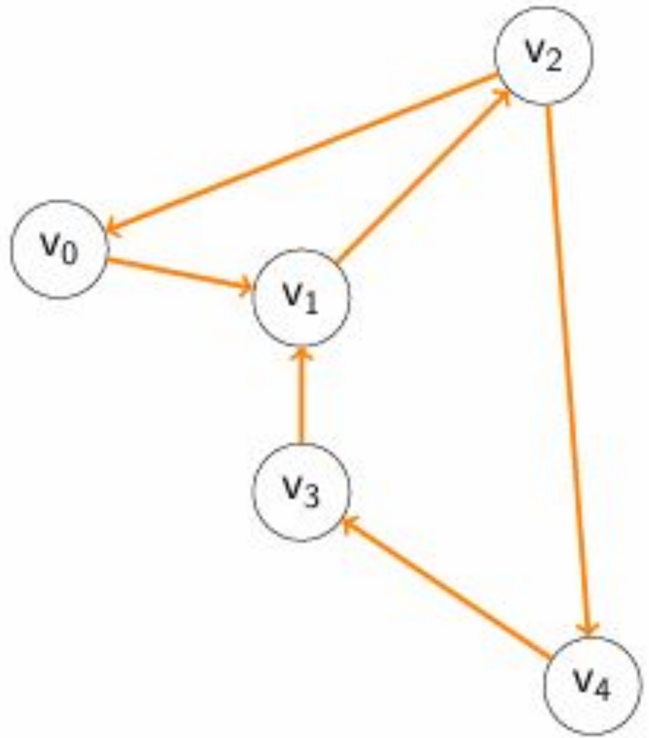
Conectividade

- Um grafo não direcionado é conexo (ou conectado) se cada par de vértices nele estiver conectado por um caminho.
    - O grafo ao lado é desconexo



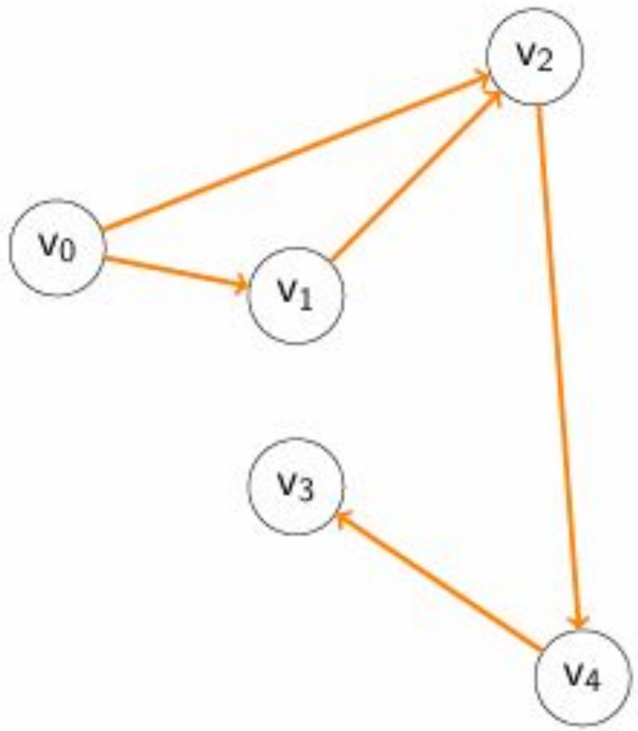
Conectividade

- Um grafo dirigido é fortemente conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices no grafo.
    - Contém um caminho direto de u para v e um caminho direto de v para u para cada par de vértices (u,v).



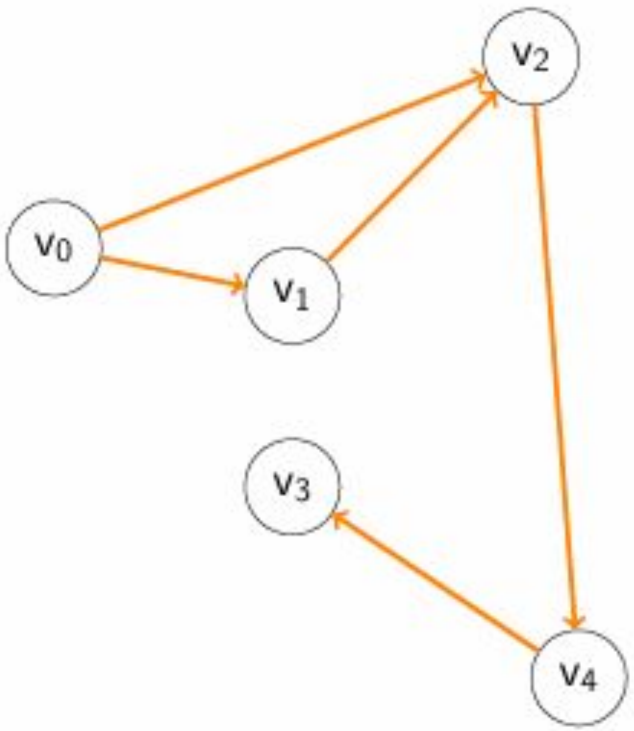
Conectividade

- Um grafo dirigido é conexo se possuir um caminho de u para v, ou um caminho de v para u, para cada par de vértices (u,v).



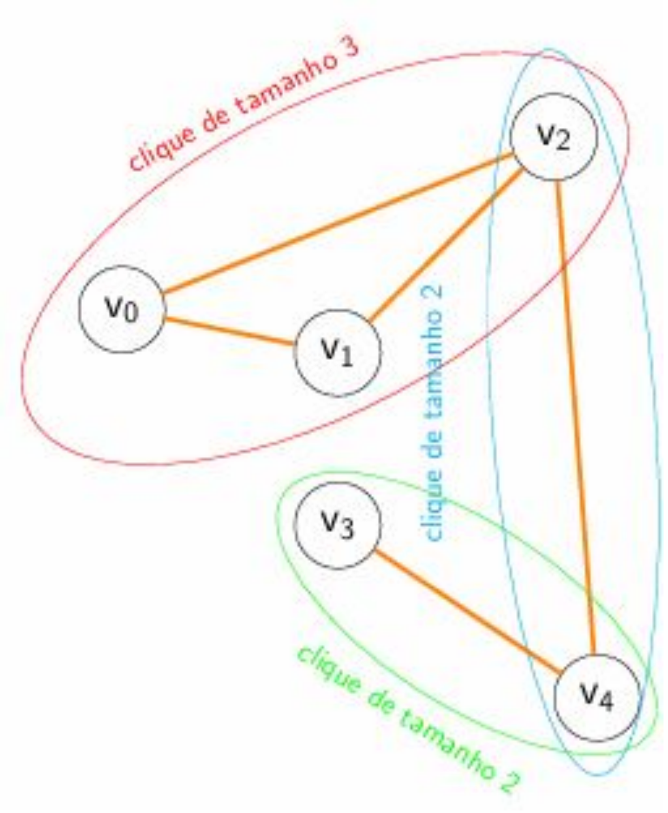
Conectividade

- Um grafo dirigido é fracamente conexo se a substituição de todas as suas arestas por arestas não direcionadas produzir um grafo conexo.
  - Exemplo: não há caminho de $v3 \rightarrow v2$ nem de $v2 \rightarrow v3$ (não é conexo, mas é fracamente conexo).



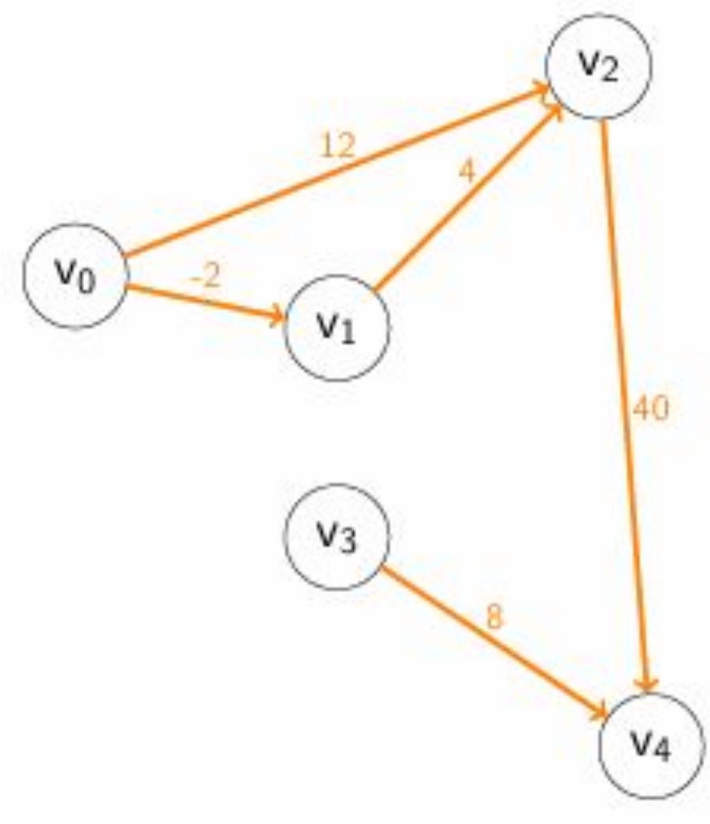
Clique

- Em grafos não dirigidos, um clique é um subconjunto de seus vértices tal que cada par de vértices do subconjunto é conectado por uma aresta.



