Exercicios Teóricos

1- Considerando o modelo de regressão linear simples dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (*)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Encontre os estimadores pelos seguintes métodos:

a) Mínimos quadrados

Queremos encontrar estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ tais que minimizem o nosso ε_i erro aleatorio

Manipulando $(*)$ temos

$$y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) = \varepsilon_i \quad (**)$$

Vamos elevar $(**)$ ao quadrado pois vamos precisar derivar

(**) $\left[y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \right]^2 = \varepsilon_i^2$

$$\boxed{S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 + \beta_1 X_i)^2}$$

Para encontrar o minimo vamos derivar com respeito ao parâmetro que queremos encontrar e igualar a zero

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left[(y_i - \beta_0 + \beta_1 X_i)^2 \right]}{\partial \beta_0}$$

sabemos que a derivada é um operador linear portanto a derivada da soma é a soma das derivadas

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} 2 . (y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-1)$$

Analogamente temos

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} 2 (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)(-x_i)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \end{cases}$$

Encontrando $\hat{\beta}_0$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Vamos dividir por n

$$\Leftrightarrow n\beta_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\beta}_0 = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}_{\bar{Y}} - \beta_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{X}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}}$$

Agora vamos encontrar $\hat{\beta}_1$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{n\bar{x}} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \beta_1 \bar{x}) n\bar{x} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\beta_1 \bar{x}^2 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - n\bar{x}^2) = 0$$

$$\boxed{S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \; ; \; \boxed{S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$$

Identificando S_{xx} e S_{xy} e um muita álgebra chegamos em

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Portanto ficamos com

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

---

b) Máxima Verossimilhança

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido

Como $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ então

$y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i ; \sigma^2)$ logo a função densidade de y_i é dada por

$$f(y_i \mid \beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ - \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$L(\beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ - \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Vamos aplicar a função log para facilitar a maximização

$$\ell(\beta_0, \beta_1) = \log \underbrace{L(\beta_0, \beta_1)}$$ não depende de β_0, β_1

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot n \log(2\pi\sigma^2)}_{A} - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$$\ell(\beta_0, \beta_1) = A - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

como conhecemos σ^2 e A não depende de $\hat{\beta}_0$ e β_1 temos que maximizar a log-verossimilhança é o mesmo que minimizar a soma dos quadrados o que já foi feito no item a.

Sendo assim os dois métodos resultam nos mesmos estimadores

Estimadores para $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ via máxima verossimilhança

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Demonstre as propriedades dos estimadores de mínimos quadrados $\hat{\beta}_0$ e β_1

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}$$

Seja $a_i = \dfrac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ Podemos

reescrever $\hat{\beta}_1$ como sendo

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

e com isso temos $\rightarrow$ esperança é linear

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i E(y_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

$$= \beta_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{0} + \beta_1 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}_{1}$$

$= \beta_1$ ou seja $\boxed{E(\hat{\beta}_1) = \beta_1}$

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}_{Sxx}} = \frac{\sigma^2}{Sxx} \quad \therefore \quad \boxed{Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{Sxx}}$$

Temos $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\bar{y} - \beta_1 \bar{x})$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(y_i)$$

$$= E(\bar{y}) - \bar{x}\, E(\hat{\beta}_1)$$

$$= \beta_0 + \cancel{\beta_1 \bar{x}} - \cancel{x \beta_1} = \beta_0$$

$$\therefore E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

Para a variância temos

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var(\bar{y} - \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{Sxx}$$

$$= Var(\bar{y}) + \bar{x}^2 Var(\hat{\beta}_1) - 2\bar{x}\, \cancel{Cov(\bar{y}, \hat{\beta}_1)} \quad 0$$

$$= Var(\bar{y}) + \frac{\bar{x}^2 \cdot \sigma^2}{Sxx}$$

$$= Var\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{\bar{x}^2}{Sxx} \cdot \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(y_i) + \frac{\bar{x}\,\sigma^2}{Sxx}$$

$$\sigma^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sigma^2 + \frac{\bar{x}^2 \sigma^2}{Sxx} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{Sxx} \right)$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{Sxx} \right)$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

Made with Goodnotes

c) $\operatorname{cov}(\hat\beta_0,\hat\beta_1) = E\left[(\hat\beta_0 - E(\hat\beta_0))(\beta_1 - E(\hat\beta_1))\right]$

$$= E\left[(\hat\beta_0 - \beta_0)(\hat\beta_1 - \beta_1)\right]$$

onde $\begin{cases} \hat\beta_0 - \beta_0 = \bar y - \beta_0 - \beta_1 \bar x \\ \hat\beta_1 - \beta_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar x)(y_i - \bar y)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar x)^2} \end{cases}$

Temos tambem que $y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

substituindo em $\hat\beta_0 - \beta_0$

$$\hat\beta_0 - \beta_0 = \cancel{\beta_0} + \beta_1 \bar x + \bar\varepsilon \cancel{-\beta_0} - \hat\beta_1 \bar x$$

$$= \bar\varepsilon - \hat\beta_1 \bar x$$

então $\operatorname{cov}(\hat\beta_0,\hat\beta_1) = E\left[(\bar\varepsilon - \hat\beta_1 \bar x)(\hat\beta_1 - \beta_1)\right]$

$$= E\left[\bar\varepsilon(\hat\beta_1 - \beta_1)\right] - E\left[\hat\beta_1 \bar x (\hat\beta_1 - \beta_1)\right]$$

Como $E(\varepsilon) = 0$

$$\operatorname{cov}(\hat\beta_0,\hat\beta_1) = -E\left(\hat\beta_1 \bar x (\beta_1 - \beta_1)\right)$$

Assim $E\left[\hat\beta_1 \bar x (\hat\beta_1 - \beta_1)\right] = \operatorname{Var}(\hat\beta_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar x)^2}$

Portanto $\operatorname{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\dfrac{\bar{x}\,\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

3a) Um intervalo de confiança de $100(1-0{,}05)\% = 95\%$ para β_1 é dado por:

$$I.C[\hat{\beta}_1 ; 0{,}95]$$
$$= \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2\ 0{,}025}\sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} ;\ \hat{\beta}_1 + t_{n-2\ 0{,}025}\sqrt{\frac{1}{n-2}\, \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right]$$

Podemos utilizar

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s/s_{xx}} \sim t_{n-2}$$ como uma quantidade pivotal

$S = \sqrt{s^2}$ erro padrão residual

b) Teste de Hipóteses

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$

↳ não existe uma relação linear entre x e y

↳ existe uma relação linear entre x e y

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Sob H_0 (ou seja assumindo $\beta_1 = 0$) temos qua a nossa estatística do teste é dada por:

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{EP(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\beta}_1}{S/\sqrt{S_{xx}}} \sim t_{n-2}$$

Vamos agora fixar um nível de significância α

$\alpha = 0{,}05$

Vamos definir a região crítica (Teste Bilateral)

$$|T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$$

onde $t_{\alpha/2, n-2}$ é o valor crítico da distribuição t com $n-2$ graus de liberdade.

$\alpha = 0{,}05$ temos $t_{0{,}025}$

Calcular a estatística T a partir dos dados

Um critério de decisão

$$|T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \Rightarrow \text{Rejeita } H_0$$

$$|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \Rightarrow \text{Aceitar } H_0$$