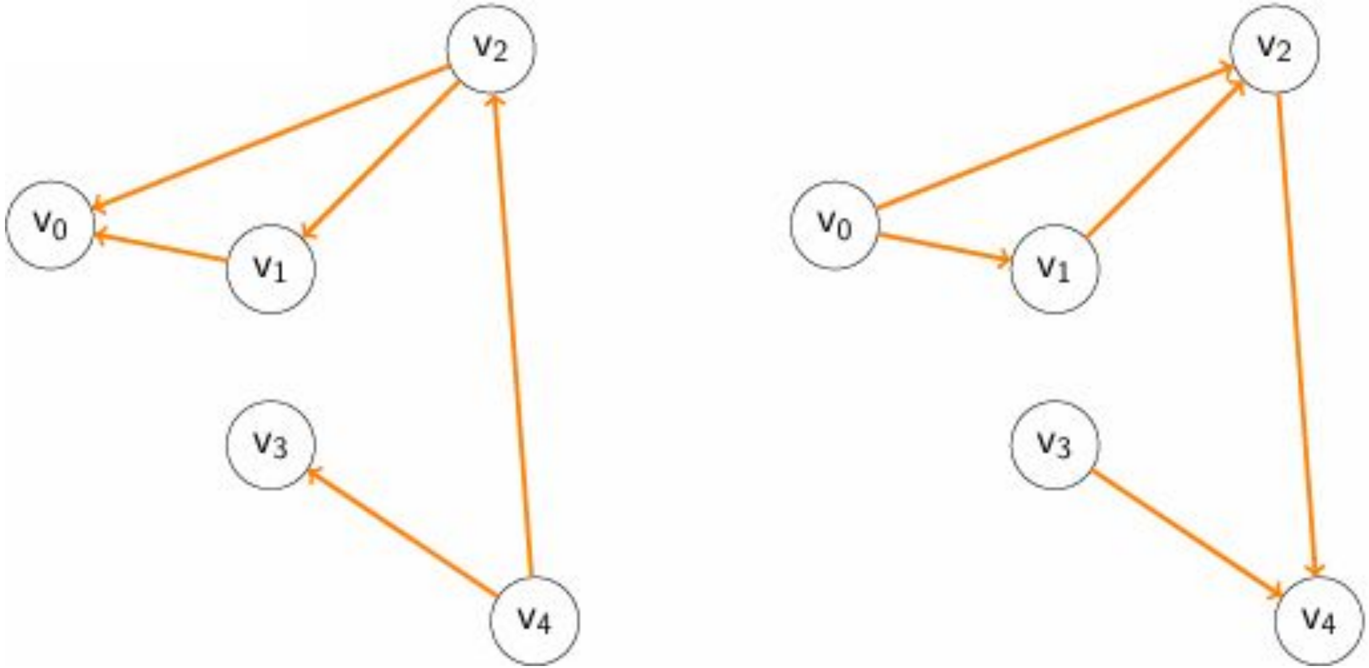
Grafos Ponderados

- **Grafos também podem ser ponderados,**
  - Caso em que possuem pesos associados às suas arestas.
  - Esses pesos podem representar custos, distâncias etc.



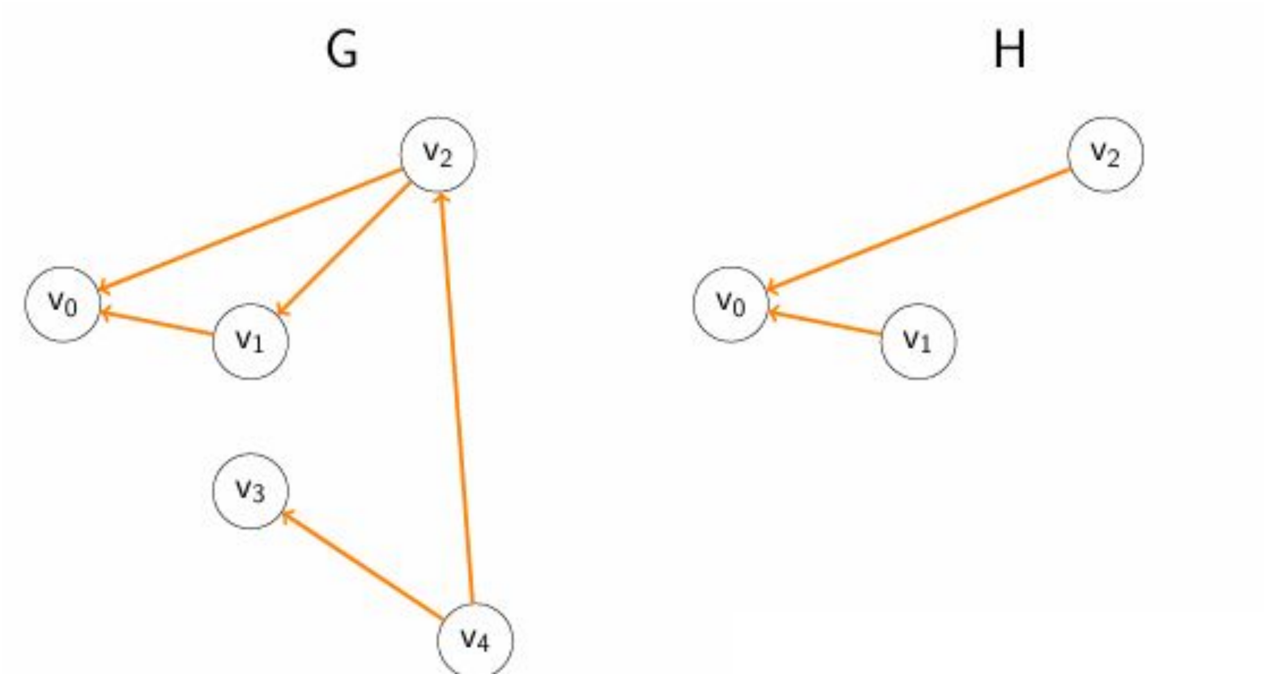
Grafos Transpostos

- O grafo transposto GT de G é um grafo que possui os mesmos vértices de G, mas as arestas têm suas direções invertidas.



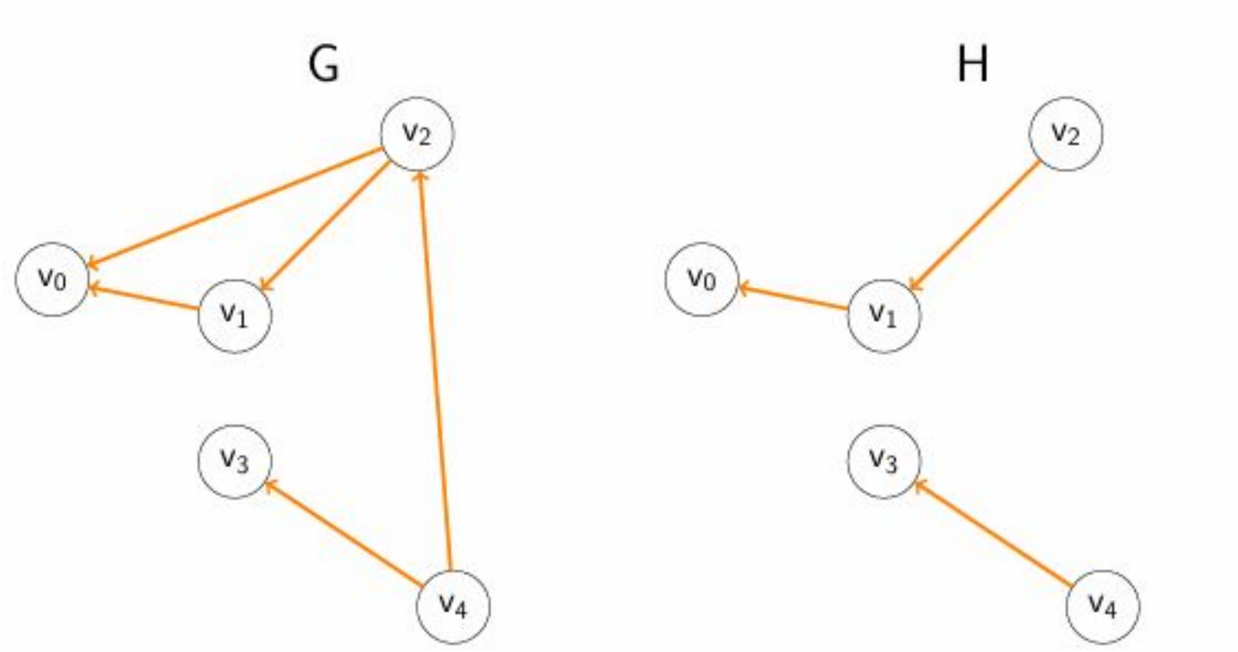
Subgrafos

- Um grafo H é subgrafo de G se todo vértice e toda aresta de H também são vértices e arestas de G.



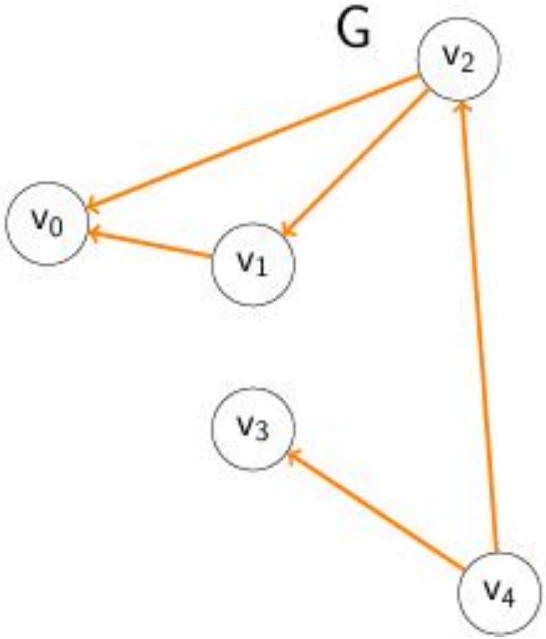
Subgrafos Gerador

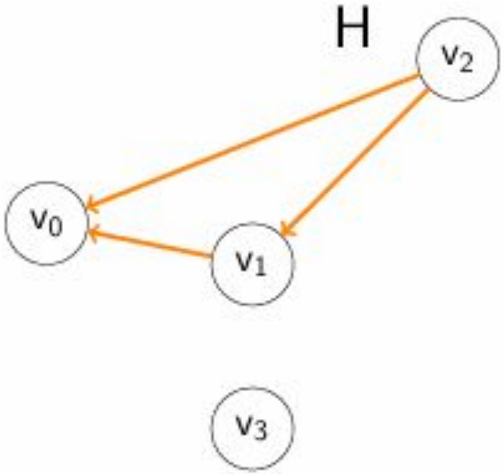
- Um subgrafo H de G é dito gerador (spanning) se contém todos os vértices de G.



Subgrafos Induzido

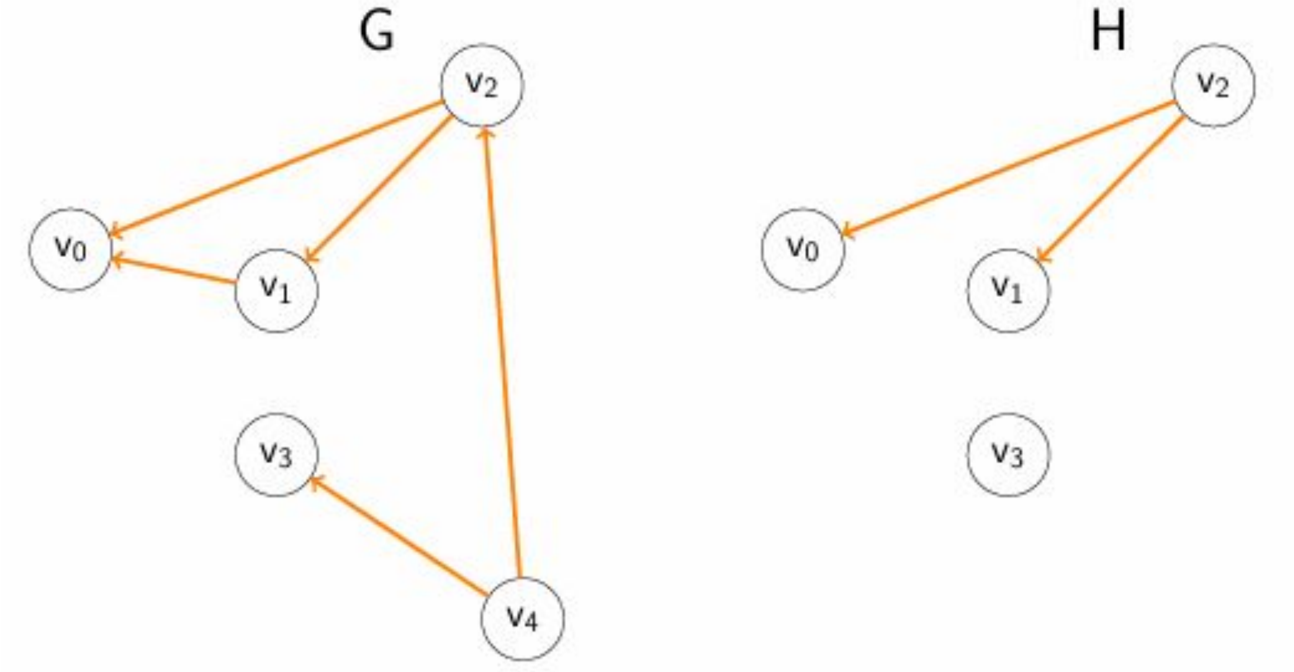
- Um subgrafo H é dito induzido de G se todas as arestas em G que conectam pares de vértices presentes em H também existem em H.





Subgrafos Próprio

- Um subgrafo H de G é dito próprio se ele é diferente de G.



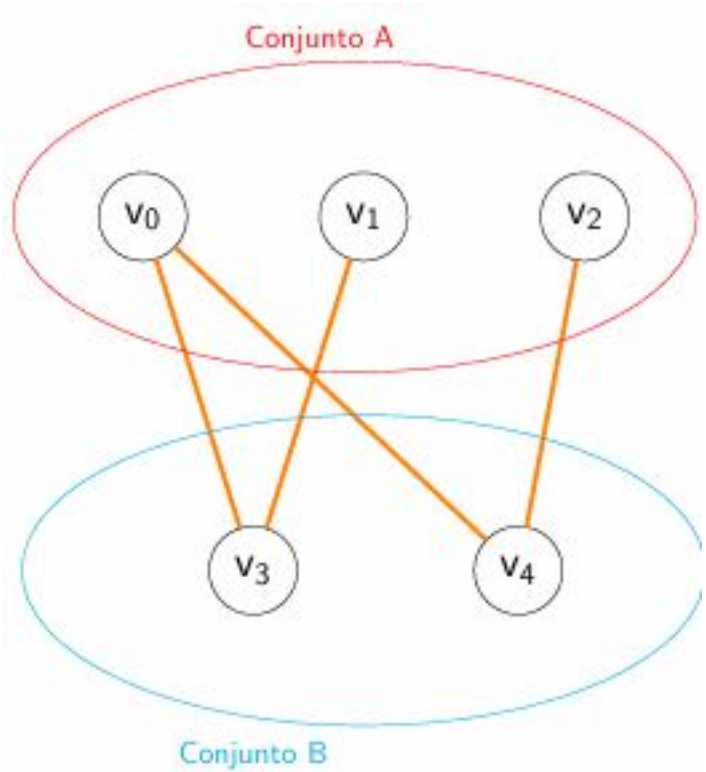
Grafos Específicos

- Existem, ainda, diversos tipos de grafos com especificidades em seus dados ou em sua representação.

Grafo Bipartido

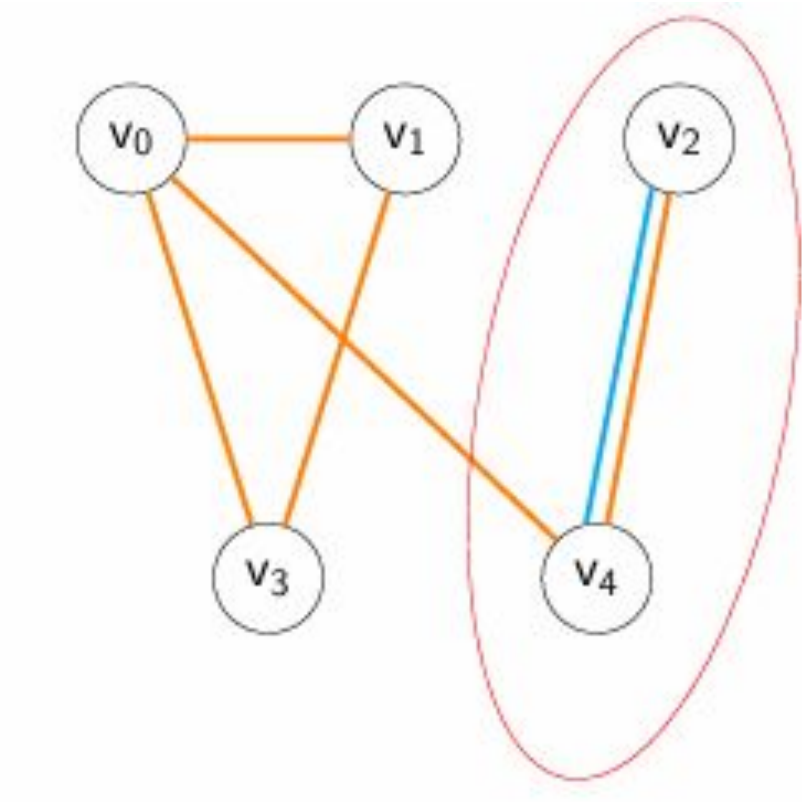
- Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos.

- Não existem arestas entre vértices de um mesmo conjunto.



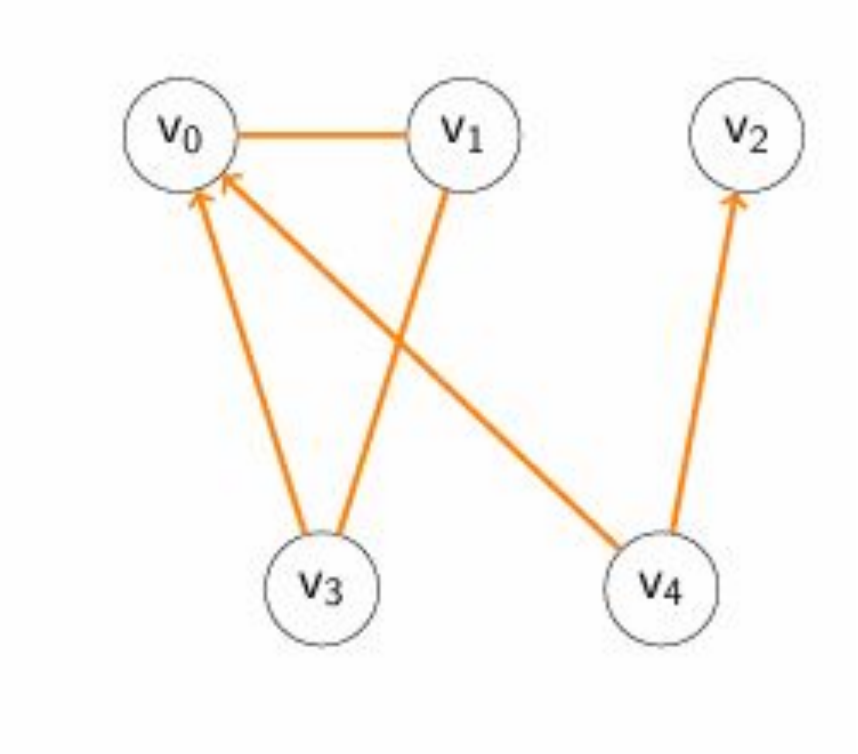
Multigrafo

- Permite a existência de arestas múltiplas entre um mesmo par de vértices.



Grafo Misto

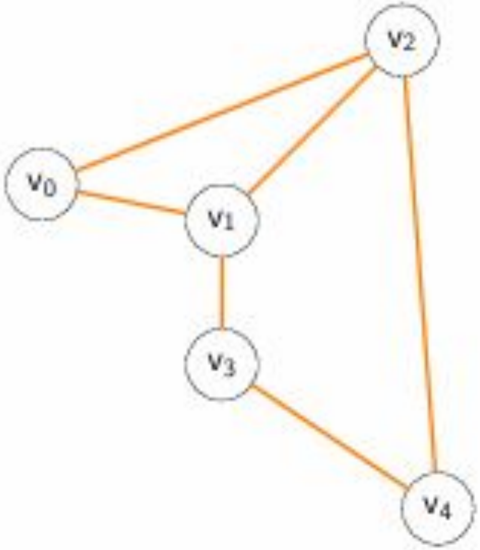
- Possui arestas direcionadas e não direcionadas.



Mais Representações

Representação

- Como um mapeamento de cada nó à lista de nós aos quais ele está conectado

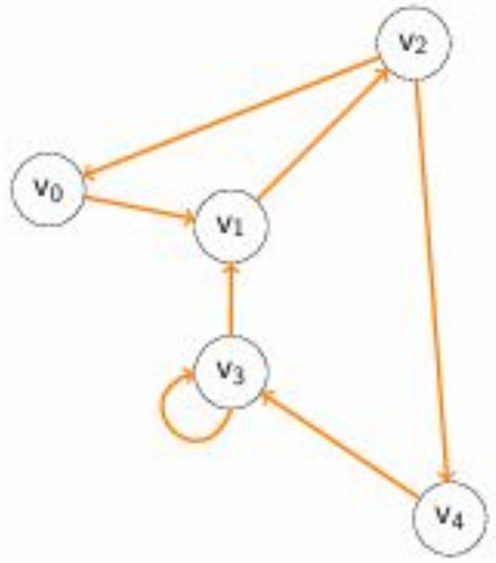


Não dirigido

Nó	Conectado a
v_0	v_1, v_2
v_1	v_0, v_2, v_3
v_2	v_0, v_1, v_4
v_3	v_1, v_4
v_4	v_2, v_3

Representação

- Como um mapeamento de cada nó à lista de nós aos quais ele está conectado



Dirigido

Nó	*Conectado a*
v_0	v_1
v_1	v_2
v_2	v_0, v_4
v_3	v_1, v_3
v_4	v_3

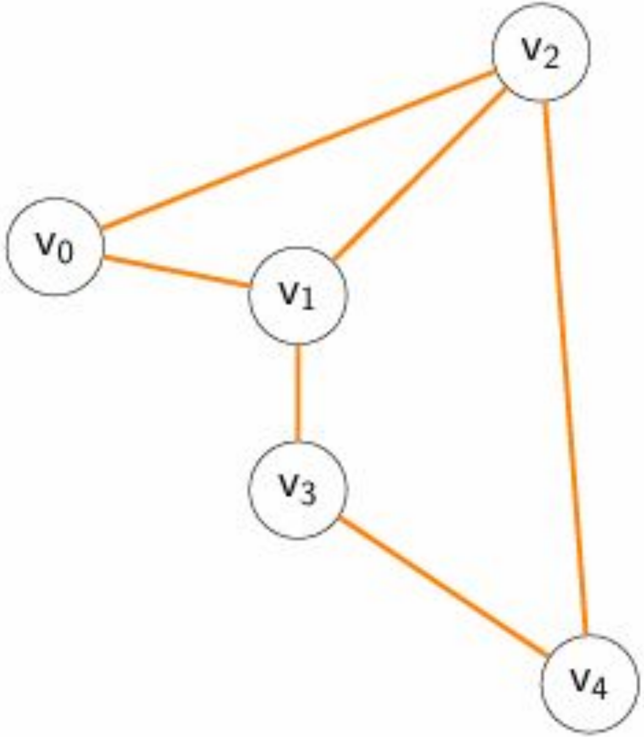
Representação Computacional

- **Existem duas maneiras usuais de representar grafos:**
    - Matriz de adjacência
    - Lista de adjacência

Matriz de Adjacência

- Uma matriz de adjacências A de um grafo com n vértices é uma matriz $n \times n$ de bits, em que:
    - $A[i,j] = 1$ se houver uma aresta indo do vértice i para o vértice j no grafo.
    - $A[i,j] = 0$ se não houver aresta indo de i para j.

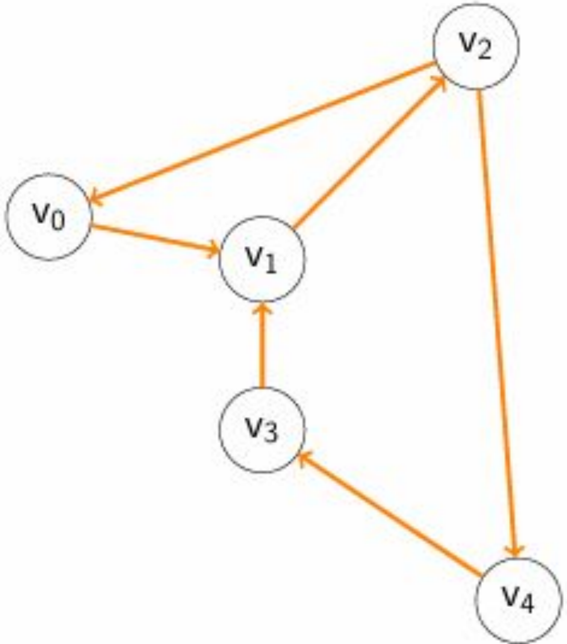
Matriz de Adjacência



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	1	1	0	0
v_1	1	0	1	1	0
v_2	1	1	0	0	1
v_3	0	1	0	0	1
v_4	0	0	1	1	0

Matriz de Adjacência

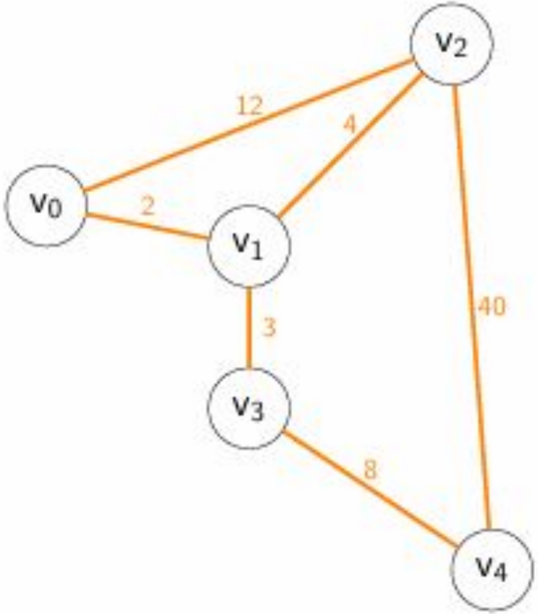
- Se o grafo for dirigido a matriz não será simétrica.



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	1	0	0	0
v_1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	0	0	1
v_3	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	1	0

Matriz de Adjacência

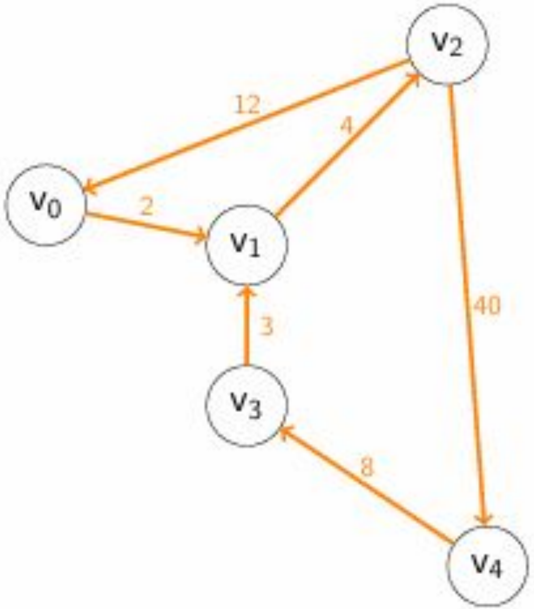
- Se o grafo for ponderado não usamos bits.



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	2	12	0	0
v_1	2	0	4	3	0
v_2	12	4	0	0	40
v_3	0	3	0	0	8
v_4	0	0	40	8	0

Matriz de Adjacência

- Se o grafo for ponderado dirigido.



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	2	0	0	0
v_1	0	0	4	0	0
v_2	12	0	0	0	40
v_3	0	3	0	0	0
v_4	0	0	0	8	0

Matriz de Adjacência

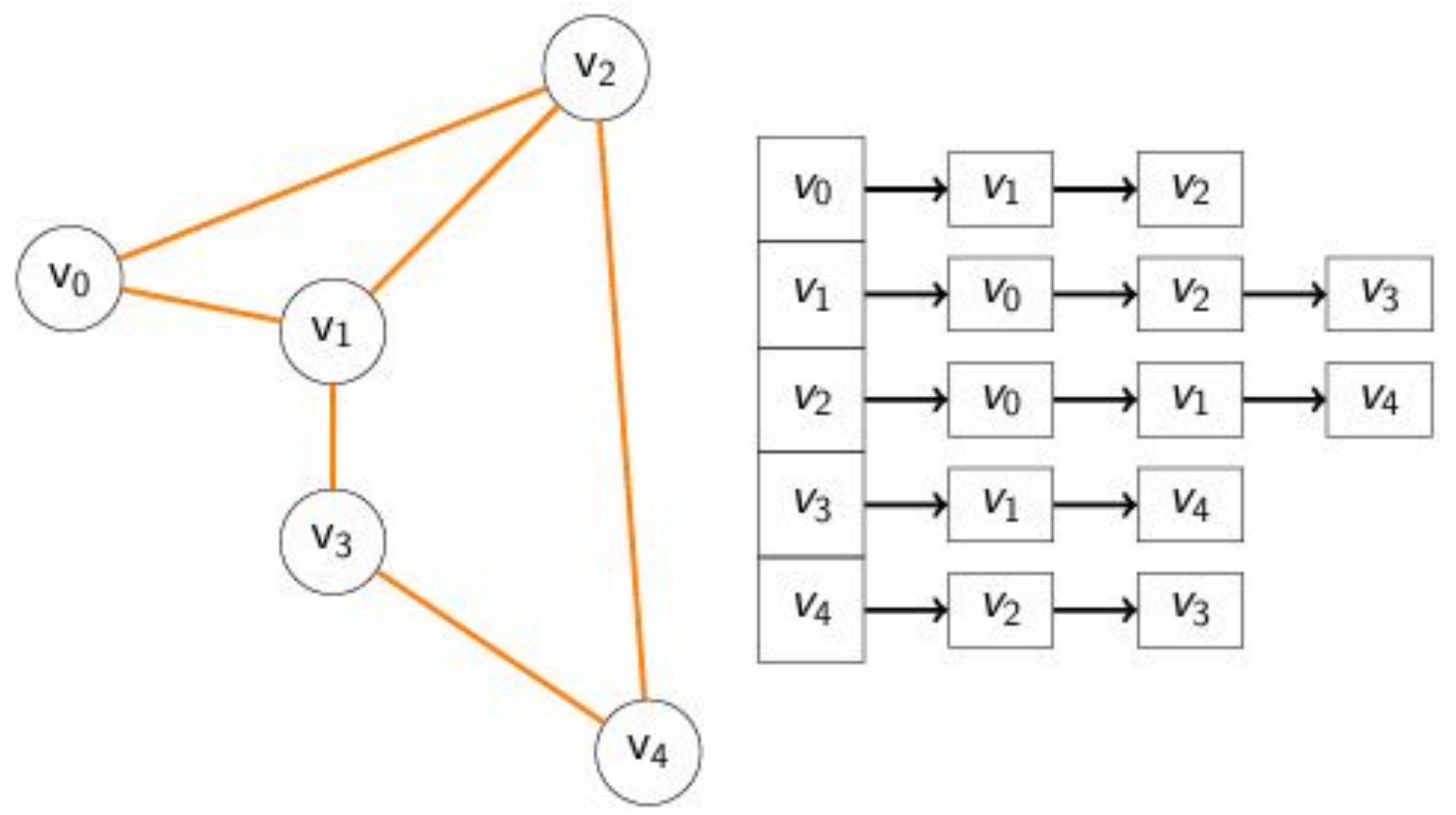
- Cuidado, pois existem caso que 0 é um valor válido para o peso de uma aresta.
    - Para diferenciar um valor válido de um valor que indica que não existe aresta deve-se definir um padrão.

Lista de Adjacência

- Uma lista de adjacências de um grafo com n vértices consiste em um arranjo de n listas ligadas, uma para cada vértice no grafo.

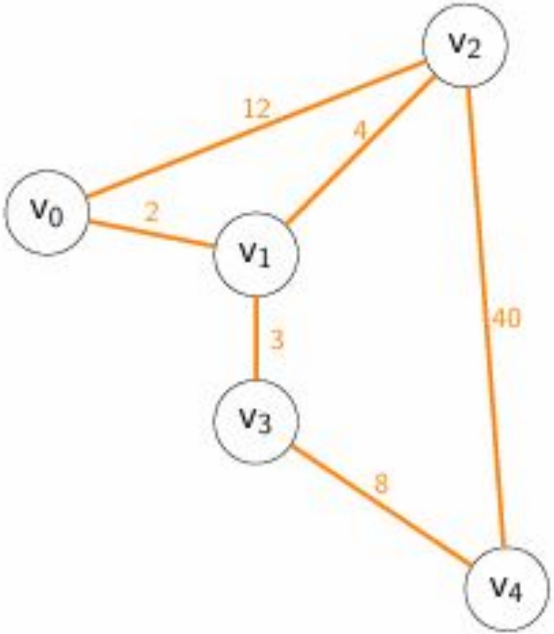
- Para cada vértice u, a lista contém todos os vizinhos de u, ou seja, todos os vértices vi para os quais existe uma aresta (u,vi).

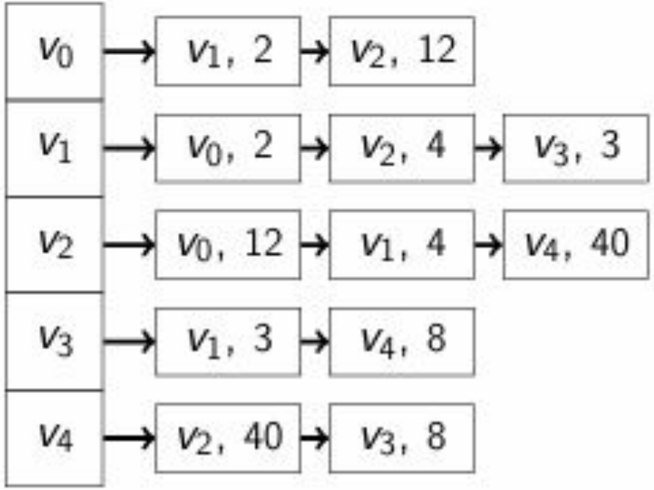
Lista de Adjacência



Matriz de Adjacência

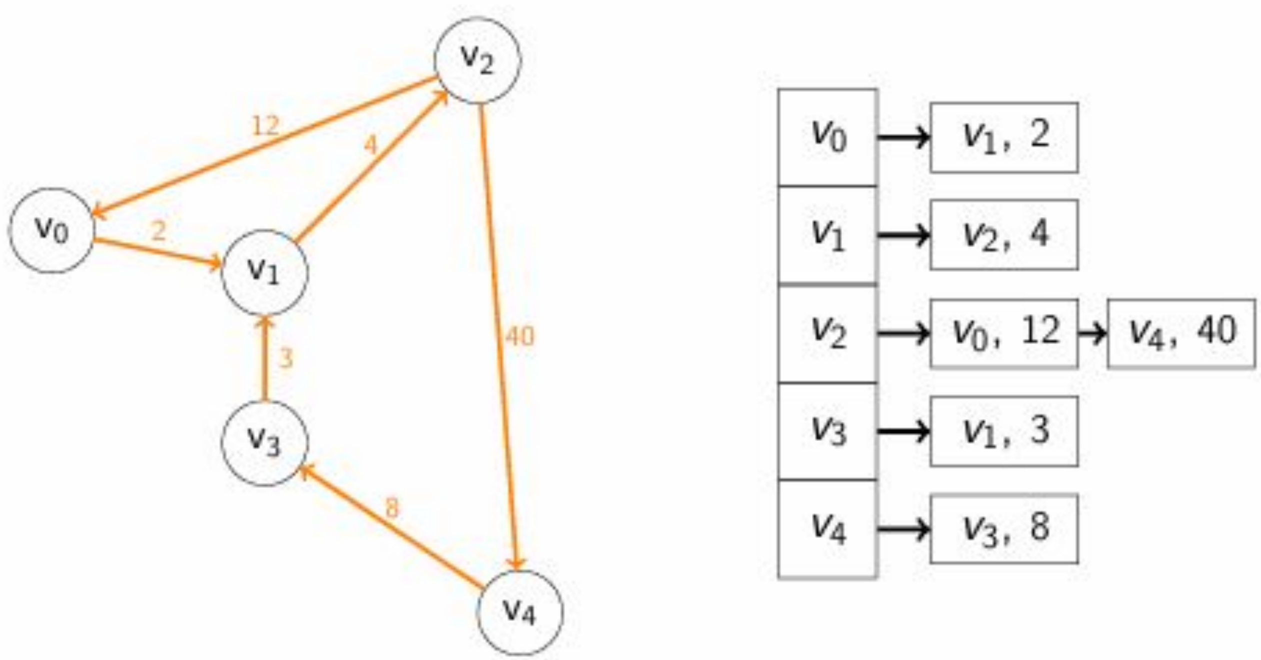
- Se o grafo for ponderado armazenamos os pesos nas lista.





Matriz de Adjacência

- Se o grafo for dirigido.



Quando Usar Cada Representação?

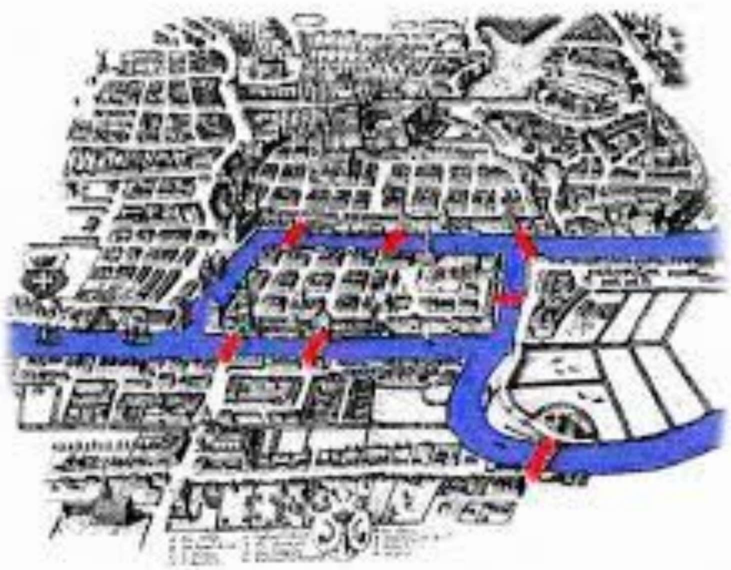
- A escolha da representação vai depender da densidade do grafo:
  - Se o grafo for denso (possui muitas arestas em relação ao número de vértices),
  - Ou esparso (possui relativamente poucas arestas).
- Também vai depender das operações que queremos executar sobre o grafo.

Problemas Clássicos

O Problema das Pontes de Königsberg

- O problema das pontes de Königsberg surgiu na cidade de Königsberg (atualmente Kaliningrado, na Rússia), que era cortada por um rio com quatro regiões de terra conectadas por sete pontes.

- O desafio era:
  - "É possível fazer um passeio que cruze cada ponte uma única vez e retorne ao ponto de partida?"

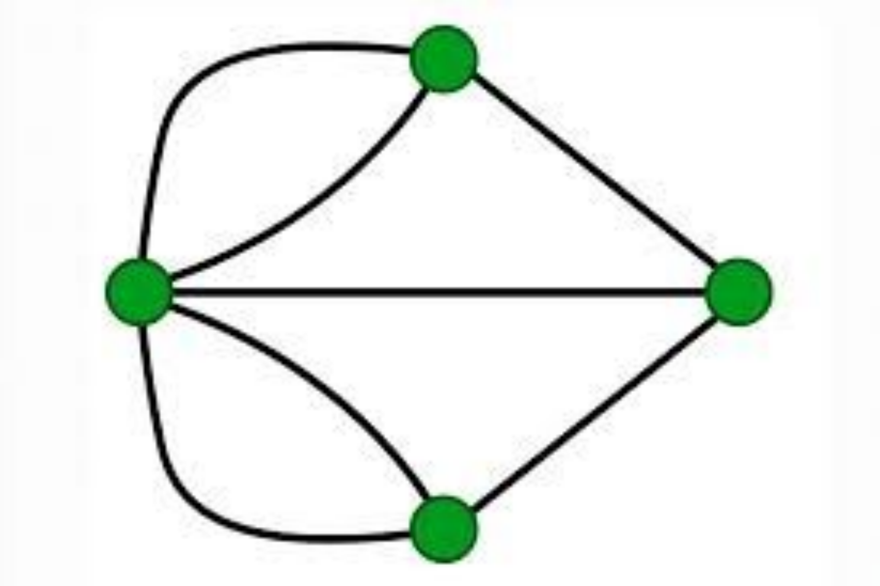


A Contribuição de Euler

Em 1736, Leonhard Euler demonstrou que não era possível resolver esse problema.

Ele fez isso ao:

- Representar a situação como um grafo, onde:
    - As regiões de terra eram vértices,
    - As pontes eram arestas.
- Formular as condições para a existência de um caminho que percorra todas as arestas uma única vez (chamado de caminho euleriano).



O Problema das Pontes de Königsberg

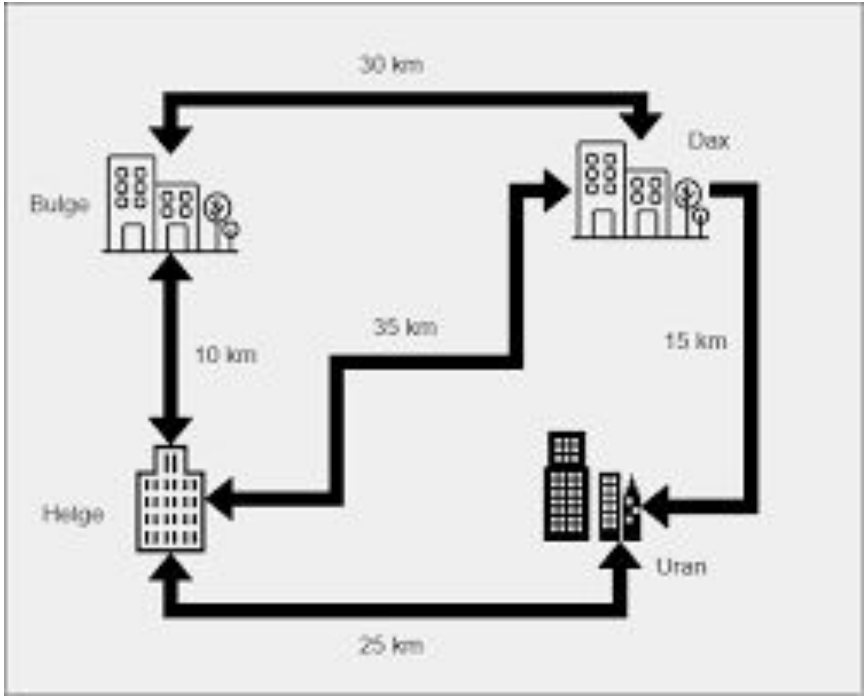
- O problema das pontes de Königsberg é considerado o ponto de partida da Teoria dos Grafos.
- Euler mostrou que um grafo só tem um caminho euleriano se:
  - No máximo dois vértices têm grau ímpar, e
  - Todos os vértices pertencem à mesma componente conexa.
- No caso de Königsberg, todos os vértices tinham grau ímpar — portanto, não havia solução.

Problema do Caixeiro Viajante

O problema do caixeiro viajante (ou Travelling Salesman Problem – TSP) é um clássico da matemática, ciência da computação e otimização.

Enunciado:
Dado um conjunto de cidades e as distâncias entre cada par delas, qual é o caminho mais curto que permite ao caixeiro:

- Visitar cada cidade exatamente uma vez, e
- Retornar à cidade de origem?

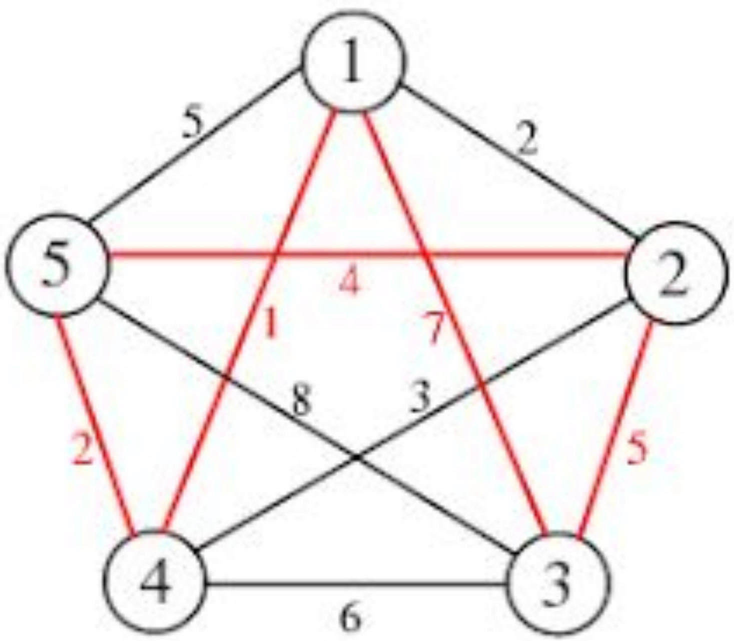


A Contribuição de Euler

- **Representado por um grafo ponderado completo, onde:**
  - Os vértices são as cidades,
  - As arestas têm pesos representando as distâncias ou custos de viagem.

- **É um exemplo típico de problema NP-difícil: não há solução eficiente conhecida para casos grandes.**

- **Aplicações práticas:**
  - Logística e roteamento,
  - Planejamento de entregas,
  - Bioinformática (ex: montagem de genomas),
  - Impressão 3D, entre outros.



Problema de Coloração de Grafos

- A teoria da coloração de grafos afirma que é possível colorir qualquer mapa plano (isto é, que pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas) utilizando, no máximo, quatro cores, de modo que regiões vizinhas (que compartilham fronteiras) não fiquem com a mesma cor.

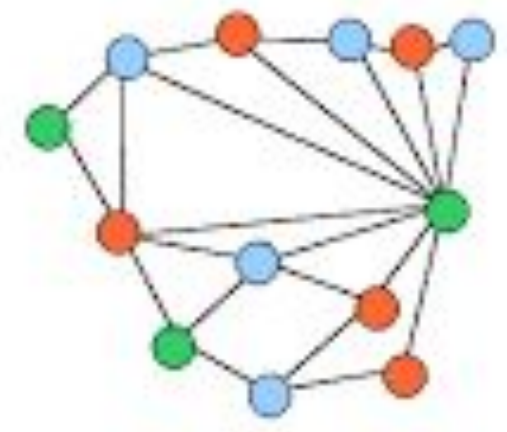
- Essa afirmação está relacionada ao famoso Teorema das Quatro Cores, cuja demonstração foi apresentada em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, usando computadores e conceitos de Teoria dos Grafos.

Problema de Coloração de Grafos

A relação de vizinhança entre as regiões do mapa pode ser representada por um grafo. Cada região é um vértice, e existe uma aresta entre dois vértices se as regiões correspondentes forem vizinhas.

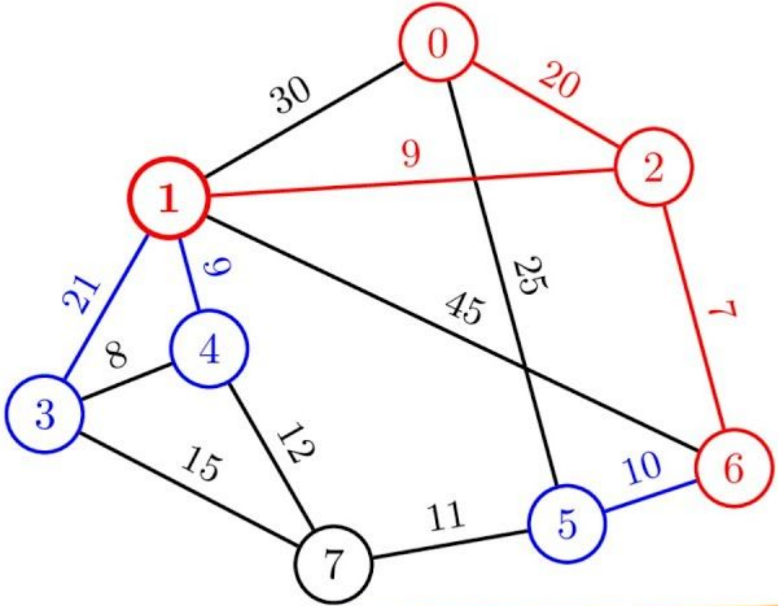
Aplicações práticas:

- Colorir mapas geográficos (como estados, países, zonas eleitorais).
- Planejar frequência de rádios e celulares (evitando interferência entre áreas próximas).
- Resolver conflitos de agendamento (ex: horários de provas em que alunos compartilham disciplinas).
- Alocação de recursos em sistemas distribuídos.



Problema da Árvore Geradora Mínima

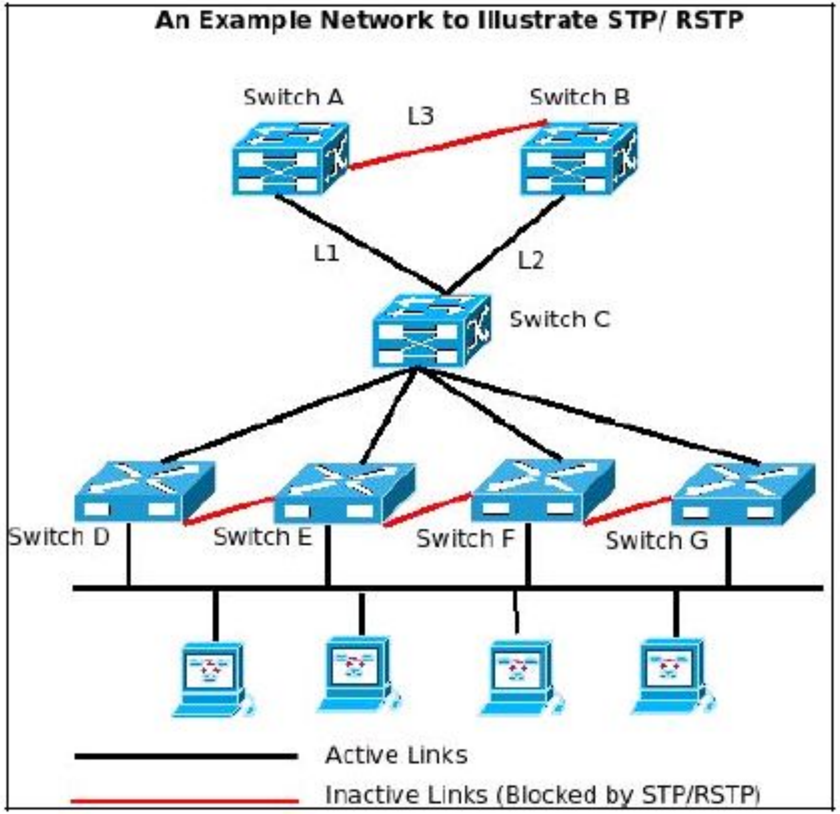
- Dado um grafo conectado e ponderado (ou seja, com pesos nas arestas), o problema da árvore geradora mínima consiste em encontrar um subconjunto de arestas que:
    - Conecta todos os vértices do grafo (ou seja, forma uma árvore).
    - Não forma ciclos.
    - Tem o menor custo total possível (a soma dos pesos das arestas é mínima).



Problema da Árvore Geradora Mínima

Aplicações

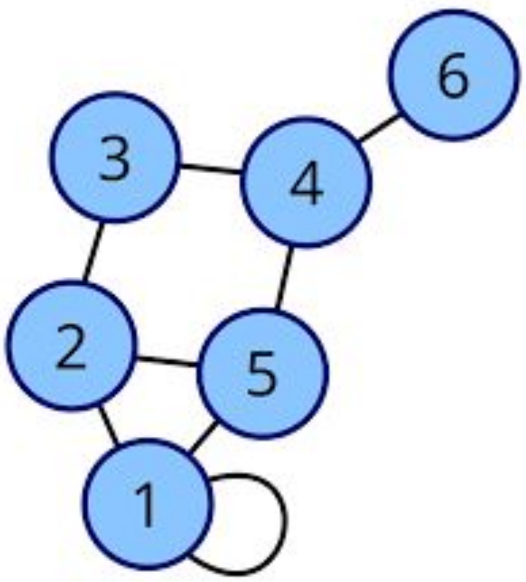
- Redes de computadores: construir a menor rede que conecta todos os pontos.
- Infraestrutura: como ligar cidades com o menor custo de construção de estradas, cabos ou tubulações.
- Circuitos eletrônicos: minimizar a quantidade de material condutor.
- Agrupamento (clustering) em aprendizado de máquina.



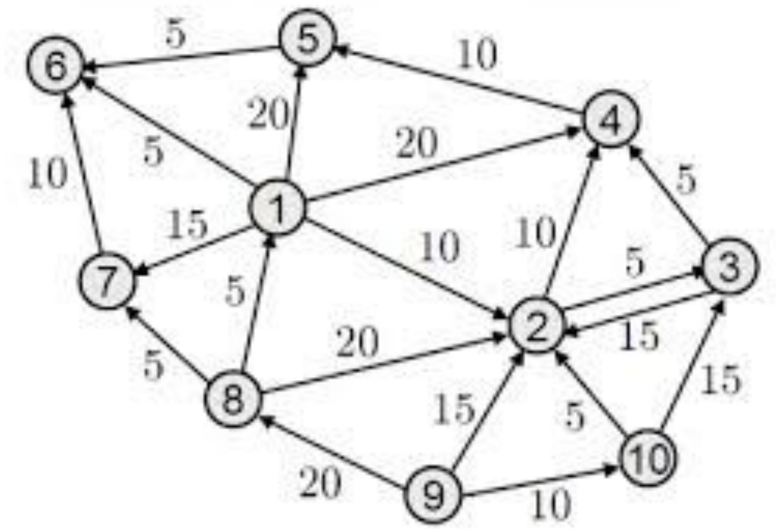
Desafios

Desafio

- Liste os vértices, as arestas e quais são as características do grafo.



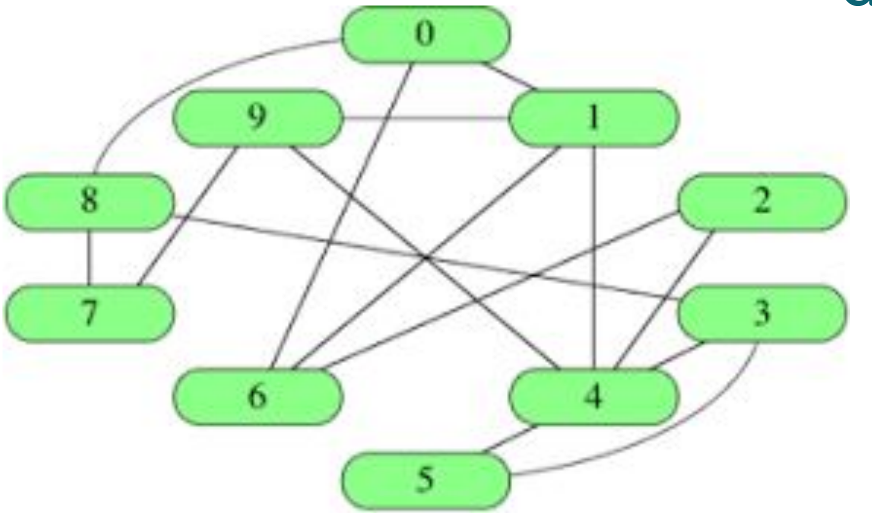
Desafio



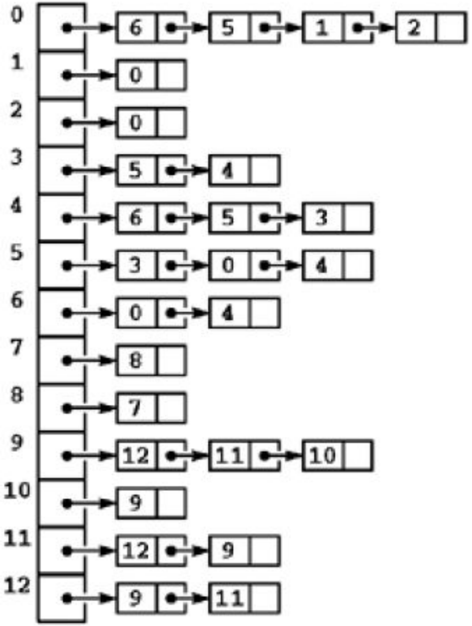
- Liste quais são as características do grafo a seguir e crie uma matriz de adjacências para o grafo.

Desafio

- Liste quais são as características do grafo a seguir e crie uma lista de adjacências para o grafo.



Desafio



- Desenhe o grafo a partir da lista de adjacências a seguir e liste quais são as características do grafo.

Desafio

- Desenhe o grafo a partir da matriz de adjacências a seguir e liste quais são as características do grafo.

/	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	4	6	13	0	0	0	0	0
2	0	0	2	9	10	0	0	0	0
3	0	0	0	0	7	2	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	2	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	5	0	0	1	3
7	0	0	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	5	0	3	0	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Desafio

- Pense em um problema do mundo real e o formule como um grafo, desenhe um grafo exemplo desse problema e liste quais são as características do grafo, depois apresente para a turma.